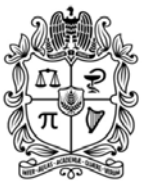
Tesis de Maestría presentada como requisito para optar al titulo: Magister en Ciencias - Física

Influencia del efecto Hall en la evolución de campos magnéticos y equilibrios en la corteza de estrellas de neutrones

Sebastián Ramírez Ramírez



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
PCM Computational Applications

Directora
Prof. Elisabeth Restrepo Parra

Codirector
Prof. Jaime Humberto Hoyos Barrios

Línea de Investigación
Plasmas Astrofísicos

A mis padres

Agradecimientos

- A la Profesora Elisabeth Restrepo Parra por su calidad humana y acompañamiento durante todo el tiempo de mi formación académica.
- Al Profesor Jaime Humberto Hoyos por su influencia personal y profesional que incentivó mi crecimiento académico, su incondicional apoyo y ayuda fue fundamental durante todo el desarrollo de esta tesis.
- A mis compañeros y amigos Juan David Alzate y Daniel Alejandro Sabogal por sus contribuciones académicas durante todo el proceso de maestría.
- Al Profesor Andreas Reisenegger del grupo de investigación ANSWERS del Instituto de Astrofísica, de la Pontificia Universidad Católica de Chile por permitirme la oportunidad de desarrollar una instancia investigativa que motivó mi formación profesional y personal, además de su calidad personal y por sus significativos aportes académicos a esta investigación.
- A mis compañeros del grupo de investigación PCM Computational Applications.
- A la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales, por mi formación como profesional.
- A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales por su contribución a través de las Becas para estudiantes de Posgrado.
- Al ICTP "International Centre for Theoretical Physics" por permitir asistir a su escuela de Física del Plasma que me hizo crecer en conocimiento y en experiencias personales.
- A mi familia por su incondicional apoyo durante todo el proceso de maestría.

Resumen

Título: *Influencia del efecto Hall en la evolución de campos magnéticos y equilibrios en la corteza de estrellas de neutrones*

Los efectos del término Hall no-lineal en la evolución del campo magnético en estrellas de neutrones ha sido tema de investigación durante las últimas décadas. El orden de magnitud esperado del campo magnético de estos objetos puede hacer de este efecto importante para la dinámica y eventual decaimiento del campo magnético. En particular, el efecto Hall es relevante en la corteza sólida, donde los iones permanecen fijos y la corriente es generada por los electrones. El efecto Hall es un efecto no-lineal conservativo, luego, la energía magnética se disipa en una escala de tiempo mucho más grande gobernada por el decaimiento óhmico lineal. En esta tesis se ha estudiado la influencia del efecto Hall y Ohm en la evolución de diferentes configuraciones axisimétricas iniciales en presencia de pequeñas perturbaciones de campos no-axisimétricos. En particular, el análisis fue enfocado en la estabilidad de combinaciones lineales de modos óhmicos fundamentales axisimétricos. En el caso de un modo poloidal de fondo (2D) perturbado por combinaciones de modos óhmicos poloidales 3D, se encontró la generación de campos toroidales 3D, sin embargo, la simetría axial es recuperada después de varios tiempos Hall. Por otra parte, para el caso de un modo óhmico toroidal inicial (2D) perturbado por una combinación de modos toroidales 3D, se encontró la generación de un campo poloidal 3D que llevó al campo a romper su simetría axial y llevando al campo a evolucionar bajo una configuración 3D. Cuando el campo inicial de fondo es una combinación lineal de un campo poloidal y toroidal, nuevamente una simetría axial es recuperada durante su evolución. Finalmente, la evolución de la estructura del campo magnético muestra la generación de pequeñas estructuras magnéticas, generadas por la inclusión del efecto Hall y de las perturbaciones 3D. Los resultados de esta tesis están encaminados a incrementar nuestro entendimiento acerca de los fenómenos magnéticos en la corteza de las estrellas de neutrones.

Palabras clave: *Estrellas de neutrones, campos magnéticos, Magnetohidrodinámica no-lineal, Astrofísica*

Abstract

Title: *Hall Effect influence in evolution and equilibria of magnetic fields in the crust of neutron stars*

The effects of the non-linear Hall drift on the evolution of the magnetic field in neutron stars have been subject of research during the last decades. The order of magnitude of the magnetic fields of these objects can make this effect important for the dynamics and eventual decay of the magnetic field. In particular, the Hall drift is relevant in the solid crust, where the ions remain fixed and the current is carried by electrons. The Hall effect is a non-linear conservative phenomenon, thus, the magnetic energy dissipates in a much longer timescale governed by the linear ohmic decay. In this thesis project has been studied the Hall and Ohmic influence on the evolution of some initial background axisymmetric magnetic configurations in the presence of small non-axisymmetric fields. In particular, the analysis was focused on the stability of linear combinations of fundamental axisymmetric Ohmic modes. In the case of initial background poloidal Ohmic modes perturbed by combinations of non-axisymmetric Ohmic modes, it was found the generation of a toroidal field, but the axial symmetry in both poloidal and toroidal components is preserved after several Hall timescales. On the other hand, the initial toroidal Ohmic modes perturbed by combinations of non-axisymmetric toroidal Ohmic modes, it was found the generation of a non-axisymmetric poloidal field giving rise to a symmetry breaking and leading the field to evolve under non-axial symmetry (3D). When the initial background field is a linear combination of poloidal and toroidal fields again the axial symmetry is preserved after the Hall evolution. Finally, the topology evolution of the magnetic field shows the generation of small magnetic structures generated by the inclusion of the Hall Effect and initial 3D perturbations. The results of this thesis is leaded to increase our understanding of the magnetic phenomena in the crust of neutron stars.

Keywords: *Neutron Stars, Magnetic fields, Non-linear Magnetohydrodynamics, Astrophysics*

Índice general

Agradecimientos 5

Resumen 7

Abstract 9

Nomenclatura 9

1. Preliminares 11
- 1.1. Introducción y motivación . . . 11
- 1.2. Planteamiento del problema . . . 13
- 1.3. Objetivos . . . 16
  - 1.3.1. Objetivo General . . . 16
  - 1.3.2. Objetivos Específicos . . . 16

2. Estrellas de Neutrones 17
- 2.1. Proceso Supernova: Nacimiento de una Estrella de Neutrones . . . 17
- 2.2. Estructura y Magnitudes Físicas . . . 19
  - 2.2.1. Estructura . . . 19
  - 2.2.2. Gravitación . . . 20
  - 2.2.3. Electromagnetismo . . . 21
  - 2.2.4. Ecuación de Estado . . . 22
  - 2.2.5. Presión desde la Mecánica Cuántica . . . 23
- 2.3. Tipos de estrellas de neutrones . . . 26
  - 2.3.1. Pulsares . . . 26
  - 2.3.2. Magnetares . . . 27

3. Conceptos Magnetohidrodinámicos básicos para astrofísica 29
- 3.1. Ecuaciones básicas de la magnetohidrodinámica . . . 29
- 3.2. Conservación de la masa: Ecuación de continuidad . . . 30
- 3.3. Ecuación del momento . . . 31
- 3.4. Ecuación de energía . . . 34
- 3.5. Ecuación de inducción . . . 37
- 3.6. Magnetohidrodinámica Resistiva . . . 39
- 3.7. Magnetohidrodinámica de electrones . . . 40

4. Resultados y análisis **45**
4.1. Métodos analíticos . . . 45
4.1.1. Aproximación por órdenes de magnitud . . . 45
4.1.2. Solución a la ecuación de Inducción . . . 47
4.1.3. Introducción a los modos óhmicos . . . 50
4.1.4. Condiciones de frontera . . . 53
4.2. Test numérico . . . 56
4.2.1. Cálculo energía magnética . . . 56
4.2.2. Cálculo constantes de decaimiento de los modos óhmicos . . . 57
4.3. Métodos numéricos . . . 58
4.3.1. Análisis de estabilidad de modos óhmicos axisimétricos . . . 58
4.3.2. Evolución de la energía magnética total . . . 59
4.3.3. Análisis caso 2D: campo inicial no perturbado . . . 62
4.3.4. Análisis caso 3D: campo inicial perturbado . . . 64
4.4. Evolución de la estructura del campo magnético . . . 71
4.4.1. Campo inicial puramente poloidal . . . 72
4.4.2. Campo inicialmente puramente toroidal . . . 73
4.4.3. Campo inicial poloidal+toroidal . . . 74

5. Conclusiones **83**

A. Apéndice **85**
A.1. Cálculo energía magnética analítica . . . 85

Bibliografía **87**

Índice de figuras

1.1. Remanente de 2200 años de supernova de una estrella de neutrones, la cual que posee una cantidad de materia suficiente para producir 45 soles. El material azul representa el remanente de supernova, y el rosado muestra el polvo formado en el material eyectado en la explosión. La imagen es el resultado de la superposición de longitudes de ondas de rayos x, infrarrojo, óptico y radio [1]. 12

2.1. Balance entre la gravedad, que arrastra su propio material hacia su interior, mientras que la presión desde el calor y la luz producida por la combustión del hidrógeno en helio en el núcleo de la estrella empuja hacia fuera[2] 17
2.2. División de elementos en forma de capas en una estrella (imagen izquierda). La imagen derecha se construye a partir de la emisión de rayos x de la estrella [3] 18
2.3. Composición de imágenes que muestran el efecto de una poderosa onda de choque alejándose de la explosión. 19
2.4. Esquema de la sección transversal de una estrella de neutrones de la densidad como función del radio. De arriba, hacia abajo: núcleo, corteza interna, corteza externa [4]. 21
2.5. Esquema para la derivación de la fuerza desde una perspectiva newtoniana [5]. 25
2.6. Pulsar Nebulosa Cangrejo [6] 27
2.7. Estallido de rayos gamma de un Magnetar [7] 28

3.1. Esquema que representa el volumen $\mathcal{V}$ que contiene un plasma 30
3.2. Esquema que representa físicamente la fuerza que se produce debido a un gradiente de presión ∇P y que tienden a generar movimiento en las partículas que conforman el plasma 32
3.3. Representación de la forma en que actúa el término $\hat{\mathbf{b}}.\nabla.\hat{\mathbf{b}}$ en un campo magnético $\mathbf{B}$. Donde $\hat{\mathbf{b}}$ es un vector normal unitario que se dirige en dirección del campo magnético, R es el radio de la circunferencia que puede ser generada en la semicurva generada por el curvamiento de la línea de campo y $\nabla.\hat{\mathbf{b}}$ es la divergencia generada. 34
3.4. La imagen representa el concepto de tensión magnética. Cuando las líneas de campo magnético se curvan (líneas negras), se genera una fuerza de restitución (línea roja) que tiende a reducir la tensión en las líneas (curvatura). 35

3.5. Densidad de líneas de campo magnético (líneas negras) reunida en una región espacialmente definida, que produce un gradiente de presión magnético (línea azul) que actúa de forma perpendicular a las líneas y tiende a equilibrarlas con el fin de reducir el aumento de densidad. . 36

3.6. Esquema representativo del movimiento del flujo magnético en un plasma siguiendo la teoría MHD ideal 38

3.7. Esquema que representa el fenómeno físico de la turbulencia MHD que se produce debido al término no lineal Hall. 42

4.1. Separación bidimensional de las componentes del campo magnético en componentes poloidal (B_r,B_θ) y toroidal (B_ϕ). 49

4.2. Esquema de las condiciones de frontera del problema, el cual está conformado por tres regiones acopladas entre sí (núcleo, corteza, vacío) y donde r_0 es el radio de la estrella (normalizado a 1) y r_i es el radio del núcleo. 54

4.3. Evolución lineal de la energía magnética a grandes escalas de tiempo dominado exclusivamente por el término Ohm para dos configuraciones de campo distintas. 57

4.4. Energía magnética total como función del tiempo, para tres campos iniciales diferentes [Poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ (Pol. verde), Toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ (Tor. azul) y Toroidal + Poloidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}+\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ (Tor+Pol rojo)], para tres valores de número magnético de Reynolds $R_{\mathcal{B}}$ y valores de perturbación P y de tipo $\left[h^{n=3}_{l=2,m=2}\right]^{(1)}$, $\left[h^{n=2}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$para el campo poloidal, $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)}$ y $\left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$ para el toroidal y como combinación de ambas para el campo Toroidal + Poloidal. El tiempo es normalizado respecto al tiempo óhmico nominal característico (calculado respecto al radio de la estrella) y la energía es normalizada respecto a la energía total contenida en la corteza. El tiempo final de estos paneles corresponde aproximadamente a 5 tiempos Hall característicos para el caso de $R_{\mathcal{B}} = 50$ y 10 tiempos Hall característicos para el caso de $R_{\mathcal{B}} = 100$. a) Evolución Hall 2D del campo de fondo ($P = 0$). b) Evolución Hall 3D ($P \neq 0$). 60

4.5. Evolución de la energía poloidal y toroidal para tres campos iniciales diferentes. a) Evolución 2D de la energía poloidal, b) evolución 2D de la energía toroidal, c) evolución de la energía poloidal con el campo de fondo perturbado y d) evolución de la energía toroidal con el campo de fondo perturbado. 61

4.6. Evolución de la descomposición de modos de energía para un campo inicial axisimétrico poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$. a) $P = 0 \quad R_B = 0$. b) $P = 0 \quad R_B = 100$. La línea gruesa corresponde a los modos poloidales, mientras que las líneas delgadas están asociadas a los modos toroidales. Igualmente, un color específico representa cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal) 63

4.7. Evolución de la descomposición de modos de energía para un campo inicial axisimétrico constituido por una superposición de un campo poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ y toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ con igual peso. a) $P = 0 \quad R_B = 0$. b) $P = 0 \quad R_B = 100$. La línea gruesa corresponde a los modos poloidales, mientras que las líneas delgadas están asociadas a los modos toroidales. Igualmente, un color específico representa cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal). 64

4.8. Evolución de la descomposición de modos de energía para un campo inicial axisimétrico toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$. a) $P = 0 \quad R_B = 0$. b) $P = 0 \quad R_B = 100$. La línea gruesa corresponde a los modos poloidales, mientras que las líneas delgadas están asociadas a los modos toroidales. Igualmente, un color específico representa cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal). 65

4.9. Evolución de los modos de energía para un campo de fondo poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ perturbado por modos Ohm poloidales no-axisimétricos $\left[h^{n=3}_{l=2,m=2}\right]^{(1)} + \left[h^{n=2}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. a) $P = 0.1$ $R_B = 0$ .b) $P = 0.1$ $R_B = 100$. La línea gruesa corresponde a los modos poloidales, mientras que las líneas delgadas están asociadas a los modos toroidales. Igualmente, un color específico representa cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal). 68

4.10. Evolución de los modos de energía para una mezcla de campos iniciales de fondo poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ y toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ perturbado por modos Ohm poloidales no-axisimétricos $\left[h^{n=3}_{l=2,m=2}\right]^{(1)} + \left[h^{n=2}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$ y toroidales $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)} + \left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. a) $P = 0.1 \quad R_B = 0$ .b) $P = 0.1 \quad R_B = 100$. La línea gruesa corresponde a los modos poloidales, mientras que las líneas delgadas están asociadas a los modos toroidales. Igualmente, un color específico representa cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal). 69

4.11. Evolución de los modos de energía para un campo de fondo toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ perturbado por modos Ohm toroidales no-axisimétricos $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)} + \left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. a) $P = 0.1$ $R_B = 0$ .b) $P = 0.1$ $R_B = 100$. La línea gruesa corresponde a los modos poloidales, mientras que las líneas delgadas están asociadas a los modos toroidales. Igualmente, un color específico representa cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal). 70

4.12. Condición inicial de un campo puramente poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$. Los colores están escalados entre 0 y 1, donde el color morado es el mayor y el naranja es el menor. 72

4.13. Evolución topológica temporal del campo magnético para un campo inicial axisimétrico poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$bajo la influencia del efecto Hall $R_B = 100$. El campo toroidal está representado por color de fondo, el cual está medido en escalas de colores, siendo blanco y negro representando mayor y menor intensidad respectivamente, mientras el verde es la transición entre ambos. Las flechas se refieren al campo poloidal, siendo las más cortas de menor magnitud del campo y las más largas las de mayor. Las imágenes son presentadas en un formato bidimensional, utilizando una sección transversal para $\phi = 0$. 75

4.14. Evolución topológica temporal del campo magnético para la condición inicial de un campo inicial poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ perturbado por un campo poloidal $\left[h^{n=3}_{l=2,m=2}\right]^{(1)} + \left[h^{n=2}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. La intensidad del campo está representado por una barra de colores, el cual está medido en escalas de colores, siendo el violeta el de mayor intensidad y el rojo el de menor intensidad. 76

4.15. Condición inicial de un campo puramente poloidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$. Los colores están escalados entre 0 y 1, donde el color morado es el mayor y el naranja es el menor. 77

4.16. Evolución topológica temporal del campo magnético para la condición inicial de un campo puramente toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ en el cual el valor de la perturbación fue $P = 0$. El campo toroidal está representado por color de fondo, el cual está medido en escalas de colores, siendo blanco y negro representando mayor y menor intensidad respectivamente, mientras el verde es la transición entre ambos. Las imágenes son presentadas en un formato bidimensional, utilizando una sección transversal para $\phi = 0$. 78

4.17. Evolución topológica temporal del campo magnético para la condición inicial de un campo inicial toroidal $\left[g_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$ perturbado por un campo toroidal $\left[g_{l=1,m=1}^{n=1}\right]^{(1)} + \left[g_{l=2,m=1}^{n=1}\right]^{(2)}$. La intensidad del campo está representado por una barra de colores, el cual está medido en escalas de colores, siendo el violeta el de mayor intensidad y el rojo el de menor intensidad. 79
4.18. Condición inicial de un campo conformado por una mezcla de campos iniciales de fondo poloidal $\left[h_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$ y toroidal $\left[g_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$ Los colores están escalados entre 0 y 1, donde el color morado es el mayor y el naranja es el menor. 80
4.19. Evolución topológica temporal del campo magnético para la condición inicial de un campo puramente poloidal+toroidal en el cual, el valor de la perturbación fue $P = 0$. El campo toroidal está representado por color de fondo, el cual está medido en escalas de colores, siendo blanco y negro representando mayor y menor intensidad respectivamente, mientras el verde es la transición entre ambos. Las flechas se refieren al campo poloidal, siendo las más cortas de menor magnitud del campo y las más largas las de mayor. Las imágenes son presentadas en un formato bidimensional, utilizando una sección transversal para $\phi = 0$. 81
4.20. Evolución topológica temporal del campo magnético para la condición inicial de un campo puramente poloidal+toroidal en el cual, el valor de la perturbación fue $P = 0.1$. La intensidad del campo está representado por una barra de colores, el cual está medido en escalas de colores, siendo el violeta el de mayor intensidad y el rojo el de menor intensidad. 82

A.1. Procedimiento empleado en Mathematica para el cálculo de la energía magnética inicial 85

Índice de cuadros

2.1. Valores de las constantes empleadas en la Ecuación 2.21 26

4.1. Valores numéricos para los tres primeros modos radiales para cada $l = 1, 2, 3$. Los valores de $[k_l^n]_h$representan los modos asociados a la función $h\,(r, \theta, \phi\,)$, mientras $[k_l^n]_g$ los modos asociados a la función $g\,(r, \theta, \phi\,)$. 56

Nomenclatura

c	velocidad de la luz
e	carga del electrón
e^-	electrón
F	fuerza
G	constante de gravitación universal
I	momento de inercia
$M_\odot$	masa solar
n	densidad electrónica
n	neutrón
P	periodo
P	presión
p	protón
Q	calor
R	radio de la estrella
$R_\odot$	radio solar
S	entropía
U	energía interna
Δp	incertidumbre del momento
Δx	incertidumbre de la posición
$\dot{P}$	taza de cambio del periodo
$\hbar$	constante de planck normalizada

ω	frecuencia angular
Φ	flujo magnético
ρ_m	densidad másica
ρ_{nuc}	densidad nuclear
σ	conductividad eléctrica
$\mathbf{B}$	campo magnético
$\mathbf{E}$	campo eléctrico
$\mathbf{J}$	densidad de corriente
Φ	potencial gravitacional
C_p	calor específico a presión constante
C_v	calor específico a volumen constante
m_n	masa del neutrón
m_n	número másico
n_n	densidad de neutrones
R_M	número de Reynolds
T_e	temperatura electrónica
T_i	temperatura iónica
ν_e	neutrino

1. Preliminares

1.1. Introducción y motivación

La enorme extrapolación que se requiere para describir un fenómeno astronómico, que es imposible de realizar mediante un experimento, es una tarea que parece inalcanzable; sin embargo, el ser humano se ha valido de su razonamiento e imaginación para dar entendimiento a eventos tan extraños y salvajes que parecen creados por la ciencia ficción. Los objetos como agujeros negros, estrellas de neutrones, enanas blancas, eventos como explosiones de supernovas, sistemas de dos agujeros compenetrándose por medio de una danza gravitacional, existen realmente y solo hemos captado una parte de su majestuosidad utilizando instrumentos como los telescopios.

El descubrimiento del neutrón por J. Chadwick [8], permitió ampliar el conocimiento acerca del átomo; sin embargo, la importancia de este hallazgo no solo produjo profundas consecuencias a nivel atómico. Este hecho significó la posibilidad de la existencia de un objeto estelar compuesto especialmente por neutrones, el cual fuera producto de una explosión de supernova [9]. Baade y Zwicky acuñaron el término supernova, para referirse a una explosión conducida por la energía gravitacional liberada cuando una estrella masiva agota todo su combustible y colapsa sobre sí misma, pero la explosión no destruye completamente el núcleo. La supernova representa la transición de una estrella ordinaria en una estrella de neutrones. Tal estrella posee un radio muy pequeño y una densidad extremadamente alta. Sin embargo, debido al tamaño tan reducido de este objeto estelar, su detección era prácticamente imposible, así que el modelo de estrella de neutrones no fue aceptado durante décadas. Esto cambió dramáticamente debido a la detección de ondas de radio provenientes de un pulsar, gracias a Jocelyn Bell y Anthony Hewish [10, 11]. Este descubrimiento inició una oleada de descubrimientos de pulsares, uno de ellos en la Nebulosa Cangrejo, tal y como lo demuestran algunos ejemplos [12, 13, 14, 15].

Las supernovas son explosiones épicas de estrellas masivas (estrellas que al formarse tienen una masa mayor a 10 masas solares ($M_\odot = 1.989 * 10^{33}\,\mathrm{g}$)) que producen una enorme cantidad de energía y que pueden ser tan brillantes como una galaxia entera. Esto se discutirá más ampliamente en la Sección 2.1. Debido al hecho de ser tan grandes, la temperatura a las cuales están sus superficies son mucho más grandes que las que ocurren en el sol, cuya superficie está a 6.000 K, mientras que una estrella de $15M_\odot$ tiene una temperatura de 28.000 K. Este hecho hace que las estrellas masivas realicen el proceso de fusión nuclear más rápido y por lo tanto sean más brillantes [16]. Estos eventos son fundamentales en la naturaleza debido a que

una parte del remanente es lanzado al espacio como polvo estelar, dejando a atrás una estrella de neutrones o un agujero negro. Este material da lugar a la formación de nuevas estrellas y planetas. De hecho, nosotros mismos estamos conformados por el material de una supernova. De allí proviene la frase mencionada por el gran Carl Sagan 'Somos Polvo de Estrellas'. La materia ha viajado millones de kilómetros para formar lo que nosotros conocemos como vida.

Figura 1.1.: Remanente de 2200 años de supernova de una estrella de neutrones, la cual que posee una cantidad de materia suficiente para producir 45 soles. El material azul representa el remanente de supernova, y el rosado muestra el polvo formado en el material eyectado en la explosión. La imagen es el resultado de la superposición de longitudes de ondas de rayos x, infrarrojo, óptico y radio [1].

La estrella de neutrones que resulta de una explosión de supernova ha llamado la atención en el mundo científico, debido a que posee características únicas en el universo, tales como: campo magnético más fuerte conocido por el hombre $\sim 10^{15}$ G, poseer una enorme energía potencial gravitacional (solamente superada por los agujeros negros), encontrarse estados de rotación con frecuencias de 1.6 ms y emitir radiación electromagnética de alta energía.

Entender los mecanismos en que evolucionan espacial y temporalmente los campos magnéticos de las estrellas de neutrones supone un reto en las investigaciones actuales, desde la descripción teórica, modelamiento computacional y adquisición de datos experimentales. Este trabajo representa una contribución a este conocimiento valiéndose de la simulación numérica para representar la evolución espacio-temporal del campo magnético.

En este documento se presentan inicialmente los conceptos generales de las estrellas de neutrones, tales como su formación, estructura y se presentan algunos cálculos básicos de las magnitudes físicas. Posteriormente se realiza la fundamentación en teoría de la magnetohidrodinámica resistiva con el fin de entender las bases físicas de las que depende el tema de estudio. Por último, se presentan los resultados de las simulaciones, seguido del análisis y las conclusiones.

1.2. Planteamiento del problema

Las estrellas de neutrones tienen los campos magnéticos más grandes encontrados en el universo, aproximadamente con magnitudes de 10^{15} G en lo que se conoce como magnetares [17]. Una importante característica que diferencia las estrellas de neutrones y estrellas fluidas es que éstas poseen una estructura en forma de capas con densidades y estados de la materia que varían de acuerdo a la profundidad. Esto se discutirá más ampliamente en la Subsección 2.2.1. Aunque el mayor porcentaje de masa se encuentra en el núcleo, la corteza juega un papel crucial para describir varios fenómenos astrofísicos que envuelven estos objetos. Un ejemplo de ello, son los estallidos de rayos gamma que se forman durante posibles "terremotos estelares" que producen una fractura de la corteza y que da lugar a la reconexión magnética, lo que implica un cambio topológico del campo magnético, seguido de la expulsión de materia y energía a velocidades relativistas [18].

La evolución magnética en la corteza de la estrella está influenciada por procesos magnetohidrodinámicos no lineales. La densidad de corriente eléctrica es generada solamente por los electrones; por lo tanto, el campo va a estar atado al movimiento de las partículas, el cuál va a ser deflectado debido a la presencia de un campo magnético. Este efecto es conocido como efecto Hall.

Esto produce un campo eléctrico que es proporcional a la corriente y al campo magnético. En este sistema la energía magnética debe conservarse, y la existencia de la corriente permite la formación de distintos modos de energía magnética que se redistribuyen, y que van a afectar directamente la configuración del campo magnético [19, 20]

El Efecto Hall es un importante mecanismo no lineal que afecta la evolución y la tasa de disipación del campo magnético. Este efecto es significativo cuando la longitud característica de la corriente Hall asociada llega a ser comparable con la longitud característica en la corteza. La evolución de la estructura del campo y la energía magnética sigue siendo un tema de interés. Recientes estudios han encontrado algunos campos magnéticos Hall de equilibrio, además de la evolución tridimensional de la estructura del campo, las cuales confirman la redistribución de la energía magnética [21, 22]. Sin embargo, se ha encontrado que la estabilidad y evolución a largo plazo de los modos de energía magnética deben ser estudiadas [23].

En términos del campo magnético $\mathbf{B}\,(r, \theta, \varphi\,)$, el efecto Hall produce un término no

lineal en la ecuación de la evolución del campo magnético (primer término en el lado derecho de la Ecuación 1.1). Por otra parte, la conductividad eléctrica finita de la estrella σ produce una disipación del campo magnético conocida como difusión óhmica (segundo término del lado derecho). Luego, la evolución del campo magnético es modelada por la magnetohidrodinámica no-lineal y conlleva a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales (una ecuación para cada componente del campo acopladas entre sí).

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left[\frac{c}{4\pi n e}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}\right] - \nabla \times \left[\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla \times \mathbf{B}\right] \tag{1.1}$$

donde c es la velocidad de la luz , e es la carga del electrón , σ es la conductividad y n es la densidad electrónica.

La Ecuación 1.1 ha sido objeto de investigación por diferentes autores. Sang y Chanmugam (1987) [24] encontraron soluciones del decaimiento óhmico de campos magnéticos dipolares confinados en la corteza y obteniendo como resultado, un decaimiento poco significativo que generó conflicto con mediciones experimentales de la evolución temporal del campo magnético. Haensel et al. (1990) [25] cambiaron el punto de vista tradicional del decaimiento, y determinaron cómo el tensor óhmico de resistividad debido a la magnetización de la materia aceleraba el decaimiento de campos magnéticos internos. Sin embargo, no obtuvieron una tasa de decaimiento coherente a las observaciones astronómicas, lo cual dejaba evidencias de que existían mecanismos ocultos que aún no se habían tenido en cuenta.

Estos fenómenos fueron propuestos por Goldreich y Reisenegger (1992) [26]. Ellos proponen un modelo completo que promueve la pérdida de flujo magnético, el cual contiene el decaimiento óhmico, la difusión ambipolar (no contenido en la Ecuación 1.1), el cual es un mecanismo de difusión cuando se producen perturbaciones del equilibrio químico entre neutrones, protones y electrones en la corteza debidas a la generación de campos eléctricos internos. Además, propusieron que el efecto Hall podría generar efectos de turbulencia que transportaría la energía hacia pequeñas estructuras magnéticas en donde la disipación óhmica puede actuar de manera más eficiente en el decaimiento del campo magnético. Esta última idea ha sido estudiada empleando simulaciones numéricas.

Inicialmente, el estudio se centró en el comportamiento bidimensional (2D) del campo magnético, lo cual permitió separarlo en una componente poloidal $\left(B_r\hat{\mathbf{r}} + B_\theta\hat{\theta}\right)$, y otra toroidal $\left(B_\phi\hat{\phi}\right)$. Shalybkov y Urpin (1997) [27] emplearon simulaciones para el caso del decaimiento del campo en una esfera conductora uniforme. Ellos concluyeron que la corriente Hall crea un comportamiento oscilatorio y un cambio drástico en la naturaleza del campo magnético debido al acople y transferencia de energía entre modos.

Hollerbach y Rüdiger (2002) [28] solucionaron la ecuación de inducción en una corteza esférica empleando un código espectral para solucionar combinaciones de modos

simples de decaimientos como condición inicial y encontraron redistribuciones de energía, traducidas en oscilaciones que fueron encontradas por Shalybkov y Urpin [27] que influenciaba significativamente la evolución del campo.

El origen de estas oscilaciones despertó el interés en su estudio, y la posible explicación podía ser encontrada en la dinámica no-lineal del sistema. Así, estudios posteriores de inestabilidades inducidas por el efecto Hall fueron llevadas a cabo. Rheinhardt and Geppert (2002) [29] utilizaron análisis lineal para estudiar la estabilidad de un campo inicial de fondo y encontró que una inestabilidad ocurría cuando la energía es transferida desde el campo inicial de fondo a perturbaciones de pequeña escala. Reisenegger et al. (2007) [30] estudió la evolución de un campo toroidal y descubrió el crecimiento de inestabilidades ante pequeñas perturbaciones poloidales. Bonanno y Urpin (2008) [31] estudiaron la estabilidad lineal de campos magnéticos axisimétricos asumiendo como pequeñas perturbaciones las ecuaciones de la magnetohidrodinámica incompresible no-disipativa y encontraron que una inestabilidad puede llevar a la evolución magnética en un equilibrio no-axisimétrico.

Hasta ese momento no se conocía con certeza como el mecanismo no-lineal Hall operaba. Este hecho cambió cuando Gourgouliatos y Cumming (2014) [32] encontraron un mecanismo llamado atractor Hall en el cual, sin importar como es el campo magnético inicial, este toma una estructura particular y su evolución es dramaticamente detenida.

Gourgouliatos et al. (2013) [22] encontraron soluciones analíticas para el equilibrio Hall y posteriormente la estabilidad de estas soluciones fueron estudiadas por Marchant et al. (2014) [33] en donde encontraron un estado de equilibrio utilizando campos puramente toroidales, poloidales y una combinación entre ellos. El campo evolucionaba hacia el atractor Hall, donde configuraciones de equilibrios eran desarrolladas. Gourgouliatos et al. (2016) [34] presentaron una simulación tridimensional en donde incluían diferentes funciones iniciales del campo que representaban distintas etapas de evolución magnética de la estrella; además, tuvieron en cuenta el efecto de configuraciones puramente poloidales, toroidales y la mezcla entre ellas. Ellos encontraron inestabilidades magnéticas que permitían el intercambio de energía entre las distintas configuraciones, y encontraron el espectro de energía de los modos en donde se producía la transferencia de energía.

A partir de esta última idea, el propósito de esta tesis se centra en estudiar la estabilidad de configuraciones magnéticas, conocidas como modos óhmicos mediante perturbaciones no-axisimetricas ($3D$) basadas en campos ($2D$) inicialmente puramente poloidales, toroidales y como combinación de campos poloidal + toroidal con el propósito final de comprobar la estabilidad o inestabilidad de estas configuraciones. Por otra parte, se estudiará la transferencia de energía entre las componentes poloidal y toroidal causada por el acople no lineal a través del Efecto Hall. Como resultado de esta tesis, se espera aportar al entendimiento de la evolución tridimensional de campos magnéticos en estrellas de neutrones producidos por efectos de posibles rompimientos de simetría.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

- Utilizar un código de simulación numérica espectral desarrollado por R. Hollerbach [28] para encontrar una solución a la ecuación diferencial (Ecuación 1.1) que representa la evolución espacio temporal del campo magnético de una estrella de neutrones.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Obtener soluciones analíticas (modos normales) en el régimen lineal (difusión Óhmica) para la evolución del campo magnético.
- Validar las soluciones analíticas obtenidas previamente mediante la simulación numérica.
- Analizar numéricamente la evolución de los modos óhmicos fundamentales utilizando perturbaciones no axisimétricas.

2. Estrellas de Neutrones

2.1. Proceso Supernova: Nacimiento de una Estrella de Neutrones

Según la teoría de evolución estelar [35]. Las estrellas son formadas a partir de nubes de hidrógeno o masas de gas, conocidas como nubes moleculares. Se agrupan en una determinada región aumentando la densidad, de tal forma que se ejerce una atracción gravitacional lo suficientemente fuerte para condensar gas en un punto, formando de esta forma protoestrellas (estrellas nacientes). En muchos casos, se forman dos o más estrellas juntas.

Cuando el núcleo está lo suficientemente caliente, comienza la fusión nuclear hasta encontrar un punto de equilibrio en el cual el calor que se genera puede detener la compresión gravitacional. La estrella se mantiene en un equilibrio entre una fuerza que tienda a contraer la estrella (gravedad) y otra que la expande (radiación térmica). Esto se representa en la Figura 2.1.

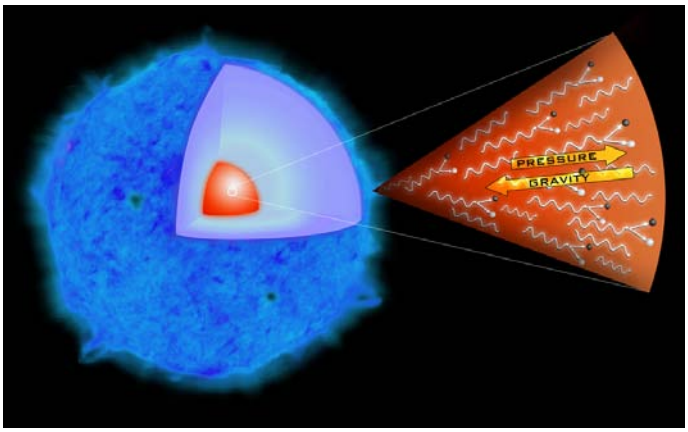


Figura 2.1.: Balance entre la gravedad, que arrastra su propio material hacia su interior, mientras que la presión desde el calor y la luz producida por la combustión del hidrógeno en helio en el núcleo de la estrella empuja hacia fuera[2]

El mundo que ha creado el ser humano no puede ser conformado a partir de gases simples como hidrógeno y helio; hacen falta todo tipo de elementos como oxígeno, nitrógeno, zinc, calcio, etc. Sin embargo, los procesos de la naturaleza han permitido que el mismo mecanismo que causa que las estrellas brillen, también den como

resultado la producción de elementos de los cuales la vida misma está formada, como el oxígeno, carbono y el hierro que corre por nuestra sangre. Las estrellas pueden considerarse como mega fábricas de elementos, cuya central energética proviene de la fusión termonuclear al producirlos. Los átomos de hidrógeno se están fusionando continuamente creando helio y en este proceso se libera una gran cantidad de energía.

El helio es producido en el centro de la estrella y ahora este elemento es el protagonista. A medida que se repite el proceso de fusión y se acerca al centro, el núcleo se encoge por compresión gravitacional, al tiempo que la temperatura incrementa, permitiendo la fusión de helio en carbono. Este proceso no se repite en forma idéntica, debido a que cada etapa de fusión se inicia con átomos más pesados y requiere, en consecuencia, de temperaturas cada vez más altas. El combustible nuclear se agota cada vez más rápido una y otra vez, hasta que la estrella comienza a dividirse en capas de elementos, similar a una cebolla como se puede observar en la Figura 2.2.

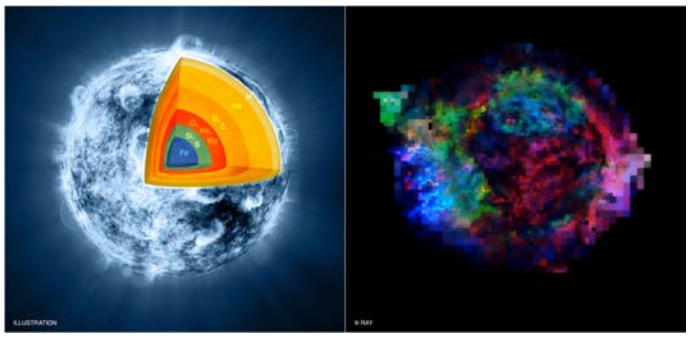


Figura 2.2.: División de elementos en forma de capas en una estrella (imagen izquierda). La imagen derecha se construye a partir de la emisión de rayos x de la estrella [3]

En el último elemento ($Hierro - \mathrm{F_e}$) el proceso deja de ser exotérmico y se convierte en endotérmico, es decir, el hierro no produce energía cuando se fusiona. Por lo tanto, el proceso se detiene y se produce una acumulación en el núcleo de la estrella, volviéndolo cada vez más grande, pesado y compacto. En este punto, la gravedad es sostenida mediante la presión de degeneración electrónica (se discutirá en la Subsección 2.2.4). Si la estrella se encuentra entre $8M_\odot$ y $20 \sim 30M_\odot$, el núcleo alcanza el Límite de Chandrasekhar de $1.44M_\odot$ teniendo un radio de $\sim 1.000\,\mathrm{km}$ volviéndose altamente compacta, hasta el punto de no poder soportar la fuerza de gravedad, produciéndose una implosión gravitacional que comprime la estrella cada vez más. Durante este colapso, el núcleo comienza a forzar a los electrones e^- a unirse a los protones p, creando neutrones n y neutrinos ν_e, en un proceso conocido como *Decaimiento Beta Inverso* $e^- + p \rightarrow n + \nu_e$.

Aproximadamente el 99 % de la energía, correspondiente a $3 * 10^{46}\,\mathrm{J}$ es radiada a través de los neutrinos. Un número de 10^{58} neutrinos fueron radiados de la supernova SN1987A [36] mostrada en la Figura 2.3.

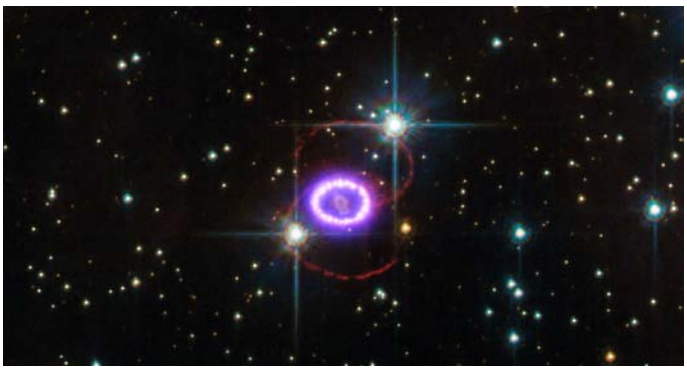


Figura 2.3.: Composición de imágenes que muestran el efecto de una poderosa onda de choque alejándose de la explosión.

Súbitamente, el núcleo estelar se convierte en una esfera con un radio aproximado de 10 km, con densidad similar a la de un núcleo atómico.

Los neutrinos emitidos son reabsorbidos por la materia del envoltorio estelar, y de esta manera contribuyen a eyectarla la materia que está colapsando en el núcleo y conjuntamente con la presión de degenerancia de los neutrones (Subsección 2.2.4), el colapso gravitacional es detenido. Si en este punto, la masa de la estrella tiene un límite menor de $20 \sim 30 M_{\odot}$, el núcleo, según el *Límite de Tolman-Oppenheimer-Volvoff* la presión de degenerancia neutrónica y el masivo flujo de neutrinos empujan la materia que cae, llevándola a ser eyectada desde la estrella, provocando que la estrella explote, generando poderosas ondas de choque, que arrasan con las capas exteriores de la estrella de forma violenta. Si el núcleo sobrepasa este límite, la presión de degenerancia neutrónica no es capaz de detener y soportar la presión y la estrella colapsa en un agujero negro. Al llegar las ondas de choque a la superficie, todas las capas son disparadas como material intergaláctico que forma una nube y que choca con el medio interestelar. El estallido es tan potente, que fuerza a una parte del hierro a fusionarse en otros elementos aún más pesados. Como el oro, platino, plomo [37]. Esto es una supernova, la muerte de una estrella y el nacimiento de algo nuevo. El final del proceso que produjo todos los elementos a nuestro alrededor y que formaron planetas, plantas y personas. Todo fue producido en las estrellas.

2.2. Estructura y Magnitudes Físicas

2.2.1. Estructura

De acuerdo con las teorías actuales, la sección transversal de una estrella de neutrones puede ser dividida en tres subregiones cada una de ellas determinada por una característica física particular [38, 39, 40, 41, 42, 4]. Este hecho se muestra en la Figura 2.4.

- *Corteza externa:* en esta capa se encuentran átomos pesados como ${}^{56}_{26}Fe$, ${}^{62}_{28}Ni$ y ${}^{118}_{36}Kr$ conformados como una red cúbica centrada en el cuerpo, rodeada de un gas de electrones libres moviéndose a velocidades cercanas a la de la luz y que forman un *Cristal de Coulomb.* Los átomos se agrupan en un espesor de 0.3 km y en un rango de densidades que va desde 10^6 gcm^{-3} en el borde más externo de la capa, hasta $4 * 10^{11}$ gcm^{-3} en el borde interior.
- *Corteza interior: e*n esta región de la estrella los neutrones no pueden seguir agrupándose, (proceso conocido como goteo de neutrones "neutron drip"). Además, entran en un estado de superfluidez (capacidad de fluir y conducir calor con resistencia casi nula). Mezclado con el superfluido de neutrones y la red de núcleos existe un gas de electrones, todos en una corteza de alrededor 1km de espesor y con una densidad que va desde $4*10^{11}$ gcm^{-3} a $2*10^{14}$ gcm^{-3}.
- *Núcleo:* ocupa la región más masiva de la estrella, con densidades que van desde $2*10^{14}$ gcm^{-3} hasta $5*10^{14}$ gcm^{-3}. Allí se forma un superfluido de neutrones y protones en estado superconductor (sin resistencia para conducir corriente eléctrica y con la capacidad de expulsar el campo magnético hacia el exterior). Por otra parte, se encuentra un núcleo central hadrónico (hadrones: partículas que conducen las interacciones fuertes, que se subdividen en mesones si tienen espín entero y bariones si su espín es semientero) a densidades del orden de 10^{15} gcm^{-3}, es decir, 3 o 4 veces la densidad de saturación de la materia nuclear ($\rho_{nuc} = 2.67 * 10^{14}$ gcm^{-3}). Se ha propuesto [41] que puede existir materia hiperiónica (neutrones combinados con electrones para formar bariones más pesados con la emisión de neutrinos), o condensados de kaones y piones, o tener una mezcla de quarks (partículas subnucleares cuyas combinaciones forman todas las demás partículas) libres y materia nuclear.

2.2.2. Gravitación

Las estrellas de neutrones poseen una enorme fuerza gravitacional, solamente superada por los agujeros negros. A partir de sencillos cálculos, se demostrarán algunas magnitudes físicas de estos objetos. Para valores típicos del radio de la estrella de neutrones $R_1 = 10$ km y masa $M_1 = 1.44 M_\odot$, la fuerza gravitacional F en la superficie sobre un humano con masa $m = 70$ km sería

$$F = G\frac{mM_1}{R_1^2}, \tag{2.1}$$

donde G : Constante de gravitación universal $= 6.673 * 10^{-11}$ $\frac{\text{N.m}^2}{\text{kg}^2}$

$$F = 1.33 * 10^{14} \text{ N}, \tag{2.2}$$

para el caso de la superficie terrestre, se tiene que el radio de la tierra $R_2 = 6371$ km y la masa de la tierra $M_2 = 5.972 * 10^{24}$ kg

$$F = 686.96 \text{ N}, \tag{2.3}$$

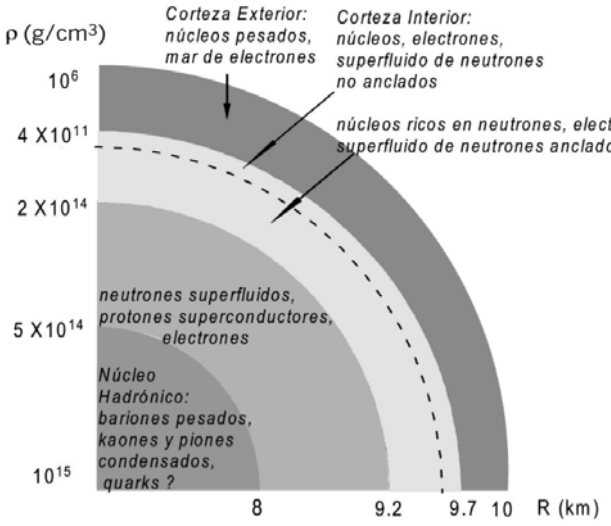


Figura 2.4.: Esquema de la sección transversal de una estrella de neutrones de la densidad como función del radio. De arriba, hacia abajo: núcleo, corteza interna, corteza externa [4].

lo que es equivalente a $1.93 * 10^{11}$ veces más fuerte que la gravedad en la superficie de la tierra.

2.2.3. Electromagnetismo

En una versión simplificada, el campo magnético de una estrella de neutrones puede ser expresado como un dipolo magnético [4, 19][4, 19]. Se asume que la radiación proveniente del dipolo y la tasa de pérdida de momento angular,

$$I\dot{\omega} = -\frac{2}{3c^3} B^2 R^6 \omega^3 \sin^2 \alpha, \tag{2.4}$$

donde I es el momento de inercia , $\omega = 2\pi/P$ es la frecuencia angular , P es el periodo , B es el campo magnético en un punto particular la superficie, R es el radio de la estrella , y α es el ángulo entre el vector del momento magnético y el eje de rotación. Actualmente no existe suficiente claridad con respecto a la dependencia del torque debido a la rotación angular en α para una estrella de neutrones en la cual su magnetosfera está conformada por plasma; por lo tanto, la dependencia de α es despreciada. Despejando B, se obtiene:

$$B = \left(\frac{3c^2 I P \dot{P}}{8\pi^2 R^6}\right)^{1/2} = 7.01 * 10^{14} \left(P\dot{P}\right)^{1/2} T, \tag{2.5}$$

donde $\dot{P}$ es la tasa de cambio del periodo. Para valores de $P = 0.0331\,\mathrm{s}$, $\dot{P} = 4.22 * 10^{-13}\,\mathrm{s/s}$ y $R = 10\,\mathrm{km}$ y tomando el momento de inercia de la estrella como

una esfera sólida $I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5}(1.44M_{\odot}R) = 1.4 * 10^{38}\text{kg.m}^2$ se obtiene un valor del campo magnético de $B = 8.3 * 10^8\,\text{T} \sim 8.3 * 10^{12}\,\text{G}$ [43, 44].

Otra aproximación para calcular la magnitud del campo magnético de una estrella de neutrones, consiste en considerar la conservación del flujo magnético .

$$\Phi = \iint \mathbf{B}.d\mathbf{S}, \tag{2.6}$$

donde Φ es el flujo magnético y $d\mathbf{S}$ es un vector normal a la superficie. Ignorando la geometría del campo y aproximando la estrella a una esfera, se puede obtener una relación entre el campo y el radio.

$$B_i \pi R_i^2 = B_f \pi R_f^2, \tag{2.7}$$

$$B_f = B_i \left(\frac{R_i}{R_f}\right)^2, \tag{2.8}$$

donde B_i y R_i es la magnitud del campo magnético y el radio de la estrella progenitora respectivamente; B_f y R_f es la magnitud del campo magnético y el radio de la estrella de neutrones. Tomando valores del campo magnético y del radio de una estrella masiva [45], $B_i = 170\text{G} \sim 0.017\text{T}$, $R_i = 5.6R_{\odot} \sim 5.5 * 10^6\text{m}$ [46], donde $R_{\odot}$ equivale a 1 radio solar $\sim R_{\odot} = 9.95 * 10^5\,\text{Km}$ y el radio típico de una estrella de neutrones $R_f = 10^3\,\text{m}$. Reemplazando en Ecuación 2.8 se obtiene un valor final del campo magnético de $B_f = 5 * 10^9\,\text{T} \sim 5 * 10^{13}\,\text{G}$.

2.2.4. Ecuación de Estado

El esquema inicial de la estrella de neutrones parte de ser un sistema extremadamente denso, de pequeño tamaño y en el cual no existen los procesos de fusión nuclear.

Existe una enorme fuerza gravitacional tirando hacia el centro la estrella, sin embargo, la estrella no implosiona debido al efecto de una fuerza igual y opuesta hacia el exterior que equilibra la fuerza gravitacional. Este efecto es debido a la presión, el cual es un efecto acumulativo debido al movimiento de los átomos.

Inicialmente, la presión interna en la estrella es muy alta, por lo que debe existir un vasto número de partículas chocando dentro de las capas de la superficie creando la fuerza suficiente para que haya un equilibrio. Sin embargo, existe un problema, las partículas se deben mover demasiado rápido para producir una fuerza suficientemente grande, lo que implica una alta temperatura, pero si es muy caliente, el calor puede liberarse mediante radiación hacia el espacio, por lo que la estrella se

va a enfriar y el movimiento se hará más lento, así que habrían pocos impactos y la presión disminuiría, haciendo que la estrella se encoja hasta calentarse nuevamente y el proceso se va a repetir continuamente, haciendo que la estrella se vuelva cada vez más pequeña.

Sin embargo, esto no sucede realmente ya que la estrella de neutrones se mantiene con un tamaño constante. Por lo tanto, la presión a la que se hace referencia anteriormente, debe ser explicada mediante otra teoría. Si se considera que, en el núcleo de la estrella, los efectos debidos a la mecánica cuántica son notables macroscópicamente, entonces se debe extrapolar desde los efectos cuánticos.

El *Principio de Exclusión de Pauli* dicta que dos fermiones idénticos no pueden ocupar el mismo estado cuántico en el mismo instante, y esto puede ser aplicado para la comprensión del problema. La contracción del núcleo debido a la gravedad de la estrella es tan enorme, que obliga a los fermiones a ubicarse en niveles degenerados de energía, de manera que los niveles más bajos son ocupados rápidamente, obligando a que se ocupen cada vez niveles más altos de energía, lo cual se traduce en una presión conocida como presión de degeneración; es decir, cuando la materia es comprimida, la incertidumbre en la posición Δx se vuelve cada vez mas pequeña.

Luego, según el *Principio de Incertidumbre de Heisenberg* $\Delta p \Delta x \geq \hbar/2$ el momento Δp se vuelve mucho mas grande. Así, incluso a temperatura cero, los fermiones deben viajar a una velocidad mínima, dando lugar a una presión.

En una enana blanca, la fuerza gravitacional se mantiene en equilibrio mediante la presión de degeneración electrónica y en una estrella de neutrones, la presión que previene el colapso gravitacional es la presión de degeneración neutrónica [47].

2.2.5. Presión desde la Mecánica Cuántica

Partiendo del hecho de que dos neutrones no pueden ocupar el mismo estado cuántico, se puede aproximar a dividir la estrella en pequeños cubos y se le asigna a cada cubo 1 neutrón. Del *Principio de Incertidumbre de Heisenberg* Δx permite agrandar o disminuir dicho cubo de tal modo que quede confinado. Tomando como referencia 1 m^3 de la estrella, los neutrones deben tener, por lo tanto un volumen único, $n_n \Delta x^3 = 1 \Rightarrow \Delta x = n_n^{-1/3}$, donde n_n representa el número de neutrones por unidad de volumen, y reemplazando Δx en $\Delta p \Delta x = \hbar$, se obtiene el valor de la incertidumbre en el momento $\Delta p = \hbar n_n^{-1/3}$ [47].

El movimiento de los neutrones puede darse en cualquier dirección; sin embargo, para esta aproximación, solo se tendrán en cuenta los movimientos de adelante-atrás, arriba-abajo e izquierda-derecha. Llevando el movimiento hacia una dimensión, y conociendo que la presión es un efecto combinado del impacto, entonces la pared sobre la cual colisiona elásticamente el neutrón ejerce una fuerza igual y opuesta, por lo que se debe tener en cuenta dos veces la magnitud del momento. Se sabe que, la fuerza es un de cambio del momento, y reemplazando este concepto en la relación

de presión-fuerza, se obtiene,

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(n_n)(v)(2p), \tag{2.9}$$

donde P es la presión, v es la velocidad del movimiento y p es el momento. Reemplazando la expresiones del momento y densidad de neutrones se encuentra,

$$P = \frac{\hbar^2}{3m_n} n_n^{5/3}, \tag{2.10}$$

se sabe que la densidad de neutrones está dada por,

$$n_n = \frac{\rho_m}{m_n}, \tag{2.11}$$

donde ρ_m es la densidad y m_n es la masa del neutrón . La Ecuación 2.10 es correcta en su forma funcional, pero incorrecta por un factor de 5. Teniendo en cuenta este hecho, y reemplazando la Ecuación 2.11 en la Ecuación 2.10 se obtiene,

$$P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5}\frac{\hbar^2}{m_n}\left(\frac{\rho_m}{m_n}\right)^{5/3}, \tag{2.12}$$

la anterior expresión representa la presión que generan los neutrones a partir del *Principio de Exclusión de Pauli* y que previene el colapso de la estrella.

Ahora es necesario encontrar la expresión de la presión en el centro de la estrella. La formulación va a ser Newtoniana. A pesar de que en este sistema los efectos relativistas no se pueden despreciar, podemos partir de un modelo básico simplificado. Para encontrar una expresión de la presión en el centro de la estrella, a partir de la perspectiva Newtoniana de la fuerza gravitacional [5], se considera un elemento de volumen cilíndrico ubicado a una distancia r desde el centro de la estrella. Además, su volumen $dV = dAdr$, donde dA es el área de la base y dr es la altura. Su masa $dm = \rho dAdr$, donde $\rho_m = \rho_m(r)$ es la densidad de la masa en el radio r.

Si la masa dentro del radio r es $\mathcal{M}(r)$, entonces la fuerza gravitacional sobre el elemento de volumen es,

$$dF_g = -\frac{Gdm.\mathcal{M}(r)}{r^2} = -\frac{G\mathcal{M}(r)\rho_m(r)}{r^2}dAdr, \tag{2.13}$$

si en la superficie más baja del elemento de volumen, la presión es P y en la superficie superior $P + dP$, Figura 2.5, la fuerza neta de la presión actuando sobre el elemento de volumen es:

$$dF_p = PdA - (P + dP)\,dA, \tag{2.14}$$

$$= -dPdA. \tag{2.15}$$

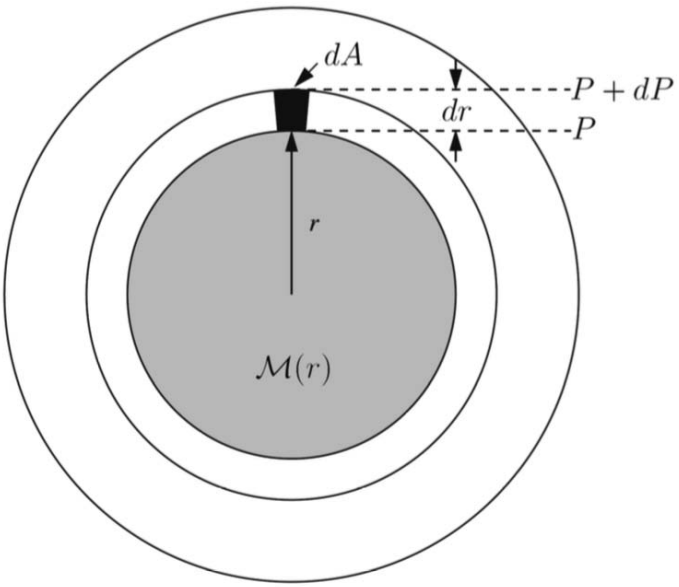


Figura 2.5.: Esquema para la derivación de la fuerza desde una perspectiva newtoniana [5].

Ya que en el interior existe una densidad mayor de partículas, esto implica que la presión disminuye hacia fuera y dP será negativo, por lo que la fuerza dF_p es positiva. La condición de equilibrio es que la fuerza total que actúa sobre el elemento de volumen sea cero, es decir,

$$0 = dF_p + dF_g, \tag{2.16}$$

$$= -\frac{G\mathcal{M}(r)\,\rho_m(r)}{r^2} dAdr - dPdA, \tag{2.17}$$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{G\mathcal{M}(r)\,\rho_m(r)}{r^2}, \tag{2.18}$$

la anterior ecuación es la *Ecuación de equilibrio hidrostático.*

Consideremos ρ como constante, aunque en realidad crece con la distancia y $\mathcal{M}(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_m$, dando lugar a,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_m^2 r, \tag{2.19}$$

con el fin de encontrar una expresión para la presión en el centro de la estrella, integramos Ecuación 2.19 y se obtiene,

$$P = \frac{2}{3}\pi G \rho_m^2 R^2, \tag{2.20}$$

sonde R es el radio de la estrella.

Sabemos que las fuerzas de este sistema se mantienen en equilibrio, por lo tanto, podemos igualar la presión de degeneración y la presión en el centro de la estrella y obtener una expresión para el radio de la estrella.

$$R \approx \frac{(18\pi)^{2/3}}{10} \frac{\hbar^2}{G m_n M^{1/3}} \left(\frac{1}{m_n}\right)^{5/3}, \tag{2.21}$$

Lo más sorprendente de la anterior ecuación es la relación que se aprecia entre dos constantes con una diferencia entre escalas de magnitud totalmente abismal. Se une la *Constante de Planck* con influencia a nivel atómico y la *Constante de gravitación universal* de influencia a escala de la tierra e incluso entre galaxias. Para encontrar un valor aproximado del radio, se consideran los valores contenidos en la Tabla 2.1

Nombre	**Valor**
Constante de gravitación universal, G	$6.67 * 10^{-11}$ N.m^2/kg^2
Pi, π	3.14
Constante de Planck, $\hbar$	$1.05 * 10^{-34}$Js
Masa del neutrón, m_n	$1.67 * 10^{-27}$ kg
Masa de la estrella, $M = 1.5M_\odot$	$2.98 * 10^{30}$ kg

Cuadro 2.1.: Valores de las constantes empleadas en la Ecuación 2.21

$$R \approx 10.3\text{Km}, \tag{2.22}$$

El radio aceptado para una estrella de neutrones es de aproximadamente 10 Km. Aunque los procesos físicos involucrados son de una enorme complejidad, estas simplificaciones y suposiciones funcionan como una aproximación básica.

2.3. Tipos de estrellas de neutrones

2.3.1. Pulsares

Un pulsar (Figura 2.6) es una estrella de neutrones cuya característica principal es que el eje del campo magnético no está alineado con el eje de rotación de la estrella.

El campo magnético en rotación genera un poderoso campo eléctrico, con un potencial eléctrico que excede $1 * 10^{12}$ V voltios. Para poner esto en contexto, si tomamos 1 m^3 del campo magnético del pulsar de la nebulosa del cangrejo, éste contiene más energía que los humanos como civilización han sido capaz de generar hasta ahora. Los electrones de la superficie de la estrella son acelerados a altas velocidades debido a estos campos.

Esta alta energía de los electrones produce radiación de dos formas. Los electrones actúan como un plasma en coherencia y trabajan juntos, con el fin de producir emisiones de ondas de radio por un proceso que aún no es entendido y el otro mecanismo es debido a la interacción individual de electrones y fotones o el campo magnético; para producir radiación de alta energía en el espectro óptico, rayos x y rayos gamma. Principalmente la radiación ocurre en los polos magnéticos, debido a que en esta región existe una mayor concentración de electrones [7].

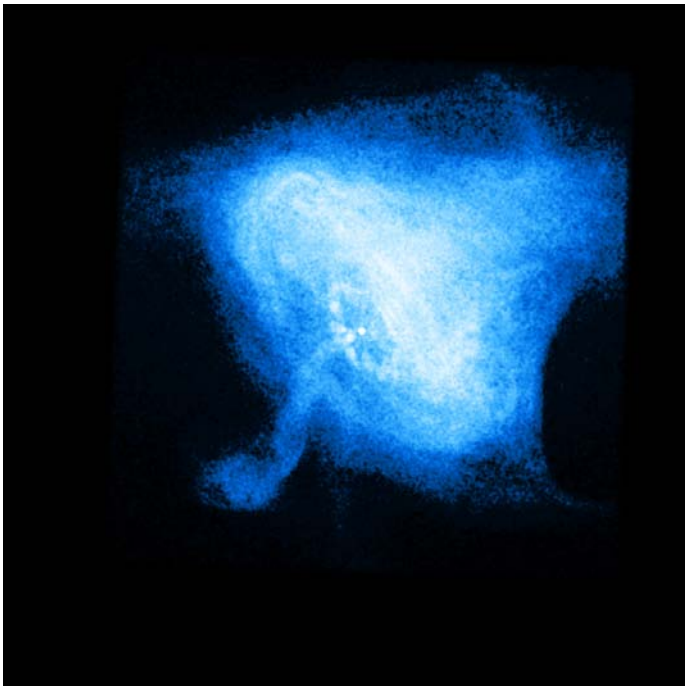


Figura 2.6.: Pulsar Nebulosa Cangrejo [6]

2.3.2. Magnetares

Los magnetares (Figura 2.7)son estrellas de neutrones diferenciadas por poseer los campos magnéticos más fuertes $B \geq 10^{14}\,\mathrm{G}$, además, por rotar relativamente más despacio. Cuando la fuerza del campo magnético es suficientemente fuerte, causa una fractura en la superficie y produce poderosas emisiones de rayos x y rayos gamma en un breve periodo de tiempo.

Actualmente, se considera que, de cada diez explosiones de supernovas, solamente una da origen al nacimiento de un magnetar. La vida activa es muy corta, ya que sus potentes campos magnéticos decaen pasados 10.000 años perdiendo consecuentemente su emisión electromagnética de alta energía [48].

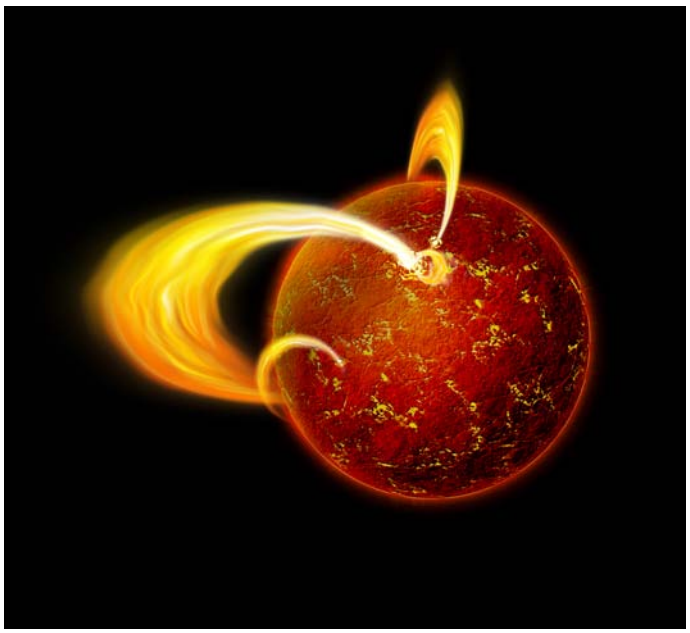


Figura 2.7.: Estallido de rayos gamma de un Magnetar [7] .

3. Conceptos Magnetohidrodinámicos básicos para astrofísica

3.1. Ecuaciones básicas de la magnetohidrodinámica

La magnetohidrodinámica es la teoría que describe la dinámica de un fluido conductor en presencia de un campo electromagnético, especialmente cuando las corrientes establecidas en el fluido por inducción, modifican el campo. En hidrodinámica generalmente se trata el fluido como un medio isotrópico; es decir, el fluido no presenta una preferencia direccional en el espacio y se comporta de igual forma en cualquier dirección. En MHD al tratarse de un fluido que interactúa con el campo magnético es más complejo el fenómeno, debido a que este, sí presenta una dirección preferencial espacial, por lo que el fluido magnetizado debe tratarse como un medio anisotrópico. Ya que existe una interacción entre el fluido y el campo magnético, se deben acoplar las ecuaciones de Maxwell con las ecuaciones dinámicas del fluido. Aproximación MHD ideal:

- Aproximación de fluido: las cantidades termodinámicas locales pueden ser definidas de manera significativa en el plasma, y las variaciones en estas cantidades son pequeñas comparadas con la escala de tiempo de los procesos microscópicos en el plasma.
- En el plasma, existe una relación local instantánea entre el campo eléctrico y la densidad de corriente; es decir, se cumple la *Ley de Ohm.*
- Se asume una alta conductividad eléctrica, lo cual previene la separación de las cargas eléctricas y por lo tanto la generación de un campo eléctrico. Por lo tanto, esto implica que los campos eléctricos resultantes son pequeños comparados con los campos magnéticos (Cuasi-neutralidad). Es decir, la densidad de energía magnética es mucho mayor que la densidad de energía eléctrica).
- Se asume que las colisiones son suficientemente frecuentes para que la distribución de partículas sea Maxwelliana y que la temperatura electrónica T_e y iónica T_i sean iguales, $T_e = T_i$.
- Se ignoran los avances más significativos de la física desde 1860: *Teoría de la Relatividad* ($v^2 \ll c^2$), *Mecánica Cuántica,* Corriente de Desplazamiento en la *Ley de Ampere.*

3.2. Conservación de la masa: Ecuación de continuidad

Consideremos un volumen $\mathcal{V}$ definido con una superficie $\mathcal{A}$ conteniendo un plasma con densidad másica ρ_m, Figura 3.1. El volumen total de la masa $\mathcal{M}$ es:

$$\mathcal{M} = \iiint \rho_m dV, \tag{3.1}$$

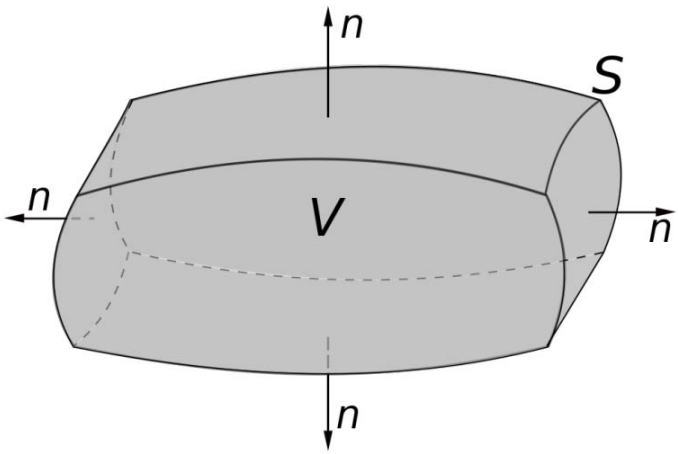


Figura 3.1.: Esquema que representa el volumen $\mathcal{V}$ que contiene un plasma

El cambio de la masa $d\mathcal{M}/dt$ en este volumen solo puede ser originado por el flujo de material a través de una elemento de superficie $d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{n}}ds$, el cual es $\rho_m \mathbf{v}.d\mathbf{s}$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector normal a la superficie y $\mathbf{v}$ es la velocidad del fluido.

$$\iiint \frac{\partial \rho_m}{\partial t} d\mathcal{V} = -\oiint \rho_m \mathbf{v}.d\mathbf{s}, \tag{3.2}$$

Usando el *Teorema de Gauss* se obtiene,

$$\iiint \left[\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla.\left(\rho_m \mathbf{v}\right) \right] d\mathcal{V} = 0, \tag{3.3}$$

esto debe ser cierto, para cualquier volumen; por lo tanto, el integrando debe ser igual a cero, dando lugar a la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = -\nabla.\left(\rho_m \mathbf{v}\right), \tag{3.4}$$

el término izquierdo de la Ecuación 3.4 representa la forma en que la densidad másica está cambiando temporalmente y el derecho es la medida del grado en que

la velocidad converge o diverge en un punto, o, en otras palabras, mide el grado en que la velocidad del fluido entra o sale a medida que un volumen se contrae y el signo menos representa el decremento. Esto da lugar a un fenómeno advectivo, el cual representa la medida del grado en que cambia ρ_m influenciado por un campo de velocidades.

- $\nabla.\mathbf{v} < 0$ →Es un flujo convergente, es decir, el fluido se está comprimiendo.
- $\nabla.\mathbf{v} > 0$ →Es un flujo divergente, lo cual indica que el fluido se está dilatando o expandiendo.
- $\nabla.\mathbf{v} \equiv 0$ →El plasma es incompresible, es decir, el fluido posee una densidad másica constante.

3.3. Ecuación del momento

La segunda Ley de Newton de movimiento para un elemento de fluido es,

$$\rho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{3.5}$$

Dónde $\mathbf{F}$ es la fuerza que actúa por unidad de volumen sobre el elemento. Algunos ejemplos de fuerza incluyen:

- Fuerza de Lorentz: $\mathbf{F_L} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}/c$
- Fuerza de gradiente de presión: $\mathbf{F_{\nabla P}} = -\nabla P$
- Fuerza gravitacional: $\mathbf{F_g} = -\rho_m \mathbf{g}$ o $\mathbf{F_g} = -\nabla \Phi$, para un potencial gravitacional Φ
- Fuerza de viscosidad: $\mathbf{F_V} = \nabla.\Pi$, donde Π es el tensor de estrés de viscosidad.

Desde el punto de vista Euleriano, se considera como las propiedades del fluido varían en el tiempo en un punto fijo en el espacio, definido usualmente como un sistema de coordenadas inercial. La derivada temporal Euleriana es simplemente,

$$\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.6}$$

desde el punto de vista Lagrangiano, se consideran como las propiedades del fluido varían en el tiempo en un punto que se mueve con el fluido. La derivada temporal Lagrangiana es luego,

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla, \tag{3.7}$$

la ecuación del momento de la MHD ideal en forma Lagrangiana, despreciando la fuerza gravitacional e ignorando las fuerzas de viscosidad es,

$$\rho_m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla \right) \mathbf{v} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \nabla P, \tag{3.8}$$

el segundo término a mano derecha de la Ecuación 3.8 empuja el plasma desde regiones de altos valores de presión, hacia lugares en donde las presiones del plasma son bajas. Esto se muestra en la Figura 3.2

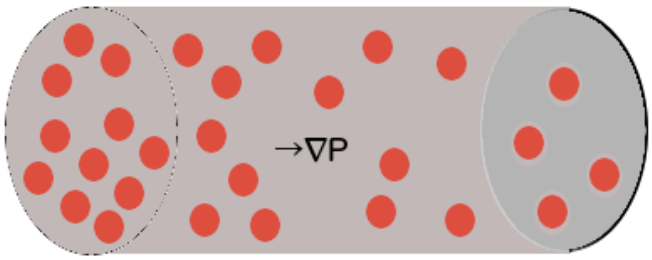


Figura 3.2.: Esquema que representa físicamente la fuerza que se produce debido a un gradiente de presión ∇P y que tienden a generar movimiento en las partículas que conforman el plasma

Cuando una partícula cargada se encuentra bajo la influencia de un campo electromagnético, ésta experimenta una fuerza conocida como Fuerza de Lorentz, la cual determina su comportamiento, y se define como,

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}\right), \tag{3.9}$$

y la densidad de corriente está dada por,

$$\mathbf{J} = \sum_{\alpha} n_\alpha q_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \tag{3.10}$$

donde α incluye todas las especies de iones y electrones. Sin embargo, para un plasma quasineutral con electrones y iones cargados individualmente, la corriente está dada por,

$$\mathbf{J} = en\left(\mathbf{v_i} - \mathbf{v_e}\right), \tag{3.11}$$

donde $n = n_e = n_i$ es la densidad de carga, $\mathbf{v_i}$ es la velocidad del ion y $\mathbf{v_e}$ es la velocidad del electrón.

Además, un fluido por el cuál circula una densidad de corriente $\mathbf{J}$, en presencia de un campo magnético $\mathbf{B}$, experimenta una una Fuerza de Lorentz por unidad de volumen dada por,

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{J}\times\mathbf{B}}{c} = \frac{(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}}{4\pi}, \tag{3.12}$$

esto puede ser entendido como la suma individual de las fuerzas sobre partículas cargadas individuales

$$\sum q\mathbf{v}\times\mathbf{B} = \left(\sum q\mathbf{v}\right)\times\mathbf{B}, \tag{3.13}$$

utilizando la *Ley de Ampere*, e identidades vectoriales, la Fuerza de Lorentz se puede descomponer en dos términos con fuerzas ortogonales a $\mathbf{B}$

$$\frac{\mathbf{J}\times\mathbf{B}}{c} = \frac{(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}}{4\pi}, \tag{3.14}$$

$$\frac{\mathbf{B}.\nabla\mathbf{B}}{4\pi} - \nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right), \tag{3.15}$$

estos dos términos dan lugar a dos fenómenos, uno de ellos es conocido como tensión magnética (primer término de la Ecuación 3.15), la cual hace referencia a la tasa de cambio que es observada en el campo magnético cuando se avanza a lo largo de este, y el otro es conocido como presión magnética, que es la medida de la densidad de energía asociada con el campo.

La Fuerza de Lorentz debe ser ortogonal a $\mathbf{B}$, por lo tanto, ambos términos deben tener componentes a lo largo de $\mathbf{B}$. La componente paralela de la tensión anula la parte paralela del término de la presión magnética.

Definiendo un vector unitario $\hat{\mathbf{b}}$ en la dirección local de $\mathbf{B}$: $\hat{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{B}/\mid\mathbf{B}\mid$, el término $\mathbf{B}.\nabla\mathbf{B}$ de la Fuerza de Lorentz sería,

$$\mathbf{B}.\nabla\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{b}}.\nabla\left(B\hat{\mathbf{b}}\right) = \frac{\hat{\mathbf{b}}\left(\hat{\mathbf{b}}.\nabla\right)B^2}{2} + B^2\hat{\mathbf{b}}.\nabla.\hat{\mathbf{b}}, \tag{3.16}$$

el término $\hat{\mathbf{b}}.\nabla.\hat{\mathbf{b}}$ es el encargado de curvar las líneas de campo magnético. Así es conveniente definir un vector $\hat{\mathbf{n}}$ que apunta hacia el centro de la curvatura, Figura 3.3

$$\hat{\mathbf{n}} \equiv \hat{\mathbf{b}}\nabla.\hat{\mathbf{b}} = -\frac{\mathbf{R_c}}{R_c^2}, \tag{3.17}$$

Donde $\mathbf{R_c}$ es un vector desde el centro de la curvatura hacia el punto considerado. Nótese que $\mid\hat{\mathbf{n}}\mid = \mathbf{R_c^{-1}}$ y $\hat{\mathbf{n}}.\hat{\mathbf{b}} = 0$

Teniendo esto en cuenta, se puede reescribir la Fuerza de Lorentz como,

$$\frac{\mathbf{J}\times\mathbf{B}}{c} = \frac{\hat{\mathbf{b}}\left(\hat{\mathbf{b}}.\nabla\right)B^2}{8\pi} + \frac{B^2\hat{\mathbf{b}}\nabla.\hat{\mathbf{b}}}{4\pi} - \nabla\left(\frac{B^2}{8\pi}\right), \tag{3.18}$$

$$\hat{\mathbf{n}}\frac{B^2}{4\pi} - \frac{B^2}{8\pi}\left[\hat{\mathbf{b}}\left(\hat{\mathbf{b}}.\nabla\right) - \nabla\right], \tag{3.19}$$

definiendo el operador $\nabla_\perp \equiv \nabla - \hat{\mathbf{b}}\left(\hat{\mathbf{b}}.\nabla\right)$ el cual solo actúa de forma perpendicular a la dirección del campo magnético local; entonces, la Fuerza de Lorentz se puede reescribir como,

$$\frac{\mathbf{J}\times\mathbf{B}}{c} = \hat{\mathbf{n}}\frac{B^2}{4\pi} - \nabla_\perp\left(\frac{B^2}{8\pi}\right), \tag{3.20}$$

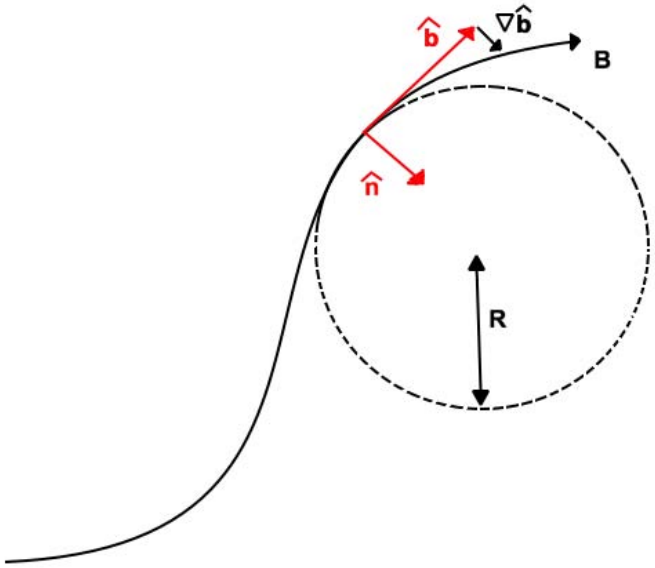


Figura 3.3.: Representación de la forma en que actúa el término $\hat{\mathbf{b}}.\nabla.\hat{\mathbf{b}}$ en un campo magnético $\mathbf{B}$. Donde $\hat{\mathbf{b}}$ es un vector normal unitario que se dirige en dirección del campo magnético, R es el radio de la circunferencia que puede ser generada en la semicurva generada por el curvamiento de la línea de campo y $\nabla.\hat{\mathbf{b}}$ es la divergencia generada.

de la anterior ecuación se puede detallar que el campo magnético ejerce dos fuerzas en el fluido. Como es de esperar, ninguna de estas fuerzas tiene componente paralela al campo magnético. La fuerza de tensión magnética $\hat{\mathbf{n}}\,(B^2/4\pi)$ actúa de forma perpendicular a las líneas de campo magnético, tal y como se muestra en la Figura 3.4 y el signo de éste significa que el fluido se acelera o se desacelera hacia el centro de la curvatura de la línea del campo. Esto se deduce a partir del concepto de enfriamiento del flujo de campo magnético, el cual se discutirá más adelante. El plasma puede arrastrar la línea magnética con él; luego, esta fuerza actúa con el fin de enderezar la línea del campo reduciendo esta curvatura.

El término de la presión magnética $\nabla_{\perp}\,(B^2/8\pi)$ actúa para conducir el campo magnético desde regiones de elevada densidad de líneas de fuerza hacia sitios de menor densidad. Esto se muestra en la Figura 3.5 [49, 50, 51].

3.4. Ecuación de energía

Las ecuaciones de MHD ideal no tienen en cuenta procesos de disipación de energía, los cuales pueden ocurrir en el movimiento de un fluido como consecuencia de fricción interna (viscosidad) e intercambio de calor entre diferentes partes de este. La ausencia de intercambio de calor entre diferentes partes del fluido significa que el movimiento es adiabático. Por lo tanto, la entropía de cualquier partícula del fluido

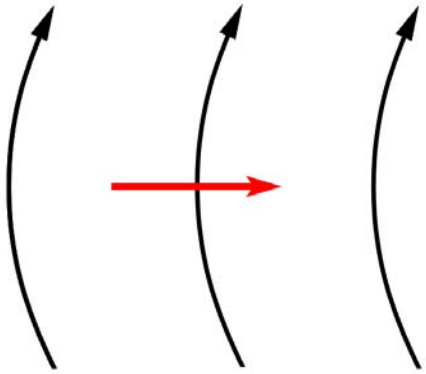


Figura 3.4.: La imagen representa el concepto de tensión magnética. Cuando las líneas de campo magnético se curvan (líneas negras), se genera una fuerza de restitución (línea roja) que tiende a reducir la tensión en las líneas (curvatura).

permanece constante, $S =$*constante,* a medida que se mueve en el espacio, lo que se conoce como fluido isentrópico.

$$\frac{dS}{dt} = 0, \tag{3.21}$$

se conoce de la *Primera Ley de la Termodinámica,* $dU = dQ - PdV$. Si consideramos un elemento de masa del fluido, el cual posee un volumen $1/\rho_m$ y energía interna U,

$$dU = dQ - pd\left(\frac{1}{\rho_m}\right), \tag{3.22}$$

$$dU = dQ + \frac{Pd\,\rho_m}{\rho_m^2}, \tag{3.23}$$

tomando la derivada temporal, resulta,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \frac{P}{\rho_m^2}\frac{d\rho_m}{dt}, \tag{3.24}$$

reemplazando la Ecuación 3.4 en Ecuación 3.24, se obtiene,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dQ}{dt} - \frac{P}{\rho_m}\nabla.\mathbf{v}, \tag{3.25}$$

si se considera que, en el plasma la energía de interacción entre las partículas es pequeña en comparación con la energía cinética media del movimiento térmico de las partículas, es posible considerar que el plasma, en el sentido termodinámico se comporta como un gas ideal perfecto. De esta manera, la energía interna $U = U\,(P,\rho_m)$

$$U = \frac{P}{\rho_m\,(\gamma - 1)}, \tag{3.26}$$

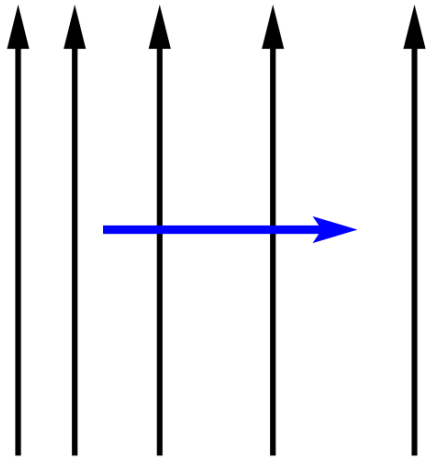


Figura 3.5.: Densidad de líneas de campo magnético (líneas negras) reunida en una región espacialmente definida, que produce un gradiente de presión magnético (línea azul) que actúa de forma perpendicular a las líneas y tiende a equilibrarlas con el fin de reducir el aumento de densidad.

donde γ es el coeficiente de dilatación adiabática y está definido como la razón entre el calor específico a presión constante, C_p y el calor específico a volumen constante, C_v. El cual está dado por,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \tag{3.27}$$

en este caso, la ecuación de energía puede ser escrita de forma cómo,

$$\frac{dP}{dt} = (\gamma - 1)\frac{dQ}{dt} - \gamma P \nabla . \mathbf{v}, \tag{3.28}$$

teniendo en cuenta que el fluido es isentrópico, y que por lo tanto no hay intercambio de calor $dQ/dt = 0$,

$$\frac{dP}{dt} = -\gamma P \nabla . \mathbf{v}, \tag{3.29}$$

y de forma Euleriana, la ecuación de energía se expresaría cómo,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}.\nabla\right) P = -\gamma P \nabla . \mathbf{v}, \tag{3.30}$$

el término a mano derecha de la Ecuación 3.30 representa el calentamiento o enfriamiento debido a compresiones o expansiones adiabáticas [52, 53]

3.5. Ecuación de inducción

La *Ley de Faraday* predice la forma en que el campo magnético varía con el tiempo,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times \mathbf{E}, \tag{3.31}$$

se sabe que cuando la resistencia $R \to 0$, entonces la conductividad $\sigma \to \infty$ y el campo eléctrico en el marco de referencia del fluido (marco comovil) $\mathbf{E}' = 0$. Esto es necesario ya que, si no es cero, la corriente eléctrica seria arbitrariamente grande. Sin embargo, el fluido se encuentra en movimiento debido a la presencia del campo magnético. $\mathbf{E}'$ tiende a cero solo en el marco de referencia de movimiento con el fluido; no obstante, en cualquier otro marco de referencia debe tenerse en cuenta.

Asumiendo que el fluido se mueve con velocidad, v relativa a un observador, $\mathbf{E}'$ y $\mathbf{B}'$ son los campos eléctrico y magnético respectivamente, medidos en el marco de referencia inercial dónde el fluido está en reposo (localmente en un punto r y un tiempo t). Estos campos están relacionados a $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, medidos en el marco de referencia del observador.

Por transformaciones de Lorentz, el campo eléctrico visto por el elemento conductor $\mathbf{E}'$ está dado por,

$$\mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{3.32}$$

esta es una Invariante de Lorentz, pero las ecuaciones son solo Invariantes Galileanas. Expandiendo el denominador.

$$\mathbf{E}' = \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + ...\right), \tag{3.33}$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \tag{3.34}$$

retomando $\mathbf{E}' = 0$, e ignorando $\mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$ ya que $v \ll c$, se llega a la *Ley de Ohm ideal,*

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{B}}{c} = 0, \tag{3.35}$$

y reemplazando en la Ecuación 3.31,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c\nabla \times (\mathbf{v}\times\mathbf{B}), \tag{3.36}$$

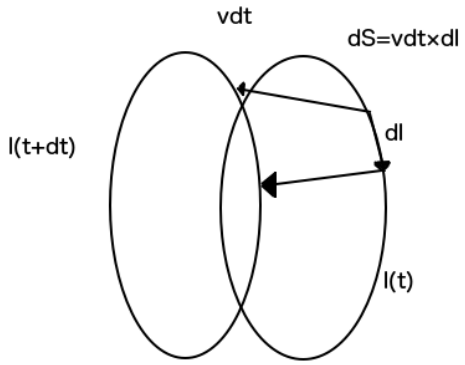


Figura 3.6.: Esquema representativo del movimiento del flujo magnético en un plasma siguiendo la teoría MHD ideal

la consecuencia principal de la *Ley de Ohm ideal,* lleva a un concepto conocido como *Congelamiento del flujo del campo magnético.*

Consideremos una superficie $S\,(t)$ delimitada por un conjunto de elementos de fluido l, los cuales pueden cambiar de forma y posición en el tiempo. Cada punto en la curva se mueve con la velocidad local del fluido $\mathbf{v}$ Figura 3.6.

Ahora, utilizando la Ecuación 2.6, es conveniente detallar como cambia Φ de acuerdo a como l se mueve con el fluido. El elemento de fluido consiste de dos partes:

1. $d\Phi_1$ debido a cambios en $\mathbf{B}$, con l y S permaneciendo fijos

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_1 = \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.d\mathbf{S} = -c \iint \nabla \times \mathbf{E}.d\mathbf{S} = -c \oint \mathbf{E}.d\mathbf{l}, \tag{3.37}$$

2. $d\Phi_2$ el flujo magnético llevado por l con el fluido. A medida que se mueve alrededor de S, cada elemento de línea que comprende se mueve una distancia $\mathbf{v}dt$, y cubre un área lateral $d\mathbf{S} = \mathbf{v}dt \times d\mathbf{l}$. El flujo a través de esta área es, $d\Phi_2 = \mathbf{B}.d\mathbf{S} = \mathbf{B}.\mathbf{v} \times d\mathbf{l}dt$, entonces

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2 = c \oint \mathbf{B}.\mathbf{v} \times d\mathbf{l} = -c \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B}.d\mathbf{l}, \tag{3.38}$$

el cambio total del flujo a través de l es luego,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_1 + \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_2, \tag{3.39}$$

$$= -c \oint \mathbf{E}.d\mathbf{l} - c \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B}.d\mathbf{l}, \tag{3.40}$$

$$= -c \oint (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \, .d\mathbf{l}, \tag{3.41}$$

sin embargo, en MHD ideal, se tiene que $\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0$; por lo tanto, $d\Phi/dt = 0$. Se concluye que en MHD ideal, el flujo total del campo magnético a través de S permanece constante a medida que se mueve con el plasma. Este importante resultado es conocido como *"Condición de Congelamiento"*. Esto puede pensarse como si las líneas de campo estuvieran atadas al fluido (y viceversa); el fluido no puede moverse a través del campo magnético [54].

3.6. Magnetohidrodinámica Resistiva

Las condiciones en las que se encuentran los sistemas estelares de alta conductividad, como en estrellas, galaxias, y discos de acreción, permite a la magnetohidrodinámica ideal describir el plasma como un fluido altamente conductor en presencia de un campo magnético externo. Debido a las escalas espaciales que presentan estos medios, es correcto afirmar que, en los plasmas cósmicos, los campos magnéticos obedecen la condición de congelamiento.

La descripción bajo esta teoría, no es válida para pequeñas escalas espaciales, en las que el campo magnético se construye y evoluciona debido a fuerzas externas como gravedad, rotación o explosiones. En estos eventos, el campo magnético es cortado, retorcido y comprimido, lo cual lleva a estructuras más complejas, por lo que la descripción MHD ideal no puede ser aplicada. Es allí donde se modifica la Ley de Ohm.

Se sabe que, la relación entre el campo magnético y la densidad de corriente, está dado por la Ley de Ampere,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \tag{3.42}$$

la evolución del campo magnético estaría determinada entonces por la Ley de Ohm para un conductor inmóvil $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}'$. Sin embargo, ahora consideramos un plasma en el cuál la conductividad no es infinita y que, además existe un campo eléctrico proveniente del movimiento del fluido inmerso en un campo magnético externo. Por lo tanto, la Ley de Ohm debe modificarse. Con base en estas suposiciones y retomando resultados anteriores, el campo eléctrico estaría dado por,

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}, \tag{3.43}$$

ahora, la Ley de Ohm debe ser escrita,

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right), \tag{3.44}$$

en el límite para campos que varían lentamente en el tiempo, la corriente de desplazamiento puede ser ignorada y la Ley de Ampere $\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi\sigma}(\nabla \times \mathbf{B})$ es válida. Luego, el campo eléctrico toma la forma,

$$\mathbf{E} = \frac{c}{4\pi\sigma}(\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{3.45}$$

y reemplazando en la Ecuación 3.31 se obtiene,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma}[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})] + c\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{3.46}$$

utilizando la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2\mathbf{B} + \nabla(\nabla.\mathbf{B})$, finalmente se llega a,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\mathbf{B} + c\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{3.47}$$

esta ecuación describe, para un plasma con velocidad $\mathbf{v}$, cómo el campo magnético cambia con el tiempo como resultado de la convección del campo magnético en el plasma (segundo término del lado derecho de la Ecuación 3.47) y la difusión en el plasma (primer término del lado derecho de la Ecuación 3.47) es la medida del grado de difusión del campo magnético hacia el fluido conductor.

Se puede examinar la ecuación de inducción, bajo dos casos dependiendo de cuál de los términos es el dominante.

- $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ Dominante - Convección: Este caso, corresponde a la conductividad infinita, el cual esta explicado por la MHD ideal, el campo magnético y el fluido están conectados íntimamente. Las líneas de campo son transportadas por la convección con el fluido y la alta conductividad no permite la difusión del campo magnético en el plasma, ni la creación de campos internos. Esto es explicado mediante el congelamiento del flujo de campo magnético, además de que la respuesta del fluido es mediante la fuerza $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$.
- $\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\mathbf{B}$ Dominante - Difusión: En este caso, la ecuación de inducción toma la forma de una ecuación de difusión. Las líneas de campo pueden difundirse a través del plasma. No existe un acople entre el campo magnético y el fluido conductor [55, 56, 57, 58].

3.7. Magnetohidrodinámica de electrones

Ahora si se tiene en cuenta que en la corteza de una estrella de neutrones, los iones permanecen fijos y los electrones son la especie móvil. Es posible describir su evolución magnética. Se sabe que la densidad de corriente está dada por, $\mathbf{J} = ne\mathbf{v}$, y reemplazando en la Ecuación 3.46 da lugar a,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma}[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})] - c\nabla \times \left(\frac{\mathbf{J}}{ne} \times \mathbf{B}\right), \tag{3.48}$$

nuevamente utilizando la Ley de Ampere, y suponiendo que el comportamiento de la conductividad, al igual que la densidad electrónica es constante en la corteza, resulta,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma}\left[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B})\right] - \frac{c}{4\pi n e}\left\{\nabla \times \left[(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}\right]\right\}, \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{c}{4\pi n e}\left\{\nabla \times \left[(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}\right]\right\}, \tag{3.50}$$

donde $\eta = c^2/4\pi\sigma$ es conocida como difusividad magnética, la cuál es la medida de la tendencia de un campo magnético a difundirse a través de un plasma.

Una ecuación más general [26], incluye los efectos del movimiento de los protones en la corteza y que además puede ser utilizada para describir la evolución del campo magnético en el núcleo dónde los protones se encuentran en movimiento. Por simplicidad se tomará la conductividad eléctrica y térmica como constantes, lo cual no es correcto si se tiene en cuenta la evolución térmica de la estrella [21, 59].

La evolución dinámica del campo magnético va a estar determinada por la competencia entre dos términos contenidos en la Ecuación 3.50. En las primeras etapas de evolución, el efecto no-lineal Hall (segundo término) va a ser dominante sobre el término lineal Ohm. La corriente Hall inducida por el campo magnético va a generar un acople entre diferentes modos, redistribuyendo la energía y alterando la configuración magnética. El mecanismo involucrado en este proceso, es un efecto de turbulencia MHD conocido como "Cascada Hall" (el proceso de transferencia de una cantidad que se conserva es llamada cascada). En otras palabras, la energía magnética se transporta en cascada desde una escala mayor hacia pequeñas escalas, en donde es disipada por el decaimiento Ohm. Un esquema de este proceso se presenta en la Figura 3.7.

El esquema representa tres etapas de evolución magnética.

La primera consiste en el estado inicial de la energía magnética total de la estrella, la cual puede considerarse como el punto en el cual la estrella de neutrones ha sido creada y contiene el valor máximo de energía.

La segunda etapa corresponde a escalas de tiempo en las cuales el efecto no-lineal Hall distribuye la energía, esto se traduce en la formación de pequeñas estructuras magnéticas durante la evolución. El efecto Hall también produce otro efecto. El fenómeno del decaimiento del campo magnético puede ser entendido como un sistema físico disipativo que es llevado a un estado de equilibrio dinámico que es independiente de la condición inicial. Esto se conoce como Atractor Hall [32].

Y finalmente en escalas tiempo más grandes, las estructuras magnéticas son más pequeñas y los efectos del término lineal Ohm son más fuertes, permitiendo que la energía magnética pueda ser disipada de una forma más eficiente en calor [60].

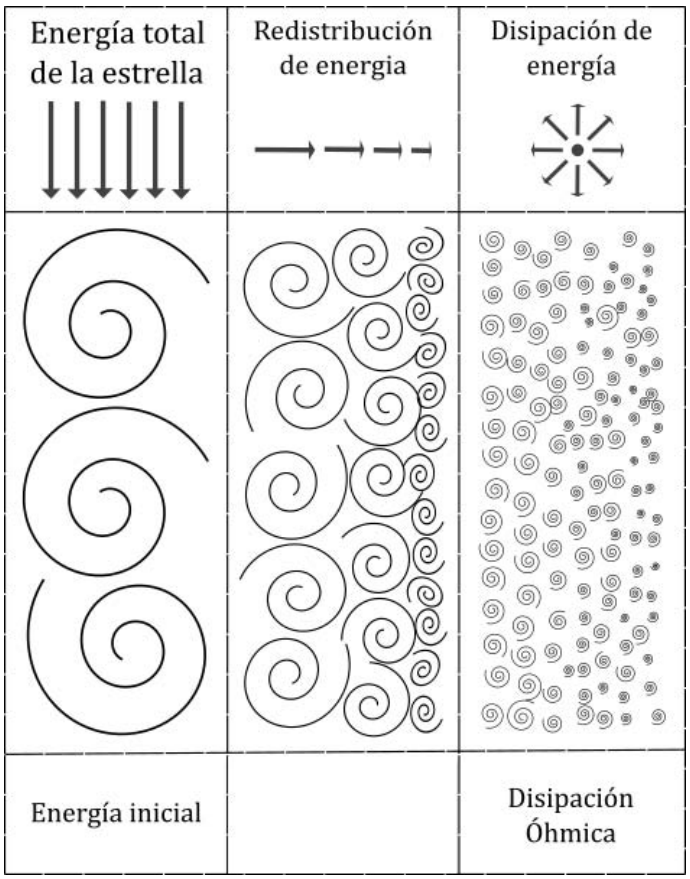


Figura 3.7.: Esquema que representa el fenómeno físico de la turbulencia MHD que se produce debido al término no lineal Hall.

Con el fin de extraer más información acerca de los fenómenos involucrados en la ecuación Ecuación 3.50, se puede considerar un caso particular en el cuál la evolución del campo magnético es bidimensional (2D), luego, el campo magnético puede ser descompuesto explícitamente como función de un campo poloidal $\mathbf{B}_p = \mathbf{B}_r + \mathbf{B}_\theta$ y uno toroidal $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_\phi$([61]). Luego si se reemplaza en la Ecuación 3.50 se obtiene la evolución del campo magnético como función de las componentes poloidales y toroidales,

$$\frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} = -\{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_p) + R_\mathcal{B} \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}_T) \times \mathbf{B}_p]\} \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_T}{\partial t} = -\{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}_T) + R_\mathcal{B} \nabla \times [(\nabla \times \mathbf{B}_p) \times \mathbf{B}_p + (\nabla \times \mathbf{B}_T) \times \mathbf{B}_T + (\nabla \times \mathbf{B}_p) \times \mathbf{B}_T]\} \tag{3.52}$$

donde $R_\mathcal{B} = \frac{\sigma B_0}{cne}$ es conocido como Número Magnético de Reynolds (ver Subsección 4.1.1)

El anterior sistema de ecuaciones muestra dos situaciones particulares. La primera es que las componentes poloidales y toroidales van a estar fuertemente acopladas

en su evolución. Lo segundo es que, si el campo inicial es puramente poloidal, se va a inducir una componente toroidal. Por otra parte, si el campo es inicialmente puramente toroidal, este va a permanecer así.

El término no-lineal va a producir oscilaciones Hall en cada una de las componentes poloidal y toroidal. Sin embargo, al ser el efecto Hall no disipativo, el decrecimiento de la energía en una de las componentes se traduce en un aumento de la energía en la otra. Estas oscilaciones pueden ser entendidas, por ejemplo, si se considera el comportamiento de ondas lineales en un plasma magnetizado [62]. Siguiendo el mismo procedimiento empleado por Shalybkov y Urpin [27]. De la Ecuación 3.52 se puede apreciar que $(\nabla \times \mathbf{B}_p)$ es el vector toroidal, por lo tanto $(\nabla \times \mathbf{B}_p) \times \mathbf{B}_T = 0$.

Ahora puede estudiarse la evolución que genera una perturbación en un campo inicial puramente poloidal y uniforme que permanece constante $\mathbf{B}_{p0}$, si se toman pequeñas perturbaciones en los campos poloidal $\delta\mathbf{B}_p$ y toroidal $\delta\mathbf{B}_T$. Como suposiciones iniciales se tendrá en cuenta que el radio de la corteza y la escala de longitud de $\mathbf{B}_{p0}$ es mucho más grande que la longitud de onda de las perturbaciones. Linealizando el anterior sistema de ecuaciones se obtiene,

$$\frac{\partial \delta\mathbf{B}_p}{\partial t} = -\{\nabla \times (\nabla \times \delta\mathbf{B}_p) + R_{\mathcal{B}} \nabla \times [(\nabla \times \delta\mathbf{B}_T) \times \mathbf{B}_{p0}]\} \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{B}_T}{\partial t} = -\{\nabla \times (\nabla \times \delta\mathbf{B}_T) + R_{\mathcal{B}} \nabla \times [(\nabla \times \delta\mathbf{B}_p) \times \mathbf{B}_{p0}]\} \tag{3.54}$$

Lo siguiente es suponer que $\delta\mathbf{B}_T$ y $\delta\mathbf{B}_p$ evolucionan como $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}.\mathbf{r})$, siendo ω la frecuencia y $\mathbf{k}$ el vector de onda. Además, teniendo el caso de una onda plana (onda cuyas superficies de fase constante son planos paralelos infinitos normales a la dirección de propagación), se encuentra,

$$(i\omega + \omega_p)\, \delta\mathbf{B}_p = -R_{\mathcal{M}} (\mathbf{k}.\mathbf{B}_{p0})\, \mathbf{k} \times \delta\mathbf{B}_t \tag{3.55}$$

$$(i\omega + \omega_p)\, \delta\mathbf{B}_T = -R_{\mathcal{M}} (\mathbf{k}.\mathbf{B}_{p0})\, \mathbf{k} \times \delta\mathbf{B}_p \tag{3.56}$$

donde $\omega_p = 1/t_{ohm} = c^2/4\pi\sigma k^2$ es el inverso del decaimiento óhmico de la onda. La corriente Hall asociada con $\delta\mathbf{B}_T$ cambia en fuerza, y a su vez, la energía del campo poloidal. El mismo caso sucede para la energía toroidal. De esta manera, Ecuación 3.55 y Ecuación 3.56 presentan un fuerte acoplamiento entre las componentes del campo. La relación de dispersión para el anterior sistema de ecuaciones es,

$$\omega = \pm \frac{\omega_p R_{\mathcal{B}} (\mathbf{k}.\mathbf{B}_{p0})}{k + i\omega_p} \tag{3.57}$$

En un campo magnético muy fuerte $R_{\mathcal{M}} (\mathbf{k}.\mathbf{B}_{p0}) \gg 1$, esta ecuación describe ondas con un periodo $P = 2\pi k/\omega_p R_{\mathcal{B}} (\mathbf{k}.\mathbf{B}_{p0})$ y con una amplitud decayendo debido a la disipación óhmica. A partir de este simple método, se pudo encontrar cómo el término Hall da origen a las oscilaciones en la corteza de la estrella.

4. Resultados y análisis

4.1. Métodos analíticos

4.1.1. Aproximación por órdenes de magnitud

Para aclarar el planteamiento utilizado en la Ecuación 3.51 y la Ecuación 3.52. Se realiza se transforman las variables físicas en variables no dimensionales.

El objetivo principal es escribir la ecuación de inducción en términos adimensionales. Para ello, se definen unas variables de normalización dadas por,

$$\nabla^* = \Delta_c \nabla \qquad \mathbf{B}^* = \mathbf{B}/B_0 \qquad t^* = t/\tau, \tag{4.1}$$

Donde las cantidades con asterisco son denominadas variables adimensionales, los términos con subíndice 0 son valores característicos del sistema y el subíndice c se refiere al ancho característico de la corteza.

Reemplazando en la Ecuación 3.50 se obtiene,

$$\frac{\partial\left(\mathbf{B}^* B_0\right)}{\partial\left(t^* \tau\right)} = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\nabla^{2*}}{\Delta_c^2}\left(\mathbf{B}^* B_0\right) - \frac{c}{4\pi n e}\left\{\frac{\nabla^*}{\Delta_c} \times \left[\left(\frac{\nabla^*}{\Delta_c} \times \left(\mathbf{B}^* B_0\right)\right) \times \left(\mathbf{B}^* B_0\right)\right]\right\}, \tag{4.2}$$

La Ecuación 3.50 involucra dos términos, con dos efectos completamente diferentes. De esta forma, éstos actúan en dos escalas distintas de tiempo, las cuales pueden ser definidas como tiempo Hall, el cual es el intervalo de tiempo en donde el efecto Hall es predominante y el tiempo Ohm para el cuál el efecto Ohm es significativo.

Para encontrar el tiempo Hall, tomamos el segundo término de la parte izquierda de la Ecuación 4.2 , con lo cual se obtiene,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \sim \frac{B}{t}, \tag{4.3}$$

$$\frac{c}{4\pi n e}\left\{\nabla \times \left[\left(\nabla \times \mathbf{B}\right) \times \mathbf{B}\right]\right\} \sim \frac{c B^2}{4\pi n e \Delta^2}, \tag{4.4}$$

Igualando estos dos términos, y despejando para el tiempo se obtiene,

$$t \sim \frac{4\pi n e \Delta^2}{c B}, \tag{4.5}$$

luego, el tiempo Hall característico es,

$$t_{Hall} \sim \frac{4\pi n e \Delta_c^2}{c B_0}, \tag{4.6}$$

Realizando el mismo procedimiento anterior para el primer término de la Ecuación 4.2 , se obtiene el tiempo Ohm característico,

$$t_{Ohm} \sim \frac{4\pi \sigma \Delta_c^2}{c^2}, \tag{4.7}$$

Un valor estimado de estas dos escalas de tiempo, en lugar del radio total de la estrella fue desarrollado por Goldreich y Reisenegger [26]

$$t_{Hall} \cong 5 * 10^8 \frac{L_5^2}{B_{12}} \left(\frac{\rho_m}{\rho_{nuc}}\right) años \qquad t_{Ohm} \cong 2 * 10^{11} \frac{L_5^2}{T_8^2} \left(\frac{\rho_m}{\rho_{nuc}}\right)^3 años, \tag{4.8}$$

Donde $L_5 = L/\left(10^5\,\mathrm{cm}\right)$, T_8 es la temperatura en unidades de $10^8\,\mathrm{K}$, $\rho_{nuc} = 2.8 * 10^{14}\ \mathrm{gcm}^{-3}$ y B_{12} es el campo magnético medido en unidades de $10^{12}\,\mathrm{G}$. Lo cual indica que las escalas de tiempo en el cual el campo magnético puede evolucionar siguiendo el efecto Hall son del orden de Myr ($1Myr = 10^6 años$) o incluso menos.

Las longitudes de Ecuación 3.50 han sido normalizadas con respecto al radio de la estrella y con respecto tiempo Óhmico. Luego la ecuación adimensional (sin tomar en cuenta las cantidades con índices *) de la evolución del campo magnético está dada por,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla^2\left(\mathbf{B}\right) - R_{\mathcal{B}}\left\{\nabla \times \left[\left(\nabla \times \left(\mathbf{B}\right)\right) \times \left(\mathbf{B}\right)\right]\right\}, \tag{4.9}$$

Donde,

$$R_{\mathcal{B}} = \frac{\sigma B_0}{cne} = \frac{t_{Ohm}}{t_{Hall}} = \frac{escala\ de\ tiempo\ de\ difusión\ resistiva}{escala\ de\ tiempo\ de\ advección}, \tag{4.10}$$

Es conocido como el *Número Magnético de Reynolds* . Su valor es adimensional y su función principal es dar un valor estimado de los efectos de advección de un campo magnético debido al movimiento del plasma con respecto a la difusión magnética.

$$Si \begin{cases} R_{\mathcal{B}} \gg 1 & la\ advección\ es\ más\ importante \\ R_{\mathcal{B}} \ll 1 & la\ resistividad\ es\ más\ importante \end{cases},$$

Para conocer aproximadamente el valor del *Número Magnético de Reynolds*, se utilizan valores de las variables en la corteza de una estrella de neutrones.

Para un magnetar $B_0 \sim 10^{15}\,\mathrm{G}$ [17], $c = 3 * 10^8\,\mathrm{cm/s}$, $e = 18 * 10^{-10}\,\mathrm{StatC}$.

En la corteza externa de la estrella, es decir, en la región $0.1 < \Delta_c < 0.3\,\mathrm{Km}$. Considerando una temperatura de $T \sim 10^8\,\mathrm{K}$, el rango de densidades se encuentra

entre $8 * 10^{10}\ \mathrm{gcm}^{-3} < \rho_m < 1.16 * 10^{11}\ \mathrm{gcm}^{-3}$ y la conductividad eléctrica $\sigma = 10^{23}\,\mathrm{s}^{-1}$ [63]. Como se explicó en la Subsección 2.2.1, la corteza está principalmente conformada por hierro y además se encuentra completamente ionizado. Entonces, la densidad electrónica,

$$n \approx \frac{Z}{A}\frac{\rho_m}{m_0} \approx \left(\frac{26}{56}\right)\left(\frac{8 * 10^{10}\ \mathrm{g.cm}^{-3}}{1.66 * 10^{-24}\ \mathrm{g}}\right) \approx 2.24 * 10^{34}\ \mathrm{cm}^{-3}, \tag{4.11}$$

Donde $Z = 26$ es el número atómico del hierro, $A = 56$ es el número másico y m_n es la masa del neutrón (dado que se multiplica por el número másico).

Reemplazando los anteriores valores, se obtiene un valor de $R_{\mathcal{B}} \approx 8000$, lo cual demuestra que en sistemas astrofísicos, los efectos de advección no pueden ser despreciados y que deben incluirse para considerar que un modelo del campo magnético en la corteza de una estrella de neutrones es aproximado a la realidad.

4.1.2. Solución a la ecuación de Inducción

La Ecuación 4.9 que representa la evolución del campo magnético $\mathbf{B}\,(r, \theta, \phi, t)$ en la corteza de estrellas de neutrones, contiene los térmicos Ohm y Hall, donde la relativa importancia entre ellos es parametrizada por el número magnético de Reynolds $R_{\mathcal{B}}$.

Uno de los métodos para solucionar este tipo de ecuaciones es el lenguaje espectral, el cual parte de la ecuación de *Maxwell* $\nabla.\mathbf{B} = 0$ (condición solenoidal) y según el *Teorema de Helmholtz*, todo campo vectorial, cuya divergencia y rotacional se anulen en el infinito puede expresarse como la suma de una parte irrotacional (o longitudinal) y otra solenoidal (o transversa) [64]. Esto es conocido como construcción de *Chandrasekhar*.

$$\mathbf{B} = \nabla \times [g\,(r, \theta, \phi, t)\,\hat{r}] + \nabla \times \nabla \times [h\,(r, \theta, \phi, t)\,\hat{r}]\,, \tag{4.12}$$

donde $g\,(r, \theta, \phi, t)$ y $h\,(r, \theta, \phi, t)$ son dos funciones escalares desconocidas que son expandidas en esféricos armónicos como,

$$h\,(r, \theta, \phi, t) = \sum_{m=0}^{\pm M_B} \sum_{l=m'}^{L_B} h_{lm}\,(r, t)\,P_l^{|m|}\,(\cos\theta)\,e^{im\phi}, \tag{4.13}$$

$$g\,(r, \theta, \phi, t) = \sum_{m=0}^{\pm M_B} \sum_{l=m'}^{L_B} g_{lm}\,(r, t)\,P_l^{|m|}\,(\cos\theta)\,e^{im\phi}, \tag{4.14}$$

con truncamientos en la serie M_B y L_B y $m' = \max(m, 1)$, estas expansiones excluyen el modo $l = m = 0$ debido a que este modo no contribuye cuando es agregado en la Ecuación 4.12. En las Ecuación 4.13 y Ecuación 4.14 se ha usado la descomposición espectral en polinomios asociados de Legendre $P_l^{|m|}\,(\cos\theta)$ para la componente

angular θ y para la parte azimutal ϕ se expande como funciones senoidales y cosenoidales. Para la componente radial, las funciones $h_{lm}(r,t)$ y $g_{lm}(r,t)$ son expandidas para cada valor l como combinación lineal de polinomios de Chebyshev $T_{k-1}(x(r))$, con $(r_i < r < r_0)$ y $x(r)$ es la componente radial normalizada en el rango $[-1,1]$ [28].

$$x(r) = \left(\frac{2}{r_0 - r_i}\right)\left[r - \left(\frac{r_0 + r_i}{2}\right)\right], \tag{4.15}$$

de donde, $x(r_i) = -1$ y $x(r_0) = 1$. Por lo tanto, la descomposición espectral incluyendo la expansión radial está dada por,

$$h(r,\theta,\phi,t) = \sum_{m=0}^{\pm M_B}\sum_{l=m'}^{L_B}\left[\sum_{k=1}^{K_B+2} h_{kl}(t)\, T_{k-1}(x(r))\right] P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\phi}, \tag{4.16}$$

$$g(r,\theta,\phi,t) = \sum_{m=0}^{\pm M_B}\sum_{l=m'}^{L_B}\left[\sum_{k=1}^{K_B+2} g_{kl}(t)\, T_{k-1}(x(r))\right] P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\phi}, \tag{4.17}$$

donde K_B es el truncamiento de la serie radial y los coeficientes h_{kl} y g_{kl} son los coeficientes espectrales cuya única dependencia es la temporal.

Desarrollando las operaciones matemáticas de la Ecuación 4.12. Es decir, realizando el rotacional de la función $g_{lm}(r,\theta,\phi,t)$ y el rotacional del rotacional de la función $h_{lm}(r,\theta,\phi,t)$. Se obtienen las siguientes componentes del campo magnético.

Para la componente radial del campo magnético.

$$B_r = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 h(r,\theta,\phi,t)}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial h(r,\theta,\phi,t)}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 h(r,\theta,\phi,t)}{\partial\phi^2}\right), \tag{4.18}$$

y para las componentes angulares

$$B_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial g(r,\theta,\phi,t)}{\partial\phi} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial h(r,\theta,\phi,t)}{\partial\theta}\right), \tag{4.19}$$

$$B_\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial h(r,\theta,\phi,t)}{\partial\phi}\right) - \frac{\partial g(r,\theta,\phi,t)}{\partial\theta}\right]. \tag{4.20}$$

Esta tesis se concentrará en estudiar la estabilidad de un campo axisimétrico de fondo (2D). Por lo tanto las derivadas con respecto al ángulo azimutal ϕ desaparecen y las componentes del campo magnético pueden separarse en una parte poloidal (B_r, B_θ) , la cual depende solo de la función $h(r,\theta,t)$. Mientras que la parte toroidal (B_ϕ) depende solamente de la función $g(r,\theta,t)$, esto se puede observar en la . Luego

en el caso bidimensional (2D) las componentes del campo magnético están dadas por,

$$B_r = -\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial h\left(r,\theta,t\right)}{\partial\theta}\right)\right], \tag{4.21}$$

$$B_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial h\left(r,\theta,t\right)}{\partial\theta}\right), \tag{4.22}$$

$$B_\phi = -\frac{1}{r}\left[\frac{\partial g\left(r,\theta,t\right)}{\partial\theta}\right]. \tag{4.23}$$

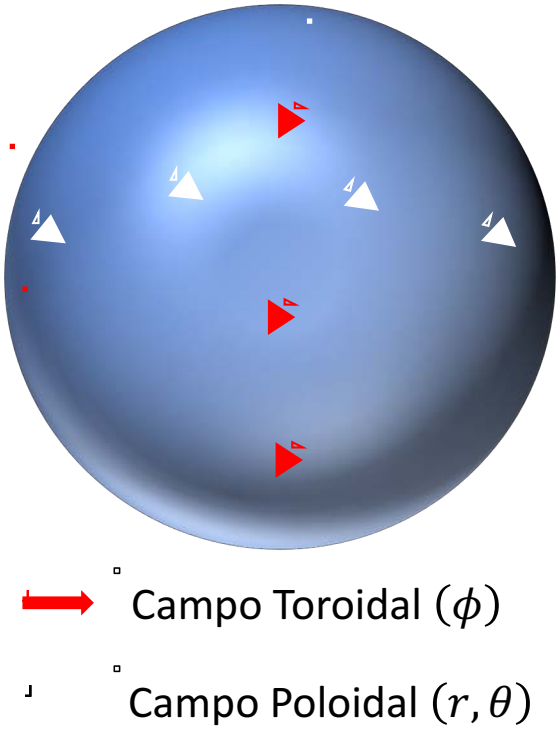


Figura 4.1.: Separación bidimensional de las componentes del campo magnético en componentes poloidal (B_r,B_θ) y toroidal (B_ϕ).

Sin embargo, en un caso general 3D en el cuál no hay simetría axial, las funciones $h\left(r,\theta,\phi,t\right)$ y $g\left(r,\theta,\phi,t\right)$ sí generan todas las componentes del campo (ver Ecuación 4.18, Ecuación 4.19 y Ecuación 4.20). Luego, la etiqueta poloidal y toroidal pierden su significado geométrico con respecto al caso 2D, en el sentido de que el nombre poloidal no solo representa las componentes (B_r, B_θ) del campo y tampoco

el nombre toroidal del campo está relacionado con la componente (B_ϕ) exclusivamente. Luego en el caso 3D general, la etiqueta poloidal se va a referir a la parte del campo generada por la función $h\left(r,\theta,\phi,t\right)$, mientras que el nombre toroidal va a estar referenciado a tal parte del campo asociada con la función $g\left(r,\theta,\phi,t\right)$. De esta forma, se preserva la terminología 2D pero teniendo en cuenta que el sentido geométrico poloidal y toroidal no es el mismo que en el caso 3D. Asimismo, la energía magnética en el caso 3D puede ser separada en partes poloidal y toroidal con el mismo significado explicado anteriormente.

Se sabe de identidades vectoriales que, $\nabla^2\mathbf{B} = \nabla\left(\nabla.\mathbf{B}\right) - \nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)$. Reescribiendo la Ecuación 4.9 resulta,

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right) - R_{\mathcal{B}}\left\{\nabla\times\left[\left(\nabla\times\left(\mathbf{B}\right)\right)\times\left(\mathbf{B}\right)\right]\right\}. \tag{4.24}$$

Con el fin de obtener un equivalente de la Ecuación 4.24 en términos del lenguaje espectral, se debe reemplazar Ecuación 4.12 y después realizar exhaustivos cálculos con el fin de llegar a un sistema de ecuaciones diferenciales para cada una de las funciones $h\left(r,\theta,\phi,t\right)$ y $g\left(r,\theta,\phi,t\right)$. Se puede encontrar,

$$\sum_{l,m}\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_l\right]h_{lm}\left(r,t\right)P_l^{|m|}\left(\cos\theta\right)e^{im\phi} = \hat{\mathbf{r}}.\nabla\times\left[\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{B}\right], \tag{4.25}$$

$$\sum_{l,m}\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}_l\right]g_{lm}\left(r,t\right)P_l^{|m|}\left(\cos\theta\right)e^{im\phi} = \hat{\mathbf{r}}.\nabla\times\left\{\nabla\times\left[\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{B}\right]\right\}, \tag{4.26}$$

Donde $\mathcal{L}_l$ se conoce como el operador lineal [28].

$$\mathcal{L}_l = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l\left(l+1\right)}{r^2}, \tag{4.27}$$

se puede apreciar que la parte derecha de las ecuaciones corresponden al término Hall no-lineal, mientras que la izquierda corresponde a la parte lineal (esta expresión va a ser discutida ampliamente en la Subsección 4.1.3.

4.1.3. Introducción a los modos óhmicos

En esta sección se procederá a encontrar, de manera analítica, la solución a la ecuación diferencial formada exclusivamente por el término Ohm. Esto sucede cuándo $R_{\mathcal{M}} = 0$, en otras palabras, $\mathbf{v} = 0$. Esta ecuación es conocida como ecuación de difusión y es un sistema de ecuaciones diferenciales parabólicas análogas a la ecuación de calor,

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla^2\mathbf{B}, \tag{4.28}$$

conocer la solución del término lineal de la Ecuación 3.50 resulta importante debido a que sería posible comprender el comportamiento temporal después de que el efecto Hall no influencia en el decaimiento (lo cual sucede para grandes escalas de tiempo) y, además, la estructura para los primeros modos propios de la evolución debido al efecto óhmico.

Si se toma solamente la parte lineal de la Ecuación 4.24 (término lineal Ohm) y empleando la construcción de *Chandrasekhar* Ecuación 4.12, se obtiene,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \{ \nabla \times \nabla \times [g\,(r,\theta,\phi,t)\,\hat{r}] + \nabla \times \nabla \times \nabla \times [h\,(r,\theta,\phi,t)\,\hat{r}]\}\,, \quad (4.29)$$

bastaría entonces con encontrar las funciones $h_{lm}\,(r,t)$ y $g_{lm}\,(r,t)$ de la Ecuación 4.13 y la Ecuación 4.14 para obtener una solución a la Ecuación 4.29.

A partir de la definición de los armónicos esféricos, $Y_{lm}\,(\theta,\phi\,) = P_l^{|m|}\,(\cos\theta)\,e^{im\phi}$. Y tomando la Ecuación 4.13 y reemplazándola en la Ecuación 4.18 resulta,

$$B_r = -\sum_{l,m} \frac{1}{r^2}\frac{h_{lm}\,(r,t)}{N_{lm}} \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y_{lm}\,(\theta,\phi\,)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2}\right], \quad (4.30)$$

donde N_{lm} es la constante de normalización y utilizando la condición de ortogonalidad de los armónicos esféricos,

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y_{lm}\,(\theta,\phi\,)}{\partial\theta}\right) = -l\,(l+1)\,Y_{lm}\,(\theta,\phi\,)\,, \quad (4.31)$$

entonces, empleando la Ecuación 4.31 en la Ecuación 4.30 se obtiene una expresión del campo magnético para la componente radial, dada por,

$$B_r = \sum_{l,m} \frac{l\,(l+1)}{r^2}\frac{h_{lm}\,(r,t)}{N_{lm}} Y_{lm}\,(\theta,\phi\,)\,, \quad (4.32)$$

Ahora, volviendo a la Ecuación 4.29, se podría encontrar las funciones $h_{lm}\,(r,t)$ y $g_{lm}\,(r,t)$ utilizando la Ecuación 4.32.

Realizando cálculos algebraicos, se puede encontrar que:

$$\nabla \times \nabla \times \nabla \times [g\,(r,\theta,\phi,t)\,\hat{r}] = 0, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \nabla \times \nabla \times [h\,(r,\theta,\phi,t)\,\hat{r}] &= \frac{1}{r^4}\sum_{l,m}\{(3+\cos 2\theta)\csc^4\theta \\
&+ \csc^2\theta \frac{\partial^4 h_{lm}\,(r,t)}{\partial\phi^4} - \frac{\partial^2 h_{lm}\,(r,t)}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^4 h_{lm}\,(r,t)}{\partial\theta^4} + \csc\theta[2\cos\theta\frac{\partial^3 h_{lm}\,(r,t)}{\partial\theta^3} \\
&+ \csc\theta[\cot\theta\left(\frac{\partial h_{lm}\,(r,t)}{\partial\theta} - 2\frac{\partial h_{lm}\,(r,t)}{\partial\theta}\frac{\partial^2 h_{lm}\,(r,t)}{\partial\phi^2}\right) - \frac{\partial^2 h_{lm}\,(r,t)}{\partial\theta^2} \\
&+ 2\frac{\partial^2 h_{lm}\,(r,t)}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2 h_{lm}\,(r,t)}{\partial\phi^2} + r^2\frac{\partial^2 h_{lm}\,(r,t)}{\partial r^2}\frac{\partial^2 h_{lm}\,(r,t)}{\partial\phi^2}] \\
&+ r^2\cos\theta\frac{\partial^2 h_{lm}\,(r,t)}{\partial r^2}\frac{\partial h_{lm}\,(r,t)}{\partial\theta}]r^2\frac{\partial^2 h_{lm}\,(r,t)}{\partial r^2}\frac{\partial^2 h_{lm}\,(r,t)}{\partial\theta^2}\}, \quad (4.34)
\end{aligned}$$

ahora, tomando la Ecuación 4.32 y la Ecuación 4.34 y reemplazando en Ecuación 4.24

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{l,m}\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\frac{h_{lm}\left(r,t\right)}{N_{lm}}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right]=\frac{1}{r^4}\sum_{l,m}\{\left(3+\cos 2\theta\right)\csc^4\theta\frac{\partial^2 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\phi^2}$$
$$+\csc^2\theta\frac{\partial^4 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\phi^4}-\frac{\partial^2 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^4 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\theta^4}+\csc\theta[2\cos\theta\frac{\partial^3 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\theta^3}$$
$$+\csc\theta[\cot\theta\left(\frac{\partial h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\theta}-2\frac{\partial h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\theta}\frac{\partial^2 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\phi^2}\right)-\frac{\partial^2 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\theta^2}$$
$$+2\frac{\partial^2 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\phi^2}+r^2\frac{\partial^2 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial r^2}\frac{\partial^2 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\phi^2}]$$
$$+r^2\cos\theta\frac{\partial^2 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial r^2}\frac{\partial h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\theta}]r^2\frac{\partial^2 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial r^2}\frac{\partial^2 h_{lm}\left(r,t\right)}{\partial\theta^2}\},\tag{4.35}$$

Utilizando nuevamente la Ecuación 4.31 y y realizando procedimientos algebraicos se puede llegar a,

$$\sum_{l,m}\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\right]\frac{h_{lm}\left(r,t\right)}{N_{lm}}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)=0,\tag{4.36}$$

$$\sum_{l,m}\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}-\mathcal{L}_l\right]\frac{h_{lm}\left(r,t\right)}{N_{lm}}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)=0,\tag{4.37}$$

De esta forma se obtiene la expresión del término lineal de la construcción de la Ecuación 4.25 y la Ecuación 4.26. Lo cual es equivalente si se toman estas ecuaciones y se tiene en cuenta que la evolución del campo magnético va a estar determinada por el término Ohm, el cual corresponde cuando $\mathbf{v}=-R_{\mathcal{M}}\nabla\times\mathbf{B}=0$, se obtiene,

$$\sum_{l,m}\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}-\mathcal{L}_l\right]h_{lm}\left(r,t\right)P_l^{|m|}\left(\cos\theta\right)e^{im\phi}=0,\tag{4.38}$$

$$\sum_{l,m}\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}-\mathcal{L}_l\right]g_{lm}\left(r,t\right)P_l^{|m|}\left(\cos\theta\right)e^{im\phi}=0,\tag{4.39}$$

Debido a que estas ecuaciones están igualadas a cero, implica que cada ecuación para las componentes (l,m) es independiente a la otra (se tiene una suma de términos

linealmente independientes). En otras palabras, utilizando la independencia lineal de los armónicos esféricos, se obtiene,

$$\frac{\partial h_l(r,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 h_l(r,t)}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} h_l(r,t) = 0, \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial g_l(r,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 g_l(r,t)}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r,t) = 0, \tag{4.41}$$

Aplicando separación de variables $h_l(r,t) = R_l(r)\,T_l(t)$, $g_l(r,t) = R_l(r)\,T_l(t)$ a la Ecuación 4.40 y a la Ecuación 4.41. La solución de estas ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden originan los modos Óhmicos $h_{lm}(r,\theta,\phi,t) = h_l(r,t)\,P_l^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\phi}$ y $g_{lm}(r,\theta,\phi,t) = h_l(r,t)\,P_l^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\phi}$ dados por,

$$h_{lm}(r,\theta,\phi,t) = -r\left[A_l j_l(k_l r) + B_l y_l(k_l r)\right] P_l^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\phi} e^{-\frac{t}{\tau_l}}, \tag{4.42}$$

$$g_{lm}(r,\theta,\phi,t) = -r\left[C_l j_l(k_l r) + D_l y_l(k_l r)\right] P_l^{|m|}(\cos\theta)\,e^{im\phi} e^{-\frac{t}{\tau_l}}, \tag{4.43}$$

Donde $j_l(k_l r)$ y $y_l(k_l r)$ son las *Funciones Esféricas de Bessel* de orden l, k_l es una constante de separación que fija la taza de decaimiento para cada modo como $\tau_l = (k_l)^{-2}$y las proporciones A_l/B_l y C_l/D_l depende de las condiciones de frontera utilizadas para la Ecuación 4.42 y la Ecuación 4.43.

4.1.4. Condiciones de frontera

Con el fin de encontrar el valor las constantes numéricas de la ecuación Ecuación 4.42 y la Ecuación 4.43 se consideró que el campo magnético está presente en la corteza y en el exterior de la estrella. El núcleo es considerado como un fluido superconductor que expulsa el campo magnético de su interior debido al efecto Meissner. Por lo tanto, el problema se concentra en un sistema con tres regiones, el cual se muestra en la Figura 4.2

Región I-II: Interfaz entre el núcleo y la corteza. $r = r_i$

La interfase entre el núcleo y la corteza, requieren que las componentes normales del campo magnético sean continuas. Además, asumiendo que el núcleo de la estrella se encuentra en estado superconductor. Luego,se obtiene la condición.

$$B_r(r_i,\theta,\phi,t) = 0, \tag{4.44}$$

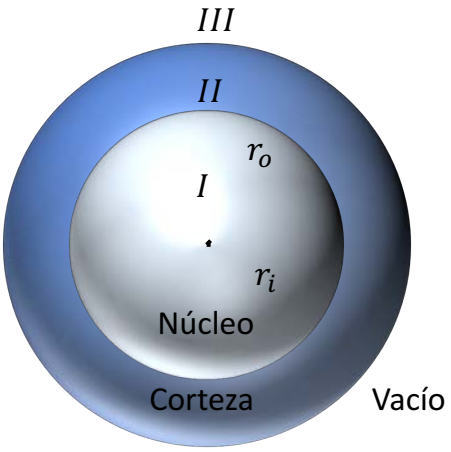


Figura 4.2.: Esquema de las condiciones de frontera del problema, el cual está conformado por tres regiones acopladas entre sí (núcleo, corteza, vacío) y donde r_0 es el radio de la estrella (normalizado a 1) y r_i es el radio del núcleo.

de acuerdo a la Ecuación 4.18 que $h_l\left(r_i\right) = constante$ que se escoge igual cero.

$$h_l^n\left(r_i\right) = A_l^n j_l\left(k_l^n r_i\right) + B_l^n y_l\left(k_l^n r_i\right) = 0, \tag{4.45}$$

donde el índice n es una etiqueta para las diferentes raíces k_l^n de esta ecuación trascendental.

Por otra parte se considera que no existen corrientes a través de las superficies internas y externas de la estrella, esto es

$$J_r|_{r_i} = J_r|_{r_0} = 0, \tag{4.46}$$

se puede encontrar el valor de la densidad de corriente tomando en cuenta la Ecuación 4.12 y calculando su rotacional, es decir,

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi}\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \{\, \nabla \times \left[g\left(r,\theta,\phi,t\right)\hat{r}\right] + \nabla \times \nabla \times \left[h\left(r,\theta,\phi,t\right)\hat{r}\right]\}\,, \tag{4.47}$$

tomando la componente radial, se obtiene,

$$J_r = -\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 g\left(r,\theta,\phi,t\right)}{\partial\phi^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial g\left(r,\theta,\phi,t\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 g\left(r,\theta,\phi,t\right)}{\partial\theta^2}\right], \tag{4.48}$$

de esta forma,

$$g_l^n\left(r_i\right) = C_l^n j_l\left(k_l^n r_i\right) + D_l^n y_l\left(k_l^n r_i\right) = 0, \tag{4.49}$$

Región II-III: Interfaz entre la corteza y el vacío. $r_0 \leq r \leq \infty$

Una suposición apropiada solo para el vacío, es que la densidad de corriente **J** debe anularse fuera de la estrella. Por lo tanto, el campo magnético es determinado completamente por su componente radial, el cual debe ser continuo. Luego implica que el campo fuera de la estrella esté dado por,

$$\mathbf{B} = \nabla\Psi, \tag{4.50}$$

$$\Psi\left(r,\theta,\phi\right) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{a_{lm}}{r^{l+1}}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right), \tag{4.51}$$

donde Ψ es el potencial magnético. De esta forma $B_{II} = B_{III}$ y tomando la Ecuación 4.32 se obtiene

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\frac{h_{lm}\left(r,t\right)}{N_{lm}}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right) = -\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{\left(l+1\right)a_{lm}}{r^{l+2}}Y_{lm}\left(\theta,\phi\right), \tag{4.52}$$

aplicando la independencia lineal de los armónicos esféricos se obtiene una expresión, que al derivarla debido a condiciones de continuidad se obtiene,

$$\left[\frac{dh_l^n\left(r\right)}{dr}\right]_{r_0} + \frac{l}{r}h_l^n\left(r_0\right) = 0, \tag{4.53}$$

por otra parte, la densidad de corriente debe anularse en el límite exterior, luego $J_r\left(r_0,\theta,\phi\,,t\right) = 0$. Lo cual lleva a,

$$g_l^n\left(r_0\right) = C_l^n j_l\left(k_l^n r_0\right) + D_l^n y_l\left(k_l^n r_0\right) = 0. \tag{4.54}$$

Acoplando las condiciones de frontera, se obtiene un sistema de 4 ecuaciones trascendentales.

Tomando las ecuaciones para la función g y normalizando $r_0 = 1$ (superficie en coordenadas adimensionales) se obtiene,

$$C_l^n j_l\left(k_l^n\right) + D_l^n y_l\left(k_l^n\right) = 0, \tag{4.55}$$

y combinando con la condición $C_l^n j_l\left(k_l^n r_i\right) + D_l^n y_l\left(k_l^n r_i\right) = 0$ se obtiene una ecuación trascendental para k_l^n y y otra para la proporción ${}^{C_l^n}/_{D_l^n}$

$$C_l^n j_l\left(k_l^n r_i\right) + D_l^n y_l\left(k_l^n r_i\right) = 0, \tag{4.56}$$

$$\frac{C_l^n}{D_l^n} = -\frac{y_l\left(k_l^n\right)}{j_l\left(k_l^n\right)}. \tag{4.57}$$

Siguiendo un procedimiento similar empleado anteriormente, para la función h se obtiene,

$$y_l'\left(k_l^n\right) j_l\left(k_l^n r_i\right) - y_l\left(k_l^n r_i\right) j_l'\left(k_l^n\right) + \frac{(l+1)}{k_l^n}\left[y_l\left(k_l^n\right) j_l\left(k_l^n r_i\right) - y_l\left(k_l^n r_i\right) j_l\left(k_l^n\right)\right] = 0 \tag{4.58}$$

$$\frac{A_l^n}{B_l^n} = -\frac{y_l\left(k_l^n r_i\right)}{j_l\left(k_l^n r_i\right)} \tag{4.59}$$

Las diferentes soluciones de la ecuación trascendental dan como resultado los diferentes modos radiales para cada multipolo [65].

n	l	$[k_l^n]_h$	A_l^n/B_l^n	$[k_l^n]_g$	C_l^n/D_l^n
1	1	7.03266	1.07456	12.67071	-0.18517
2	1	19.12793	3.49901	25.18557	-0.09278
3	1	31.584668	5.86928	37.73441	-0.06187
1	2	7.81795	10.93545	12.87682	1.65544
2	2	19.46616	-0.78889	25.29089	3.52035
3	2	31.79340	0.43334	37.80492	5.33887
1	3	8.63565	-2.11402	13.17984	-1.82690
2	3	19.86013	0.43365	25.44808	-0.61489
3	3	32.04098	1.14319	37.91043	-0.38745

Cuadro 4.1.: Valores numéricos para los tres primeros modos radiales para cada $l = 1, 2, 3$. Los valores de $[k_l^n]_h$representan los modos asociados a la función $h\,(r, \theta, \phi\,)$, mientras $[k_l^n]_g$ los modos asociados a la función $g\,(r, \theta, \phi\,)$.

4.2. Test numérico

4.2.1. Cálculo energía magnética

Con el fin de asegurar que los resultados sean correctos, he considerado desarrollar dos test diferentes. Uno de ellos consiste en encontrar analíticamente el valor de la energía magnética E para el tiempo inicial ($t = 0$). Esto se realiza integrando en el volumen cada componente al cuadrado del campo magnético en el caso 2D (ver la Ecuación 4.21,Ecuación 4.22 y Ecuación 4.23).

$$E = \frac{1}{8\pi}\iiint B^2 dV, \tag{4.60}$$

El procedimiento del cálculo de esta integral fue desarrollado en el software Wolfram Mathematica [Apéndice 3] y se obtuvo un valor teórico de la energía magnética $E_{teórica} = 2.13307$. El código espectral empleado en esta tesis calculó un valor numérico de energía magnética $E_{numérica} = 2.12728$, llevando a un error de $\varepsilon = 0.27\,\%$.

4.2.2. Cálculo constantes de decaimiento de los modos óhmicos

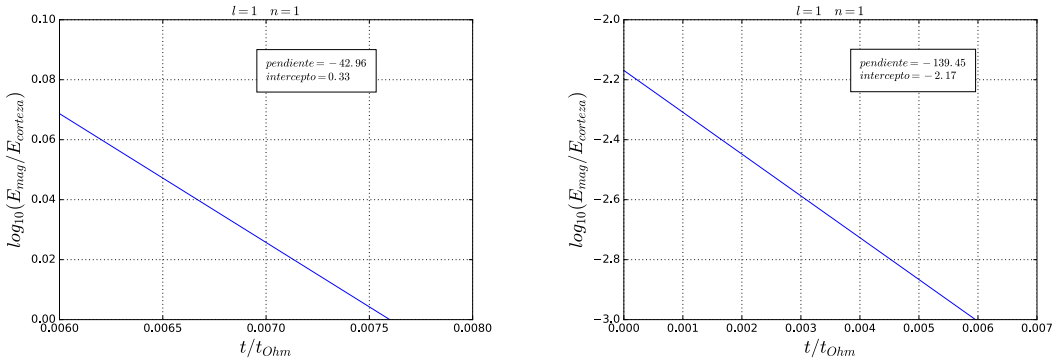
A largas escalas de tiempo, el campo magnético va a ser completamente dominado por el efecto Ohm, de esta forma su dependencia temporal va a decaer exponencialmente, de acuerdo a la Ecuación 4.42 y la Ecuación 4.43. Luego, la energía magnética va a estar dada por,

$$E = E_0 e^{-2t/\tau} \tag{4.61}$$

donde E_0 es el valor inicial del campo magnético. Linealizando la anterior ecuación se obtiene,

$$\log_{10} E = \log_{10} E_0 - \frac{2t}{\tau} \log_{10} e \tag{4.62}$$

De la anterior expresión podemos encontrar que la pendiente $m = 2k^2 \log_{10} e$ relaciona la constante de decaimiento k sabiendo que $\tau = 1/k^2$ de esta forma se puede obtener el valor numérico y compararlo con el valor analítico resumido en la Tabla 4.1. Para este caso, se tendrá en cuenta los modos óhmicos fundamentales $(n = 1, l = 1)$ puramente poloidales $[k_l^n]_h$ y puramente toroidales $[k_l^n]_g$.



(a) Modo óhmico fundamental poloidal $(l = 1, n = 1)$ **(b)** Modo óhmico fundamental toroidal $(l = 1, n = 1)$

Figura 4.3.: Evolución lineal de la energía magnética a grandes escalas de tiempo dominado exclusivamente por el término Ohm para dos configuraciones de campo distintas.

La Figura 4.3 contiene los casos para una función puramente poloidal 4.3a con constante de decaimiento k_p y una función puramente toroidal con constante de decaimiento k_T. Luego el valor de estas constantes va a estar dado por,

$$k_p = \sqrt{\frac{m}{2\log_{10} e}} = 7.0327 \qquad k_T = \sqrt{\frac{m}{2\log_{10} e}} = 12.6707 \tag{4.63}$$

Basados en los valores analíticos de la Tabla 4.1 la constante de decaimiento poloidal $k_{p,analítico} = 7.03266$ y el numérico $k_{p,numérico} = 7.0327$ lleva a un error $\varepsilon = 5{*}10^{-4}\,\%$. Mientras que para el caso de la constante de decaimiento para el modo óhmico fundamental toroidal $k_{t,analítico} = 12.67071$, y el numérico $k_{t,numérico} = 12.67070$ el error es $\varepsilon = 7.9 * 10^{-5}\,\%$. Estos test numéricos llevan a tener una confiabilidad en los resultados que se van a obtener utilizando el método numérico espectral.

4.3. Métodos numéricos

4.3.1. Análisis de estabilidad de modos óhmicos axisimétricos

En esta sección se estudia la estabilidad de un campo de fondo (2D) conformado por modos óhmicos axisimétricos perturbados por modos óhmicos no-axisimétricos (3D) poloidales y toroidales. El parámetro que controla la influencia relativa del término Hall con respecto a la difusión óhmica es el número magnético de Reynolds $R_{\mathcal{B}}$. Debido a que este valor es dependiente del campo característico, es conveniente escogerlo de una forma inequívoca, de tal forma que la energía magnética total satisfaga la condición.

$$E = \frac{B_0^2}{2} V_{corteza}. \tag{4.64}$$

Ahora se analizará la estabilidad de campos de fondo (2D) iniciales (etiquetados por el índice superior (0)), los cuales se tomaron en todos los casos como modos óhmicos fundamentales. Se analizaron tres tipos diferentes de campos de fondo: *i*) modo poloidal $[h^n_{lm}(r,\theta,t)]^{(0)}$, *ii*) modo toroidal $[g^n_{lm}(r,\theta,t)]^{(0)}$ y *iii*) combinación de un modo poloidal y uno toroidal.

Se perturbaron las funciones de campo de fondo con sus correspondientes funciones representando combinaciones arbitrarias de dos modos óhmicos no-axisimétricos (3D) (etiquetados por el índice superior (1) y (2)). Así, se estudiaron tres casos de condiciones iniciales en las simulaciones dados por,

$$\begin{aligned} h(r,\theta,\phi,0) &= S_h \left\{ [h^n_{lm}(r,\theta,0)]^{(0)} + P \left[[h^n_{lm}(r,\theta,\phi,0)]^{(1)} + [h^n_{lm}(r,\theta,\phi,0)]^{(2)} \right] \right\} \\ g(r,\theta,\phi,0) &= S_g \left\{ [g^n_{lm}(r,\theta,0)]^{(0)} + P \left[[g^n_{lm}(r,\theta,\phi,0)]^{(1)} + [g^n_{lm}(r,\theta,\phi,0)]^{(2)} \right] \right\} \end{aligned},$$

(4.65)

donde P, es un parámetro pequeño $|P| < 1$ que controla la magnitud de la perturbación con respecto a la amplitud del campo de fondo, S_h y S_g son factores de escala que miden la magnitud relativa entre los campos poloidal y toroidal y sus correspondientes energías. La ventaja de esta representación es la libertad de escoger un caso específico para el campo inicial. Si se toma $S_h = 0$ y $S_g = 1$ se tiene un campo inicial toroidal, asimismo, $S_h = 1$ y $S_g = 0$ representa una condición inicial de un campo poloidal y finalmente si $S_h \neq 0$ y $S_g \neq 0$ se tiene una condición inicial formado por un campo poloidal y uno toroidal.

Para el caso $P = 0$ (condición inicial 2D) se obtuvo en todas las simulaciones una evolución característica del comportamiento Hall 2D, a pesar de que el código está escrito para una evolución 3D, en este caso no se encontró la activación de modos no-axisimétricos, como era esperado. Luego, comparando los casos $P = 0$ y $P \neq 0$, se puede inferir los cambios de una evolución 3D respecto a una evolución 2D.

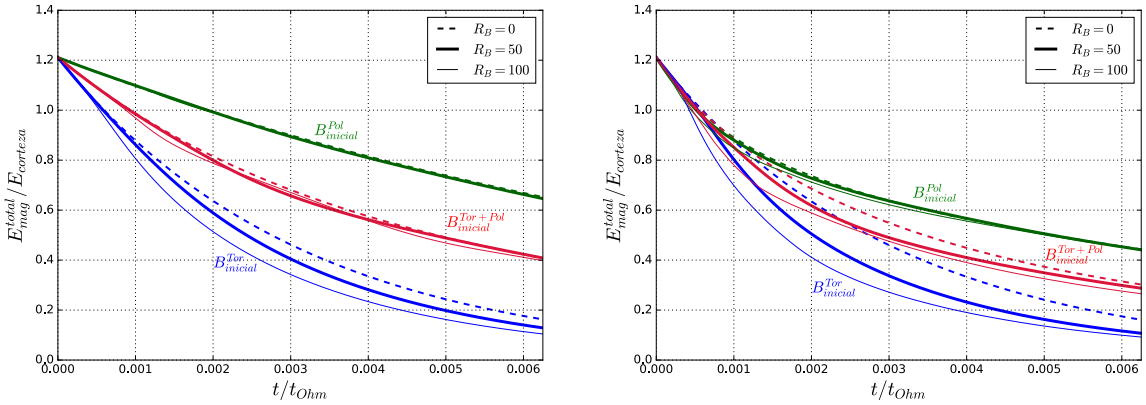
En las simulaciones se escogieron para las perturbaciones los modos óhmicos no-axisimétricos $\left[h^{n=3}_{l=2,m=2}\right]^{(1)}$, $\left[h^{n=2}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$, $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)}$ y $\left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. Durante la evolución no-lineal Hall es esperada la activación de modos no-axisimétricos (no contenidos en la condición inicial) que intercambien energía entre ellos. Por lo tanto, cualquier crecimiento de energía de estos modos podría indicar la presencia de una inestabilidad no-axisimétrica.

4.3.2. Evolución de la energía magnética total

En la figura Figura 4.4 se presenta la evolución de la energía total para tres tipos diferentes de condiciones iniciales con $P = 0$ y $P = 0.1$ y diferentes números magnéticos de Reynolds. El color verde corresponde a $S_g = 0$ y $S_h = 1$. El color azul es relacionado con $S_g = 1$ y $S_h = 0$ y el color rojo es referido al caso cuando $S_g \neq 0$ y $S_h \neq 0$ escogidos de tal forma que la energía total inicial del campo es dividida en partes iguales entre la energía inicial del campo poloidal y toroidal.

En la Figura 4.4 se muestra la evolución de la energía total como función del tiempo para tres campos iniciales diferentes considerados anteriormente. El panel 4.4a corresponde al caso Hall 2D. Este resultado es una verificación del buen funcionamiento del código numérico puesto que no era posible que se generara un comportamiento 3D si la condición inicial era 2D. Además, de esta figura se puede observar que en todos los casos la tendencia general de la energía es a decrecer en el tiempo, como era esperado, con un decaimiento más rápido para el caso de un campo toroidal inicial.

Este comportamiento se debe a que en ausencia del efecto Hall, la constante de decaimiento es mucho más grande para el modo óhmico toroidal, por lo tanto decae mucho más rápido que el modo óhmico poloidal (ver Tabla 4.1), luego, este comportamiento disipativo es preservado bajo la influencia del efecto Hall. Además, si



(a) $P = 0$ **(b)** $P = 0.1$

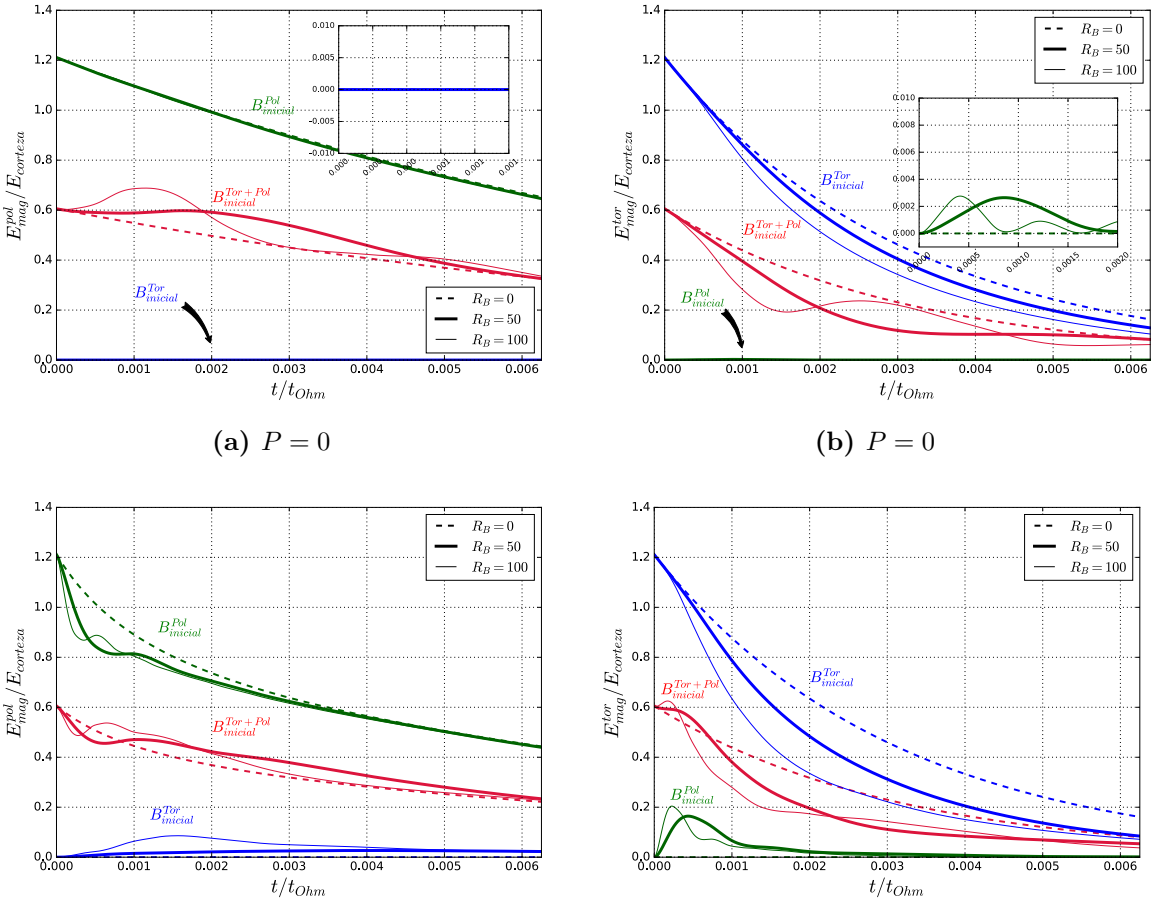
Figura 4.4.: Energía magnética total como función del tiempo, para tres campos iniciales diferentes [Poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ (Pol. verde), Toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ (Tor. azul) y Toroidal + Poloidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)} + \left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ (Tor+Pol rojo)], para tres valores de número magnético de Reynolds $R_{\mathcal{B}}$ y valores de perturbación P y de tipo $\left[h^{n=3}_{l=2,m=2}\right]^{(1)}$, $\left[h^{n=2}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$para el campo poloidal, $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)}$ y $\left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$ para el toroidal y como combinación de ambas para el campo Toroidal + Poloidal. El tiempo es normalizado respecto al tiempo óhmico nominal característico (calculado respecto al radio de la estrella) y la energía es normalizada respecto a la energía total contenida en la corteza. El tiempo final de estos paneles corresponde aproximadamente a 5 tiempos Hall característicos para el caso de $R_{\mathcal{B}} = 50$ y 10 tiempos Hall característicos para el caso de $R_{\mathcal{B}} = 100$. a) Evolución Hall 2D del campo de fondo ($P = 0$). b) Evolución Hall 3D ($P \neq 0$).

el valor de $R_{\mathcal{B}}$ incrementa el efecto no-lineal es más importante, lo cual promueve un decaimiento mas rápido de la energía magnética, como era esperado.

En el panel 4.4b se observa que la influencia global de la perturbación en la evolución de la energía total es apreciable. Comparando el panel 4.4a y el panel 4.4b se observa que la presencia de la perturbación aceleró el decaimiento de la energía en todos los casos. Esto puede ser explicado, si se tiene en cuenta que la solución no lineal del problema puede ser representado por una suma de modos óhmicos con coeficientes que dependen del tiempo. Luego, en presencia de la perturbación la energía tiene más canales de disipación de energía para disipar la energía y por lo tanto el decaimiento es acelerado.

Ahora se procederá a separar la energía total en sus componentes toroidal y poloidal. De la Figura 4.5 se obtiene una información adecuada acerca del estado de la evolución de las energías poloidal y toroidal para tres configuraciones iniciales del campo.

Ahora, hay algunos aspectos considerables que pueden ser extraídos: en el panel 4.5a



(a) $P = 0$ **(b)** $P = 0$

(c) $P = 0.1$ **(d)** $P = 0.1$

Figura 4.5.: Evolución de la energía poloidal y toroidal para tres campos iniciales diferentes. a) Evolución 2D de la energía poloidal, b) evolución 2D de la energía toroidal, c) evolución de la energía poloidal con el campo de fondo perturbado y d) evolución de la energía toroidal con el campo de fondo perturbado.

se encuentra que el caso inicial de un campo poloidal (color verde) sin perturbación genera un pequeño porcentaje de energía toroidal, como es mostrado en el zoom del panel 4.5b, esta es una característica de la evolución Hall 2D. Además, se puede puede observar en este zoom que el comportamiento es influenciado por cambios en el rango de números magnéticos de Reynolds explorados, sin embargo, en este rango números de Reynolds su influencia en la energía poloidal no es muy apreciable (ver 4.5a). Asimismo, en el zoom del panel 4.5b se observa la presencia de oscilaciones en la energía toroidal a medida que $R_{\mathcal{B}}$ incrementa. Estas oscilaciones están asociadas con las clásicas ondas helicoidales Hall que ocurren en plasmas magnetizados (ver Figura 3.7).

Desde este zoom, se puede observar para el caso del $R_{\mathcal{B}} = 50$ el periodo es $0.0018 t_{Ohm}$

y $R_{\mathcal{B}} = 100$ el periodo de estas oscilaciones es aproximadamente $0.0008 t_{Ohm}$. En este modelo, se ha utilizado como parámetro de normalización el radio total de la estrella, sin embargo, la evolución del campo ocurre en el ancho de la corteza, la cual se toma como 1/4 de la estrella en todas las simulaciones. Desde que las escalas de tiempo Hall son el cuadrado de la longitud característica (ver Ecuación 4.6). De este modo, el tiempo nominal Hall debe ser reducido por un factor de 4^2 con el fin de obtener el tiempo Hall físico en donde el fenómeno se esta desarrollando. Por lo tanto, se obtuvo para este tiempo físico Hall, un valor de $(1/(16R_B))\, t_{ohm}$. Si $R_B = 50$ se obtiene un tiempo Hall de $0.00125 t_{Ohm}$ y para $R_B = 100$ el valor de este tiempo es $0.000625 t_{Ohm}$. Esto valida el hecho de que el periodo de las oscilaciones escala con el tiempo Hall.

Para un campo inicial compuesto por una mezcla de un campo inicial toroidal y poloidal (color rojo en los paneles 4.5a y 4.5b) se puede observar el acoplamiento entre las dos componentes del campo, interactuando entre ellas y permitiendo el intercambio de energía, luego el crecimiento de una componente implica el decrecimiento en la otra y vice versa. En este caso, el efecto de incrementar el número de Reynolds es notorio en ambas componentes mediante las oscilaciones Hall y nuevamente el orden de magnitud de estas oscilaciones está en acuerdo con las escalas de tiempo Hall respecto al ancho de la corteza.

Finalmente, en el caso de un campo inicial toroidal (color azul) no hay generación de un campo poloidal. Luego, en el zoom 4.5a la energía poloidal es cero a lo largo de la evolución, mientras que en el panel 4.5b se observa que la energía total es contenida en el campo toroidal. Esto es esperado en el caso de una evolución Hall 2D. Nuevamente este rango explorado de números de Reynolds no generan una apreciable influencia en la energía toroidal. (El análisis para el caso perturbado se muestra en Subsección 4.3.4)

4.3.3. Análisis caso 2D: campo inicial no perturbado

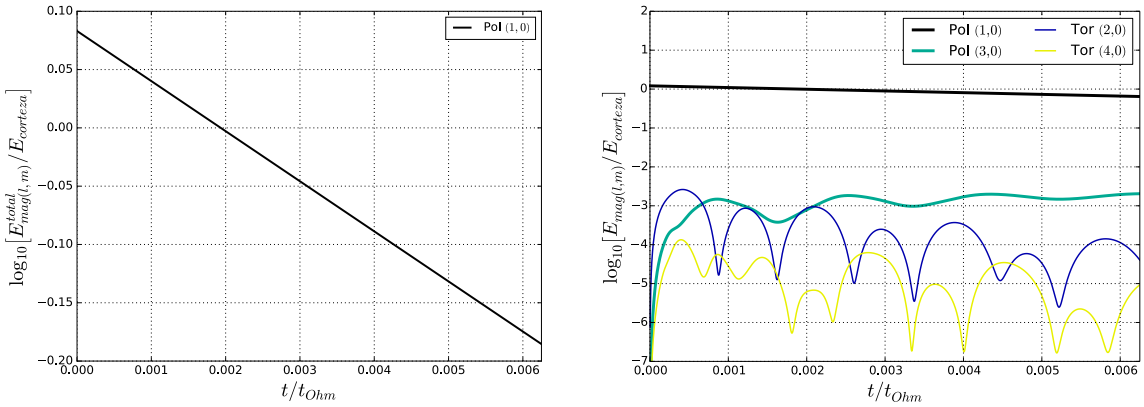
Ahora se analiza los mismos casos anteriores correspondientes a los campos iniciales sin perturbación, pero ahora se muestra una descomposición de la energía magnética como modos (l, m) poloidales-toroidales. Asimismo, se seleccionó un color específico para representar cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal).

4.3.3.1. Campo inicial axisimétrico poloidal

En 4.6a puede observarse el decaimiento óhmico lineal de la energía magnética en escala logarítmica de base 10 para un campo poloidal inicial que fue escogido como un modo fundamental $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$. Como era de esperar, se obtuvo un decaimiento exponencial perfecto que en escala logarítmica debe corresponder (de acuerdo a

la solución analítica de los modos Ohm) a una línea con una pendiente negativa $-2\left(k_{l=1}^{n=1}\right)^2 \log_{10} e = -42.95$. La pendiente de la línea mostrada en el panel 4.6a es -42.94, luego, se tiene un error respecto a la solución analítica del $0.02\,\%$.

Del panel 4.6b se puede observar la influencia del efecto Hall en la evolución de este modo fundamental poloidal. Se observa que a lo largo de la evolución, la mayor parte de la energía está contenida en el modo poloidal $\left[h_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$. Además, se observa de este panel que el efecto Hall activó otros modos axisimétricos poloidales y toroidales con pequeñas energías. Como el campo inicial es un modo poloidal impar, se activan modos toroidales pares y modos poloidales impares.



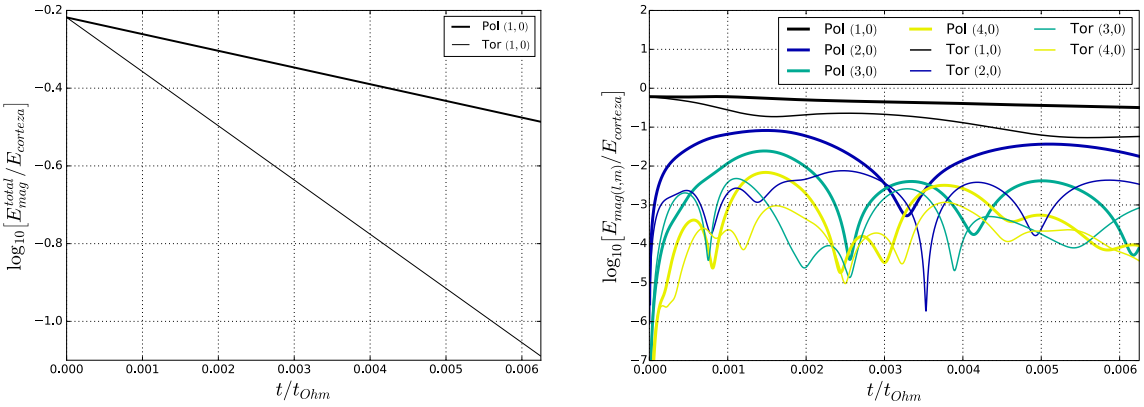
(a) $P = 0 \quad R_B = 0$ **(b)** $P = 0 \quad R_B = 100$

Figura 4.6.: Evolución de la descomposición de modos de energía para un campo inicial axisimétrico poloidal $\left[h_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$. a) $P = 0 \quad R_B = 0$. b) $P = 0 \quad R_B = 100$. La línea gruesa corresponde a los modos poloidales, mientras que las líneas delgadas están asociadas a los modos toroidales. Igualmente, un color específico representa cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal)

4.3.3.2. Campo inicial axisimétrico Poloidal + Toroidal

La siguiente Figura 4.7 representa el caso de un campo inicial constituido por una mezcla de campos toroidal y poloidal con igual peso. En el panel 4.7a se observa el decaimiento lineal del campo de fondo sin el efecto Hall, esta condición inicial está constituida por un modo óhmico fundamental poloidal $\left[h_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$ y uno toroidal $\left[g_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$. En este caso la pendiente de la línea poloidal es la misma que el valor obtenido para el panel 4.6a y la pendiente de la línea toroidal es -134.44 que comparada con la solución analítica $-2\left(k_{l=1}^{n=1}\right)^2 \log_{10} e = -139.45$ se tiene un error del $0.007\,\%$.

La 4.7b muestra la influencia del efecto Hall, activando otros modos axisimétricos pero con reglas diferentes al caso anterior (ver panel 4.6b), ahora, se observa la activación de modos poloidales y toroidales pares e impares.



(a) $P = 0 \quad R_B = 0$ **(b)** $P = 0 \quad R_B = 100$

Figura 4.7.: Evolución de la descomposición de modos de energía para un campo inicial axisimétrico constituido por una superposición de un campo poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ y toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ con igual peso. a) $P = 0 \quad R_B = 0$. b) $P = 0 \quad R_B = 100$. La línea gruesa corresponde a los modos poloidales, mientras que las líneas delgadas están asociadas a los modos toroidales. Igualmente, un color específico representa cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal).

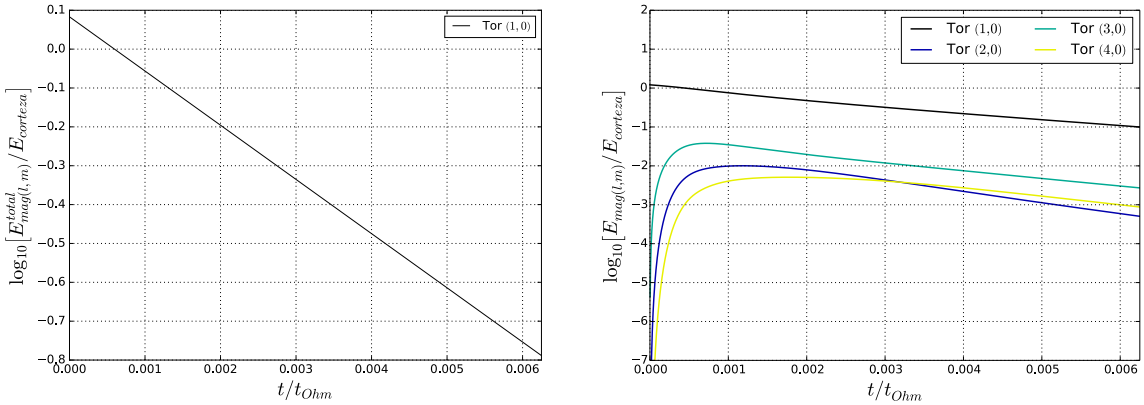
4.3.3.3. Campo inicial axisimétrico toroidal

En la Figura 4.8 como es esperado para una evolución Hall 2D, un campo inicial axisimétrico toroidal no genera modos poloidales. El decaimiento lineal del modo ohm fundamental toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ mostrado en el panel 4.8a tiene el mismo valor de la pendiente obtenida para la línea toroidal en el panel 4.7a.

En el caso de la 4.8b la generación de modos axisimétricos toroidales pares e impares fueron producidos por la inclusión del efecto Hall, luego, el campo permanece toroidal a lo largo del tiempo, y el modo dominante toroidal es el inicial $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$. Además, en contraste con los casos previos, las energías de los modos axisimétricos toroidales generadas no oscilan apreciablemente.

4.3.4. Análisis caso 3D: campo inicial perturbado

Ahora se analizan los efectos de introducir perturbaciones no-axisimétricas en la evolución de las mismas condiciones iniciales analizadas anteriormente. En el pa-



(a) $P = 0 \quad R_B = 0$ **(b)** $P = 0 \quad R_B = 100$

Figura 4.8.: Evolución de la descomposición de modos de energía para un campo inicial axisimétrico toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$. a) $P = 0 \quad R_B = 0$. b) $P = 0 \quad R_B = 100$. La línea gruesa corresponde a los modos poloidales, mientras que las líneas delgadas están asociadas a los modos toroidales. Igualmente, un color específico representa cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal).

nel 4.5c se muestra la evolución de la energía magnética poloidal para el caso de un modo óhmico fundamental poloidal axisimétrico $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ (color verde) perturbado por la superposición de dos modos óhmicos poloidales no-axisimétricos $\left[h^{n=3}_{l=2,m=2}\right]^{(1)} + \left[h^{n=2}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$.

En esta figura, se observa un comportamiento diferente respecto al caso no perturbado, mostrado en el panel 4.5a. El efecto de la perturbación inicial (panel 4.5d), causa un significante incremento en los valores de la energía toroidal y oscilaciones con cortos periodos de tiempo respecto al caso no perturbado. Se puede ver, que en contraste con el caso no perturbado, la presencia de perturbaciones promueve la generación de estructuras magnéticas de pequeña escala que acorta el tiempo Hall característico. Igualmente, la energía poloidal generada oscila de una forma más significativa en contraste con el caso no perturbado.

Estas oscilaciones están asociadas con la tendencia del sistema a restaurar el campo inicial poloidal durante las primeras etapas de la evolución. Por lo tanto, se observa un crecimiento en los valores de la energía toroidal, la cual está relacionada con este hecho debido a que la energía total es conservada por el efecto Hall, entonces la energía toroidal debe incrementar y oscilar de tal forma que se preserve la energía magnética. Además, la inclusión de la perturbación promueve un decaimiento más rápido de la energía poloidal.

Este hecho puede ser explicado debido a que las perturbaciones abren más canales de disipación y que no estaban en el caso sin perturbación, lo cual se traduce en una

disipación más efectiva de la energía. En la 4.5c se muestra el caso inicial de un campo axisimétrico constituido por campos toroidal $\left[g_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$ y poloidal $\left[h_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$ (color rojo), perturbado por dos campos toroidales $\left[g_{l=1,m=1}^{n=1}\right]^{(1)} + \left[g_{l=2,m=1}^{n=1}\right]^{(2)}$ y dos campos poloidales $\left[h_{l=2,m=2}^{n=3}\right]^{(1)} + \left[h_{l=2,m=1}^{n=2}\right]^{(2)}$ respectivamente.

Las energías poloidales y toroidales presentan un comportamiento inverso comparado con el caso no perturbado (ver los paneles 4.5a y 4.5b), en este caso, durante las primeras etapas de la evolución hay un decaimiento en la energía poloidal y un crecimiento en la energía toroidal, además se observa un acortamiento del periodo en las oscilaciones Hall. Como sucedió en el anterior caso, en las primeras etapas de la evolución, la perturbación genera pequeñas escalas magnéticas favoreciendo la influencia del efecto Hall y promoviendo un decaimiento más rápido de la energía. Ahora el caso de un campo inicial axisimétrico toroidal (color azul) $\left[g_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$ perturbado por una combinación lineal de dos campos toroidales no axisimétricos $\left[g_{l=1,m=1}^{n=1}\right]^{(1)} + \left[g_{l=2,m=1}^{n=1}\right]^{(2)}$ muestra un notable aspecto en el incremento de la energía poloidal, lo cual es diferente al comportamiento presentado en el caso no perturbado del panel 4.5a.

Esta energía poloidal incrementa para valores más grandes del número magnético de Reynolds. Este comportamiento es opuesto a los previos casos perturbados donde la energía poloidal siempre decayó en las primeras etapas de evolución. Contrariamente a los casos anteriores, ahora las pequeñas estructuras magnéticas aparecen en la componente $B_\phi$del campo a medida que el tiempo transcurre, esto ocurre en un tiempo para el cuál la energía poloidal es máxima, esto puede ser razonable desde que $B_\phi$es influenciada por las funciones $g\left(r,\theta,\phi,t\right)$ y $h\left(r,\theta,\phi,t\right)$, afectando la energía poloidal, la cual está construida por completo por la función $h\left(r,\theta,\phi,t\right)$. Por lo tanto en orden de clarificar esta situación, es necesario descomponer la energía total en diferentes modos (l,m).

4.3.4.1. Campo inicial axisimétrico de fondo poloidal perturbado (3D)

En la Figura 4.9 se muestra la descomposición en modos de energía para un campo inicial axisimétrico poloidal $\left[h_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$ perturbado por un campo no-axisimétrico constituido por una combinación lineal de modos óhmicos poloidales $\left[h_{l=2,m=2}^{n=3}\right]^{(1)} + \left[h_{l=2,m=1}^{n=2}\right]^{(2)}$.

Se muestra en 4.9a el decaimiento lineal del campo de fondo axisimétrico correspondiente al modo $\left[h_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$ el cual tiene el mismo valor de pendiente correspondiente al caso no perturbado (ver 4.6a), y los otros modos corresponden a los campos no-axisimétricos perturbativos. Para el modo de perturbación poloidal $\left[h_{l=2,m=2}^{n=3}\right]^{(1)}$, la pendiente de la línea es-877.96 comparado con la solución analítica $-2\left(k_{22}^{3}\right)^{2}\log_{10}e = -877.98$ se tiene un error del $0.002\,\%$, y para el otro modo

perturbativo $\left[h^{n=2}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$ la pendiente de la línea es -324.45 comparado con la solución analítica $-2\left(k^2_{21}\right)^2 \log_{10} e = -329.13$ se tiene un error del $1.4\,\%$. Como es esperado para la difusión Óhmica lineal, cada modo evoluciona independientemente sin acoplar o activar otros modos.

El panel 4.9b suministra información acerca del comportamiento de la evolución incluyendo el efecto Hall. Se muestra la activación de modos de energía toroidales y poloidales no-axisimétricos en las primeras etapas de evolución ($0 < t/t_{Ohm} < 0.0005$).

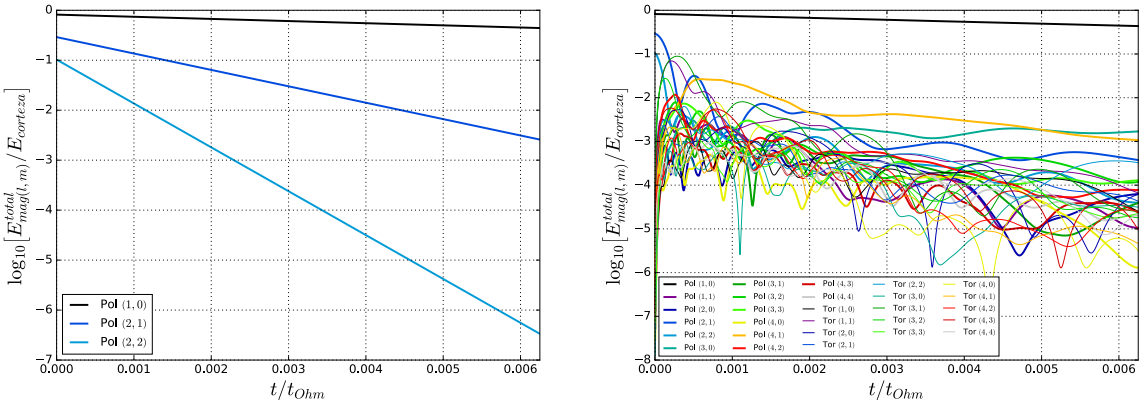
Se puede observar durante esta primera etapa que el campo axisimétrico poloidal de fondo y el campo perturbativo poloidal transfiere su energía hacia modos toroidales no-axisimétricos, lo cual explica el crecimiento de la energía toroidal mostrado en 4.5d, además durante esta primera etapa hay un decrecimiento de la energía poloidal (ver 4.5c). Durante la segunda etapa de evolución ($0.0005 < t/t_{Ohm} < 0.001$) se observa que las energías de los modos toroidales activados durante la primera etapa decrecen rápidamente, produciendo una activación de otros modos poloidales no-axisimétricos a expensas de los modos toroidales no axisimétricos y del campo poloidal axial de fondo (ver 4.5c y 4.5d). Esto explica el decrecimiento de la energía toroidal y el incremento de la energía poloidal observada durante esta primera etapa en 4.5d y 4.5c. Durante la etapa final ($0.001 < t/t_{Ohm} < 0.002$) la evolución es determinada por la disipación Ohm.

Sin embargo, la energía contenida en el campo no-axisimétrico nunca llega a ser comparable con el campo de fondo poloidal axisimétrico. Debido a esto, se puede concluir que una condición inicial conformada por un campo de fondo poloidal axisimétrico, permanece en simetría axial.

4.3.4.2. Campo inicial axisimétrico de fondo toroidal+poloidal perturbado (3D)

La Figura 4.10 muestra la evolución de la energía total descompuesta como una combinación de modos (l, m) en el caso de un campo constituido por modos óhmicos fundamentales que forman un campo de fondo toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ y poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$, y perturbado por la combinación de dos modos óhmicos no-axisimétricos toroidales toroidales $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)} + \left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$ y modos óhmicos poloidales $h^{(1)}_{(n=3,l=2,m=2)} + h^{(2)}_{(n=2,l=2,m=1)}$.

Desde el panel 4.10a puede observarse como era esperado, el decaimiento lineal de todos los modos envueltos en la condición inicial. Puede notarse que la perturbación toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)}$ tiene un valor igual de la pendiente de la línea del modo óhmico del modo óhmico toroidal axisimétrico, debido a que la constante de decaimiento k^n_{lm} no depende explícitamente del modo n. El modo de perturbación toroidal $\left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$ tiene una pendiente de línea igual a -144.02 y comparada con la solu-



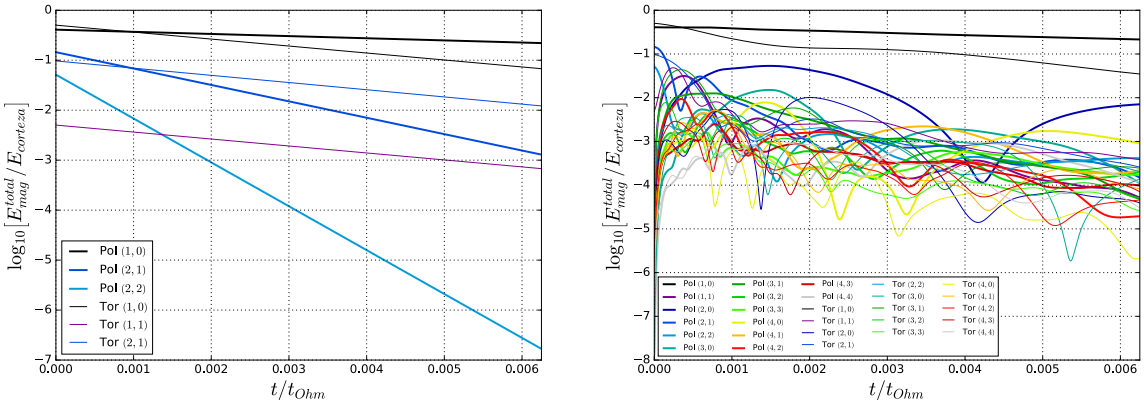
(a) $P = 0.1 \quad R_B = 0$ **(b)** $P = 0.1 \quad R_B = 100$

Figura 4.9.: Evolución de los modos de energía para un campo de fondo poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ perturbado por modos Ohm poloidales no-axisimétricos $\left[h^{n=3}_{l=2,m=2}\right]^{(1)} + \left[h^{n=2}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. a) $P = 0.1 \quad R_B = 0$ .b) $P = 0.1 \quad R_B = 100$. La línea gruesa corresponde a los modos poloidales, mientras que las líneas delgadas están asociadas a los modos toroidales. Igualmente, un color específico representa cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal).

ción analítica $-2\,(k^1_{21})\log_{10} e = -144.02$ se tiene un error del 0 %. Los tiempos de decaimiento de otros modos fueron verificados anteriormente.

El panel 4.10b muestra la evolución de la energía incluyendo la perturbación no-axisimétrica y el efecto Hall. En las primeras etapas de tiempo $0 < t/t_{Ohm} \leq 0.0005$ son activados modos poloidales y toroidales no-axisimétricos, además puede verse un crecimiento de un modo axisimétrico poloidal. Este crecimiento del modo axisimétrico poloidal puede ser un campo generado por el sistema con el fin de restaurarlo a su simetría axial, apantallando cualquier posibilidad de desarrollarse una evolución no-axisimétrica.

Esto es más apreciable en la segunda etapa entre $0.0005 < t/t_{Ohm} \leq 0.001$. Como sucedió con los modos activados no-axisimétricos poloidales y toroidales, su energía nunca llega a ser comparable con la energía de los modos axiales. En etapas posteriores $t/t_{Ohm} \geq 0.001$ la evolución del campo es enteramente determinada por los modos axisimétricos toroidales y poloidales. En estas etapas, la mayor parte de la energía es contenida en el campo de fondo poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ y toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$. La energía contenida en los otros modos axisimétricos poloidales que fueron activados, disminuyeron drásticamente. En otras palabras, el campo de fondo poloidal+toroidal tiende a ser preservado. Luego, la principal conclusión de esta simulación es que una inestabilidad no-axisimétrica no fue desarrollada y este campo permanece en simetría axial.



(a) $P = 0.1 \quad R_B = 0$ **(b)** $P = 0.1 \quad R_B = 100$

Figura 4.10.: Evolución de los modos de energía para una mezcla de campos iniciales de fondo poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ y toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ perturbado por modos Ohm poloidales no-axisimétricos $\left[h^{n=3}_{l=2,m=2}\right]^{(1)} + \left[h^{n=2}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$ y toroidales $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)} + \left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. a) $P = 0.1 \quad R_B = 0$ .b) $P = 0.1 \quad R_B = 100$. La línea gruesa corresponde a los modos poloidales, mientras que las líneas delgadas están asociadas a los modos toroidales. Igualmente, un color específico representa cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal).

4.3.4.3. Campo inicial axisimétrico de fondo toroidal perturbado (3D)

En la Figura 4.11 se tiene una información detallada acerca del comportamiento de la energía magnética para un campo inicial de fondo toroidal de acuerdo a sus modos.

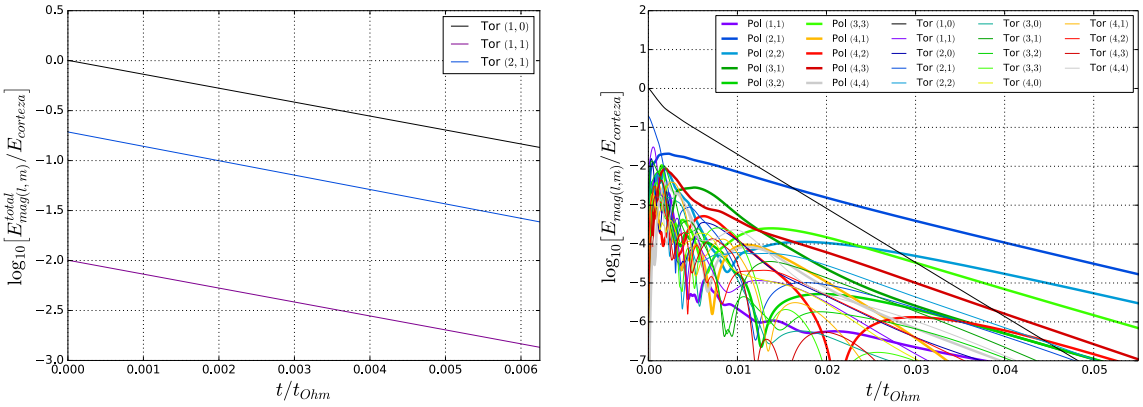
Este caso muestra un comportamiento interesante mostrado en el panel 4.5c donde se observó que la perturbación generó el crecimiento de una energía poloidal y un decaimiento rápido de la energía toroidal respecto al caso no perturbado. Ahora un esquema de la energía descompuesta como modos poloidales y toroidales provee una ventaja, desde que permite obtener un punto de vista diferente del fenómeno.

En el panel 4.11a se puede observar nuevamente el decaimiento lineal óhmico de una condición inicial compuesta por un campo toroidal axisimétrico de fondo $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ y de la perturbación no-axisimétrica toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)} + \left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. Como se mencionó anteriormente, la perturbación toroidal no-axisimétrica $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)}$ tiene la misma constante de decaimiento k^n_l del modo óhmico axisimétrico toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ y por esta razón, ellos decaen paralelamente como es mostrado en 4.11a . El otro modo toroidal de perturbación $\left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$ tiene el mismo valor

de la pendiente de la línea obtenido en el panel 4.10a.

En el panel 4.11b se muestra la influencia del efecto Hall para esta condición inicial. Inicialmente, en las primeras etapas $0 < t/t_{Ohm} \leq 0.001$ la mayor parte de la energía está incluida en los modos toroidales axisimétricos toroidales y poloidales, la energía poloidal es pequeña porque en este rango comienza a incrementar. Este comportamiento es globalmente representado en el panel 4.5d presentando un crecimiento de la energía toroidal en el intervalo de tiempo $0 < t/t_{Ohm} \leq 0.0005$. Sin embargo, en la segunda etapa $0.0005 \leq t/t_{Ohm} \leq 0.001$, el sistema evoluciona bajo el crecimiento de modos no-axisimétricos poloidales, representado como un crecimiento en la energía poloidal mostrado en la 4.5c.

En la etapa final $0.001 \leq t/t_{Ohm} \leq 0.00625$ se observa en el panel 4.11b que la energía contenida en el modo no-axisimétricos poloidal más relevantes (en términos de energía) es comparable a la energía del modo toroidal axisimétrico del campo de fondo. Por lo tanto, el campo inicial axisimétrico ha perdido su simetría azimutal. Este comportamiento es característico del desarrollo de una inestabilidad no-axisimétrica que produce una ruptura de la simetría axial debido al acople entre modos axisimétricos y no-axisimétricos que puede ser representado con energías comparables entre ellos.



(a) $P = 0.1 \quad R_B = 0$ **(b)** $P = 0.1 \quad R_B = 100$

Figura 4.11.: Evolución de los modos de energía para un campo de fondo toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ perturbado por modos Ohm toroidales no-axisimétricos $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)} + \left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. a) $P = 0.1 \quad R_B = 0$ .b) $P = 0.1 \quad R_B = 100$. La línea gruesa corresponde a los modos poloidales, mientras que las líneas delgadas están asociadas a los modos toroidales. Igualmente, un color específico representa cada uno de los índices de los modos (l, m) independientemente de cuál sea (poloidal o toroidal).

4.4. Evolución de la estructura del campo magnético

En esta sección se presentarán los resultados de la evolución magnética topológica para cada configuración magnética inicial para los casos en los cuales el sistema evoluciona sin ser perturbado $P = 0$ y el caso en el cual se incluye una perturbación inicial $P = 0.1$, teniendo fijo el número magnético de Reynolds $R_{\mathcal{B}} = 100$.

De forma general, en todas las gráficas se pudo apreciar un movimiento del campo magnético desde un hemisferio hacia el otro. Esto se debe a que la existencia del término Hall genera una corriente asociada, la cual lleva a la excitación de un campo eléctrico Hall $\mathbf{E}_H$ en el medio. Esta componente es perpendicular a $\mathbf{J}$ y $\mathbf{B}$. Para dar explicación a este comportamiento, se procederá a seguir el mecanismo indicado por Urpin y Shalybkov [66].

$$\mathbf{E}_H = \wedge \left(\mathbf{J}.\mathbf{B}\right), \tag{4.66}$$

$$\wedge = \frac{R_H}{B} = \frac{B}{nceB} = \frac{1}{nce}, \tag{4.67}$$

donde R_H es la resistencia Hall y $\wedge$ es el parámetro Hall.

Tomando por ejemplo el caso de un campo magnético toroidal (2D) en el hemisferio superior de la corteza, luego la corriente estaría determinada por: $\mathbf{J} = (\mathbf{J}_r, \mathbf{J}_{\theta,0})$. Ahora el objetivo es examinar, el cambio del flujo magnético (similar a la Sección 3.5) en un pequeño intervalo de tiempo como resultado del efecto Hall.

$$\Psi = \iint \mathbf{B}.d\mathbf{S}, \tag{4.68}$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \iint \frac{\partial \mathbf{B}_H}{\partial t}.d\mathbf{S} = -\iint \nabla \times \mathbf{E}_H.d\mathbf{S} = -\oint \mathbf{E}_H.d\mathbf{l}, \tag{4.69}$$

reemplazando la Ecuación 4.66 en la Ecuación 4.69 se obtiene,

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\oint \wedge \left(\mathbf{J}.\mathbf{B}\right).d\mathbf{l}, \tag{4.70}$$

donde $d\mathbf{S}$ representa un elemento de superficie de la corteza de la estrella y $d\mathbf{l}$ un elemento de longitud en el contorno de la superficie. En la superficie de la corteza se tiene que $d\mathbf{l} \perp J \Rightarrow \mathbf{E}_H = 0$. Este hecho es consistente con la naturaleza no disipativa de las corrientes Hall. Luego $d\Psi/dt = 0$ y el flujo magnético es conservado. Ahora si se toma en cuenta la estructura completa de la corteza, entonces se subdivide en dos hemisferios limitados por una intersección con el plano ecuatorial a. Para el hemisferio superior,

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_1 = \iint \frac{\partial \mathbf{B}_H}{\partial t}.d\mathbf{S} = -\oint \mathbf{E}_H.d\mathbf{l} = -\oint_0^a \mathbf{v}_\theta.\mathbf{B}d\mathbf{r} \tag{4.71}$$

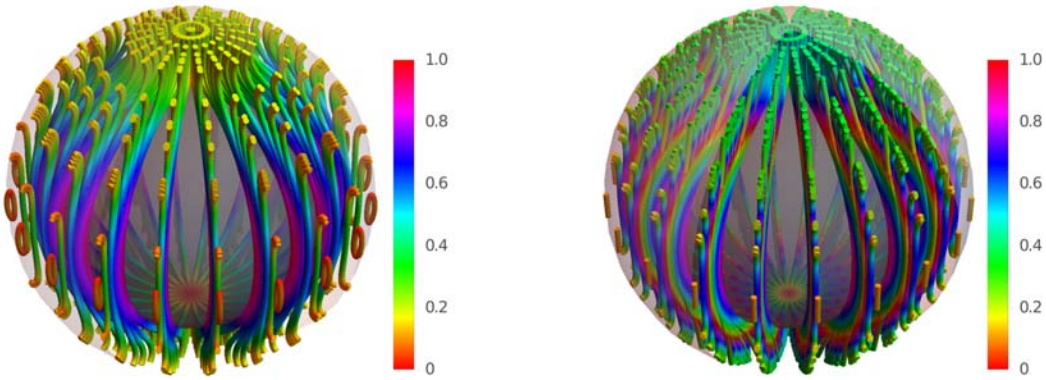
para el hemisferio inferior,

$$\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_2 = -\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)_1 = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}_H}{\partial t}.d\mathbf{S} = -\oint \mathbf{E}_H.d\mathbf{l} = \oint_0^a \mathbf{v}_\theta.\mathbf{B}d\mathbf{r} \tag{4.72}$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{J}/ne$ es la velocidad de corriente del electrón. Ahora estas integrales no son cero debido a que $\mathbf{B}$ depende de $\mathbf{r}$. Sin embargo, se cumple $d\Psi/dt = 0$, llevando a que el flujo magnético se encuentre congelado al flujo de electrones. Traduciéndose en un movimiento del campo magnético entre hemisferios.

4.4.1. Campo inicial puramente poloidal

El campo inicial puramente poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ sin perturbación ($P = 0$) se muestra en la Figura 4.12y su respectiva evolución en la Figura 4.13. Se puede apreciar que la configuración inicial para $t = 0$ es puramente poloidal (flechas) y una vez el efecto Hall está activo se genera un campo toroidal (color de fondo). El producto del cambio de color en escala de verdes es debido a las oscilaciones Hall, que producen una advección del campo magnético. Este resultado topológico, confirma la evolución de la energía magnética de la Subsección 4.3.3 (ver panel 4.6b)



(a) Analítica **(b)** Numérica

Figura 4.12.: Condición inicial de un campo puramente poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$. Los colores están escalados entre 0 y 1, donde el color morado es el mayor y el naranja es el menor.

Ahora la Figura 4.14 muestra el caso en el cual se incluye la evolución del campo para un campo inicial 2D poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ perturbado por un campo poloidal 3D $\left[h^{n=3}_{l=2,m=2}\right]^{(1)} + \left[h^{n=2}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. Los análisis de energía para esta configuración de campo indicaban la formación de pequeñas estructuras magnéticas en un intervalo de tiempo comprendido entre $0 \leq t/t_{Ohm} \leq 0.001$, las cuales son observadas en esta figura y que pertenecen a la formación de modos toroidales no-axisimétricos. Conforme transcurre la evolución del campo en el tiempo, la energía de estos modos se disipa y el campo retoma su configuración axisimétrica, llevándolo a evolucionar como un campo puramente poloidal 2D.

Por otra parte, las oscilaciones causadas por el efecto Hall que se observaron en el comportamiento de la energía, se traducen en una inversión en el signo del campo del magnético, el cual se origina en el ecuador y se propaga hacia los polos. Los armónicos más grandes del campo que aparecen en las primeras etapas como resultado del efecto Hall son amortiguados en una escala de tiempo más corta y por lo tanto, decaen más significativamente que el modo óhmico fundamental. Por lo tanto la evolución de estos armónicos es determinada por el efecto Ohm. Como resultado, el modo fundamental poloidal domina nuevamente después de un cierto tiempo, y el campo evoluciona simétricamente con respecto al plano ecuatorial.

4.4.2. Campo inicialmente puramente toroidal

El campo inicial puramente toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ sin perturbación ($P = 0$) se muestra en la Figura 4.15 y su respectiva evolución en la Figura 4.16. Los resultados analíticos concluyen que un campo inicial toroidal no genera un campo poloidal, incluso si su evolución es bajo el efecto de Hall. Este resultado se constata en esta figura debido a que las flechas que representan el campo poloidal no fueron generadas.

De forma similar al comportamiento del campo poloidal, se produce un transporte del campo magnético, lo cual genera un cambio en la topología inicial, llevándolo a una configuración que permanece en equilibrio durante la mayor parte de su evolución. De forma diferente al campo poloidal, el movimiento del campo desde un hemisferio a otro no juega un papel importante aquí y el campo comienza a aproximarse a una simetría de su estado inicial toroidal puro.

Ahora para el caso en el cual está presente la perturbación, basado en los análisis de la energía magnética, se obtuvo que la evolución de esta configuración rompía su simetría axial y evolucionaba bajo la influencia de un campo poloidal no-axisimétrico que crecía a expensas del campo de fondo 2D toroidal. Por tal razón, esta representación no es la más adecuada para mostrar este resultado. Sin embargo, a partir de esta imagen se puede validar el hecho de que en un intervalo de tiempo comprendido entre $t/t_{Ohm} \geq 0.001$ se presenta la generación de estructuras magnéticas pequeñas que permitían de manera más eficiente el decaimiento de la energía del campo magnético.

4.4.3. Campo inicial poloidal+toroidal

El campo inicial conformado por una mezcla de campos iniciales de fondo poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ y toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$sin perturbación ($P = 0$) se muestra en la

La Figura 4.19 resume la historia de la evolución temporal del campo magnético . Como resultado de estas simulaciones, y de forma general para los casos anteriores se produce un movimiento del campo magnético y que basado en los cálculos de la energía va a presentar un decaimiento amortiguado. Este amortiguamiento del campo se debe a la disipación óhmica, debido a que a medida que el campo disminuye su valor, lo hace a su vez el parámetro de magnetización restándole importancia al efecto Hall hasta el punto en el cual el efecto Ohm va a determinar totalmente la evolución magnética.

La Figura 4.19 pertenece a una condición inicial de un modo óhmico fundamental poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ y uno toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$. En estas imágenes se puede observar la formación de pequeñas estructuras magnéticas emergiendo cerca de los polos, indicando la formación de corrientes muy intensas. Estas estructuras son efecto de los efectos de turbulencia del fenómeno, los cuales se explicaron en la anterior sección. Por esta razón al incrementar $R_{\mathcal{M}}$ los efectos no-lineales serían más importantes y estas estructuras se volverían mucho más pequeñas, impidiendo que numéricamente puedan ser resueltas.

La Figura 4.20 muestra la topología de un campo constituido por modos óhmicos fundamentales que forman un campo de fondo toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ y poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$, y perturbado por la combinación de dos modos óhmicos no-axisimétricos toroidales toroidales $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)} + \left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$ y modos óhmicos poloidales $\left[h^{n=3}_{l=3,m=3}\right]^{(1)} + \left[h^{n=3}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. En el intervalo $0 \leq t/t_{Ohm} \leq 0.001$ la evolución de esta configuración generó modos de energía no-axisimétricos a expensas del campo de fondo 2D, estos modos son representados por regiones magnéticas pequeñas en la figura. Sin embargo, para tiempos posteriores $t/t_{Ohm} \geq 0.001$ un campo poloidal axisimétrico crece en energía, apantallando cualquier intento de desarrollo de una inestabilidad no-axisimétrica y el campo evoluciona bajo una simetría axial.

Figura 4.13.: Evolución topológica temporal del campo magnético para un campo inicial axisimétrico poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ bajo la influencia del efecto Hall $R_B = 100$. El campo toroidal está representado por color de fondo, el cual está medido en escalas de colores, siendo blanco y negro representando mayor y menor intensidad respectivamente, mientras el verde es la transición entre ambos. Las flechas se refieren al campo poloidal, siendo las más cortas de menor magnitud del campo y las más largas las de mayor. Las imágenes son presentadas en un formato bidimensional, utilizando una sección transversal para $\phi = 0$.

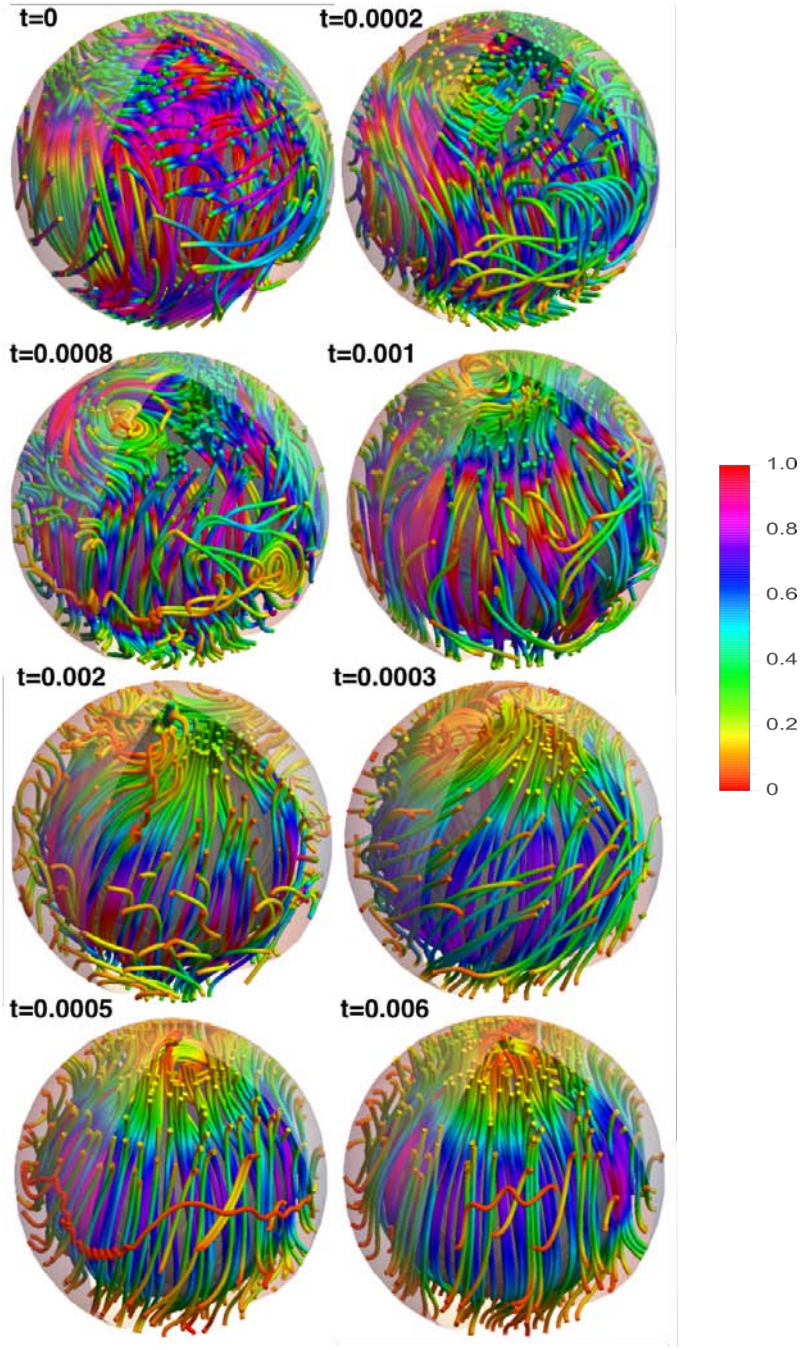
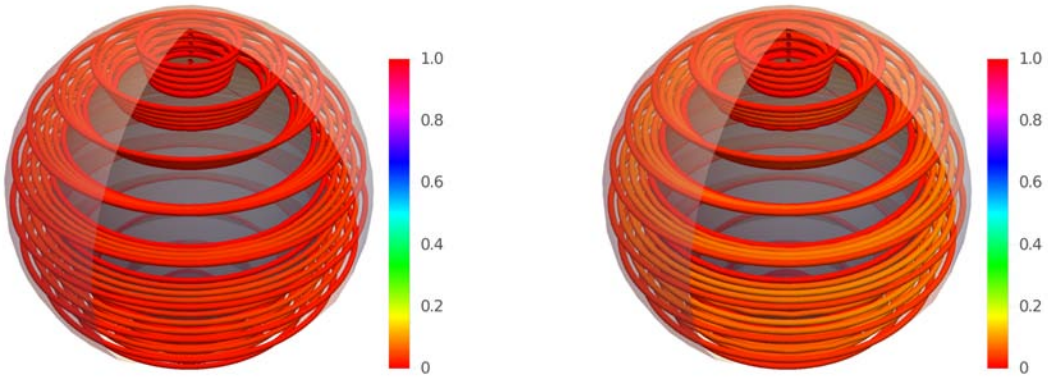


Figura 4.14.: Evolución topológica temporal del campo magnético para la condición inicial de un campo inicial poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ perturbado por un campo poloidal $\left[h^{n=3}_{l=2,m=2}\right]^{(1)} + \left[h^{n=2}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. La intensidad del campo está representado por una barra de colores, el cual está medido en escalas de colores, siendo el violeta el de mayor intensidad y el rojo el de menor intensidad.



(a) Analítica **(b)** Numérica

Figura 4.15.: Condición inicial de un campo puramente poloidal $\left[g_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$. Los colores están escalados entre 0 y 1, donde el color morado es el mayor y el naranja es el menor.

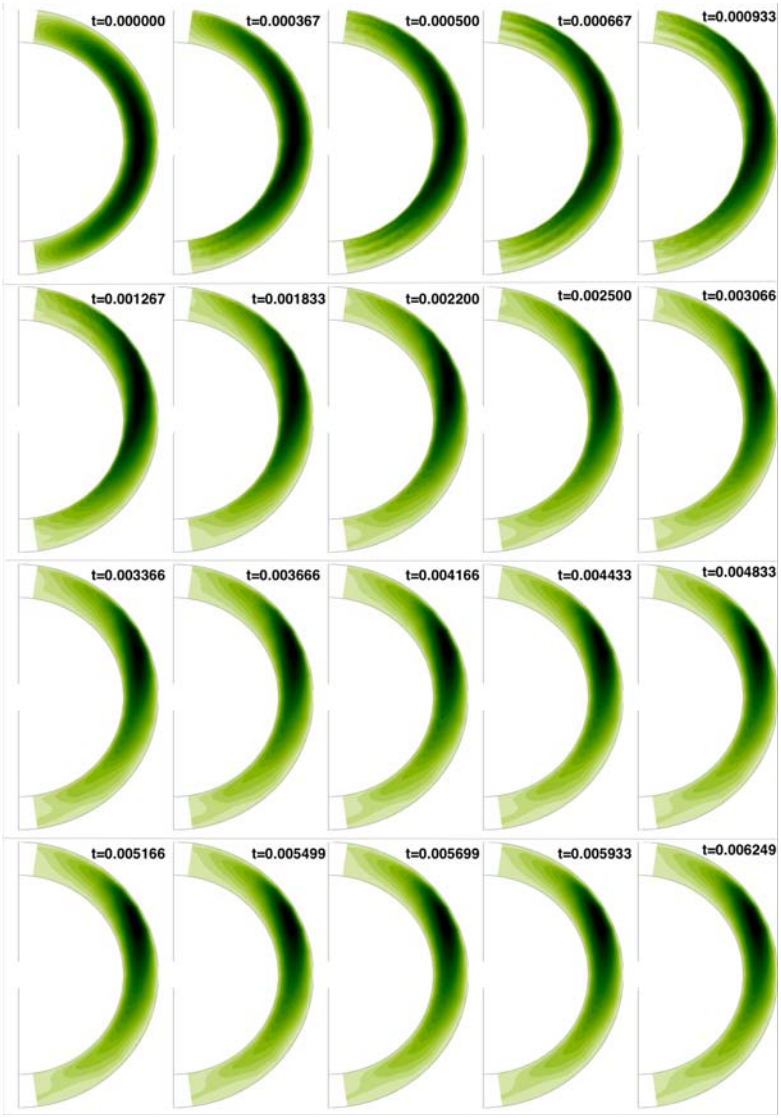


Figura 4.16.: Evolución topológica temporal del campo magnético para la condición inicial de un campo puramente toroidal $\left[g_{l=1,m=0}^{n=1}\right]^{(0)}$ en el cual el valor de la perturbación fue $P = 0$. El campo toroidal está representado por color de fondo, el cual está medido en escalas de colores, siendo blanco y negro representando mayor y menor intensidad respectivamente, mientras el verde es la transición entre ambos. Las imágenes son presentadas en un formato bidimensional, utilizando una sección transversal para $\phi = 0$.

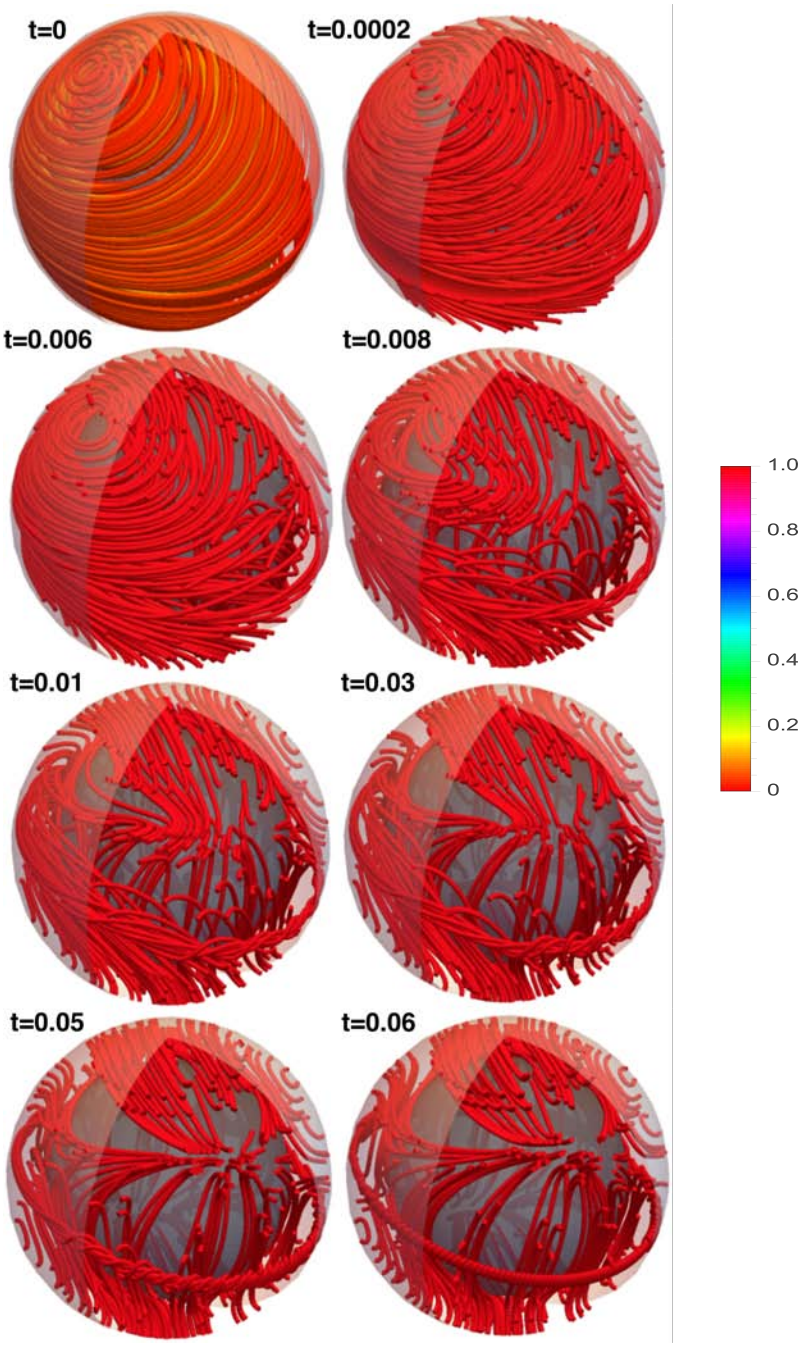
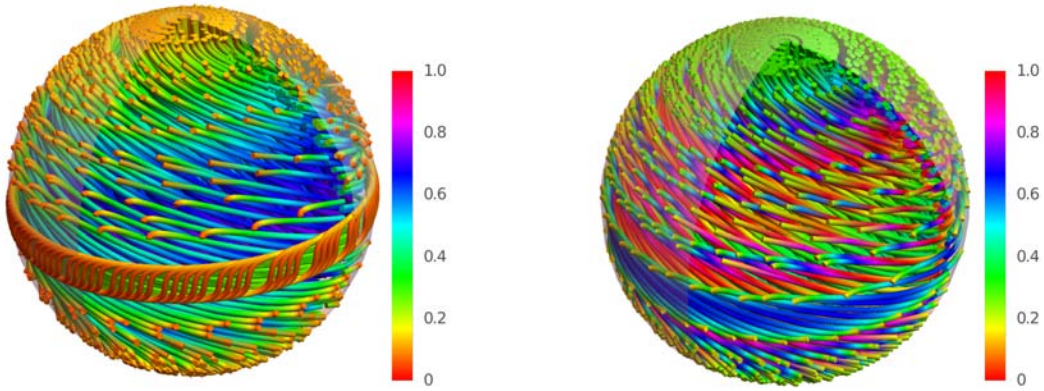


Figura 4.17.: Evolución topológica temporal del campo magnético para la condición inicial de un campo inicial toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ perturbado por un campo toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=1}\right]^{(1)} + \left[g^{n=1}_{l=2,m=1}\right]^{(2)}$. La intensidad del campo está representado por una barra de colores, el cual está medido en escalas de colores, siendo el violeta el de mayor intensidad y el rojo el de menor intensidad.



(a) Analítica **(b)** Numérica

Figura 4.18.: Condición inicial de un campo conformado por una mezcla de campos iniciales de fondo poloidal $\left[h^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ y toroidal $\left[g^{n=1}_{l=1,m=0}\right]^{(0)}$ Los colores están escalados entre 0 y 1, donde el color morado es el mayor y el naranja es el menor.

Figura 4.19.: Evolución topológica temporal del campo magnético para la condición inicial de un campo puramente poloidal+toroidal en el cual, el valor de la perturbación fue $P = 0$. El campo toroidal está representado por color de fondo, el cual está medido en escalas de colores, siendo blanco y negro representando mayor y menor intensidad respectivamente, mientras el verde es la transición entre ambos. Las flechas se refieren al campo poloidal, siendo las más cortas de menor magnitud del campo y las más largas las de mayor. Las imágenes son presentadas en un formato bidimensional, utilizando una sección transversal para $\phi = 0$.

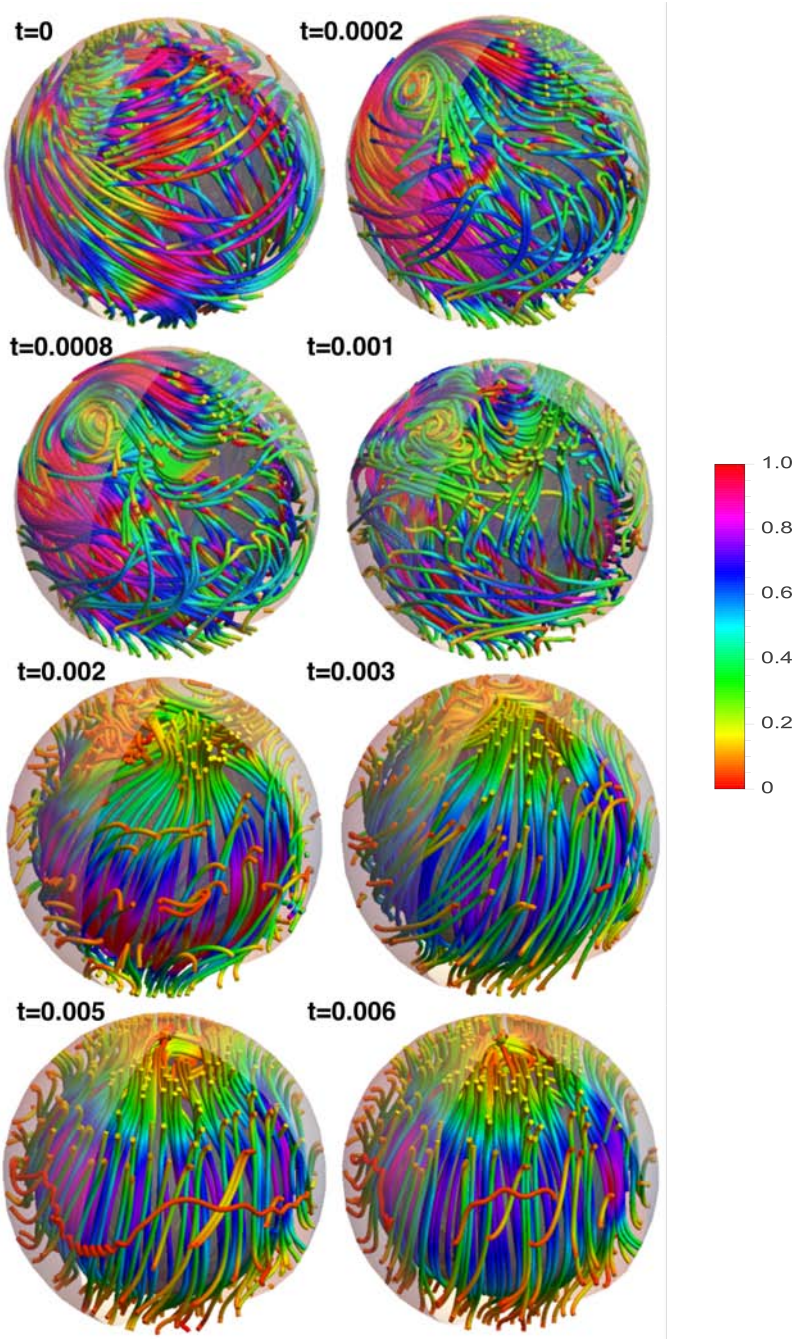


Figura 4.20.: Evolución topológica temporal del campo magnético para la condición inicial de un campo puramente poloidal+toroidal en el cual, el valor de la perturbación fue $P = 0.1$. La intensidad del campo está representado por una barra de colores, el cual está medido en escalas de colores, siendo el violeta el de mayor intensidad y el rojo el de menor intensidad.

5. Conclusiones

Se resolvió la ecuación diferencial que representa la evolución del campo magnético en la corteza de una estrella de neutrones, utilizando simulación numérica espectral. Los resultados presentados sugieren que el efecto Hall puede influenciar significativamente el comportamiento del decaimiento del campo magnético debido al acople que se produce entre modos de energía, generando diferentes configuraciones magnéticas sobre las cuales el término lineal-Ohm actúa de forma más eficiente disipando la energía magnética en forma de calor. Particularmente en el desarrollo de esta tesis, se estudió la estabilidad de modos óhmicos axisimétricos (2D) perturbados por modos óhmicos no-axisimétricos (3D). El punto de partida bidimensional es diferenciado por tres condiciones iniciales diferentes, en las cuales se tuvieron *i*) campo de fondo formado por un modo óhmico poloidal *ii*) campo de fondo formado por un modo óhmico toroidal, y *iii*) mezcla de campos de un modo óhmico poloidal y uno toroidal, conteniendo el mismo porcentaje de energía.

A continuación, se resumen las conclusiones más importantes:

1. Se encontraron que los tres tipos de condiciones iniciales 2D usadas en ausencia de perturbaciones 3D, la evolución Hall y Ohm de estas configuraciones presentó el comportamiento de una evolución 2D, como era esperado. Este comportamiento valida el buen funcionamiento del código numérico 3D. (ver paneles 4.5a y 4.5b)

2. En las tres condiciones iniciales, la inclusión de perturbaciones 3D produjeron en las primeras etapas de la evolución una generación de modos poloidales y toroidales 3D que son atribuidos al acople entre el campo 2D de fondo y las perturbaciones 3D, y además acoplamientos entre los modos 3D generados. Estos causaron un decaimiento más rápido en la energía magnética total. Esto es atribuido a la existencia de más canales de disipación (en presencia de perturbaciones) que mejoraron los efectos no-lineales producidos por el término Hall (ver panel 4.4b).

3. En el caso de una condición inicial de un modo poloidal 2D, los modos toroidales 3D generados desaparecieron rápidamente en las primeras etapas de evolución debido a la generación de modos poloidales 3D que apantallaron los modos toroidales 3D. En etapas posteriores de tiempo los modos 3D poloidales nunca llegaron a ser comparables con respecto al modo poloidal inicial 2D. En otras palabras, en este caso, la inclusión de una perturbación 3D no generó una inestabilidad 3D (ver panel 4.9b).

4. Cuando el campo inicial 2D de fondo es conformado por una mezcla de un modo óhmico poloidal 2D y uno toroidal 2D con la misma cantidad de energía, después del comienzo de la evolución, algunos modos poloidales y toroidales 3D crecieron. Sin embargo, una inestabilidad 3D no fue desarrollada apreciablemente en etapas posteriores debido el crecimiento de un modo poloidal 2D a expensas de los modos 3D generados. Entonces, nuevamente la evolución del campo preservó su simetría axial (la inestabilidad 3D no se mantuvo a lo largo de la evolución) (ver panel 4.10b).
5. En el caso de un campo de fondo inicial toroidal 2D, en las primeras etapas el modo inicial 2D toroidal y modos toroidales 3D generados contienen la mayor cantidad de energía. Además, durante esta etapa se observó un incremento de modos poloidales 3D. Estos modos poloidales 3D tienen un importante crecimiento en etapas posteriores hasta el punto de que la energía de el modo poloidal 3D generado es comparable a la energía del modo toroidal 2D correspondiente al campo inicial. Luego, una inestabilidad 3D es creada para esta configuración (ver panel 4.11b).

A. Apéndice

A.1. Cálculo energía magnética analítica

En la siguiente figura se muestra el desarrollo empleado en el Software Mathematica para el cálculo de la energía magnética en $t = 0$ de manera analítica. Se comienzan definiendo las constantes iniciales radiales $r_i\, r_0$y el valor del modo fundamental, el cual para el caso de los modos óhmicos fundamentales es el ($l = 1$, $m = 0$). Seguidamente se define el valor de las constantes que se obtienen a partir de las condiciones de frontera A/B y C/D además, de las constantes de decaimiento poloidal k_p y toroidal k_T. Luego, se definen las funciones $g\,(r,\theta\,)$ y $h\,(r,\theta\,)$ con el fin de obtener las componentes del campo magnético B_r, B_θ, B_ϕ, las cuáles van a ser integradas en el volumen, con el objetivo final de encontrar el valor de la energía magnética inicial.

```
ri = 0.75;
ro = 1.0;
l = 1;
m = 0;
ASB = 1.07456;
CSD = -0.18517;
klp = 7.03266;
klt = 12.67071;

hlm[r, θ] = -r ((ASB) SphericalBesselJ[l, klp r] + SphericalBesselY[l, klp r]) LegendreP[l, m, Cos[θ]];

glm[r, θ] = -r ((CSD) SphericalBesselJ[l, klt r] + SphericalBesselY[l, klt r]) LegendreP[l, m, Cos[θ]];

Br = (-1/r^2) (∂θ,θ hlm[r, θ] + Cot[θ] ∂θ hlm[r, θ]);

Bθ = 1/r ∂r,θ hlm[r, θ];

Bϕ = (1/r) (- ∂θ glm[r, θ]);

br2 = Simplify[Br^2];

bθ2 = Simplify[Bθ^2];

bϕ2 = Simplify[Bϕ^2];

Er = ∫_ri^ro (br2 + bθ2 + bϕ2) r^2 dr;

Eθ = ∫_0^Pi Ers Sin[θ] dθ

Et = 2 π Eθ
2.13307
```

Figura A.1.: Procedimiento empleado en Mathematica para el cálculo de la energía magnética inicial

Bibliografía

[1] T. G. Pannuti, O. Kargaltsev, J. P. Napier, and D. Brehm, "XMM-Newton and Chandra Observations of the Ejecta-Dominated Mixed-Morphology Galactic Supernova Remnant G352.7-0.1," *ApJ*, vol. 782, no. 2, p. 14, jan 2014.

[2] M. Weiss, "Chandra :: Photo Album :: SN 2006gy :: More Images of SN 2006gy," 2006. [Online]. Available: http://chandra.harvard.edu/photo/2007/sn2006gy/more.html

[3] U. Hwang and J. M. Laming, "A Chandra X-ray Survey of Ejecta in the Cassiopeia A Supernova Remnant," *ApJ*, vol. 746, p. 180, nov 2012.

[4] M. A. S. Salas. P, "Estrellas de neutrones," *Revista Mexicana de Fisica*, vol. 52, no. 1, pp. 37–46, 2006.

[5] L. F. M. Martínez, "Estrellas de Neutrones y Propagación de Neutrinos," Ph.D. dissertation, Universidad Nacional de Colombia, 2011. [Online]. Available: http://www.bdigital.unal.edu.co/6225/1/835140.2011.pdf

[6] J. J. Hester, K. Mori, D. Burrows, J. S. Gallagher, J. R. Graham, M. Halverson, A. Kader, F. C. Michel, and P. Scowen, "Hublle Space telescope and Chandra monitoring of the Crab synchrotron nebula," *ApJ*, vol. 577, pp. 49–52, 2002.

[7] Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, "Chandra :: Field Guide to X-ray Sources :: Neutron Stars/X-ray Binaries," 2012. [Online]. Available: http://chandra.harvard.edu/xray{_}sources/neutron{_}stars.html

[8] C. J, "Possible Existence of a Neutron : Nature," p. 312, 1932.

[9] W. Baade and F. Zwicky, "Cosmic Rays from Super-Novae." *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A*, vol. 20, no. 5, pp. 259–63, may 1934.

[10] A. Hewish, S. J. Bell, J. D. H. Pilkington, P. F. Scott, and R. A. Collins, "Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source," *Nature*, vol. 217, no. 5130, pp. 709–713, feb 1968.

[11] T. Gold, "Rotating Neutron Stars as the Origin of the Pulsating Radio Sources," *Nature*, vol. 218, no. 5143, pp. 731–732, may 1968.

[12] W. Baade, "The Absolute Photographic Magnitude of Supernovae." *ApJ*, vol. 88, p. 285, oct 1938.

[13] ——, "Nova Ophiuchi of 1604 AS a Supernova." *ApJ*, vol. 97, p. 119, mar 1943.

[14] ——, "B Cassiopeiae as a Supernova of Type I." *ApJ*, vol. 102, p. 309, nov 1945.

[15] F. Zwicky, "Types of Novae," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 12, no. 1, pp. 66–85, jan 1940.

[16] M. Zeilik, "The Birth of Massive Stars," *Sci. Am.*, vol. 238, no. 4, pp. 110–118, apr 1978.

[17] N. Rea, "Magnetars: The strongest magnets in the Universe," *Astron. Nachr*, vol. 335, no. 3, pp. 329–333, mar 2014.

[18] R. Turolla, S. Zane, and A. L. Watts, "Magnetars: the physics behind observations. A review," *Rep. Prog. Phys*, vol. 78, no. 11, p. 116901, nov 2015.

[19] A. Reisenegger, "Magnetic field evolution in neutron stars," *Astron. Nachr*, vol. 328, no. 10, pp. 1173–1177, dec 2007.

[20] R. Ciolfi, "Modelling the magnetic field configuration of neutron stars," *Astron. Nachr*, vol. 335, no. 6-7, pp. 624–629, aug 2014.

[21] A. Cumming, P. Arras, and E. Zweibel, "Magnetic Field Evolution in Neutron Star Crusts Due to the Hall Effect and Ohmic Decay," *ApJ*, vol. 609, no. 2, pp. 999–1017, jul 2004.

[22] K. N. Gourgouliatos, A. Cumming, A. Reisenegger, C. Armaza, M. Lyutikov, and J. A. Valdivia, "Hall equilibria with toroidal and poloidal fields: application to neutron stars," *Mon. Not. R. Astron. Soc*, vol. 434, pp. 2480–2490, 2013.

[23] C. J. Pethick and M. Sahrling, "Ohmic decay of magnetic fields generated by currents in the crusts of neutron stars," *ApJ*, vol. 453, 1995.

[24] Y. Sang and G. Chanmugam, "Ohmic decay of crustal neutron star magnetic fields," *ApJ*, vol. 323, p. L61, dec 1987.

[25] D. G. Haensel, P.Urpin, V. A.; Iakovlev, "Ohmic decay of internal magnetic fields in neutron stars," *A&A*, vol. 229, pp. 133–137, 1990.

[26] P. Goldreich and A. Reisenegger, "Magnetic field decay in isolated neutron stars," *ApJ*, vol. 395, p. 250, aug 1992.

[27] V. A. Shalybkov, D. A. Urpin, "The Hall effect and the decay of magnetic fields." *A&A*, vol. 321, pp. 685–690, 1969.

[28] R. Hollerbach, "A spectral solution of the magneto-convection equations in spherical geometry," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, vol. 32, pp. 773–797, 2000.

[29] U. Rheinhardt, M. and Geppert, "Hall-Drift Induced Magnetic Field Instability in Neutron Stars," *Phys.Rev.Lett*, vol. 88, no. 10, p. 101103, 2002.

[30] L. D. Reisenegger. A, Benguria. R, Prieto J.P, P. A. Araya, "Hall drift of axisymmetric magnetic fields in solid neutron-star matter," *A&A*, vol. 472, no. 7874, pp. 233–240, 2007.

[31] U. A. Bonnano.V, "Non-axisymmetric instability of axisymmetric magnetic fields," *A&A*, vol. 488, pp. 1–7, 2008.

[32] Gourgouliatos. K. N and C. A, "Hall attractor in axially symmetric magnetic fields in neutron star crusts," *Phys.Rev.Lett*, vol. 112, no. 17, p. 171101, apr 2014.

[33] P. Marchant, A. Reisenegger, J. A. Valdivia, and J. H. Hoyos, "Stability of the Hall Equilibria in neutron star crusts," *ApJ*, vol. 796, no. 2, p. 94, nov 2014.

[34] K. N. Gourgouliatos, T. S. Wood, and R. Hollerbach, "Magnetic field evolution in magnetar crusts through three-dimensional simulations." *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A*, vol. 113, no. 15, pp. 3944–9, apr 2016.

[35] I. George W. Collins, *The Fundamentals of Stellar Astrophysics*, 1st ed., W H Freeman & Co, Ed. New York: W H Freeman & Co, 2003. [Online]. Available: http://ads.harvard.edu/books/1989fsa..book/

[36] S. A. Zhekov, R. McCray, K. J. Borkowski, D. N. Burrows, and S. Park, "Chandra Observations of Shock Kinematics in Supernova Remnant 1987A," *ApJ*, vol. 628, no. 2, pp. L127–L130, aug 2005.

[37] S. E. Woosley, A. Heger, and T. A. Weaver, "The evolution and explosion of massive stars," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 74, no. 4, pp. 1015–1071, 2002.

[38] D. Haensel, P., Potekhin, A.Y., Yakovlev, "Neutron Stars 1," in *Neutron Stars 1 Equation of State and Structure*, 1st ed., P. H. D.G. Yakovlev, Ed. Springer-Verlag New York, 2007, p. 35/38.

[39] J. W. Clark, "Inside a neutron star," *Analog Sci Fict Sci Fact*, p. 61/76, 1974.

[40] H. Heiselberg and M. Hjorth-Jensen, "Phases of dense matter in neutron stars," *Physics Reports*, vol. 328, no. 5, pp. 237–327, 2000.

[41] J. A. Sauls, "Superfluidity in the Interiors of Neutron Stars," in *Timing Neutron Stars*, 1st ed., H. Ö. P. J. van den Heuvel, Ed. Dordrecht: Springer, Dordrecht, 1989, pp. 457–490.

[42] A. G. Lyne and F. Graham-Smith, *Pulsar astronomy*, 4th ed., F. Graham-Smith, Ed. Cambridge University Press, 2006.

[43] B. W. Carroll and D. A. Ostlie, *An introduction to modern astrophysics*, 2nd ed., P. Addison-Wesley, Ed. Pearson Addison-Wesley, 2007.

[44] I. F. Malov, "Magnetic fields and the P-P diagram for radio pulsars," *Astronomy Reports*, vol. 45, no. 5, pp. 389–394, may 2001.

[45] R. Walder, D. Folini, G. Meynet, R. Walder, D. Folini, and G. Meynet, "Magnetic Fields in Massive Stars, Their Winds, and Their Nebulae," *Space Sci Rev*, vol. 166, pp. 145–185, 2012.

[46] M. J. Stift, "The radii of the Ap stars," *A&A*, vol. 34, pp. 153–155, 1974.

[47] "The Violent Universe, australian national university," http://https://courses.edx.org/courses/ANUx/ANU-ASTRO3x/4T2014/course/, accessed: 2010-09-30.

[48] A. M. Beloborodov and C. Thompson, "Corona of Magnetars," *ApJ*, vol. 657, no. 2, p. 967, 2007.

[49] Nick Murphy, "Ideal MHD," 2016. [Online]. Available: https://www.cfa.harvard.edu/{~}namurphy/teaching.html

[50] R. O. Dendy, *Plasma dynamics*, 1st ed., R. Dendy, Ed. Clarendon Press, 1990.

[51] H. C. Spruit, *Essential magnetohydrodynamics for astrophysics*, 1st ed., Max Planck Institute for Astrophysics, Ed. Garching: Max Planck Institute for Astrophysics, 2017. [Online]. Available: http://wwwmpa.mpa-garching.mpg.de/{~}henk/mhd12.pdf

[52] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, 2nd ed., L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Eds. Butterworth-Heinemann, 2004.

[53] J. Braithwaite, *An Introduction to Hydrodynamics and Astrophysical Magnetohydrodynamics*, 1st ed., J. Braithwaite, Ed. Bonn: CreateSpace Independent Publishing Platform, 2015.

[54] J. D. Avendaño Valencia, "Scaling Laws for Asymmetric Magnetic Reconnection," Ph.D. dissertation, Universidad Nacional de Colombia, 2014. [Online]. Available: http://www.bdigital.unal.edu.co/12235/

[55] S. J. Schwartz, C. J. Owen, and D. Burgess, *Astrophysical Plasmas*, 1st ed., S. J. Schwartz, C. J. Owen, and D. Burgess, Eds. London: University of London, 2004.

[56] Hardi Peter, *Magnetohydrodynamics*, 1st ed., A. T. Peter A. Davidson, Ed. Springer-Verlag Wien, 2002.

[57] A. C. Harald Lesch, Guido Birk, "Astrophysical Plasmas," pp. 1–22, 2016. [Online]. Available: http://www.usm.uni-muenchen.de/people/lesch/astrophysical{_}plasmas.pdf

[58] K. C. Tsinganos, *Solar and Astrophysical Magnetohydrodynamic Flows*, 1st ed., K. Tsinganos, Ed. Springer Netherlands, 1996.

[59] J. A. Pons, B. Link, J. A. Miralles, and U. Geppert, "Evidence for Heating of Neutron Stars by Magnetic-Field Decay," *Phys.Rev.Lett*, vol. 98, no. 7, p. 071101, feb 2007.

[60] A. S, Puhales. F. and M, Demarco. G. and G, Nogueira. L. and O.C, Acevedo. and G.A, Degrazia. and G.S, Welter. and F.D, Costa. and G.f, Fisch. and A.C, "Estimates of turbulent kinetic energy dissipation rate for a stratified flow in a wind tunnel," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 431, pp. 175–187, aug 2015.

[61] H. R and R. G, "The influence of Hall drift on the magnetic fields of neutron stars," *Mon. Not. R. Astron. Soc*, vol. 337, pp. 216–224, 2002.

[62] V. Urpin, D. Shalybkov, W. M. A., Z. F.-J., and P. W., "Magnetohydrodynamic processes in strongly magnetized young neutron stars," *Mon. Not. R. Astron. Soc*, vol. 304, no. 2, pp. 451–456, apr 1999.

[63] A. I. Chugunov, "Electrical conductivity of the neutron star crust at low temperatures," *Astronomy Letters*, vol. 38, no. 1, pp. 25–44, jan 2012.

[64] A. Sepúlveda, *Lecciones de Física Matemática*, 1st ed., U. de Antioquia, Ed. Medellín: Universidad de Antioquia, 2009. [Online]. Available: https://books.google.co.ke/books?id=GVllwgJN0UwC

[65] P. Marchant, "Evolution of axially symmetric magnetic fields in neutron star crusts due to the Hall drift," p. 14/17, 2012. [Online]. Available: http://repositorio.conicyt.cl/handle/10533/189298

[66] U. V. A and D. Shalybkov, "Effect of Hall currents on magnetic-field dissipation," *Sov.Phys. JETP*, vol. 100, pp. 703–707, 1991.