

**“DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL Y PREDICCIÓN DEL COEFICIENTE
DE TRANSFERENCIA DE CALOR ALREDEDOR DEL BULBO
DE UN TERMÓMETRO DE VIDRIO”**

**I.Q. MANUEL ALEJANDRO MAYORGA BETANCOURT
CÓDIGO 293714**

Tesis de grado presentada para optar al título de Magíster en Ingeniería Química

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA
BOGOTÁ, D.C.
2010**

**“DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL Y PREDICCIÓN DEL COEFICIENTE
DE TRANSFERENCIA DE CALOR ALREDEDOR DEL BULBO
DE UN TERMÓMETRO DE VIDRIO”**

**I.Q. MANUEL ALEJANDRO MAYORGA BETANCOURT
CÓDIGO 293714**

Tesis de grado presentada para optar al título de Magíster en Ingeniería Química

**DIRECTOR: I.Q. HÉCTOR ARMANDO DURÁN PERALTA, M.Sc.
CODIRECTOR: I.Q. LUIS FERNANDO CORDOBA CASTRILLON, PhD.**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA
BOGOTÁ, D.C.**

2010

Nota de aceptación

Firma del Director de la Tesis

Firma del Codirector de la Tesis

Firma del jurado

Firma del jurado

Dedico este trabajo al creador de este maravilloso universo, a toda la humanidad que con su acumulado histórico de conocimientos permite que nos cuestionemos este tipo de situaciones, a toda mi familia, en especial a mi madre Carmen por todo su amor y dedicación, a mi Padre por su amor y compañía, a mis queridos hermanos Chuma y Yiyo, a mi amada Luisa, a mis tías Hersilia y Fanny por su apoyo, al resto de mis tí@s, a mi querida suegrita Dorita, a mis prim@s, a todos mis parientes, a Javier y Nana por su amistad incondicional, a Roger y Angela por su sincera aunque distante amistad, a mis colegas docentes: Alejo, Lucho, Paola y Leito por su compañía e interés –del bueno-, a tod@s mis verdader@s amig@s, al Pueblo Colombiano que con sus impuestos mantiene la Educación Pública y en fin a todos los que de una u otra manera se han preocupado por mis asuntos y/o me han colaborado en el desarrollo de mis actividades cotidianas.

AGRADECIMIENTOS

Al universo o Dios, por darme la sabiduría, el conocimiento, la fortaleza, el tiempo y los recursos para desarrollar este trabajo.

Al Ingeniero Armando Duran por su paciencia, colaboración, ingenio y brillantez sin las cuales este trabajo no se hubiera realizado satisfactoriamente.

Al Señor Edgar Alfonso Martínez Ramírez laboratorista de Lubricantes y Combustibles del Laboratorio de Ingeniería Química de la Universidad Nacional de Colombia por su incondicional colaboración, disposición y apoyo.

Al docente Germán Domingo Amat García del Instituto de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Colombia por las facilidades prestadas en el uso de equipos a su cargo.

Al Ingeniero Mario Enrique Velásquez, en este momento director del posgrado, por la motivación y preocupación brindada durante todos estos años y que indudablemente aportó para la culminación satisfactoriamente de mis estudios.

A Elvira Vargas de Mayorga por su aporte con el invaluable préstamo de la videograbadora.

A los estudiantes: Leonardo, Juan Carlos, Gonzalo y John Jairo por su invaluable colaboración.

A todas las personas que fueron mis docentes durante mis estudios desde el pre-escolar hasta el posgrado ya que gracias a sus enseñanzas puedo alcanzar este logro.

A todas aquellas personas que estuvieron presentes en cada momento y no dudaron en brindarme su apoyo y comprensión.

A los ingenieros Hermes Augusto Rangel Jara y Oscar J. Suárez Medina que como jurados hicieron importantes aportes, correcciones y recomendaciones al presente trabajo.

A la Universidad Nacional donde me he formado y a la ECCI donde me he desempeñado.

TABLA DE CONTENIDO

| | <i>Pág.</i> |
|---|-------------|
| INTRODUCCIÓN E IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA | 1 |
| JUSTIFICACIÓN | 2 |
| | |
| 1. GENERALIDADES | 4 |
| | |
| 1.1 TERMÓMETRO DE VIDRIO | 4 |
| 1.1.1 Antecedentes | 4 |
| 1.1.2 Descripción General | 6 |
| 1.1.3 Construcción | 7 |
| 1.1.4 Clases | 9 |
| 1.1.4.1 Profundidad de inmersión..... | 9 |
| 1.1.4.2 Escala de medición..... | 10 |
| 1.1.5 Calibración | 11 |
| 1.1.5.1 Examen visual | 11 |
| 1.1.5.2 Puntos de calibración | 11 |
| 1.1.5.3 Medición de columna emergente | 12 |
| 1.1.5.4 Corrección de la separación de columna..... | 12 |
| 1.1.6 Termómetro para calorímetro..... | 13 |
| | |
| 1.2 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y SU IMPORTANCIA | 14 |
| | |
| 1.3 ANTECEDENTES SOBRE EL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR | 16 |
| | |
| 1.4 CONVECCIÓN LIBRE O NATURAL..... | 21 |
| | |
| 1.5 DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS MÉTODOS EXPERIMENTALES PARA DETERMINAR COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN CONVECCIÓN LIBRE..... | 23 |
| 1.5.1 Métodos desarrollados únicamente con base en la ley de enfriamiento de Newton $\dot{Q} = hA(T_w - T_\infty)$ | 24 |
| 1.5.2 Métodos basados en las mediciones del campo de velocidades y de temperaturas del fluido y combinados con la ley de enfriamiento de Newton $\dot{Q} = hA(T_w - T_\infty)$ | 26 |

| | |
|--|-----------|
| 1.5.2 Métodos basados en las mediciones del campo de velocidades y de temperaturas del fluido y combinados con la ley de enfriamiento de Newton $\dot{Q} = hA(T_w - T_\infty)$ | 26 |
| 2. PREDICCIÓN DEL COEFICIENTE | 29 |
| 2.1 ESTADO DEL ARTE | 29 |
| 2.1.1 Análisis de la Convección..... | 29 |
| 2.1.2 Correlaciones Empíricas | 31 |
| 2.1.2.1 Cilindros Verticales..... | 32 |
| 2.1.2.2 Cilindros Horizontales..... | 35 |
| 2.2 CONSIDERACIONES GENERALES..... | 36 |
| 2.3 MÉTODO DIFERENCIAL | 40 |
| 2.3.1 Resolución Por Semejanza o Análisis Dimensional | 46 |
| 2.3.1.1 Ecuaciones y Condiciones Límite Adimensionales | 47 |
| 2.3.1.2 Solución..... | 48 |
| 2.3.2 Resolución por Análisis de Escala | 48 |
| 2.3.2.1 Número Prandtl Grande | 49 |
| 2.3.2.2 Número Prandtl Pequeño | 50 |
| 2.3.2.3 Número de Prandtl Unitario..... | 51 |
| 2.3.2.4 Resultado | 52 |
| 2.3.3 Resolución por Teoría de la Capa Límite | 53 |
| 2.4 MÉTODO INTEGRAL | 56 |
| 2.4.1 Planteamiento..... | 56 |
| 2.4.1.1 Ecuación de Cantidad de Movimiento | 56 |
| 2.4.1.2 Ecuación de Energía | 59 |
| 2.4.2 Solución..... | 61 |
| 2.4.2.1 Introducción de perfiles de velocidad y temperatura propuestos | 61 |
| 2.4.2.2 Solución del sistema U y δ | 66 |
| 2.4.2.2.1 Resolución del sistema para $n = 0$ | 69 |
| 2.4.2.2.2 Resolución del sistema para $n = 1$ | 72 |
| 2.4.2.3 Número de Nusselt..... | 74 |
| 2.4.2.3.1 Local | 75 |
| 2.4.2.3.2 Promedio | 76 |

| | |
|---|-----------|
| 3. CONSTRUCCIÓN Y SOLUCIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS | 80 |
| 3.1 FUNCIONAMIENTO DEL TERMÓMETRO DE VIDRIO: FLUIDO TERMOMÉTRICO | 80 |
| 3.1.1 Descripción Fenomenológica | 80 |
| 3.1.2 Construcción..... | 82 |
| 3.1.2.1 Termómetro | 85 |
| 3.1.2.2 Columna | 92 |
| 3.1.2.3 Bulbo | 93 |
| 3.1.3 Solución..... | 94 |
| 3.2 CONVECCIÓN LIBRE ALREDEDOR DEL BULBO DEL TERMÓMETRO | 98 |
| 3.2.1 Termómetro En Posición Vertical Con Flujo Transitorio..... | 98 |
| 3.2.1.1 Descripción Fenomenológica | 98 |
| 3.2.1.2 Construcción..... | 100 |
| 3.2.1.3 Solución..... | 102 |
| 3.2.1.4 Parámetro λ | 106 |
| 3.2.1.4.1 Despreciando la resistencia de pared | 106 |
| 3.2.1.4.2 Considerando la resistencia de la pared | 106 |
| 3.2.1.5 Relación entre h y h* | 107 |
| 3.2.1.6 Relación con el perfil de velocidad | 109 |
| 3.2.1.7 Número de Nusselt..... | 110 |
| 3.2.2 Termómetro En Posición Vertical Con Flujo Cuasiestacionario | 111 |
| 3.2.2.1 Planteamiento..... | 111 |
| 3.2.2.2 Solución..... | 111 |
| 3.2.2.3 Ecuación cantidad de movimiento | 113 |
| 3.2.2.3.1 Relación con el perfil de temperaturas | 113 |
| 3.2.2.3.2 Solución | 114 |
| 3.2.2.3.3 Perfil de velocidad | 116 |
| 3.2.2.4 Número de Nusselt..... | 116 |
| 3.2.3 Termómetro En Posición Horizontal Con Flujo Cuasiestacionario | 117 |
| 3.2.3.1 Consideraciones y Construcción | 117 |
| 3.2.3.2 Caso de gradiente angular de temperatura constante | 118 |
| 3.2.3.3 Caso sin gradiente angular de temperatura: | 121 |

| | |
|--|------------|
| 4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL | 122 |
| 4.1 ENSAYOS Y SELECCIÓN DE EXPERIMENTOS | 122 |
| 4.1.1 Ensayo-1: Calentamiento del bulbo con agua a temperatura máxima permisible | 122 |
| 4.1.2 Ensayo-2: Calentamiento del bulbo con agua a menor temperatura..... | 123 |
| 4.1.3 Ensayo-3 calentamiento del bulbo con aceite..... | 123 |
| 4.1.4 Ensayo-4: Enfriamiento del bulbo en agua y aceite a temperatura ambiente..... | 123 |
| 4.1.5 Ensayo-5: Enfriamiento del bulbo con aire a temperatura ambiente | 124 |
| 4.2 DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO | 124 |
| 4.2.1 Experimento-1: Convección libre en aire alrededor del bulbo de un termómetro orientado verticalmente (enfriamiento)..... | 125 |
| Figura 4.1 Orientación vertical del termómetro [El Autor | 125 |
| 4.2.2 Experimento-2: Convección libre en aire alrededor del bulbo de un termómetro orientado horizontalmente (enfriamiento)..... | 126 |
| 4.3 MATERIALES E IMPLEMENTOS | 126 |
| 4.3.1 Termómetro de Precisión | 127 |
| 4.3.2 Video grabadora y Software | 129 |
| 4.4 MONTAJE | 130 |
| 4.4.1 Cilindro Vertical..... | 130 |
| 4.4.2 Cilindro Horizontal..... | 130 |
| 4.5 PROCEDIMIENTO..... | 131 |
| 5. ANALISIS DE RESULTADOS..... | 133 |
| 5.1 MEDICIONES | 133 |
| 5.1.1 Cilindro Vertical..... | 134 |
| 5.1.2 Cilindro Horizontal..... | 135 |
| 5.2 TRATAMIENTO DE DATOS..... | 136 |
| 5.2.1 Determinación del intervalo de temperatura a trabajar | 136 |
| 5.2.2 Parámetros | 137 |
| 5.2.2.1 Propiedades Físicas..... | 137 |
| 5.2.2.2 Condiciones de Trabajo..... | 138 |

| | |
|---|------------|
| 5.2.2.3 Especificaciones del Bulbo | 138 |
| 5.2.3 Regresión por mínimos cuadrados | 139 |
| 5.2.4 Derivación e integración numérica | 140 |
| 5.2.5 Corrección por Resistencia de Pared | 142 |
| 5.3 RESULTADOS | 142 |
| 5.3.1 Intervalos de temperatura..... | 143 |
| 5.3.2 Regresión por Mínimos Cuadrados | 143 |
| 5.3.3 Derivación e integración numérica | 143 |
| 5.3.4 Valores corregidos por resistencia de pared | 144 |
| 5.3.5 Valores esperados | 144 |
| 5.3.5.1 Cilindro Vertical | 144 |
| 5.3.5.2 Cilindro Horizontal | 145 |
| 5.3.6 Comparación..... | 145 |
| 5.3.6.1 Cilindro Vertical | 145 |
| 5.3.6.2 Cilindro Horizontal | 146 |
| 5.4 ANALISIS Y DISCUSIÓN | 147 |
| | |
| 6. PRÁCTICA: COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN LIBRE ALREDEDOR DE UN CILINDRO | 152 |
| | |
| 6.1 OBJETIVOS | 152 |
| | |
| 6.2 FUNDAMENTO TEÓRICO | 152 |
| 6.2.1 Correlaciones Teóricas | 153 |
| 6.2.2 Correlaciones Empíricas | 154 |
| 6.2.3 Modelo Experimental..... | 157 |
| | |
| 6.3 EQUIPO..... | 159 |
| | |
| 6.4 PROCEDIMIENTO..... | 161 |
| 6.4.1 Ensayos preliminares cualitativos..... | 161 |
| 6.4.1.1 Ensayo-1: Calentamiento del bulbo con agua a temperatura máxima permisible | 161 |
| 6.4.1.2 Ensayo-2: Calentamiento del bulbo con agua a menor temperatura..... | 162 |

| | |
|--|------------|
| 6.4.1.3 Ensayo-3 calentamiento del bulbo con aceite..... | 162 |
| 6.4.1.4 Ensayo-4: Enfriamiento del bulbo en agua y aceite a temperatura ambiente..... | 162 |
| 6.4.1.5 Ensayo-5: Enfriamiento del bulbo con aire a temperatura ambiente..... | 162 |
| 6.4.2 Experimento Enfriamiento Cilindro Vertical | 162 |
| 6.4.3 Ensayos Para Calentamiento | 165 |
| 6.5 GRÁFICAS NECESARIAS PARA EL INFORME | 165 |
| 6.6 CÁLCULOS Y REQUERIMIENTOS PARA EL INFORME..... | 166 |
| 6.6.1 Parámetros | 166 |
| 6.6.1.1 Propiedades Físicas..... | 166 |
| 6.6.1.2 Condiciones de Trabajo..... | 167 |
| 6.6.1.3 Especificaciones del Bulbo..... | 167 |
| 6.6.2 Determinación del intervalo de temperatura a trabajar | 167 |
| 6.6.3 Determinación del Coeficiente de Transferencia de Calor y el Número de Nusselt | 168 |
| 6.6.3.1 Regresión por Mínimos Cuadrados | 168 |
| 6.6.3.2 Derivación e integración numérica | 169 |
| 6.6.3.4 Corrección por Resistencia de Pared | 171 |
| 6.6.3.5 Valores Esperados | 171 |
| 6.6.3.6 Errores Relativos Porcentuales | 171 |
| 6.7 RESULTADOS | 171 |
| 6.8 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS | 171 |
| 6.9 ASPECTOS, ITEMS Y PREGUNTAS DE DISCUSIÓN | 172 |
| 6.10 CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS | 172 |
| 6.11 REFERENCIAS..... | 172 |
| 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES | 173 |
| REFERENCIAS | 180 |
| BIBLIOGRAFIA..... | 180 |

| | |
|-----------------|-----|
| INFOGRAFIA..... | 187 |
|-----------------|-----|

APENDICE A

DEDUCCIÓN DEL NÚMERO DE NUSSELT PROMEDIO

PARA CONVECCIÓN NATURAL ALREDEDOR DE UN CILINDRO VERTICAL..... 188

| | |
|--|-----|
| I. PRINCIPIO DE SEMEJANZA | 188 |
| II. ANÁLISIS DE ESCALA..... | 190 |
| III. RESOLUCIÓN POR TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE | 196 |
| IV. MÉTODO INTEGRAL | 198 |

APENDICE B

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO PARA EL TERMÓMETRO: FLUIDO TERMOMÉTRICO. 234

APENDICE C..... 254

CONVECCIÓN LIBRE ALREDEDOR DEL BULBO DEL TERMÓMETRO..... 254

| | |
|--|-----|
| I. TERMÓMETRO EN POSICIÓN VERTICAL CON FLUJO TRANSITORIO..... | 254 |
| II. TERMÓMETRO EN POSICIÓN VERTICAL CON FLUJO CUASISTACIONARIO | 265 |
| III. TERMÓMETRO EN POSICIÓN HORIZONTAL CON FLUJO CUASISTACIONARIO... | 270 |

APÉNDICE D

DATOS Y CALCULOS EXPERIMENTALES..... 274

LISTA DE TABLAS

Pág.

| | |
|--|----|
| Tabla 1.1 Tipos de Termómetros | 5 |
| Tabla 1.2 Líquidos Termométricos más usuales | 8 |
| Tabla 1.3 Rangos aproximados de valores medios del coeficiente de película | 16 |
| Tabla 1.4 Métodos Generales para evaluar coeficientes de trans. de calor..... | 20 |
| | |
| Tabla 2.1 Constantes para la ecuación de conv. libre en cilindros verticales | 33 |
| Tabla 2.2 Constantes para la ecuación de conv. libre en cilindros horizontales | 35 |
| Tabla 2.3 Valores del exponente para el número de Prandtl..... | 53 |

| | |
|--|-----|
| Tabla 4.1 Dimensiones del termómetro usado | 127 |
| Tabla 4.2 Especificaciones ASTM del termómetro usado | 128 |
| Tabla 5.1 Experimentos trabajados..... | 134 |
| Tabla 5.2 Especificaciones de la pared del bulbo | 138 |
| Tabla 5.3 Determinación de la temperatura de la constante de tiempo | 143 |
| Tabla 5.4 Evaluación del coeficiente por regresión con mínimos cuadrados..... | 143 |
| Tabla 5.5 Evaluación del coeficiente por derivación e integración numérica | 143 |
| Tabla 5.6 Valores corregidos por resistencia de pared | 144 |
| Tabla 5.7 Aumentos % debidos a la corrección por resistencia de pared..... | 144 |
| Tabla 5.8 Valores esperados de coef. de trans. de calor para cilindros verticales..... | 144 |
| Tabla 5.9 Condiciones y valores de números adimensionales para el aire usados en cilindros verticales..... | 145 |
| Tabla 5.10 Valores esperados de coeficientes de transferencia de calor para cilindros horizontales..... | 145 |
| Tabla 5.11 Condiciones y valores de números adimensionales para aire usados en cilindros horizontales..... | 145 |
| Tabla 5.12 Coeficientes de transferencia de calor para cilindros verticales..... | 146 |
| Tabla 5.13 Errores relativos % de los coeficientes para cilindros verticales | 146 |
| Tabla 5.14 Errores relativos % promedio por ensayo para cilindros verticales | 146 |
| Tabla 5.15 Coeficientes de transferencia de calor para cilindros horizontales..... | 146 |
| Tabla 5.16 Errores relativos % de los coeficientes para cilindros horizontales | 147 |
| Tabla 5.17 Errores relativos % promedio por ensayo para cilindros horizontales..... | 147 |
| Tabla 6.1 Constantes para la ecuación de convección libre en cilindros verticales | 154 |
| Tabla 6.2 Constantes para la ecuación de convección libre en cilindros horizontales | 157 |
| Tabla 6.3 Especificaciones del termómetro ASTM 56C – 86 [ASTM E1. (2007)] | 160 |
| Tabla 6.4 Especificaciones de la pared del bulbo | 167 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|--------------------|
| | <i>Pág.</i> |
| Figura 1.1 Termómetro de vidrio | 6 |
| Figura 1.2 Partes del termómetro de vidrio | 7 |
| Figura 1.3 Tipos de termómetros por profundidad..... | 10 |
| Figura 1.4 Termómetro en una bomba calorimétrica..... | 14 |

| | |
|---|-----|
| Figura 1.5 Equipo para determinar coef. de película en convección forzada interna | 18 |
| Figura 1.6 Exp. para medir el coef. promedio de trans. de calor por convección..... | 24 |
| Figura 1.7 Experimento de Convección Natural | 25 |
| Figura 1.8 Esquema de un interferómetro | 27 |
| Figura 1.9 Interferogramas de isothermas de convección libre en una pared vertical y en un cilindro inclinado..... | 28 |
| | |
| Figura 2.1 Patrón de Flujo en superficies curvas | 37 |
| Figura 2.2 Perfil de la capa limite sobre un cilindro vertical caso de caliente y frío..... | 39 |
| Figura 2.3 Interferogramas de convección libre externa en cilindros verticales | 40 |
| Figura 2.4 Capas laminares alrededor del cilindro vertical | 42 |
| Figura 2.5 Adimensionalización de los perfiles..... | 54 |
| Figura 2.6 Esquema para tomar el elemento dif. de volumen sobre la capa limite | 56 |
| Figura 2.7 Balance de cantidad de movimiento sobre el elemento dif. de volumen..... | 57 |
| Figura 2.8. Relación entre los espesores de capas límites y sus variaciones..... | 62 |
| Figura 2.9 Perfil de la capa limite hidrodinámica | 63 |
| Figura 2.10 Perfiles axiales de temperatura y velocidad y capas limites | 65 |
| | |
| Figura 3.1 Subsistemas básicos del termómetro..... | 82 |
| Figura 3.2. Termómetro ASTM 56C-86 usado en la experimentación | 86 |
| Figura 3.3 Columna y capilar del termómetro usado | 92 |
| Figura 3.4 Bulbo del termómetro usado | 93 |
| Figura 3.5 Relación instantánea entre los perfiles de temperatura en la interfaz..... | 99 |
| Figura 3.6 Circuito de Resistencias Térmicas | 108 |
| | |
| Figura 4.1 Orientación vertical del termómetro..... | 125 |
| Figura 4.2 Orientación horizontal del termómetro..... | 126 |
| Figura 4.3 Termómetro de la bomba calorimétrica | 127 |
| Figura 4.4 Termómetro ASTM 56C -86 | 128 |
| Figura 4.5 Medición del espesor de la pared del Bulbo con el Estereoscopio | 129 |
| Figura 4.6 Elementos de grabación y edición..... | 129 |
| Figura 4.7 Montaje para el termómetro vertical | 130 |
| Figura 4.8 Montaje para termómetro horizontal..... | 131 |
| | |
| Figura 5.1 Fotogramas cilindro vertical | 134 |
| Figura 5.2 Experimento V-1 | 134 |

| | |
|---|-----|
| Figura 5.3 Experimento V-2 | 135 |
| Figura 5.4 Fotogramas cilindro horizontal (sentido inverso) | 135 |
| Figura 5.5 Experimento H-1 | 135 |
| Figura 5.6 Experimento H-2 | 136 |
| Figura 5.7 Significado de la Constante de Tiempo | 136 |
| | |
| Figura 6.1 Termómetro ASTM 56C -86 | 159 |
| Figura 6.2 Termómetro de la bomba calorimétrica | 159 |
| Figura 6.3 Elementos de grabación y edición..... | 160 |
| Figura 6.4 Orientación vertical del termómetro..... | 162 |
| Figura 6.5 Montaje para el termómetro vertical | 163 |
| Figura 6.6 Orientación horizontal del termómetro..... | 164 |
| Figura 6.7 Montaje para termómetro horizontal..... | 164 |

NOMENCLATURA

SIMBOLOS

| | | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|---|
| <i>Bi</i> | Número de Biot | <i>k</i> | Conductividad térmica |
| <i>Bo</i> | Número de Boussinesq | <i>α</i> | Difusividad térmica |
| <i>Fo</i> | Número de Fourier | <i>ν</i> | Viscosidad cinemática |
| <i>Gr</i> | Número de Grashof | <i>μ</i> | Viscosidad dinámica |
| <i>M</i> | Número de Mach | <i>C_V</i> | Calor específico a volumen constante |
| <i>Nu</i> | Número de Nusselt | <i>c_p</i> | Calor específico a presión constante |
| <i>Nu</i> | Nusselt promedio | <i>W</i> | Potencia, flujo de trabajo |
| <i>Pr</i> | Número de Prandtl | <i>Q</i> | Flujo de calor |
| <i>Ra</i> | Número de Rayleigh | <i>h</i> | Coefficiente de transferencia de calor (T.C.) |
| <i>Re</i> | Número de Reynolds | <i>h</i> | Coefficiente promedio de T.C. |
| <i>H</i> | Altura | <i>U, h*</i> | Coefficiente global de T.C. |
| <i>R</i> | Radio | <i>R</i> | Resistencia térmica |
| <i>D</i> | Diámetro | <i>Δ</i> | Cambio, paso. delta |
| <i>L</i> | Longitud (Largo o alto) | <i>Δ, δ_T</i> | Espesor capa límite térmica |
| <i>L_c</i> | Longitud característica | <i>δ</i> | Espesor capa límite hidrodinámica |
| <i>A</i> | Área de transferencia de calor | <i>Δ</i> | Relación entre capas límites |
| <i>V</i> | Volumen | <i>ζ</i> | Distancia vertical adimensional |
| <i>m</i> | Masa | <i>φ, η</i> | Distancia axial adimensional |
| <i>t</i> | Tiempo | <i>θ</i> | Temperatura adimensional |
| <i>z</i> | Dimensión espacial axial, altura | <i>φ</i> | Velocidad adimensional |
| <i>r</i> | Dimensión espacial radial | <i>U</i> | Velocidad de escala |
| <i>θ</i> | Dimensión espacial angular | <i>ε, ξ</i> | Parámetros de perturbación o de curvatura |
| <i>T</i> | Temperatura | <i>M</i> | Masa del fluido termométrico |
| <i>v</i> | Velocidad | <i>V</i> | Volumen del fluido termométrico |
| <i>m</i> | Flujo másico | <i>v</i> | Velocidad fraccional |
| <i>F</i> | Fuerza(s) | <i>τ</i> | Tiempo adimensional |
| <i>W</i> | Peso | <i>Bi</i> | Número adimensional |
| <i>τ</i> | Esfuerzo cortante | <i>ω</i> | Número adimensional |
| <i>P, p</i> | Presión | <i>I</i> | Longitud fraccional |
| <i>E</i> | Energía | <i>K</i> | Coefficiente adimensional de dilatación térmica |
| <i>u</i> | Energía interna específica | <i>U</i> | Velocidad de cambio de energía interna |
| <i>h</i> | Entalpia específica | <i>v</i> | Volumen adimensional o fraccional |
| <i>ρ</i> | Densidad | <i>a, b</i> | Variable de asignación |
| <i>v, v</i> | Volumen específico | <i>A, B</i> | Coefficientes o constantes ley de potencias |
| <i>β, κ</i> | Coefficiente de expansión térmica | <i>A, n</i> | Funciones de la relación <i>L/D</i> |
| <i>γ</i> | Coefficiente de compresibilidad | <i>ψ, B y C</i> | Funciones del Número de Prandtl |
| | | <i>c, C</i> | Constante o Coeficiente |
| | | <i>A, B, ... F</i> | Integrales adimensionales |

| | | | |
|-----------|----------------------------------|--------|--|
| λ | Parámetro vinculante | M | Masa molar |
| e | Vector unitario de escala | R | Constante Universal de los Gases Ideales |
| Λ | Gradiente angular de temperatura | r | Índice de correlación |
| g | Aceleración gravitacional | Z, Y | Parámetros de linealización |

SUBINDICES

| | | | |
|-----------|-----------------------------|----------|----------------------------|
| b | Bulbo | PP | Pared Plana |
| c | Columna | R | Radial |
| f | De película | θ | Dimensión espacial angular |
| i, k, n | Contadores | ∞ | Del seno del fluido |
| i | Inicial | * | Adimensional |
| m | Medio | 0 | Inicial |
| r | Radial, referencia | atm | Atmosférica |
| s | sonido | ext | Exterior, externa |
| v | A Volumen | $flot$ | Flotación |
| w | De pared | int | Interior |
| z | Axial | max | maxim@ |
| C | Convectiv@ | sis | Sistema |
| D | Diametral | vis | Viscosa |
| L | Longitudinal (Largo o alto) | | |

SUPERINDICES Y ÉNFASIS

| | | | |
|--------------|-------------------------------------|-----|--------------------------|
| m, n, p, q | Exponentes de correlación potencias | n | Exponente de correlación |
| * | Adimensional | $-$ | Promedio |

INTRODUCCIÓN E IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Convección es la forma de transporte de calor a través de un medio fluido, ya sea gas o líquido, entre una temperatura en la superficie (correspondiente a la interfase fluido-sólido) y una temperatura en el seno del mismo fluido. Tal manera de transporte de calor por un medio material está gobernada por la ecuación llamada "Ley de Enfriamiento de Newton" que plantea que el flujo de calor es directamente proporcional al área de la superficie que sirve de interfase entre el fluido y el sólido, y a la diferencia entre estas dos temperaturas. A la constante de proporcionalidad se le denomina coeficiente de transferencia de calor. En realidad esta ley no es más que la definición del coeficiente de transferencia de calor [INCROPERA].

Dicha constante también recibe el nombre de coeficiente convectivo de transferencia de calor o coeficiente de película y su valor depende de la geometría de la interfase, del régimen de flujo y naturaleza del fluido, así como de las dos temperaturas. Esta multiplicidad de variables independientes resulta porque la transferencia de calor por convección está determinada por las capas límites que se generan sobre la superficie.

Para el diseño y apreciación de equipos donde tenga lugar fundamentalmente una transferencia de calor por convección es necesario conocer el valor de dicho(s) coeficiente(s).

No se han desarrollado determinaciones experimentales de coeficientes de transferencia de calor usando termómetro de vidrio. La determinación por este camino implica el modelamiento a partir del balance de energía aplicado al respectivo sistema del termómetro.

El termómetro de vidrio es un instrumento que se encuentra disponible en el laboratorio, y a parte de indicar la temperatura, puede también servir para la medición indirecta del coeficiente de transferencia de calor a partir de los cambios de temperatura que experimenta el aparato en el estado transitorio hasta alcanzar el equilibrio térmico. Esto puede a futuro conllevar al diseño y construcción de un instrumento que reporte el valor local de un coeficiente de transferencia de calor, aparato de medición que no se dispone.

La medida de coeficientes locales de transferencia de calor, y por analogía de masa, puede tener notables aplicaciones en el diseño y optimización de equipos (como por ejemplo los

biorreactores ya que la heterogeneidad de los sistemas y la sensibilidad los hacen complejos de modelar), para lo cual es deseable conocer los perfiles espaciales de ciertas propiedades.

Con el presente trabajo se busca principalmente determinar experimentalmente y predecir el coeficiente de transferencia de calor alrededor del bulbo de un termómetro de vidrio. Para lograr dicho objetivo se hace necesario: Plantear y solucionar modelos del funcionamiento del termómetro de vidrio; determinar teóricamente el coeficiente de transferencia de calor alrededor del bulbo del termómetro para determinadas situaciones; confrontar el grado de ajuste de los modelos propuestos contra los datos experimentales; analizar la factibilidad del diseño del instrumento de medición directa de coeficientes de transferencia de calor fundamentando en el modelo propuesto; y diseñar por lo menos una práctica relacionada con fenómenos de transporte (masa, calor y/o cantidad de movimiento) y la posibilidad de un diseño experimental por analogía para transporte de masa.

JUSTIFICACIÓN

En la ingeniería química se realizan operaciones unitarias, algunas de las cuales involucran la transferencia de calor por medio de fluidos siendo la convección el mecanismo predominante.

En el diseño y cálculo de equipos utilizados en ingeniería química normalmente se requiere conocer el valor del coeficiente de transferencia de calor por convección.

Los coeficientes se pueden determinar por medición indirecta para un caso particular de flujo en donde se requiere medir el área, las temperaturas, la velocidad y el flujo de calor, generalmente usando medios potenciométricos.

No se dispone de una práctica experimental para la determinación local de dichos coeficientes, razón por la que se propone un modelo que, a partir de la descripción del funcionamiento del termómetro de vidrio en estado transitorio, permita lograr este objetivo en ciertas situaciones físicas particulares. Además no se encuentra en la literatura un modelo para el termómetro de vidrio que parece ser reserva de los fabricantes.

Hasta donde se tiene conocimiento no existe un aparato que realice el reporte directo del valor del coeficiente, y tampoco hay registros del uso de termómetro de vidrio para lograr dicha determinación, aunque si se reportan desarrollos experimentales que hacen uso de termopares y termocuplas.

1. GENERALIDADES

El presente trabajo plantea la determinación experimental del coeficiente de transferencia de calor alrededor del bulbo de un termómetro. Este capítulo incluye elementos de carácter general tanto de información teórica como experimental necesarios para la comprensión y desarrollo del problema propuesto en este proyecto.

Como el problema involucra directamente un termómetro de vidrio, es preciso incluir aspectos generales sobre el termómetro de vidrio.

1.1 TERMÓMETRO DE VIDRIO

1.1.1 Antecedentes

En la Antigüedad Clásica, periodo Greco-Romano, se realizaron los primeros registros de medición de temperatura con instrumentos muy básicos sin escala y abiertos a la atmósfera, influenciados así por la presión atmosférica y la temperatura.

Durante el Renacimiento, en la Era de los Descubrimientos, debido al auge por la investigación en las ciencias naturales, se dió inicio al desarrollo de los termómetros de líquido en vidrio, junto con su escala; de hecho fue el propio Galileo el que llamó la atención sobre la dilatación de los líquidos y sugirió utilizar la expansión del alcohol como indicador de la temperatura, entonces el antecesor del termómetro fue el termoscopio (1606) de Galileo Galilei (1564-1642); hasta que el también italiano Sanctorius (1561-1636) le incorporó una escala con graduación numérica, apareciendo así el termómetro de la escuela florentina que consistió en un bulbo lleno de alcohol sellado por su parte superior.

Estos termómetros se usaron durante casi un siglo, pero presentan la desventaja que cuando el alcohol se enfría, moja el vidrio y así dificulta una lectura correcta. Es Edmund Halley (1656-1742) quien sugiere el uso del mercurio, pues aunque se dilata menos que el alcohol, no se adhiere a las paredes de vidrio; el problema de la menor dilatación es resuelto haciendo más estrecho el tubo del termómetro. Pero fue Fahrenheit (1686-1736), fabricante de termómetros,

quien difunde el uso del termómetro de mercurio, además de concebir la escala de temperatura denominada con su nombre y que se impuso en ese momento [PEREZ].

Actualmente existen numerosos tipos de termómetros o sensores de temperatura que pueden ser usados para diversas y específicas aplicaciones de medición; en la Tabla 1.1 se indican algunos de los tipos más usuales, así como sus características más importantes.

| TIPO DE TERMÓMETRO | RANGO NOMINAL [°C] | COSTO | LINEALIDAD | CARACTERÍSTICAS NOTABLES |
|---|---------------------------|--------------|-------------------|--|
| Termómetro de mercurio en vidrio | -10 a 300 | Bajo | Buena | Simple, lento y de lectura manual |
| Termorresistencia (Pt, Ni) RTD | -100 a 600 | Medio | Alta | Exactitud |
| Termocupla | -150 a 1500 | Bajo | Alta | Requiere referencia de temperatura |
| Termistor | -15 a 115 | Medio | No lineal | Muy sensible |
| Integrado lineal | | Medio | Muy alta | Fácil conexión a sistemas de toma de datos |
| Termómetro de gas | -20 a 100 | Medio | Buena | No muy versátil |
| Diodos | -200 a 50 | Bajo | Alta | Bajo costo |

Tabla 1.1 Tipos de Termómetros

A pesar de la gran variedad de instrumentos para la medición de temperatura y de la prohibición del mercurio, los termómetros de líquido en vidrio son frecuentemente utilizados por su facilidad de uso, costo, portabilidad, estabilidad, amplio intervalo de trabajo y/o por recomendaciones en normas. Pero aun así existe confusión al momento de su elección, uso y calibración, ya que aún dentro de estos termómetros se fabrica una amplia gama de acuerdo a determinadas aplicaciones específicas [ASTM].

1.1.2 Descripción General

El funcionamiento de los termómetros de vidrio con líquido se basa en la dilatación térmica de un líquido termométrico introducido en un recipiente de vidrio de paredes delgadas (recipiente termométrico, bulbo) comunicado con un capilar (capilar del termómetro), al cual se le ha asignado una escala. El líquido actúa como un traductor, convierte el calor en un trabajo de expansión mecánica. Con el incremento de la temperatura, el líquido y el vidrio del termómetro se expanden con diferente coeficiente de expansión, causando que el líquido avance por el tubo capilar. El más común de los termómetros es el de mercurio (Figura 1.1), que basa su funcionamiento en la marcada diferencia entre las expansiones térmicas del mercurio $1.8 \times 10^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ y vidrio $0.2 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.



Figura 1.1 Termómetro de vidrio [El Autor]

Al líquido termométrico en el capilar se le denomina columna y su menisco sirve como marca de columna o indicador. Existen varios líquidos que pueden servir como fluidos termométricos como Mercurio, Mercurio-Talio, Toluol, Alcohol, Mezcla de Pentano. La forma del menisco es: para el mercurio, la parte superior de la curva o convexa, mientras que para líquidos orgánicos, la parte inferior o cóncava; cuando las fuerzas adhesivas son mayores que las fuerzas cohesivas, el menisco tiende a ser cóncavo mientras que cuando las fuerzas cohesivas son superiores a las adhesivas, el menisco es convexo. El menisco del mercurio se debe al ángulo de contacto del mercurio con el vidrio que varía dependiendo si está avanzando o retrocediendo la columna y también a la variación de la tensión superficial. Esto combinado con la pequeña compresibilidad del mercurio y la elasticidad del vidrio genera una pequeña variación de la posición del menisco, especialmente en termómetros muy sensibles.

El capilar del termómetro consta del capilar de medida, el capilar de acoplamiento y posibles ensanchamientos:

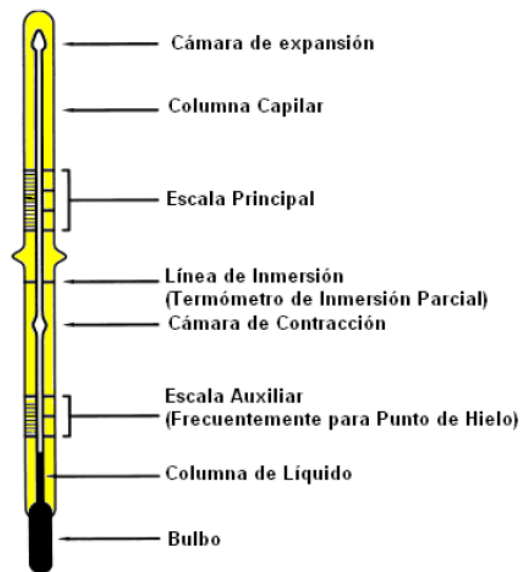


Figura 1.2 Partes del termómetro de vidrio [www.metas.com]

- El capilar de medida es la parte del capilar del termómetro provista de una escala. El capilar de acoplamiento es la sección del capilar que une el bulbo con el capilar de medida.
- Los ensanchamientos de contracción son ampliaciones en el capilar, mediante los cuales se suprime o se interrumpe la indicación de una determinada zona, que permiten la instalación de una escala adicional, o que impiden el descenso de la columna al bulbo (como en el caso de los termómetros clínicos).
- El ensanchamiento de expansión (burbuja de seguridad) es una ampliación, al final del capilar, que hasta cierto punto protege al termómetro en caso de sobrecalentamiento.

1.1.3 Construcción

En la manufactura de tales termómetros, el capilar es marcado en dos puntos (0 °C y 100 °C) y luego se hacen graduaciones uniformes entre las marcas, donde se asume que el volumen de una masa fija de mercurio en el vidrio, es una función lineal de la temperatura. El error resultante de esta consideración (+0.12 °C a 50 °C) es ordinariamente más pequeño que el debido a las variaciones en el capilar.

Los materiales usados en la fabricación del termómetro son: vidrio, líquido termométrico y gas.

Todos los tipos de vidrios no son apropiados para el trabajo termométrico; actualmente se han desarrollado vidrios termométricos especiales, con buena estabilidad y resistentes a las temperaturas, generalmente boro-silicato, pyrex, schott, etc.

El líquido termométrico debe tener las siguientes propiedades físico-químicas:

- Tener un coeficiente de expansión lineal
- Tener color o ser opaco, para su fácil lectura.
- Tener un menisco bien definido, para fácil lectura.
- Mantenerse como líquido en el intervalo nominal del termómetro.
- No “mojar” por fuerzas adhesivas la superficie del capilar.
- Ser químicamente inerte con respecto a otros materiales en el sistema.
- Ser térmica y químicamente estable.
- Por seguridad no ser dañino durante su manufactura y uso.

| Líquido Termométrico | Intervalo Típico °C | Coefficiente de Expansión Típico Relativo en Vidrio °C⁻¹ |
|---------------------------------|--------------------------------|--|
| Mercurio | -38...+600 | 0.000 16 |
| Etanol | -80...+60 | 0.001 04 |
| Tolueno | -80...+100 | 0.001 03 |
| Pentano | -200...+300 | 0.001 45 |

Tabla 1.2 Líquidos Termométricos más usuales [www.metas.com]

En la mayoría de los casos encima de líquido termométrico, en el capilar, hay un relleno de gas protector, sometido a mayor presión (con el fin de evitar evaporación del líquido termométrico) constituido por un gas seco y libre de oxígeno (por ejemplo Nitrógeno, Argón), para dificultar una separación o rebosamiento del líquido termométrico y para elevar su punto de ebullición, solo en algunos termómetros especiales se evacúa el capilar por encima de la columna. Así, todos los termómetros para altas temperaturas deben ser llenados con un gas inerte seco tal como nitrógeno presurizado para prevenir separación del mercurio a cualquier temperatura indicada en la escala. Los termómetros de inmersión total graduados sobre los 150 °C deben

ser llenados con gas para minimizar la destilación del mercurio de la parte superior de la columna. Para termómetros graduados debajo de los 150 °C el llenado con gas es opcional pero altamente recomendado.

Las especificaciones para el diseño y elaboración de termómetros se pueden encontrar en normas internacionales como las de la ASTM y la ISO. Estos termómetros están diseñados para ser usados con métodos de prueba específicos, y son identificados por tener el acrónimo ASTM y un número inscrito. Importante la norma de especificaciones ASTM E-1 en donde se enlistan todas las características, los puntos de calibración y las temperaturas de la columna emergente para termómetros de inmersión parcial y un procedimiento especial que debe seguirse para su prueba y calibración. Las normas más importantes que se deben tener en cuenta son:

- ASTM E1. (2007). Standard Specification for ASTM Liquid-in-Glass Thermometers.
- ASTM E77. (2007). Standard Test Method for Inspection and Verification of Thermometers.
- ASTM E2251. (2007). Standard Specification for Liquid-in-Glass ASTM Thermometers with Low-Hazard Precision Liquids.
- ISO 386. (1977). Liquid-in-glass laboratory thermometers—Principles of design, construction and use.
- ISO 1770. (1981). Solid-stem general purpose thermometers.
- ISO 4795. (1996). Glass for thermometer bulbs.

1.1.4 Clases

Los tipos básicos del termómetro de vidrio dependen fundamentalmente de la profundidad de inmersión y de la ubicación de la escala de medición, las que se relacionan estrechamente con la medición específica requerida o funcionalidad.

1.1.4.1 Profundidad de inmersión

La elección del tipo de inmersión depende de la medición requerida, la profundidad del fluido y el tipo de montaje.

- **Termómetro de inmersión parcial:** indica la temperatura correctamente cuando el bulbo y una porción específica de la columna están inmersos en el medio a la temperatura que va a ser medida, por lo que tiene una línea que indica la profundidad de inmersión exacta.
- **Termómetro de inmersión total:** indica la temperatura correctamente cuando el bulbo y la columna entera del líquido (unos cuantos milímetros por arriba del nivel del líquido) son inmersas en el medio para iniciar la medida.
- **Termómetro de inmersión completa:** Está diseñado para indicar la temperatura correctamente cuando todo el termómetro, incluyendo la cámara de expansión, están expuestos en el medio a la temperatura que va a ser medida.

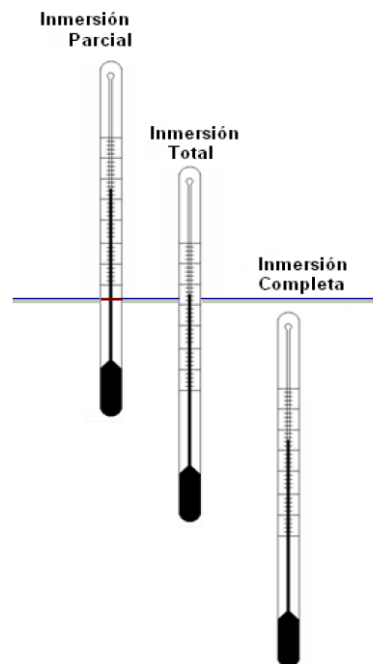


Figura 1.3 Tipos de termómetros por profundidad [www.metas.com]

1.1.4.2 Escala de medición

- **Termómetro de barra:** La escala se encuentra directamente sobre la pared gruesa del capilar.

- **Termómetro de oclusión:** La escala se encuentra sobre un soporte independiente separado del capilar; el capilar y el soporte de la escala se encuentra encerrados en un tubo de revestimiento.
- Existen variaciones de los tipos anteriores.

1.1.5 Calibración

Esta se realiza por comparación contra un termómetro patrón calibrado, en sistemas térmicos con recirculación de líquido o sales, o en un lecho fluidizado, realizando la medición directa de los puntos fijos secundarios de fusión del hielo o ebullición del agua. De acuerdo a la exactitud que se desee obtener, se utiliza durante la calibración un termómetro de resistencia de platino u otro tipo de termómetros trazables y con baja incertidumbre.

Cuando se requiera una precisión menor que el 1% de la escala requerida, es aconsejable una calibración, la cual señala las correcciones para agregar o sustraer a las lecturas. Las calibraciones pueden ser hechas por organismos de normalización.

Otra importante fuente de error en los termómetros es la mala lectura en línea del menisco, la que puede ser provocada por la posición adoptada por el ojo cuando se hace la lectura, y que puede ser eliminada con el uso de un teodolito. Las lecturas de termómetros muy sensibles son también fuertemente dependientes de la presión, donde los coeficientes de presión pueden ser tan altos como de $0.1\text{ }^{\circ}\text{C/atm}$.

1.1.5.1 Examen visual

Permite la detección de: separación de la columna de mercurio, pequeñas bolitas de mercurio a lo largo de la columna capilar, oxidación y fallas o fisuras en el vidrio. Estas fallas pueden perjudicar las lecturas del termómetro. También debe ser examinada en la escala: el grosor de las líneas, la posible desigualdad en las divisiones y graduaciones borrosas.

1.1.5.2 Puntos de calibración

El termómetro debe calibrarse en todo su intervalo, incluso si lo posee, un punto de referencia. Por lo usual, se calibra en puntos distribuidos uniformemente en el intervalo de indicación la escala principal.

La cantidad de puntos de calibración depende del intervalo, división “mínima” de la escala y exactitud deseada. El intervalo entre los puntos de calibración no debe ser demasiado largo o innecesariamente pequeño tal que destruya la confiabilidad en correcciones interpoladas en valores de temperatura. La recomendación es que sean distribuidos entre 40 a 100 divisiones, hasta 40 para patrones y hasta 100 para ordinarios.

1.1.5.3 Medición de columna emergente

A veces se requiere utilizar termómetros de inmersión total como inmersión parcial y la temperatura del ambiente sobre el baño, o equipo donde esté colocado el termómetro, puede ser diferente de la temperatura del bulbo del termómetro. Debe por tanto hacerse una corrección por la diferencia de temperaturas entre el bulbo y la columna emergente. Lo mismo ocurre para los termómetros de inmersión parcial, las correcciones aplican solo para la profundidad de inmersión indicada y una sola temperatura de la columna emergente. Si el termómetro es utilizado en otras condiciones es necesario corregir la columna emergente. La columna emergente puede ser medida utilizando un termómetro Faden o un determinado número de termómetros de vástago corto.

1.1.5.4 Corrección de la separación de columna

Estos son varios métodos para unir la columna del líquido:

- **Golpear:** Se sujeta, ligeramente por debajo de la mitad y con el bulbo abajo, el termómetro con una mano, y luego se golpea suavemente la orilla con la palma de la otra mano.
- **Centrifugar:** Se sujeta igual que en el ítem anterior y con el brazo extendido en posición horizontal se balancea rápidamente hacia abajo, y enseguida se para cuando el termómetro alcance la posición vertical; también es válido usar una centrifugadora con el bulbo orientado hacia afuera.

- **Calentar:** Es frecuentemente el método más rápido para unir la columna separada y simplemente consiste en el calentamiento del bulbo del termómetro. Para termómetros que no están graduados sobre los 250 °C, la cámara de expansión también puede servir para unir la columna: se sujeta el termómetro en posición vertical y se calienta lentamente, sin usar flama directa, hasta que el segmento de columna separada y una porción de la columna principal, entra a la cámara de expansión; luego debe ser removido antes de que el líquido termométrico suba demasiado a la cámara de expansión ya que puede provocar un daño en el termómetro debido a un exceso de presión.
- **Enfriar:** Sujetando verticalmente el termómetro, se enfría el bulbo hasta una temperatura que permita retraer todo el mercurio hacia el bulbo; luego se regresa lenta y cuidadosamente a temperatura ambiente.

1.1.6 Termómetro para calorímetro

Existen termómetros especiales para los calorímetros, donde se desea una medición de diferencia de temperatura con alta precisión (de 0.01 a 0.001 °C). Para estos termómetros la finura de la escala de graduación tiende a ser pequeña debido a la precisión que se desea obtener en las medidas de temperaturas. La escala puede tener un error de varias decimas de grado, pero este error se cancela cuando se hace la diferencia. Un termómetro típico de una bomba calorimétrica tiene un rango de 19 a 35 °C, con graduaciones de 0.02 °C. Para mediciones de los descensos del punto de congelamiento con agua o benceno como solventes, un rango de -2 a 6 °C con graduaciones de 0.01 °C es conveniente. Tales termómetros requieren un adecuado manejo. No son solamente frágiles, también son susceptibles de ciertos daños (separación de la columna de mercurio, burbujas en el bulbo) derivados principalmente de la extrema finura del hilo, cuando se mantienen verticales durante un rápido calentamiento o enfriamiento. Si la columna de mercurio llega a separarse, se debe enfriar el bulbo en una mezcla de hielo-sal para que el mercurio quede enteramente en el bulbo y así darle salida a las burbujas hacia la parte superior de la columna. Luego se debe permitir que el termómetro llegue a la temperatura ambiente en posición vertical.

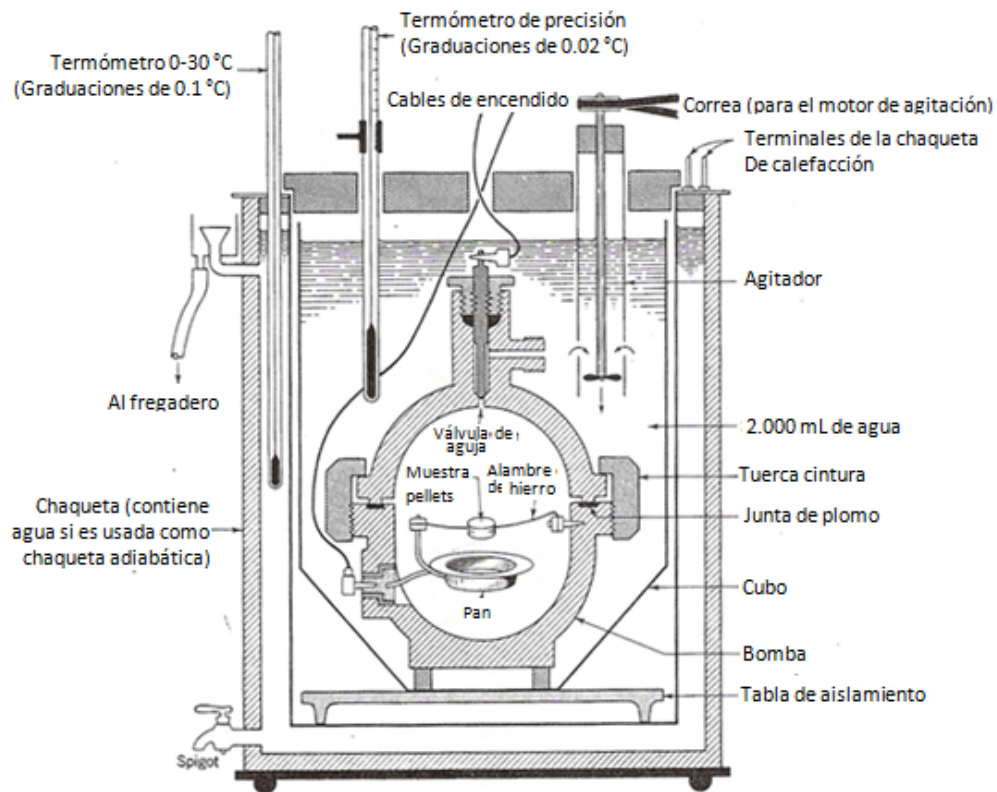


Figura 1.4 Termómetro en una bomba calorimétrica [SHOEMAKER]

1.2 COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR Y SU IMPORTANCIA

Para la ingeniería en general y para la ingeniería química en particular y especial es sumamente importante determinar la razón de transferencia de calor para una determinada diferencia de temperaturas. Ello sucede con frecuencia cuando se diseñan componentes y sistemas en los que sucede este proceso. Para estimar el costo, la factibilidad y el tamaño de equipos requerido para transferir cierta cantidad de calor en un determinado tiempo hay que realizar un riguroso análisis de transferencia en los cuales el ingeniero debe identificar las resistencias entre los puntos de alta y baja temperatura, muchas de las cuales se encuentra en fase fluida donde la convección juega un papel predominante.

Las dimensiones de refrigeradores, calentadores, evaporadores, condensadores e intercambiadores de calor no solo dependen de la cantidad de calor sino también de la velocidad a la que se va a transferir esta energía. Para conocer entonces uno de estos flujos requeridos se hace necesario disponer del valor de transferencia de calor por convección.

De la misma manera, la operación adecuada de los componentes de un equipo tales como las paredes o las aspas de una turbina depende de la posibilidad de enfriar rápidamente una superficie por evacuación continua del calor en determinado tiempo.

La optimización de ciertos procesos exige conocer el valor de las resistencias que obstaculizan uno de los fenómenos de transferencia ya sea de masa, calor o momento, porque si se quiere acelerar o desacelerar cierta transferencia se debe actuar en el diseño sobre la resistencia controlante. En el caso del calor, si esta resistencia se encuentra en fase fluida, dicho valor es el recíproco del coeficiente de transferencia de calor.

El parámetro que describe todo el fenómeno de transferencia de calor por convección es el coeficiente de transferencia de película el cual depende de gran cantidad de variables. Se considera un fenómeno bastante complejo debido a la conducción a través de la película de fluido adherida a la superficie del sólido por las fuerzas atractivas y también a la transferencia de masa (advección). Este fenómeno se puede dificultar en el caso de los gases en los cuales puede ser importante también la transferencia de calor por radiación de manera simultánea a la convección.

Así que para su determinación y estudio, es necesario clasificar la convección de acuerdo a las siguientes posibilidades:

- *Forzada, Natural o Mixta*: Si el principal generador de la turbulencia es un agente externo o un gradiente de densidades al interior del fluido, o una combinación de ambos.
- *Interna o Externa*: El fluido puede circular al interior o alrededor de un ducto.
- *Con cambio o sin cambio de fase*: Los cambios de fase entre líquido y gas.
- *Régimen Laminar, Transición o Turbulento*: Se refiere al grado de turbulencia que puede ocurrir y que es cuantificado por el número de Reynolds o el número de Grashof ya sea por convección forzada o natural respectivamente.
- *Naturaleza del fluido*: Este puede ser un líquido (incompresible) o un gas. De la misma manera se pueden tener casos para ciertos valores de números de Prandtl.
- *Tipo de Superficie*: Plana o Curva.

En la siguiente tabla se presentan algunos valores aproximados y típicos de coeficientes medios de transferencia de calor.

| MECANISMO Y FLUIDO | h, W/m²K |
|--|---|
| Condensación mixta de vapor de agua | 5.000-150.000 |
| Ebullición mixta de agua | 4.000-100.000 |
| Condensación natural de vapor de agua | 5.000-35.000 |
| Ebullición natural de agua | 2.000-25.000 |
| Condensación mixta de vapores orgánicos | 900-20.000 |
| Ebullición mixta de líquidos orgánicos | 600-20.000 |
| Convección forzada, metales líquidos | 500-25.000 |
| Convección forzada, aceites | 50-3.000 |
| Convección forzada, aire a 200 bar | 250-1.000 |
| Convección forzada, aire a presión atmosférica | 15-300 |
| Convección natural sin cambio de fase, metales líquidos | 100-1.000 |
| Convección natural sin cambio de fase, agua | 80-800 |
| Convección natural son cambio de fase, aceites | 20-200 |
| Convección natural sin cambio de fase, aire a presión atmosférica | 5-20 |

Tabla 1.3 Rangos aproximados de valores medios del coeficiente de película [SIGALÉS]

1.3 ANTECEDENTES SOBRE EL COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR

Isaac Newton debió su interés por la temperatura, el calor y el punto de fusión de los metales al ejercicio de la supervisión de la calidad de la acuñación mientras trabajó en la casa de la moneda de Inglaterra. Observó que al calentar al rojo un bloque de hierro y tras retirarlo del fuego, el bloque se enfriaba más rápidamente cuando estaba muy caliente, y más lentamente cuando su temperatura se acercaba a la temperatura del aire. Así, a principios del siglo XVIII, publicó en un trabajo sobre este hecho [SIGALÉS]:

“Partes iguales de aire eran calentadas en intervalos iguales de tiempo, recibiendo un grado de calor proporcional al calor del hierro.”

Sin embargo la expresión sencilla de esta observación, conocida como “Ley de Enfriamiento de Newton”, la formuló 121 años después Joseph Fourier en su *Theorie Analytique de la Chaleur*:

$$\dot{Q} = hA(T_{sup} - T_{fluido})$$

Esta fórmula propuesta, a fin de facilitar el tratamiento matemático, exige suponer que h , el coeficiente superficial de transferencia de calor, es constante, aunque ya anteriormente se sabía que este no lo era en el seno del fluido, como lo demuestra los experimentos con resultados cualitativos de John Leslie en 1804 junto con el primer estudio que distinguió cuantitativamente la radiación de la convección en el aire y la variabilidad de h con la temperatura de la superficie realizado por Louis Dulong y Alexis Thérèse Petit en 1818.

A continuación se tratan las distintas formas de determinar dicho coeficiente. En la mayoría de los casos en que está implicada la transferencia de calor en un fluido, para diversas configuraciones geométricas y arreglos de flujo, los coeficientes de transferencia de calor son calculados por correlaciones empíricas y semiempíricas entre grupos adimensionales de las variables pertinentes. Esas correlaciones de datos experimentales están reportadas en la literatura, en las cuales se especifica la geometría, los regímenes de flujo, el tipo de convección y la naturaleza química del fluido (fase, polaridad, etc.). Adicionalmente se indica el grado de precisión de la correlación. Generalmente se acude a la determinación empírica del número de Nusselt, debido en parte, a que las ecuaciones diferenciales que describen el modelo de transporte de calor en convección, no tienen solución analítica, y sólo la tienen para los casos sencillos.

No es práctico, pero si costoso, hacer ensayos de experimentos con muchos líquidos y gases bajo, una gran variedad de condiciones experimentales. Ello, para tener disponibles los valores numéricos de las magnitudes de los coeficientes de transferencia de calor, necesarios para aplicaciones industriales.

Así la obtención de los valores mediante otros métodos se hace evidente. Una de las formas más populares y empleadas consiste en las expresiones obtenidas mediante el análisis dimensional que conlleva a una experimentación con menor número de pruebas. El análisis dimensional asocia las variables en grupos adimensionales y propone una estructura de cómo se relacionan dichos grupos, conocidos como números adimensionales. Los experimentos permiten establecer los valores de los exponentes y coeficientes de las ecuaciones adimensionales para un determinado intervalo de trabajo. Entonces el coeficiente de

transferencia de calor (que se encuentra inmerso dentro de unos de los grupos) puede ser calculado a partir de la correlación para cualquier combinación de velocidad, tamaño de la geometría y propiedades de fluido que esté dentro del intervalo.

Para la determinación del coeficiente de transferencia de calor para líquidos que fluyen dentro de tuberías o tubos, un aparato típico usado consiste en un sistema formado por un intercambiador de calor principal, -sección de tubería de prueba encerrada por un tubo concéntrico o de doble tubo -, y un intercambiador auxiliar que sirve para efectuar la operación opuesta de la sección de prueba, como se muestra en la figura [KERN].

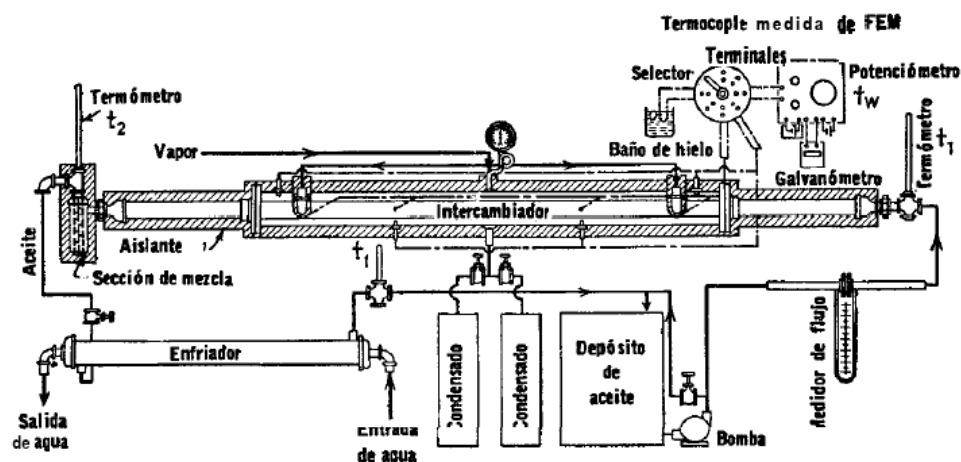


Figura 1.5 Equipo para determinar coeficientes de película en convección forzada interna [KERN]

Una vez que se generan los datos experimentales se diseñan los experimentos para determinar las correlaciones. Lo usual, es reducir el número de variables, utilizando análisis adimensional, esto conduce a que el coeficiente de transferencia de calor, que está involucrado en el número de Nusselt, quede principalmente en función del Número de Reynolds, el número Prandtl, etc.. y si se presenta convección libre, interviene adicionalmente el número de Grashof en la correlación.

Existen cinco métodos generales para determinar los coeficientes de transferencia de calor por convección [KREITH]:

| MÉTODO | DEFINICIÓN | VENTAJAS | DESVENTAJAS |
|---|--|--|--|
| Análisis dimensional combinado con experimentos | Determinación de grupos adimensionales para correlacionar datos experimentales, es decir combina varias variables en grupos adimensionales y no produce ecuaciones que puedan ser resueltas. | Es matemáticamente simple. Es fácil de usar. Facilita la interpretación de datos experimentales al correlacionarlos en función de los grupos adimensionales. | Resultados obtenidos incompletos e inútiles sin datos experimentales. Contribuyen poco a la comprensión del fenómeno, es decir no proporciona información relativa a la naturaleza del fenómeno. No se pueden omitir variables pertinentes, es decir se deben seleccionar adecuadamente. Se debe disponer de una teoría preliminar o de un conocimiento del fenómeno. Las correlaciones no son universales en cuanto al tipo de flujo y geometría. |
| Soluciones matemáticas exactas de las ecuaciones de capa límite | Solución simultánea de las ecuaciones de cantidad de movimiento y transferencia de energía que describen el fenómeno. | Las suposiciones hechas en el análisis pueden especificarse con precisión y comprobar su validez mediante experimentación. Sirve como base de comparación para métodos aproximados más simples. Se pueden establecer soluciones numéricas con ordenadores de alta velocidad. | Requiere la comprensión suficiente de los mecanismos físicos para describirlos en lenguaje matemático. La mayoría de ecuaciones son bastante complejas. |
| Análisis aproximados de las ecuaciones de capa límite mediante métodos integrales. | Utiliza una ecuación simple pero que describe esencialmente las distribuciones de velocidad y temperaturas en la capa límite, para hacer un análisis macroscópico. | Evita la detallada descripción matemática del flujo en la capa límite. Aporta soluciones a situaciones que no pueden tratarse mediante un análisis matemático exacto. Se extiende a flujo turbulento. Concuerda en lo fundamental con los resultados obtenidos por otros métodos. | Se pierde precisión y exactitud en los resultados. |

| | | | |
|---|--|---|---|
| <p>La analogía entre transferencia de calor y transferencia de cantidad de movimiento.</p> | <p>Un movimiento compuesto con dirección perpendicular al flujo medio explica la transferencia de energía y momentum. Este movimiento puede describirse estadísticamente por medio de un método similar al de la teoría cinética de los gases.</p> | <p>Útil para análisis de transferencia turbulenta. El mecanismo de transferencia puede describirse como un modelo simplificado. Los resultados experimentales concuerdan con las predicciones analíticas basadas en el modelo hipotético.</p> | <p>Este modelo no necesariamente debe concordar con las condiciones reales existentes en la naturaleza.</p> |
| <p>Solución numérica</p> | <p>Resolución numérica de las ecuaciones exactas de movimiento, a través de la discretización de las mismas.</p> | <p>Resuelve la necesidad de expresar las variables de campo en función del espacio y/o del tiempo. Calcula con facilidad las soluciones para distintas condiciones de frontera.</p> | |

Tabla 1.4 Métodos Generales para evaluar coeficientes de transferencia de calor [El Autor].

La evolución del uso de computadores para el análisis de la convección, puede sintetizarse así: a finales de los cincuenta para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a flujos autosimilares, se usan los recién inventados computadores digitales; en los sesenta se desarrollan eficientes métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales que rigen el comportamiento del flujo en capas límite y en un conducto, al punto que las soluciones se vuelven rutina una vez se tengan los programas montados; en los setenta se concentra la atención en la resolución de las ecuaciones de conservación que rigen los flujos con vórtices, ondas de choque y características complejas; en la actualidad se ha desarrollado software especializado en la dinámica de fluidos que permiten estudiar una amplia gama de flujos, además de la programación interactiva compleja que permite implantar nuevas configuraciones geométricas y de contorno [MILLS].

Sin embargo es necesario aclarar, que como el objeto de la transferencia de calor es el cálculo del campo de temperaturas y del flujo de calor, el proceso de determinar el coeficiente de transferencia de calor a partir de los balances fundamentales es superfluo, como lo señaló Eugene F. Auditori, quien en 1974 argumentó que el coeficiente al ser función de la temperatura y altamente no lineal, sobre todo en los gases y cambios de fase, no es racional

como parámetro, por lo que esgrimió que debían plantearse ecuaciones que arrojaran directamente el flujo de calor, pero no tuvo la perspicacia de enfocar el problema a partir de los balances diferenciales. De hecho los métodos modernos y avanzados de cálculo de transferencia de calor a través de un fluido prescinden de h . Actualmente, se presentaría un inconveniente práctico si se decide abandonar el uso del coeficiente de transferencia de calor: la inmensa cantidad de información con base experimental acumulada en expresiones que permiten obtener un valor fiable y muy fácil de usar [SIGALÉS].

La predicción del coeficiente entre una superficie curva y un fluido, se dificulta en comparación a la predicción en superficies planas, por lo que se hace necesario manejar métodos numéricos, que pueden conducir a fórmulas aproximadas, o en caso de preferir una solución más exacta, exige el uso de métodos de solución con funciones ensayo, que permita obtener los perfiles de temperatura necesarios, para hallar el cambio local de los perfiles en la interfase fluido-sólido.

Para resolver las ecuaciones diferenciales del transporte de calor y de cantidad de movimiento, por lo general se suele proponer soluciones de prueba en series de potencias o con parámetros de perturbación. Otra forma es obtener una expresión, a partir de la solución del problema utilizando los datos generados por diferencias finitas o elementos finitos, que puede conducir a una fórmula al correlacionar los resultados numéricos generados, los cuales pueden ser presentados en tablas y gráficas.

1.4 CONVECCIÓN LIBRE O NATURAL

La transferencia de calor por convección se incrementa por el aumento de la turbulencia; esta turbulencia puede ser generada por un agente externo como una bomba, un ventilador, un agitador, un compresor, etc. caso que se conoce como la convección forzada, o puede generarse por un desequilibrio de temperaturas en el seno del fluido que provoca por tanto un gradiente de densidades que da origen a una fuerza de empuje ascensional o de flotación, en donde el fluido caliente tiende a elevarse; claro está que en algunos casos las diferencias de densidad también pueden ser provocadas por cambios en la composición [MILLS]. Los gradientes de densidad de un fluido puro se relacionan con los de temperatura por medio de los coeficientes de expansión volumétrica.

En el presente trabajo se propone un sistema de estudio, que corresponde a la transferencia de calor por convección libre, alrededor del bulbo de un termómetro rodeado por aire. El movimiento del aire es generado por la diferencia de temperatura en el aire, lo cual origina un gradiente de densidad en el fluido, ocasionando fuerzas de flotación en el aire caliente, el cual asciende originándose la corriente convectiva natural. Para el estudio de la transferencia de calor alrededor del bulbo del termómetro, puede asumirse, que el sistema a estudiar puede representarse aproximadamente como la convección libre alrededor de un cilindro.

Las magnitudes de las velocidades asociadas a la convección natural suelen ser sumamente pequeñas, sin superar los 2 m/s [MILLS], por lo que los coeficientes de transferencia de calor suelen ser normalmente inferiores a los de convección forzada; un valor típico en gases es de alrededor de $5 \text{ W/m}^2\text{K}$, y se debe analizar si la convección por radiación que sucede simultáneamente es despreciable o no. En convección libre también hay grados de turbulencia que determinan diferentes regímenes flujo: laminar, transición y turbulento.

Aunque estos coeficientes de transferencia de calor por convección libre son relativamente pequeños, muchos dispositivos dependen de este modo de transferencia para su enfriamiento como el caso de las unidades electrónicas; debido al calor interno las temperaturas de estos cuerpos se elevan por encima de la ambiental, conforme la diferencia de temperaturas se incrementa, también lo hace la transferencia de calor, hasta que se alcanza un estado de equilibrio en el que la razón de generación de calor es igual a la razón de disipación de calor.

La convección natural es el mecanismo de flujo de calor predominante en los radiadores de vapor, los muros de edificios, el cuerpo humano en aire -ambos en reposo-, el almacenamiento de materiales, etc., por lo que para determinar la carga de calor de dispositivos calefactores, aire acondicionado y artefactos electrónicos, y también para cuantificar las pérdidas de calor en los tubos que transportan vapor u otros fluidos calientes, o en el enfriamiento de superficies contenedoras de reacciones nucleares por fisión de calor, etc. se hace necesario conocer los coeficientes de transferencia de calor por convección libre [KREITH].

En lugar del número de Reynolds empleado en convección forzada, en la convección Libre o Natural la turbulencia es cuantificada por el número de Grashof, Gr , o el número de Rayleigh Ra .

El número de Grashof indica la proporción o razón entre las fuerzas de empuje y las fuerzas inerciales, y se puede calcular a partir de las propiedades del fluido y la geometría, de esta manera:

$$Gr = \frac{\text{Fuerzas de empuje}}{\text{Fuerzas viscosas}} = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|L_c^3}{v^2} = \frac{\rho^2 g\beta|T_w - T_\infty|L_c^3}{\mu^2}$$

Mientras que el Número de Rayleigh se define como el producto entre los número de Grashof, Gr , y Prandtl, Pr .

$$\begin{aligned} Ra = GrPr &= \frac{g\beta|T_w - T_\infty|L_c^3}{v^2} \cdot \frac{c_p\mu}{k} = \frac{\rho g\beta|T_w - T_\infty|L_c^3 c_p(\rho\mu)}{v^2 k} = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|L_c^3 c_p \rho v}{v^2 k} \\ &= \frac{g\beta|T_w - T_\infty|L_c^3}{v\left(\frac{k}{c_p\rho}\right)} = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|L_c^3}{v\alpha} \end{aligned}$$

El coeficiente de transferencia de calor por convección se encuentra a partir del número de Nusselt, Nu , que relaciona el calor convectivo con el calor conductivo de la siguiente manera:

$$Nu = \frac{\text{Calor Convectivo}}{\text{Calor Conductivo}} = \frac{hL_c}{k}$$

Usualmente la longitud característica, L_c , puede ser la longitud, L , o el diámetro, D , del cilindro dependiendo si se orienta de manera vertical u horizontal, respectivamente.

Si el cilindro se encuentra orientado verticalmente, entonces lo más común es manejar un número de Gr_L , Ra_L y Nu_L , donde la longitud, L , corresponde a la altura del cilindro.

$$Gr_L = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|L^3}{v^2}; \quad Ra_L = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|L^3}{v\alpha} \quad y \quad Nu_L = \frac{hL}{k}$$

Ahora si se encuentra orientado horizontalmente, entonces se trabaja un número de Gr_D , Ra_D y Nu_D :

$$Gr_D = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|D^3}{v^2}; \quad Ra_D = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|D^3}{v\alpha} \quad y \quad Nu_D = \frac{hD}{k}$$

1.5 DESCRIPCIÓN DE ALGUNOS MÉTODOS EXPERIMENTALES PARA DETERMINAR COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN CONVECCIÓN LIBRE

Las soluciones analíticas son complejas y difíciles, para muchas configuraciones, por lo que mucha de la información de diseño viene de estudios experimentales. De lo consultado en la

literatura referente a los métodos experimentales para determinar el coeficiente de transferencia de calor, puede observarse y clasificarse dos métodos generales:

- Métodos desarrollados únicamente con base en la ley de enfriamiento de Newton $\dot{Q} = hA(T_w - T_\infty)$.
- Métodos basados en las mediciones del campo de velocidad y de temperaturas del fluido y combinados con la ley de enfriamiento de Newton $\dot{Q} = hA(T_w - T_\infty)$.

1.5.1 Métodos desarrollados únicamente con base en la ley de enfriamiento de Newton $\dot{Q} = hA(T_w - T_\infty)$.

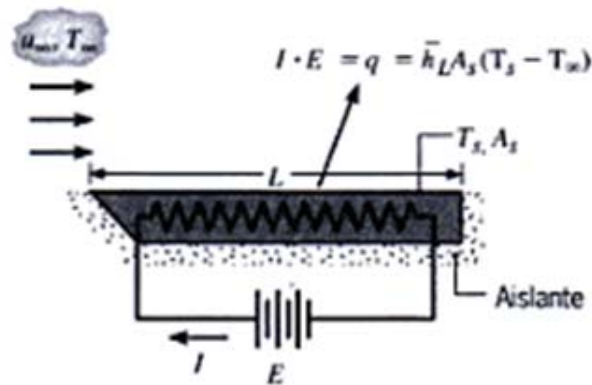


Figura 1.6 Experimento para medir el coeficiente promedio de transferencia de calor por convección.
[INCROPERA]

Para flujo externo, un arreglo experimental que suele usarse para una determinada geometría de la superficie se muestra en la Figura 1.6. El sistema es calentado eléctricamente por una resistencia interna, para mantener una diferencia de temperatura entre la superficie sólida y el fluido, la cual se mide utilizando termocuplas: una situada en la superficie sólida y otra situada en el seno del fluido, con lo cual puede determinarse la diferencia de temperatura ($T_w - T_\infty$). Adicionalmente es necesario medir experimentalmente directa o indirectamente:

- El flujo de calor que atraviesa el sistema en estado estacionario, que corresponde a la potencia suministrada por la red eléctrica al elemento calefactor (que es función de la corriente y el voltaje del circuito).

- El área de transferencia de calor y la diferencia de temperatura entre la superficie sólida y el fluido ($T_w - T_\infty$).

Posteriormente utilizando la Ley de Enfriamiento de Newton, se determina experimentalmente el coeficiente como

$$h = \frac{\dot{Q}}{A(T_w - T_\infty)}$$

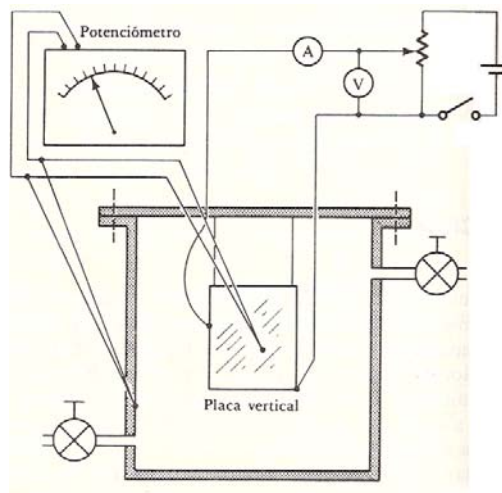


Figura 1.7 Experimento de Convección Natural [KARLEKAR]

Para la determinación experimental del coeficiente de transferencia de calor en convección libre (así como los factores que influyen en el mismo) entre un gas y una placa plana vertical u horizontal, se muestra en la figura 1.7 un dispositivo que consta de un gran tanque dentro del cual se encuentra suspendida verticalmente u horizontalmente una superficie. Se llena el tanque con un gas transparente como nitrógeno, oxígeno o aire. Para calentar uniformemente la superficie se inserta una resistencia eléctrica, la cual está conectada a una fuente de voltaje. Se colocan termopares sobre la superficie y al interior del tanque, el cual está equipado con dos válvulas para purgar y cargar un gas cualesquiera. Se varía la transmisión de energía eléctrica con un reóstato y se miden la corriente y el voltaje para evaluar el flujo de calor suministrado [KARLEKAR].

Se cierra el interruptor, se entrega una determinada carga de calor y luego se deja transcurrir el tiempo suficiente para que la temperatura se estabilice. Despreciando las transferencias de calor por los alambres y elementos de soporte por conducción, se calcula el flujo de calor por

radiación, el cual se descuenta de la potencia calorífica total entregada, para así hallar el flujo de calor por convección, el cual permite hallar el coeficiente de transferencia de calor, con una exactitud satisfactoria.

Si se incrementa el flujo de calor, aumenta la temperatura de la superficie y por consiguiente debe también crecer el valor del coeficiente de transferencia de calor. Una variación del coeficiente también se observa cambiando el gas, la geometría o el tamaño de la superficie, por ejemplo para una superficie vertical doblar la altura puede llevar a una reducción del 20% del coeficiente aproximadamente [KARLEKAR]

1.5.2 Métodos basados en las mediciones del campo de velocidades y de temperaturas del fluido y combinados con la ley de enfriamiento de Newton $\dot{Q} = hA(T_w - T_\infty)$.

En estos métodos mediante interferogramas y métodos de visualización de flujos se pueden visualizar tanto las líneas isotermas como las líneas de corriente y con ello es posible inferir el campo vectorial de velocidades asociado. Así puede medirse experimentalmente la velocidad y la temperatura del fluido en contacto con una superficie de temperatura diferente. Conocida experimentalmente la distribución de temperatura y la distribución de velocidad, puede determinarse el espesor de la capa límite térmica e hidrodinámica y con toda esta información utilizando las ecuaciones de balance de cantidad de movimiento y la ecuación de energía y combinando con la ley de enfriamiento de Newton se logra finalmente determinar el coeficiente de transferencia de calor.

Similar a la convección forzada, hay casos donde, por la configuración estudiada, normalmente se dificulta hallar analíticamente los perfiles de temperaturas y velocidades, se hace entonces necesario recurrir a las medidas experimentales para obtener dichas relaciones. La convección natural o forzada, en régimen turbulento, requiere de datos experimentales, pero el problema es más agudo en la convección natural que en la forzada, dado que las velocidades son normalmente tan pequeñas que son realmente difíciles de medir [HOLMAN].

A pesar de las dificultades experimentales, se han realizado medidas de velocidad utilizando técnicas de burbuja de hidrógeno [VLIET], anemometría de hilo caliente [CHEESEWRIGHT] y anemómetros de fibra de cuarzo. La anemometría láser [FLACK] es particularmente útil para las medidas de convección natural, ya que no se perturba el campo fluido.

Para la determinación del campo de temperaturas se usa la técnica del interferómetro de Zehnder-Mach. Un interferómetro típico, que se utiliza para estudios de transferencia de calor consta de una fuente de luz monocromática, una fuente para colimar el haz de luz, un par de placas separadoras, un par de espejos y una pantalla. El haz colimado pasa a través de una placa separadora A de tal modo que cambia su curso 90° . Este rayo desviado, haz 1, se refleja 90° y pasa a través de la sección de prueba, que contiene un cuerpo caliente, tal como una placa. Ya que la placa se encuentra a una temperatura mayor que la del aire de la vecindad, existe una variación de temperatura dentro del aire que rodea la placa. Además, ya que la densidad del aire depende de su temperatura, el haz 2 pasa a través de aire que tiene gradientes de densidad. La longitud de onda de la luz, varía con la densidad del aire, así que la distancia óptica para el haz 2 es diferente que para el haz 1. Estos dos haces contienen rayos que difieren en una longitud de onda o más, y además de otros rayos que difieren en media longitud de onda o múltiplo. La placa separadora B combina estos rayos y el haz combinado se proyecta en la pantalla. Además, ya que los haces 1 y 2 parten de la misma fuente, ambos son coherentes y pueden interferir el uno con el otro. El haz combinado que parte de la segunda placa separadora es una onda nueva de la misma frecuencia y longitud de onda pero del doble de amplitud del haz colimado original, dando por resultado franjas oscuras y claras alternadas sobre la pantalla [KARLEKAR].

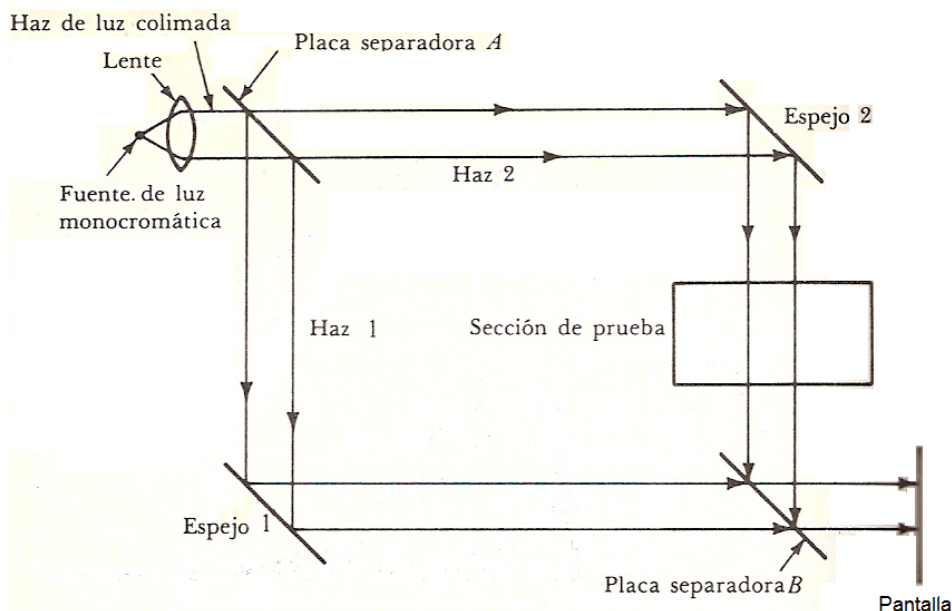


Figura 1.8 Esquema de un interferómetro [KARLEKAR]

El interferómetro es básicamente un instrumento que se usa para medir el índice de refracción, el cual está relacionado con la densidad. Por medio de una ecuación de estado de los gases, se calcula la temperatura partiendo de la densidad y presión conocidas. Una región de líneas oscuras muy juntas representa una región de cambios de temperatura rápidos y viceversa.

Estos campos se pueden apreciar en la Figura 1.9. Cabe anotar que en superficies calientes verticales los interferogramas muestran que en el inferior de la superficie existe una capa límite cuyo espesor no es cero, como suele asumirse en la solución analítica. Además muestran que para una lamina o un cilindro vertical las isotermas presenta un perfil parabólico respecto al eje axial, y que en cilindros horizontales calientes el campo de temperatura no es simétrico respecto al eje, y las líneas tienden a alejarse a la parte superior del cilindro.

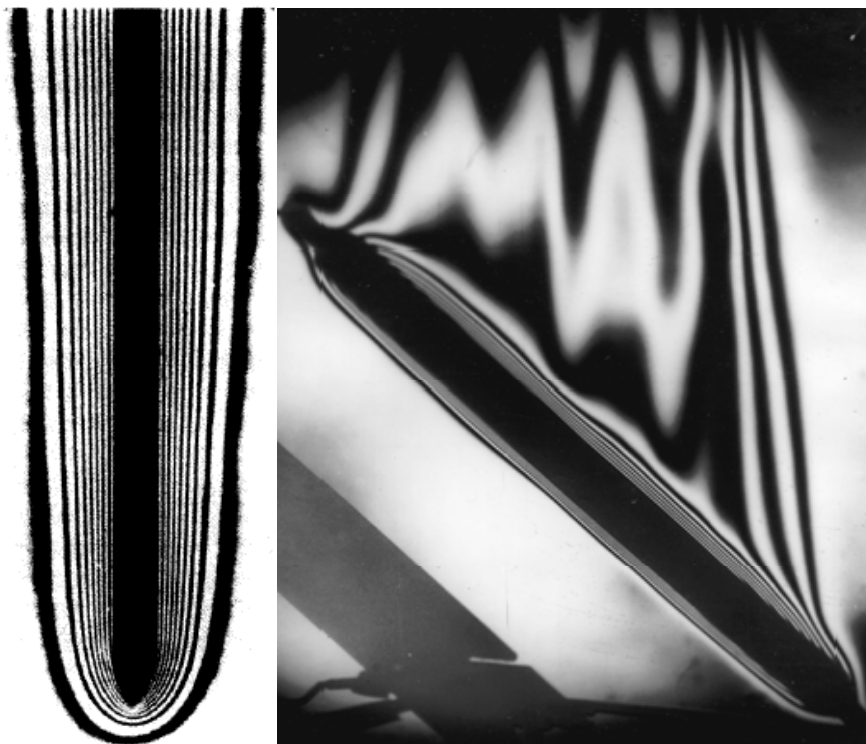


Figura 1.9 Interferogramas de isotermas de convección libre en una pared vertical (izq.) [HOLMAN] y en un cilindro inclinado (der.) [MARTINENKO]

2. PREDICCIÓN DEL COEFICIENTE

El Capítulo 1 trató sobre generalidades y algunos elementos conceptuales descriptivos relacionados con la parte teórica y experimental de la transferencia de calor por convección. En este capítulo, el trabajo continúa con los métodos teóricos para determinar coeficientes de transferencia de calor en convección sobre sistemas cilíndricos. Se aplicaran estos métodos para generar algunas ecuaciones teóricas del número de Nusselt para convección libre y externa en cilindros, siendo expresiones que se encuentran disponibles en la literatura.

En el Capítulo 3 los proponentes de esta tesis generaran sus propias correlaciones teóricas originadas al aplicar los métodos teóricos al problema específico que se quiere modelar en este proyecto.

Se expone la revisión del estado del arte en torno a la predicción y luego la descripción de los métodos diferencial e integral aplicados a algunos casos de interés del cilindro con el fin de mostrar el dominio de los métodos.

2.1 ESTADO DEL ARTE

A partir de una minuciosa revisión de las ecuaciones, correlaciones y expresiones de la literatura se extrajeron las distintas opciones ya sean de origen teórico (Análisis de la Convección) o de origen práctico (Correlaciones Empíricas) que permiten predecir el coeficiente de transferencia de calor para el caso de estudio: Convección libre alrededor de cilindros verticales y horizontales.

2.1.1 Análisis de la Convección

L. Lorenz (1881) fue el primero en resolver el problema de transferencia de calor en una pared vertical calentada, por convección libre, postulando que el fluido cercano a la superficie se mueve en forma vertical hacia arriba, donde el componente horizontal de la velocidad son insignificantes.

Schmidt y Beckman en 1930 realizaron un trabajo donde mostraron que los postulados de Lorenz debían refinarse. Los datos de Saunder confirmaron dicho cuestionamiento.

Las ecuaciones diferenciales para convección libre en una pared plana fueron resueltas por Ostrach (1952) con número de Prandtl desde 0.01 a 1000. Pohlhausen resolvió el modelo para el aire introduciendo una función corriente y un parámetro de similitud, y encontró que el valor máximo de velocidad se encontraba dentro de la capa límite. Este último también convirtió las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el fenómeno en una ecuación diferencial ordinaria. Squire presentó una solución aproximada usando el método integral [KARLEKAR].

Para un cilindro vertical y basándose en la hipótesis aproximada de Langmuir de capa límite estacionaria de una superficie curva, Elenbaas (1948) planteó:

$$Nu_D = 0.6 \left(\frac{D}{L}\right)^{1/4} Ra^{1/4} \exp\left(\frac{2}{Nu_D}\right)$$

Si $D \rightarrow \infty$ se tiene que

$$Nu_D = 0.6Ra^{1/4}$$

solución que corresponde a una pared plana.

Los métodos de similaridad fueron luego abordados para resolver las ecuaciones diferenciales parciales de conservación en su forma integral, en el caso de un cilindro.

Así Sparrow y Gregg (1956) obtuvieron la solución a las ecuaciones de conservación empleando métodos de similaridad y encontraron que cuando D/L no es tan grande no se pueden ignorar los efectos de curvatura. De hecho el criterio para tratar un cilindro vertical igual que una pared plana vertical fue dado además por Gebhart:

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{Gr^{1/4}}$$

Las soluciones distan menos del 5% de la solución de pared plana para Pr desde 0.72 a 1.0.

LeFevre y Ede (1956) emplearon un método integral con el fin de solucionar las ecuaciones que gobiernan el fenómeno obteniendo la siguiente expresión del número de Nusselt promedio en régimen laminar [BEJAN]:

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k} = \frac{4}{3} \left[\frac{7Gr \cdot Pr^2}{5(20 + 21Pr)} \right]^{1/4} + \frac{4(272 + 315Pr)L}{35(64 + 63Pr)D}$$

Donde tanto \overline{Nu} y Gr están basados en la altura, L , del cilindro.

Los cilindros horizontales y las esferas son configuraciones que no dan lugar a similitud para encontrar la solución de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno, por lo que se hace necesario abordar otros métodos.

Hermann (1936) dedujo una expresión para cilindros horizontales en régimen laminar resolviendo las ecuaciones diferenciales por el método de no similaridad, estableciendo que para aire:

$$\overline{Nu}_D = 0.372Gr_D^{1/4}$$

Merk y Prins (1953-1954) obtuvieron para cilindros horizontales en régimen laminar, una solución empleando el método integral y asumiendo espesores iguales entre las capas límite térmica e hidrodinámica [BEJAN]:

$$\overline{Nu}_D = C(Pr)(Gr_D Pr)^{1/4} = C(Pr)Ra_D^{1/4}$$

Para valores de Pr de 0.7 (aire) el valor de la constante, $C(Pr)$ fue calculado como 0.436.

Minkowycz y Sparrow (1974) obtuvieron resultados analíticos para cilindros verticales isotérmicos, aplicando el método de no similaridad local y así lograron una solución numérica para Prandtl 0.733. Demostraron que si $(D/L)Gr_L^{1/4} = 0.6$ el coeficiente de transferencia de calor de un cilindro vertical isotérmico es a lo más 4 veces el calculado para una placa vertical.

Cebeci (1974) generó resultados numéricos sobre cilindros delgados, mientras que cuerpos de simetría axial fueron abordados en una revisión realizada por Gebhart (1988).

2.1.2 Correlaciones Empíricas

Para obtener una correlación empírica el procedimiento experimental debe ser repetido para una variedad de condiciones de prueba, en las que se puede cambiar la velocidad del fluido u_∞ , la(s) longitud(es) característica(s) de la geometría, la naturaleza del fluido, tal que tengan sustancialmente números distintos de números de Prandtl como aire, agua y aceite. Los

distintos resultados de los números de Nusselt se linealizan con respecto a Grashof y Prandtl, que pueden ser ajustados en una correlación cuya forma más usual es:

$$Nu = Nu(Gr, Pr) = CGr^m Pr^n \quad \text{ó} \quad Nu = C(GrPr)^n = C Ra^n$$

Donde C , m y n son constantes determinadas en la mayoría de casos experimentalmente y en contadas configuraciones son deducidas. Estas constantes son independientes de la naturaleza del fluido, ya que ésta se cuantifica en el número de Prandtl.

La limitación principal de las correlaciones es que raramente proveen valores exactos para la coeficientes convectivos, ya que una gran variedad de condiciones que dependen del tipo del fluido, la turbulencia del mismo y la rugosidad de la superficie, no son muy tenidas en cuenta, por lo que se pueden incurrir en errores hasta del 25% al usar estas expresiones [BLAIR].

Se aclara que los valores de estos grupos adimensionales pueden ser locales o promedios. Para aclarar esto se escriben los valores locales y promedios de la siguiente manera:

Axiales:

$$Gr_z = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|z^3}{\nu^2}; \quad Ra_z = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|z^3}{\nu\alpha} \quad y \quad Nu_z = \frac{hz}{k}$$

$$Gr_L = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|L^3}{\nu^2}; \quad Ra_L = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|L^3}{\nu\alpha} \quad y \quad Nu_L = \frac{hL}{k}$$

Radiales:

$$Gr_r = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|r^3}{\nu^2}; \quad Ra_r = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|r^3}{\nu\alpha} \quad y \quad Nu_r = \frac{hr}{k}$$

$$Gr_D = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|D^3}{\nu^2}; \quad Ra_D = \frac{g\beta|T_w - T_\infty|D^3}{\nu\alpha} \quad y \quad Nu_D = \frac{hD}{k}$$

Mientras que para los valores promedio del número de Nusselt, se acostumbra o no a colocar una barra:

$$Nu_D = \overline{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{k} \quad \text{ó} \quad Nu_L = \overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k}$$

2.1.2.1 Cilindros Verticales

Para cilindros verticales con un flujo de calor constante se tiene [JANNA]:

$$\overline{Nu}_D = C \left(Ra_D \frac{D}{L} \right)^n$$

| $Ra_D \frac{D}{L}$ | C | n |
|--------------------|------|------|
| ≤ 0.05 | 0.93 | 0.05 |
| $0.05-10^4$ | 1.37 | 0.16 |
| $\geq 10^4$ | 0.6 | 0.25 |

Tabla 2.1 Constantes para la ecuación de convección libre en cilindros verticales

Todos los valores de las propiedades se determinan a la temperatura de película, T_f , que corresponde al promedio aritmético entre la temperatura de pared, T_w , y la temperatura del seno del fluido T_∞ , excepto el coeficiente de expansión térmica, β , que en el caso de gases se determina a T_∞ .

$$T_f = \frac{1}{2} (T_w + T_\infty)$$

Se recuerda que para un gas ideal como el aire

$$\beta = \frac{1}{T_\infty}$$

Una correlación general recomendada por Yang para regiones en régimen laminar y turbulento tiene la forma [POPIEL]:

$$\overline{Nu}_L = \left\{ 0.60 \left(\frac{L}{D} \right)^{0.5} + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{[1 + (0.492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2$$

Los valores de los cálculos numéricos obtenidos por Cebeci para un parámetro de curvatura

$$\xi = \frac{\sqrt{32} H}{Gr_L^{0.25} D} < 5$$

pueden ser representados por la ecuación simple, para $Pr = 0.72$, en la región laminar [POPIEL]:

$$\overline{Nu}_L = \overline{Nu}_{L,PP} \left[1 + 0.300 \left(32^{0.5} Gr_L^{-0.25} \frac{L}{D} \right) \right]^{0.9091}$$

donde $\overline{Nu}_{L,PP}$ corresponde al de una pared plana vertical, dado por la correlación teórica [KARLEKAR]:

$$\overline{Nu}_{L,PP} = 0.677 Pr^{1/2} (0.952 + Pr)^{-1/4} Gr_L^{1/4}$$

o también por la correlación empírica desarrollada por Churchill y Chu para una placa vertical de altura, L , y con un borde frontal abrupto para flujo laminar [MILLS] :

$$\overline{Nu}_{L,PP} = 0.68 + 0.670 (Ra_L \psi)^{1/4}$$

donde la función del número de Prandtl, ψ , definida por Churchill y Usagi se define como:

$$\psi = \left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-16/9}$$

Los valores de Cebeci también pueden ser aproximados por una ecuación validada para números de Prandtl entre 0.01-100, es decir, $0.01 \leq Pr \leq 10$ [POPIEL]:

$$\overline{Nu}_L = \overline{Nu}_{L,PP} \left[1 + B \left(32^{0.5} Gr_L^{-0.25} \frac{L}{D} \right) \right]^C$$

donde:

$$B = 0.0571322 + 0.20305 Pr^{-0.43}$$

$$C = 0.9165 - 0.0043 Pr^{0.5} + 0.01333 \ln Pr + 0.0004809 / Pr$$

Popiel obtuvo una correlación a partir del enfriamiento de un cilindro en estado transitorio que tiene una incertidumbre promedio de 3.5% con un 95% de confianza, válida para:

$10^8 < Ra_L < 1,1 \times 10^9$, y, $L/D < 60$:

$$\overline{Nu}_L = A Ra_L^n$$

donde:

$$A = 0.519 + 0.03454 \left(\frac{L}{D} \right) + 0.0008772 \left(\frac{L}{D} \right)^2 + 8.855 \times 10^{-6} \left(\frac{L}{D} \right)^3$$

y

$$n = 0.25 - 0.00253 \left(\frac{L}{D}\right) + 1.152 \times 10^{-5} \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

La dependencia generalizada de transferencia de calor por convección libre en un gas tanto para flujo laminar y como turbulento alrededor de un cilindro vertical está dada por la expresión de Kuehn [MARTINENKO]:

$$Nu_D = 2 / \ln \left[1 + 2 / \left\{ \left(0.67 (Ra_D D/L)^{1/4} [1 + (0.599/Pr)^{3/5}]^{-5/12} \right)^{15} + \left(0.1 Ra_D^{1/3} \right)^{15} \right\}^{1/15} \right]$$

que es válida para:

$$0.01 \leq D/L \leq 1, \quad 0 \leq Pr \leq 1, \quad 10^{-5} \leq Ra_D \leq 10^{13} \quad y \quad T_f = (T_w + T_f)/2$$

2.1.2.2 Cilindros Horizontales

Para $10^3 \leq Gr \leq 10^9$ y $Pr \geq 0.5$ se correlacionaron los datos experimentales de Eckert y Soehnghen [KREITH]:

$$\overline{Nu}_D = 0.53 (Gr_D Pr)^{1/4}$$

En forma más general, para un cilindro isotérmico, Morgan sugiere una expresión de la forma [INCROPERA]:

$$\overline{Nu}_D = C Ra_D^n$$

| Ra_D | C | n |
|------------------------|-------|-------|
| 10^{-10} - 10^{-2} | 0.675 | 0.058 |
| 10^{-2} - 10^2 | 1.020 | 0.148 |
| 10^2 - 10^4 | 0.850 | 0.188 |
| 10^4 - 10^7 | 0.480 | 0.250 |
| 10^7 - 10^{14} | 0.125 | 0.333 |

Tabla 2.2 Constantes para la ecuación de convección libre en cilindros horizontales

Churchill y Chu dan la siguiente correlación válida para $10^{-6} \leq Ra_D \leq 10^9$ [MILLS]:

$$\overline{Nu}_D = 0.36 + \frac{0.518Ra_D^{1/4}}{[1 + (0.559/Pr)^{9/16}]^{4/9}}$$

Cuando $Ra_D \geq 10^9$ ocurre transición de una capa límite laminar a una turbulenta y el aumento del número de Nusselt con el número de Rayleigh es mayor [MILLS]:

$$\overline{Nu}_D = \left\{ 0.60 + \frac{0.387Ra_D^{1/6}}{[1 + (0.559/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2$$

Por el método de la capa límite, Kuehn deduce [MARTINENKO]:

$$Nu_D = 2 / \ln \left[1 + 2 / \left\{ \left(0.518Ra_D^{1/4} [1 + (0.599/Pr)^{3/5}]^{-5/12} \right)^{15} + \left(0.1Ra_D^{1/3} \right)^{15} \right\}^{1/15} \right]$$

En la región de régimen laminar para $Ra_D > 1$, la aproximación que realiza Churchill se puede aplicar con un error del 4.5% [MARTINENKO]:

$$Nu^{1/2} = 0.36^{1/2} + \left[\frac{Ra_D}{300[1 + (0.5/Pr)^{9/16}]^{16/9}} \right]^{1/6}$$

2.2 CONSIDERACIONES GENERALES

Existe una apreciable cantidad de problemas de interés práctico acerca de la transferencia de calor por convección natural sobre cuerpos de forma arbitraria y compleja. En la mayoría de los casos, la superficie en la que se desarrolla el flujo es curvilínea y el ángulo γ , entre el vector de gravedad, g y su proyección a un plano tangente a la superficie, está cambiando como lo hace el flujo que se mueve desde el borde de la entrada a lo largo de la superficie. En algunos casos, la curvatura de la superficie es pequeña, y entonces la superficie se puede tratar aproximadamente como plana y los numerosos datos disponibles en superficies planas verticales e inclinadas se pueden utilizar.

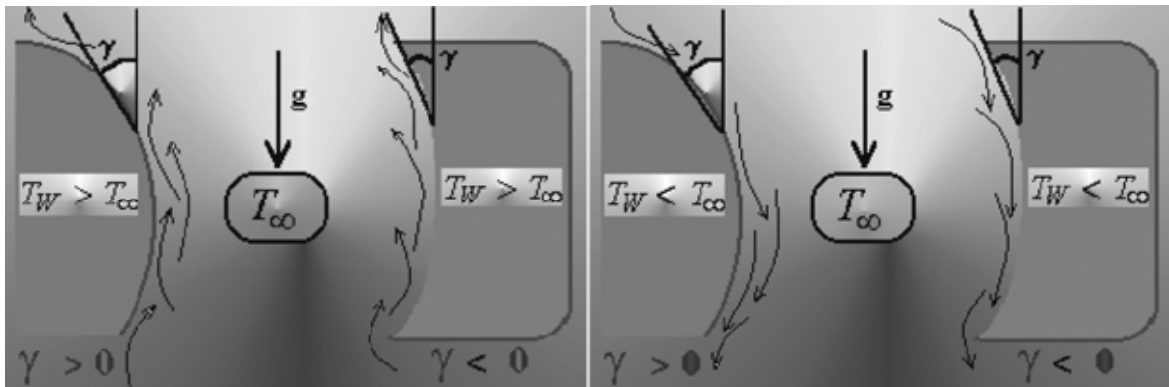


Figura 2.1 Patrón de Flujo en superficies curvas [MARTINENKO]

Las características especiales de transferencia de calor en una superficie curvada también se manifiestan en una delgada capa límite. Los efectos causados por la curvatura del cuerpo son especialmente significativos en pequeños y moderados números de Grashof. En la capa adyacente a la superficie, el principal mecanismo de transferencia de calor es por conducción.

El coeficiente de transferencia de calor por convección del problema en cuestión, tiene las siguientes características:

- Convección: Libre
- Flujo: Externo
- Régimen: Laminar
- Sin cambio de fase
- Superficie caliente, $T_w > T_\infty$
- Fluido: Newtoniano, Aire
- Superficie: Cilindro Circular
- Estado: Estacionario

Consideraciones Generales:

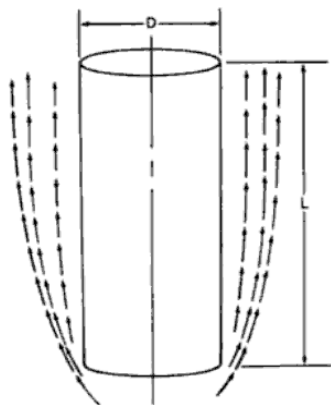
- No se tiene en cuenta el efecto del extremo semiesférico del bulbo, ni tampoco la unión entre el bulbo y la columna, además se asume la transferencia de calor sólo por la superficie lateral del cilindro.
- Si el número de Rayleigh es inferior de alrededor de 10^9 , el flujo de capa límite será laminar [MILLS].

- El aire se asume como flujo incompresible, lo que implica que el número de Mach sea menor de 0.3, es decir: $M < 0.3$. Si se toma la velocidad estándar del sonido en aire de 340 m/s, $v_s = 340 \text{ m/s}$, entonces la máxima velocidad que podría tener el aire para ser flujo incompresible, sería de:

$$\text{Si } M = \frac{v}{v_s} \text{ y } M < 0.3 \text{ tenemos:}$$

$$\frac{v}{v_s} < 0.3 \quad \therefore \quad v < 0.3v_s = 0.3 \cdot 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 102 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Luego la velocidad máxima permisible para tratar el aire como flujo incompresible es $v_{m\acute{a}x} = 102 \text{ m/s}$. Como ya se había enunciado en el Capítulo 1, “las velocidades asociadas a la convección natural suelen ser sumamente pequeñas, sin superar los 2 m/s” [MILLS], por lo tanto si el aire estuviera a esa velocidad estamos apenas en un 1.96% del límite para dejar de ser incompresible.



El flujo de convección libre sobre un cilindro vertical se encuentra en muchos casos de aplicación tales como haces de tubos en los reactores nucleares, resistencias cilíndricas, etc. por lo tanto las características especiales de estos flujos son de interés especial para la investigación.

Si se considera una superficie caliente rodeada de un fluido frío, el flujo es impulsado por una fuerza de empuje debida a los gradientes de densidad en la región adyacente a la superficie caliente. Se parte del hecho de que la velocidad en la pared tiene un valor de cero y que empieza a incrementarse alcanzando un máximo y luego tiende a cero al alejarnos de la pared hacia el seno del fluido; este máximo ocurre dentro de la capa límite térmica. Este comportamiento de la velocidad se explica porque al distanciarse de la superficie la viscosidad disminuye (por ende la velocidad tiende a aumentar), y la diferencia de densidad se va reduciendo (por ende la velocidad también tiende a disminuir); a la larga la fuerza de flotación (que es la fuerza impulsora de la convección libre) disminuye conforme la densidad del fluido tiende al valor del fluido circundante, lo que provoca que la velocidad primero alcance un máximo y luego tienda a cero al alejarse de la superficie caliente.

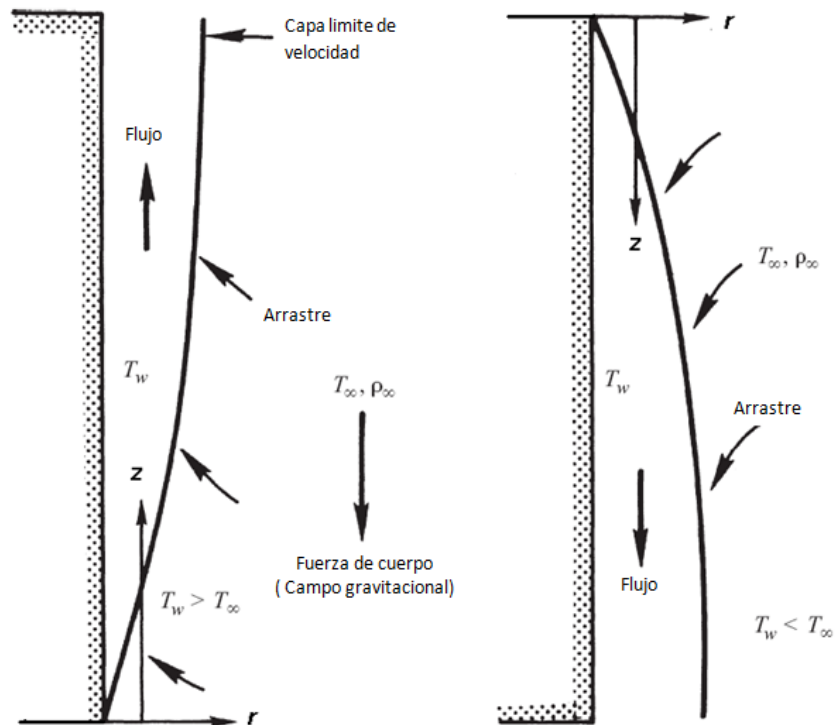


Figura 2.2 Perfil de la capa limite sobre un cilindro vertical caso de caliente (der.) y frío (izq.) [BEJAN]

Las velocidades locales ascendentes van creciendo al aumentar la distancia desde la parte inferior, ya que el fluido que se aloja por debajo se encuentra estancado. Cerca a la superficie las velocidades aumentan con mayor rapidez por el marcado efecto de la viscosidad, mientras que la diferencia de densidades afecta con menos impacto. Lejos de la superficie la viscosidad es mucho más grande, por ende la velocidad tiene a reducirse y además los gradientes de temperatura también.

Los campos de temperatura son similares a los de convección forzada, como también lo son las características de ambos tipos de capas limites. La influencia de la curvatura transversal se incrementa con la distancia axial desde el fondo del cilindro (axial) [MARTINENKO].

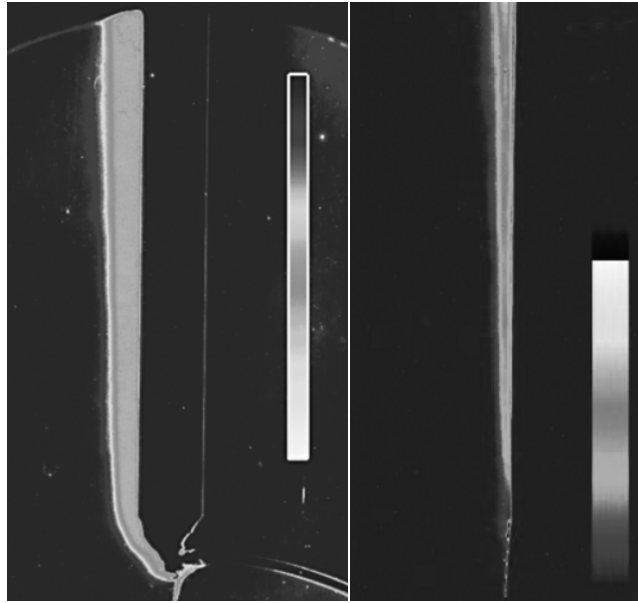


Figura 2.3 Interferogramas de convección libre externa en cilindros verticales [MARTINENKO]

2.3 MÉTODO DIFERENCIAL

Las ecuaciones diferenciales de conservación de materia (continuidad), cantidad de movimiento y energía en coordenadas cilíndricas, pueden ser encontradas haciendo los respectivos balances sobre un elemento diferencial de volumen, o simplemente retomadas de una referencia [BIRD].

Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

Cantidad de Movimiento:

En función de los gradientes de velocidad para un fluido newtoniano con propiedades constantes.

Componente r:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \end{aligned}$$

Componente θ :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \end{aligned}$$

Componente z :

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Energía:

Para fluidos newtonianos en función de las propiedades de transporte constantes.

$$\begin{aligned} \rho C_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right) \right]^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ + \mu \left\{ \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

Consideraciones adicionales a las de ítem 2.2:

- Fluido Newtoniano.
- Se desprecia la disipación viscosa y de compresibilidad en la ecuación de energía.
- Flujo laminar (laminas delgadas) en dirección z .
- Propiedades constantes, excepto la densidad y viscosidad que cambian solo en dirección z .
- Estado estacionario.
- La pared tiene mayor temperatura que el fluido, $T_w > T_\infty$ (superficie caliente).

- La componente radial de la velocidad (en r) es mas pequeña que la componente axial (en z), $v_r \ll v_z$, es decir, el fluido asciende casi verticalmente, por tanto se desprecia la componente radial de la velocidad. La componente angular de la velocidad es cero. $v_\theta = 0$.
- La temperatura no es función del ángulo.
- Las velocidades v_r y v_z son funciones exclusivas de r y z.

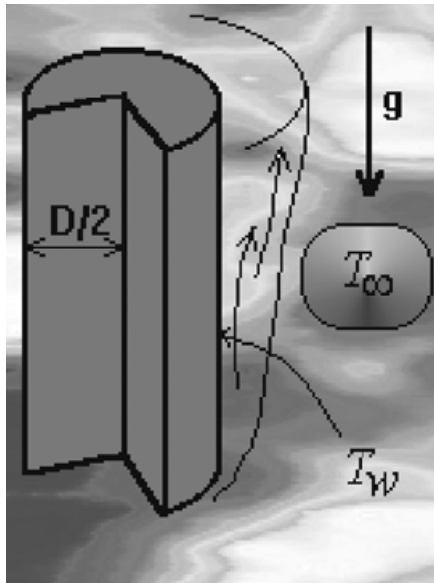


Figura 2.4 Capas laminares alrededor del cilindro vertical [MARTINENKO]

Por todo lo anterior, las ecuaciones de conservación se reducen a:

Continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Cantidad de Movimiento:

Componente z

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \rho g$$

El gradiente de presión de la ecuación es una derivada total ya que solo depende de z y la gravedad es negativa porque va hacia abajo.

Lejos de la pared, los gradientes de velocidad son cero y esta ecuación se reduce a

$$0 = -\frac{dp}{dz} - \rho_{\infty}g$$

Lo que permite encontrar el gradiente de presión:

$$-\frac{dp}{dz} = \rho_{\infty}g$$

Sustituyendo:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho_{\infty}g + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \rho g$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + (\rho_{\infty} - \rho)g$$

Dividiendo entre ρ :

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \frac{\rho_{\infty} - \rho}{\rho} g$$

A partir de la definición del coeficiente de expansión, se realiza la aproximación de Boussinesq:

$$\kappa = \beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p$$

Considerando que el volumen específico cambia muy poco con la presión, ya que los líquidos son incompresibles, y que en el caso de los gases, los cambios de presión son despreciables porque la altura de trabajo es muy pequeña, y como también se había señalado anteriormente al ser el número de Mach menor de 0.3 se asume flujo incompresible, entonces es válido aproximar la densidad solo como función de la temperatura, por lo que es posible escribir:

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \approx \frac{1}{v} \frac{dv}{dT}$$

Y sabiendo que $\rho = \frac{1}{v}$ ó $v = \frac{1}{\rho}$

se tiene que $dv = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = d\rho^{-1} = -\rho^{-2}d\rho = -\frac{1}{\rho^2}d\rho$

Al reemplazar:

$$\beta = \frac{1}{v} \frac{dv}{dT} = \rho \frac{d\rho}{dT} = \rho \left(-\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dT} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}$$

Aproximando el diferencial:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta\rho}{\Delta T} = -\frac{1}{\rho} \frac{\rho - \rho_\infty}{T - T_\infty} = \frac{1}{\rho} \frac{\rho_\infty - \rho}{T - T_\infty}$$

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\rho_\infty - \rho}{T - T_\infty}$$

Despejando:

$$\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} = \beta(T - T_\infty)$$

Así la ecuación de cantidad de movimiento queda:

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + g\beta(T - T_\infty)$$

Energía:

$$\rho C_v \left(v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

Dividiendo por ρC_v :

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{k}{\rho C_v} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

Introduciendo la difusividad térmica:

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

El cambio de temperatura interviene en la ecuación de movimiento y la distribución de velocidad en la ecuación de energía, por tanto las ecuaciones están acopladas.

Hay que considerar que el transporte (tanto de energía como de cantidad de movimiento en la dirección axial, z) debido a los mecanismos moleculares, es pequeño en comparación con el convectivo, razón por la cual se considera despreciar los términos de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \text{ y } \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Así el sistema de tres ecuaciones a resolver es:

Continuidad:

[2-1]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Cantidad de Movimiento:

Componente z

[2-2]

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + g\beta(T - T_\infty)$$

Energía:

[2-3]

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Estas 3 ecuaciones de conservación se resuelven sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

i. En la pared:

En $r = R$ y $0 < z < L$ se tiene: $T = T_w$, $v_r = 0$, $v_z = 0$

ó

$T(R, 0 < z < L) = T_w \wedge v_r(R, 0 < z < L) = 0$, $v_z(R, 0 < z < L) = 0$

ii. En el seno del fluido:

En $r \rightarrow \infty$ y $0 < z < L$ se tiene: $T = T_\infty$, $v_z = 0$, $\frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$,

ó

$$\lim_{r \rightarrow \infty} T(r, 0 < z < L) = T_\infty \wedge \lim_{r \rightarrow \infty} v_r(r, 0 < z < L) = 0, \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$$

A continuación se explicarán varios métodos para resolver estas ecuaciones de conservación; el desarrollo en detalle de la resoluciones se encuentra en el Apéndice A.

2.3.1 Resolución Por Semejanza o Análisis Dimensional

La resolución del sistema anterior, de 3 ecuaciones diferenciales y acopladas, de manera analítica es muy difícil por su no linealidad.

Dado un cilindro vertical de altura, L , y diámetro, D . Se introducen las siguientes variables adimensionales:

θ : temperatura adimensional

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

ζ : distancia vertical adimensional

$$\zeta = \frac{z}{L}$$

η : distancia radial adimensional

$$\eta = \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu\alpha L} \right]^{1/4} r$$

ϕ_z : velocidad vertical adimensional

$$\phi_z = \left[\frac{\nu}{g\beta(T_w - T_\infty)\alpha L} \right]^{1/4} v_z$$

ϕ_r : velocidad radial adimensional

$$\phi_r = \left[\frac{\nu L}{g\beta(T_w - T_\infty)\alpha^3} \right]^{1/4} v_r$$

$$Pr = \frac{L^3 g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2}$$

2.3.1.1 Ecuaciones y Condiciones Límite Adimensionales

Adimensionalizando las ecuaciones de conservación [2-1], [2-2] y [2-3]:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \phi_r) + \frac{\partial \phi_z}{\partial \zeta} = 0$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\phi_r \frac{\partial \phi_z}{\partial \eta} + \phi_z \frac{\partial \phi_r}{\partial \zeta} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \phi_z}{\partial \eta} \right) + \theta$$

$$\phi_r \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \phi_z \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)$$

Las condiciones límite de contorno o frontera adimensionales de estas ecuaciones son:

- En la pared:

Para

$$\eta = Ra_L^{1/4} \frac{R}{L} = Pr^{1/4} Gr^{1/4} \frac{R}{L}$$

para todo $0 < \zeta < 1$

se tiene

$$\theta = 1$$

$$\phi_r = 0$$

$$\phi_z = 0$$

- En el seno del fluido:

En $\eta \rightarrow \infty$

para todo $0 < \zeta < 1$

se tiene

$$\theta = 1$$

$$\phi_z = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial \eta} = 0$$

2.3.1.2 Solución

El propósito principal al resolver las ecuaciones es obtener el flujo de calor transferido y para ello se requiere el coeficiente de transferencia de calor a través del Número de Nusselt medio, $\overline{Nu} = Nu_L$.

$$\dot{Q}_{conducción} = \dot{Q}_{convección}$$

$$-kA \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = hA(T_w - T_\infty)$$

$$-\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = \frac{T_w - T_\infty}{L Ra_L^{-1/4}} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{Ra_L^{1/4} \frac{R}{L}}$$

se tiene

$$Nu_L = \frac{hL}{k} = -\frac{k}{L} Ra_L^{1/4} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{Ra_L^{1/4} \frac{R}{L}} \cdot \frac{L}{k} = -Ra_L^{1/4} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{Ra_L^{1/4} \frac{R}{L}}$$

En el sistema de ecuaciones de conservación se observa que en la ecuación de cantidad de movimiento aparece el parámetro adimensional, número de Prandtl, Pr , y en las condiciones limite aparece el número de Rayleigh, Ra , además se recuerda que $Ra = GrPr$; como lo que se requiere, en número de Nusselt, Nu , contiene el número de Rayleigh, Ra , por ende es correcto establecer que:

$$Nu_L = f(Ra_L) = f(Gr_L, Pr)$$

2.3.2 Resolución por Análisis de Escala

Para el análisis de escala se requiere que todas la variables adimensionales queden parametrizadas, lo que se logra eligiendo valores característicos que garanticen que todas estas variables tengan un orden de magnitud de la unidad o menor. Este análisis indicara que términos de las ecuaciones diferenciales no son indispensables, además que también indica algo sobre la estructura y forma de la solución.

Se definen entonces las variables adimensionales:

$$z^* = \frac{z}{L}; \quad r^* = \frac{r}{\Delta}; \quad v_z^* = \frac{v_z}{U}; \quad v_r^* = \frac{v_r}{(\Delta/L)U}; \quad T^* = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

Observe que la escala de v_r surge de la ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow v_r = -\frac{1}{r} \int_R^r r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

U es la velocidad de escala y su magnitud apropiada se determina a partir de las ecuaciones. Se usa el espesor de la capa límite térmica, Δ , en la escala de r y en todas las ecuaciones, en lugar de usar el espesor de la capa límite hidrodinámica, δ , para las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento. Para $Pr \approx 1$, δ y Δ tienen de hecho una magnitud similar, puesto que la fuerza de empuje produce un flujo en la capa límite térmica, si bien la velocidad máxima ocurre cerca de la pared. Para $Pr \gg 1$, Δ es mucho menor que δ , ya que las fuerzas viscosas ejercen una fuerza de arrastre sobre el fluido que se encuentra fuera de la capa límite térmica, aunque es la fuerza de empuje la que impulsa al flujo, y la velocidad máxima, U , debe ocurrir para un valor de $r < \Delta$. Usando Δ en las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento se garantiza que $\partial v_z^*/\partial r^*$, y $\partial v_r^*/\partial r^*$ sean del orden de la unidad.

Las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía a escala se obtienen sustituyendo las respectivas equivalencias de las variables adimensionales en ecuaciones de conservación [2-2] y [2-3]:

Ecuación de Cantidad de Movimiento:

$$\frac{U^2}{L} \left(v_r^* \frac{U \partial v_z^*}{\Delta \partial r^*} + v_z^* \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} \right) = \frac{\nu U}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right) + g\beta(T_w - T_\infty)T^*$$

Ecuación de Energía:

$$\frac{U(T_w - T_\infty)}{L} \left(v_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + v_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = \frac{\alpha(T_w - T_\infty)}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right)$$

2.3.2.1 Número Prandtl Grande, $Pr \gg 1$

Este caso es el límite cuando Prandtl es grande; para estos fluidos, $\Delta \ll \delta$; la transferencia de calor está controlada por el interior de la capa límite, donde las fuerzas de inercia (aceleración) son despreciables y por tanto las fuerzas de empuje son equilibradas por las fuerzas viscosas.

Por tanto en la ecuación adimensional de cantidad de movimiento se tiene:

$$\frac{\nu U}{\Delta^2} \sim g\beta(T_w - T_\infty)$$

de donde:

$$\frac{U}{\Delta^2} \sim \frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu}$$

Y por la ecuación de energía:

$$\frac{U(T_w - T_\infty)}{L} \sim \frac{\alpha(T_w - T_\infty)}{\Delta^2}$$

de donde:

$$U\Delta^2 \sim \alpha L$$

Resolviendo las ecuaciones

$$\frac{U}{\Delta^2} \sim \frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu}$$

$$U\Delta^2 \sim \alpha L$$

con variables U y Δ .

Se llega a

$$\frac{\Delta}{L} \sim \frac{1}{\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu\alpha} \right]^{1/4}}$$

$$\frac{\Delta}{L} \sim \frac{1}{Ra_L^{1/4}}$$

2.3.2.2 Número Prandtl Pequeño, $Pr \ll 1$

Este caso es el límite cuando Prandtl es pequeño; la alta difusividad térmica de estos fluidos, hace que $\Delta \gg \delta$ y por tanto la transferencia de calor está controlada por el exterior de la capa límite, donde las fuerzas viscosas son muy pequeñas y por tanto las fuerzas de empuje son equilibradas por las fuerzas inerciales.

Así de la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{U^2}{L} \sim g\beta(T_w - T_\infty)$$

de donde:

$$U \sim [g\beta(T_w - T_\infty)L]^{1/2}$$

Y relacionando con la de energía se obtiene:

$$\frac{\Delta}{L} \sim \frac{1}{\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\alpha^2} \right]^{1/4}}$$

$$\frac{\Delta}{L} \sim \frac{1}{Bo_L^{1/4}}$$

Donde Bo es el número de Boussinesq.

2.3.2.3 Número de Prandtl Unitario $Pr \rightarrow 1$.

En este caso el Número de Prandtl tiende a uno, o tiene orden de la unidad. Para fluidos en los que $\Delta \approx \delta$, tanto la fuerza inercial como viscosa tienen una magnitud comparable respecto a la fuerza de empuje, la que está impulsando el flujo en todo momento.

De la ecuación de cantidad de movimiento,

$$\frac{U^2}{L} \sim \frac{\nu U}{\Delta^2} \sim g\beta(T_w - T_\infty)$$

se llega a:

$$\frac{\Delta}{L} \sim \frac{1}{\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2} \right]^{1/4}}$$

$$\frac{\Delta}{L} \sim \frac{1}{Gr_L^{1/4}}$$

2.3.2.4 Resultado

La magnitud del número de Prandtl determina si la convección libre se caracteriza por el número de Rayleigh, el de Boussinesq o el de Grashof. Teniendo en cuenta que:

$$Ra = GrPr \quad y \quad Bo = RaPr = GrPr^2$$

para el caso en que $Pr \rightarrow 1$, los tres grupos adimensionales son equivalentes.

Determinando el Número de Nusselt

De acuerdo al balance de calor en la interfase sólido-fluido, $r = R$:

$$\dot{Q}_{conducción} = \dot{Q}_{convección}$$

$$-kA \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = hA(T_w - T_\infty)$$

se tiene

$$\frac{k}{\Delta} \left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{R^*} = h$$

de esta manera,

$$h \sim \frac{k}{\Delta}$$

Como se define el número de Nusselt:

$$Nu_L = \frac{hL}{k}$$

$$Nu_L \sim \begin{cases} Bo_L^{1/4} = Ra_L^{1/4} Pr^{1/4} = Gr_L^{1/4} Pr^{1/2} & Pr \ll 1 \\ Gr_L^{1/4} & Pr \approx 1 \\ Ra_L^{1/4} = Gr_L^{1/4} Pr^{1/4} & Pr \gg 1 \end{cases}$$

o de otra manera:

$$Nu_L \sim Gr_L^{1/4} Pr^n = c Gr_L^{1/4} Pr^n$$

Donde la constante c se encuentra experimental o teóricamente, mientras que el exponente predicho teóricamente por el análisis de escala asume los siguientes valores:

| Exponente | $Pr \ll 1$ | $Pr \approx 1$ | $Pr \gg 1$ |
|-----------|------------|----------------|------------|
| n | 1/2 | 0 | 1/4 |

Tabla 2.3 Valores del exponente para el número de Prandtl

Para el caso del aire como fluido de trabajo $Pr \approx 0.72 \rightarrow 1$, el análisis lleva a:

$$Nu \sim Gr^{1/4}$$

Estas expresiones sirven para correlacionar datos experimentales. Tanto el análisis dimensional por el teorema Pi de Buckingham como el principio de semejanza solo conduce al resultado $Nu = f(Gr, Pr)$, mientras que el análisis de escala permite obtener la forma de esta función.

2.3.3 Resolución por Teoría de la Capa Límite

- Sistema adimensional

Se suponen perfiles semejantes de velocidad y de temperatura

$$\frac{v_z}{U} = \phi(\eta) \quad \text{donde} \quad \eta = \frac{r - R}{\delta(z)}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \theta(\eta_T) \quad \text{donde} \quad \eta_T = \frac{r - R}{\delta_T(z)}$$

Si las dos capas límites se relacionan:

$$\delta_T = \Delta\delta$$

De la ecuación de continuidad:

$$v_r = -\frac{1}{r} \int_R^r r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

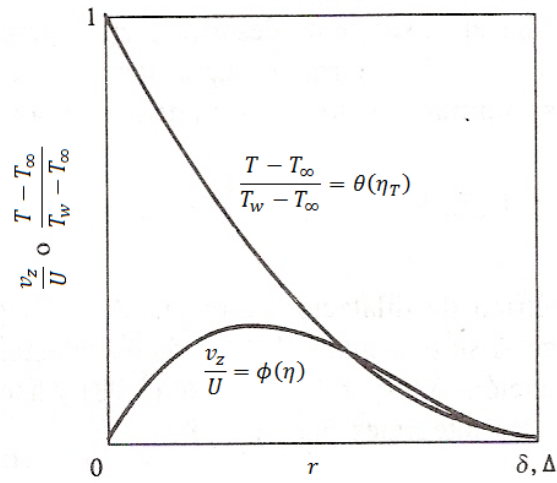


Figura 2.5 Adimensionalización de los perfiles [El Autor]

Reemplazando esto junto con los perfiles propuestos en la ecuación de movimiento [2-2]:

$$U \int_0^\eta (\eta\delta + R)\phi'\eta d\eta \cdot \delta \frac{d\delta}{dz} - U(\eta\delta + R)\phi\phi'\eta\delta \frac{d\delta}{dz} = \nu[\delta\phi' + (\eta\delta + R)\phi'']$$

Integrando dentro de la capa limite, respecto a η , $0 \leq \eta \leq 1$

$$\left\{ \int_0^1 \left[\int_0^\eta (\eta\delta + R)\phi'\eta d\eta \right] d\eta - \int_0^1 (\eta\delta + R)\phi\phi'\eta d\eta \right\} \delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\nu}{U} \int_0^1 [\delta\phi' + (\eta\delta + R)\phi''] d\eta$$

Definiendo:

$$A = \int_0^1 (\eta\delta + R)\phi\phi'\eta d\eta$$

$$B = \int_0^1 \left[\int_0^\eta (\eta\delta + R)\phi'\eta d\eta \right] d\eta$$

$$C = \int_0^1 [\delta\phi' + (\eta\delta + R)\phi''] d\eta$$

La ecuación de movimiento queda:

$$(B - A)\delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\nu}{U} C$$

Análogamente la ecuación de energía [2-3] queda:

$$U \left[\int_0^\eta \phi' (\eta\delta + R)\eta\delta' d\eta \right] \theta' \frac{1}{\delta_T} - U\phi(\eta_T\delta_T + R)\eta_T \frac{\delta'_T}{\delta_T} = \alpha \frac{1}{\delta_T^2} [\delta_T\theta' + (\eta_T\delta_T + R)\theta'']$$

Ahora si

$$\eta = \eta_T\Delta$$

Se tiene que:

$$\left\{ \Delta \left[\int_0^{\eta_T\Delta} \phi' (\eta\delta + R)\eta d\eta \right] \theta' - \Delta^2 \phi(\eta_T\delta_T + R)\eta_T \right\} \delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\alpha}{U} [\delta_T\theta' + (\eta_T\delta_T + R)\theta'']$$

Integrando dentro de la capa limite $0 \leq \eta_T \leq 1$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \Delta \int_0^1 \left[\int_0^{\eta_T\Delta} \phi' (\eta\delta + R)\eta d\eta \right] \theta' d\eta_T - \Delta^2 \int_0^1 \phi(\eta_T\delta_T + R)\eta_T d\eta_T \right\} \delta \frac{d\delta}{dz} \\ & = \frac{\alpha}{U} \int_0^1 [\delta_T\theta' + (\eta_T\delta_T + R)\theta''] d\eta_T \end{aligned}$$

Definiendo:

$$D = \Delta^2 \int_0^1 \phi(\eta_T\delta_T + R)\eta_T d\eta_T$$

$$E = \Delta \int_0^1 \left[\int_0^{\eta_T\Delta} \phi' (\eta\delta + R)\eta d\eta \right] \theta' d\eta_T$$

$$F = \int_0^1 [\delta_T\theta' + (\eta_T\delta_T + R)\theta''] d\eta_T$$

Así la ecuación de energía queda como:

$$(E - D)\delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\alpha}{U} F$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de cantidad de movimiento y energía considerando un perfil de capa límite:

$$(B - A)\delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\nu}{U} C$$

$$(E - D)\delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\alpha}{U} F$$

Combinando estas ecuaciones al dividir las entre sí:

$$\frac{B - A}{E - D} = Pr \frac{C}{F}$$

Una vez que se conoce Δ , se puede encontrar $\delta_T(z)$ a partir de las ecuaciones anteriores y así saber el perfil de temperatura con el cual, finalmente, se determina el coeficiente de transferencia de calor.

2.4 MÉTODO INTEGRAL

El desarrollo más detallado y paso a paso de este método se puede observar en el Apéndice A de este trabajo.

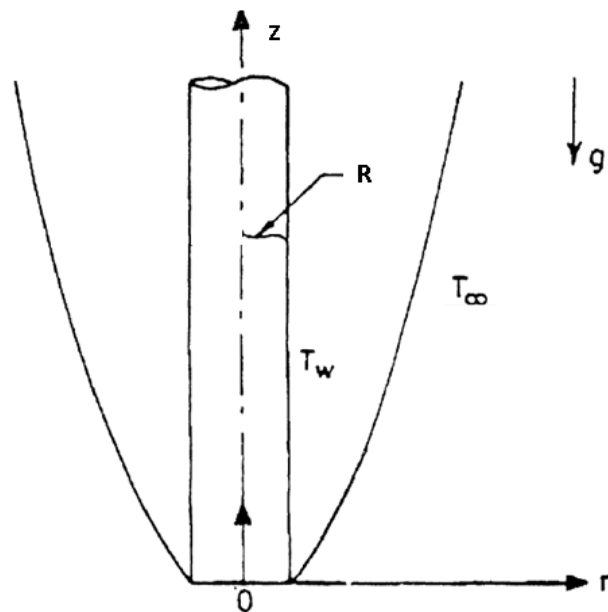


Figura 2.6 Esquema para tomar el elemento diferencial de volumen sobre la capa limite

2.4.1 Planteamiento

2.4.1.1 Ecuación de Cantidad de Movimiento

Aplicando la Segunda Ley de Newton:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{neto} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext}$$

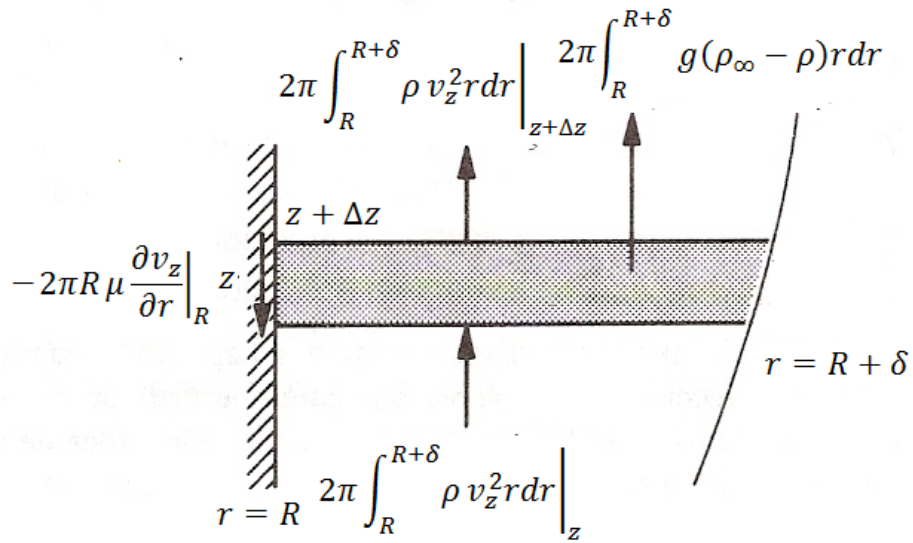


Figura 2.7 Balance de cantidad de movimiento sobre el elemento diferencial de volumen [El Autor].

Desarrollando lo correspondiente al cambio o flux de cantidad e movimiento; el término de cantidad de movimiento que sale del elemento diferencial:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\text{sale}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_{z+\Delta z} = \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 (2\pi r dr) \Big|_{z+\Delta z} = 2\pi \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 r dr \Big|_{z+\Delta z}$$

de la misma manera, el flux de cantidad de movimiento que entra:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\text{entra}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_z = \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 (2\pi r dr) \Big|_z = 2\pi \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 r dr \Big|_z$$

Ahora identificando todas las fuerzas externas que actúan sobre el volumen de control elemental en dirección z para encontrar la fuerza neta:

Fuerza Viscosa en la Pared:

$$\vec{F}_{\text{vis}} = \tau_{rz} A_L \Big|_{r=R} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_R (2\pi R \Delta z) = -2\pi R \Delta z \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_R$$

Fuerza de Flotación:

$$\vec{F}_{\text{flot}} = B = \int_{V_1}^{V_2} \rho_\infty g dV$$

Peso:

$$\vec{W} = - \int_{V_1}^{V_2} \rho g dV$$

Calculo de la fuerza neta:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext} = 2\pi \Delta z \left[\int_R^{R+\delta} g(\rho_\infty - \rho) r dr - R\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_R \right]$$

Entonces como ya se conoce cada uno de los términos aplicamos la segunda Ley de Newton:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{neto} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext}$$

Dividendo entre Δz y tomando el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$ y por definición de derivada:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right) = 2\pi \left[\int_R^{R+\delta} g(\rho_\infty - \rho) r dr - R\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_R \right]$$

recordando que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 2\pi \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 r dr$$

queda:

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 r dr = \int_R^{R+\delta} g(\rho_\infty - \rho) r dr - R\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_R$$

Anteriormente habíamos establecido la aproximación de Bousinesq (con $\rho = cte$ en todos los términos excepto en los de la fuerza de empuje), dividiendo entre ρ :

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \int_R^{R+\delta} g \frac{(\rho_\infty - \rho)}{\rho} r dr - R \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_R$$

donde:

$$\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} \approx \beta(T - T_\infty) \quad \wedge \quad \frac{\mu}{\rho} = \nu$$

Para finalmente obtener la ecuación de conservación de cantidad de movimiento en su forma integral:

[2-4]

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr - Rv \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R$$

2.4.1.2 Ecuación de Energía

Aplicando la Primera Ley de Termodinámica al volumen de control elemental:

$$\dot{Q} + \sum_{i=1}^m \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,ent} = \dot{W} + \sum_{i=1}^n \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,sal} + \frac{d}{dt} E_{sist}$$

Se considera que el flujo es estacionario, se desprecia la conducción en la dirección z , y la conducción en la dirección r es cero por fuera de la capa limite. La transferencia de calor se da, de la pared al volumen de control elemental, por conducción.

Donde se tiene que:

- el sistema está en estado estacionario:

$$\frac{d}{dt} E_{sist} = 0$$

- no hay intercambio de trabajo con los alrededores:

$$\dot{W} = 0$$

Existen dos corrientes de salida y una de entrada en las cuales despreciamos los cambios en su energía potencial y cinética ya que el elemento es muy pequeño.

el flujo de calor en la pared hacia el fluido se da por conducción en la dirección radial:

$$\dot{Q} = -kA \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = -k(2\pi R \Delta z) \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = -2\pi k R \Delta z \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

así la primera Ley se puede escribir como:

$$\dot{Q} = \sum_{i=1}^n \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,sal} - \sum_{i=1}^m \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,ent}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,sal} - \sum_{i=1}^m \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,ent} = \dot{Q}$$

Reemplazando se tiene que:

$$h\dot{m}|_{z+\Delta z} + h\dot{m}|_{R+\delta_T} - h\dot{m}|_z = -2\pi k R \Delta z \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

y tomando el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$ y por definición de derivada

$$\frac{d}{dz} (h\dot{m}) - 2\pi h_\infty \rho \frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} r v_z dr = -2\pi k R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

y recordando que

$$h\dot{m} = 2\pi \int_R^{R+\delta_T} h \rho v_z r dr$$

entonces dividiendo entre $2\pi\rho$:

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} (h - h_\infty) v_z r dr = - \frac{kR}{\rho} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

a partir de:

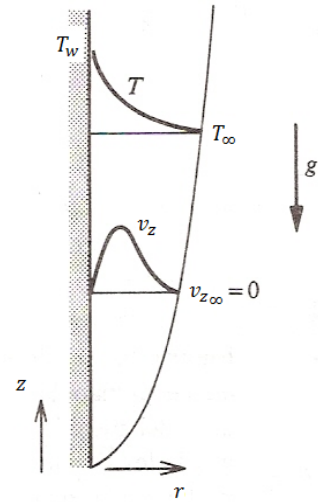
$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = c_P$$

como las propiedades se asumen constantes:

$$h - h_\infty = c_P \int_{T_\infty}^T dT = c_P (T - T_\infty)$$

reemplazando este resultado y dividiendo entre c_P :

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z (T - T_\infty) r dr = -R \frac{k}{\rho c_P} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$



Por definición del coeficiente de difusividad térmica se obtiene la ecuación de conservación de energía en su forma integral

[2-5]

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z (T - T_\infty) r dr = -\alpha R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

2.4.2 Solución

Resolución simultánea de ecuaciones del sistema:

- Conservación Cantidad de Movimiento:

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr - Rv \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R$$

- Conservación Energía:

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z (T - T_\infty) r dr = -\alpha R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

- Las condiciones de frontera para este caso son:

$$r = R \rightarrow v_z = 0, \quad T = T_w$$

$$r = R + \delta \rightarrow v_z = 0$$

$$r = R + \delta_T \rightarrow T = T_\infty$$

2.4.2.1 Introducción de perfiles de velocidad y temperatura propuestos

Se establece la relación constante (independiente de z) entre dos las capas límites (hidrodinámica y térmica):

$$\Delta = \frac{\delta_T(z)}{\delta(z)} \quad \therefore \quad \delta_T(z) = \Delta \delta(z)$$

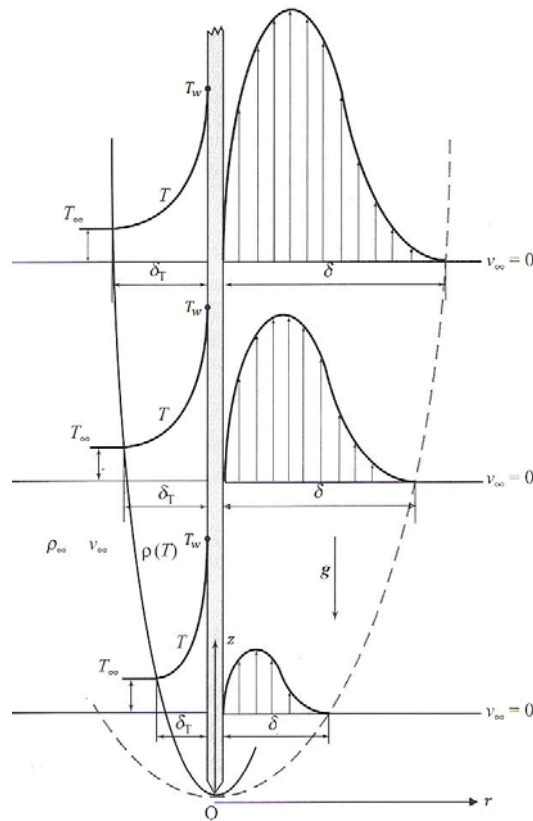


Figura 2.8. Relación entre los espesores de capas térmica e hidrodinámica y sus variaciones [El Autor]

Si se plantea que

$$\frac{v_z}{U} = \phi(\eta) \quad \text{siendo} \quad \eta = \frac{r - R}{\delta(z)}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \theta(\eta_T) \quad \text{siendo} \quad \eta_T = \frac{r - R}{\delta_T(z)} = \frac{r - R}{\Delta\delta(z)}$$

Con base en los perfiles trabajados usualmente para una pared plana vertical [MILLS] y también de acuerdo a la Figura 2.8, se proponen las siguientes formas para los perfiles de velocidad y temperatura:

$$\frac{v_z}{U} = \frac{r - R}{\delta(z)} \left[1 - \frac{r - R}{\delta(z)} \right]^2$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left[1 - \frac{r - R}{\delta_T(z)} \right]^2$$

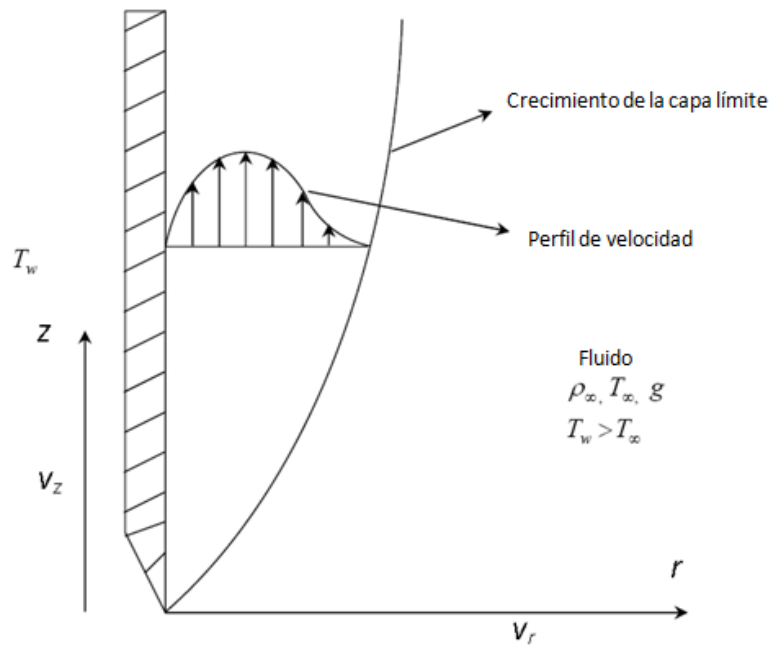


Figura 2.9 Perfil de la capa límite hidrodinámica [El Autor]

Donde U es una velocidad de escala. Estos perfiles están acordes con las condiciones de frontera y además son suaves en el borde de las respectivas capas límites, es decir:

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{R+\delta} = 0 \wedge \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{R+\delta_T} = 0$$

pero no se cumple que:

$$\left. \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \right|_R = 0$$

sin embargo, estos perfiles en paredes planas han resultado sorprendentemente buenos al comparar con datos experimentales [MILLS].

En función de las nuevas variables adimensionales estos perfiles son:

$$\frac{v_z}{U} = \frac{r-R}{\delta(z)} \left[1 - \frac{r-R}{\delta(z)} \right]^2 \rightarrow \phi(\eta) = \eta(1-\eta)^2$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left[1 - \frac{r-R}{\delta_T(z)} \right]^2 \rightarrow \theta(\eta_T) = (1-\eta_T)^2$$

Ahora se sustituyen estos perfiles en las ecuaciones de conservación en su forma integral.

La ecuación de cantidad de movimiento [2-4]:

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr - Rv \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R$$

queda:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{280} U^2 \delta^2 + \frac{1}{105} RU^2 \delta \right) = g\beta(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3\Delta} + \frac{1}{4\Delta^2} \right) + R\delta \left(1 - \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{3\Delta^2} \right) \right] \frac{RvU}{\delta}$$

Y la ecuación de conservación de energía [2-5]:

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z(T - T_\infty) r dr = -\alpha R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

queda:

$$(T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^3 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{30} \Delta + \frac{1}{105} \Delta^2 \right) + RU \delta \Delta^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \Delta + \frac{1}{60} \Delta^2 \right) \right] = - \left[- \frac{2\alpha R(T_w - T_\infty)}{\Delta \delta} \right]$$

$$\frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^3 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{30} \Delta + \frac{1}{105} \Delta^2 \right) + RU \delta \Delta^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \Delta + \frac{1}{60} \Delta^2 \right) \right] = \frac{2\alpha R}{\Delta \delta}$$

El sistema de ecuaciones se reduce a:

Movimiento:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{280} U^2 \delta^2 + \frac{1}{105} RU^2 \delta \right) = g\beta(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3\Delta} + \frac{1}{4\Delta^2} \right) + R\delta \left(1 - \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{3\Delta^2} \right) \right] - \frac{RvU}{\delta}$$

y

Energía:

$$\frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^3 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{30} \Delta + \frac{1}{105} \Delta^2 \right) + RU \delta \Delta^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \Delta + \frac{1}{60} \Delta^2 \right) \right] = \frac{2\alpha R}{\Delta \delta}$$

Suponiendo que los espesores de las capas térmica, δ_T , e hidrodinámica, δ , son próximos, es decir, $\delta_T \approx \delta$, se tiene entonces que $\Delta \approx 1$, lo cual es valido para números de Pr cercanos a 1 (caso aire). Por tanto si $\Delta = 1$, el sistema queda:

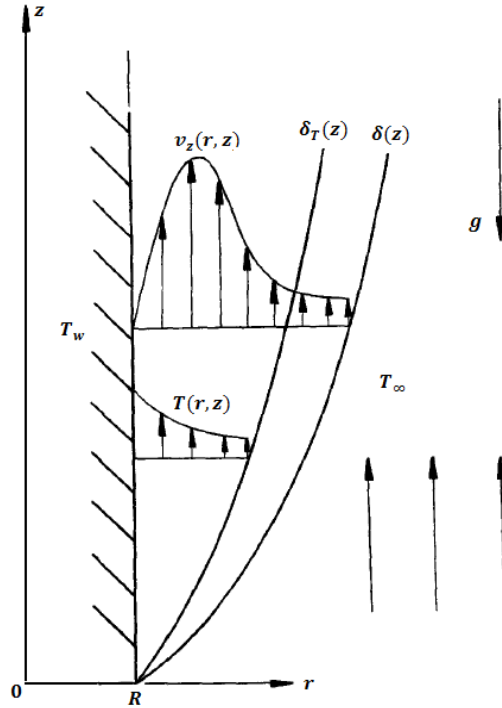


Figura 2.10 Perfiles axiales de temperatura y velocidad y capas limites térmica e hidrodinámica [El Autor]

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{280} U^2 \delta^2 + \frac{1}{105} R U^2 \delta \right) = g\beta(T_w - T_\infty) \left(\frac{1}{12} \delta^2 + \frac{1}{3} R \delta \right) - \frac{R\nu U}{\delta}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{105} U \delta^2 + \frac{1}{30} R U \delta \right) = -\frac{2\alpha R}{\delta}$$

Dividiendo cada ecuación por R :

[2-6]

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{U^2 \delta}{105} + \frac{U^2 \delta^2}{280R} \right) = g\beta(T_w - T_\infty) \left(\frac{\delta}{3} + \frac{\delta^2}{12R} \right) - \frac{\nu U}{\delta}$$

[2-7]

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{U\delta}{30} + \frac{U\delta^2}{105R} \right) = \frac{2\alpha}{\delta}$$

2.4.2.2 Solución del sistema U y δ

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden conformado por las ecuaciones [2-6] y [2-7] tiene a U y δ como funciones dependientes de z y se resuelve por el método de perturbaciones, donde estas dos variables se expanden en series de potencias alrededor de $1/R$.

Esto se sustenta en el hecho de que dicho método es aplicable a cualquier ecuación diferencial que contenga un parámetro de perturbación, ε , el cual también podría aparecer en las condiciones de frontera. Dicho parámetro debe ser una constante positiva, tal que $\varepsilon \ll 1$.

En este caso, dicho parámetro es el recíproco del radio del cilindro, R , el cual se encuentra en el sistema de ecuaciones y en la condición de frontera, luego:

$$\varepsilon = \frac{1}{R}$$

que en las ecuaciones [2-6] y [2-7] se observa:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{U^2 \delta}{105} + \frac{U^2 \delta^2}{280 R} \right) = g\beta(T_w - T_\infty) \left(\frac{\delta}{3} + \frac{\delta^2}{12 R} \right) - \frac{vU}{\delta}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{U\delta}{30} + \frac{U\delta^2}{105 R} \right) = \frac{2\alpha}{\delta}$$

si hacemos que $R \rightarrow \infty$, el sistema de ecuaciones [2-6] y [2-7] queda:

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dz} (U^2 \delta) = \frac{1}{3} g\beta(T_w - T_\infty) \delta - \frac{vU}{\delta}$$

$$\frac{1}{30} \frac{d}{dz} (U\delta) = \frac{2\alpha}{\delta}$$

que son las ecuaciones que permiten encontrar a U y δ para una placa vertical (KARLEKAR, MILLS).

Se observa que si el parámetro de perturbación tiende a cero, $\varepsilon \rightarrow 0$, se anula el efecto de la curvatura, lo que implica que, $R \rightarrow \infty$. El mismo resultado se puede obtener asumiendo que el espesor de la capa límite, δ , es pequeño comparado con el radio, R , de tal manera que la relación δ/R también tiende a cero y los mismos términos del sistema de ecuaciones de conservación se cancelan quedando el modelo de la pared plana vertical.

Entonces se resuelve nuestro sistema de ecuaciones diferenciales con el método de perturbaciones en $1/R$, lo cual requiere expresar la solución de la siguiente manera:

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{R}\right)^n U_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} U_n = U_0 + \frac{1}{R} U_1 + \frac{1}{R^2} U_2 + \frac{1}{R^3} U_3 + \dots$$

$$\delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \delta_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{R}\right)^n \delta_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} \delta_n = \delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 + \frac{1}{R^2} \delta_2 + \frac{1}{R^3} \delta_3 + \dots$$

Tomando solo los dos primeros términos $n = 0$ y 1 , queda:

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} U_n \approx \sum_{n=0}^1 \frac{1}{R^n} U_n = U_0 + \frac{1}{R} U_1$$

$$\delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} \delta_n \approx \sum_{n=0}^1 \frac{1}{R^n} \delta_n = \delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1$$

Esto es válido como una aceptable aproximación, ya que al aumentar n el término siguiente va a ser mucho más pequeño. Es de esperar que el primer término, en $n = 0$, sea de una pared plana ya que carece del parámetro de curvatura, $\varepsilon = 1/R$.

Estos desarrollos de $U(z)$ y $\delta(z)$ en serie de potencias con dos términos exigen averiguar los valores de U_0 , U_1 , δ_0 y δ_1 . Para lograr dicho objetivo se procede a sustituir estas expresiones en el sistema de ecuaciones de conservación [2-6] y [2-7]:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{U^2 \delta}{105} + \frac{U^2 \delta^2}{280R} \right) = g\beta(T_w - T_\infty) \left(\frac{\delta}{3} + \frac{\delta^2}{12R} \right) - \frac{vU}{\delta}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{U\delta}{30} + \frac{U\delta^2}{105R} \right) = \frac{2\alpha}{\delta}$$

donde

$$U \approx U_0 + \frac{1}{R} U_1 \quad y \quad \frac{dU}{dz} = U' \approx U_0' + \frac{1}{R} U_1'$$

$$\delta \approx \delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \quad y \quad \frac{d\delta}{dz} = \delta' \approx \delta_0' + \frac{1}{R} \delta_1'$$

Reemplazando las expansiones en la ecuación de cantidad de movimiento [2-6]:

$$\begin{aligned} & \left(\delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \right) \frac{d}{dz} \left[8 \left(U_0 + \frac{1}{R} U_1 \right)^2 \delta + \frac{3}{R} \left(U_0 + \frac{1}{R} U_1 \right)^2 \left(\delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \right)^2 \right] \\ & = N \left[280 \left(\delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \right)^2 + \frac{70}{R} \left(\delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \right)^3 \right] - 840\nu \left(U_0 + \frac{1}{R} U_1 \right) \end{aligned}$$

Desarrollando el algebra y organizando de acuerdo a las potencias de $1/R$, para luego factorizar por el grado de las potencias y finalmente como aproximación despreciar las potencias de $1/R$, para las cuales $n \geq 2$. Igualando las respectivas potencias, se obtiene:

$$\frac{1}{R^0}:$$

$$16U_0\delta_0^2U_0' + 8U_0^2\delta_0\delta_0' = 280N\delta_0^2 - 840\nu U_0$$

$$\frac{1}{R^1}:$$

$$\begin{aligned} & 16U_0\delta_0\delta_1U_0' + 8U_0^2\delta_0\delta_1' + 16U_1\delta_0^2U_0' + 16U_0\delta_0^2U_1' + 16U_0U_1\delta_0\delta_0' + 6U_0\delta_0^3U_0' + 6U_0^2\delta_0^2\delta_0' \\ & + 16U_0\delta_0\delta_1U_0' + 8U_0^2\delta_1\delta_0' = 560N\delta_0\delta_1 + 70N\delta_0^3 - 840\nu U_1 \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\frac{1}{R^0}:$$

$$2U_0\delta_0^2U_0' + U_0^2\delta_0\delta_0' = 35N\delta_0^2 - 105\nu U_0$$

$$\frac{1}{R^1}:$$

$$\begin{aligned} & 8U_0\delta_0\delta_1U_0' + 4U_0^2\delta_0\delta_1' + 8U_1\delta_0^2U_0' + 8U_0\delta_0^2U_1' + 8U_0U_1\delta_0\delta_0' + 3U_0\delta_0^3U_0' + 3U_0^2\delta_0^2\delta_0' \\ & + 8U_0\delta_0\delta_1U_0' + 4U_0^2\delta_1\delta_0' = 280N\delta_0\delta_1 + 35N\delta_0^3 - 420\nu U_1 \end{aligned}$$

Reemplazando ahora de la misma manera la serie de potencias en la ecuación de energía [2-7]:

$$\delta \frac{d}{dz} \left(7U\delta + \frac{2}{R} U\delta^2 \right) = 420\alpha$$

$$\left(\delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \right) \frac{d}{dz} \left[7 \left(U_0 + \frac{1}{R} U_1 \right) \left(\delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \right) + \frac{2}{R} \left(U_0 + \frac{1}{R} U_1 \right) \left(\delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \right)^2 \right] = 420\alpha$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{R^0}:$$

$$7\delta_0^2 U'_0 + 7U_0 \delta_0 \delta'_0 = 420\alpha$$

$$\frac{1}{R^1}:$$

$$7\delta_0 \delta_1 U'_0 + 7U_0 \delta_0 \delta'_1 + 7\delta_0^2 U'_1 + 7U_1 \delta_0 \delta'_0 + 2\delta_0^3 U'_0 + 4U_0 \delta_0^2 \delta'_0 + 7\delta_0 \delta_1 U'_0 + 7U_0 \delta_1 \delta'_0 = 0$$

Simplificando,

$$\frac{1}{R^0}: \quad \delta_0^2 U'_0 + U_0 \delta_0 \delta'_0 = 60\alpha$$

$$\frac{1}{R^1}: \quad 7\delta_0 \delta_1 U'_0 + 7U_0 \delta_0 \delta'_1 + 7\delta_0^2 U'_1 + 7U_1 \delta_0 \delta'_0 + 2\delta_0^3 U'_0 + 4U_0 \delta_0^2 \delta'_0 + 7\delta_0 \delta_1 U'_0 + 7U_0 \delta_1 \delta'_0 = 0$$

Agrupando, de acuerdo al orden, $\frac{1}{R^0}$ y $\frac{1}{R^1}$, los resultados arrojados tanto por la ecuación de Cantidad de Movimiento como por la de Energía, se tiene:

$$\frac{1}{R^0}: \begin{cases} 2U_0 \delta_0^2 U'_0 + U_0^2 \delta_0 \delta'_0 = 35N\delta_0^2 - 105\nu U_0 \\ \delta_0^2 U'_0 + U_0 \delta_0 \delta'_0 = 60\alpha \end{cases}$$

$$\frac{1}{R^0}: \begin{cases} 8U_0 \delta_0 \delta_1 U'_0 + 4U_0^2 \delta_0 \delta'_1 + 8U_1 \delta_0^2 U'_0 + 8U_0 \delta_0^2 U'_1 + 8U_0 U_1 \delta_0 \delta'_0 + 3U_0 \delta_0^3 U'_0 + 3U_0^2 \delta_0^2 \delta'_0 + 8U_0 \delta_0 \delta_1 U'_0 + 4U_0^2 \delta_1 \delta'_0 = 280N\delta_0 \delta_1 + 35N\delta_0^3 - 420\nu U_1 \\ 7\delta_0 \delta_1 U'_0 + 7U_0 \delta_0 \delta'_1 + 7\delta_0^2 U'_1 + 7U_1 \delta_0 \delta'_0 + 2\delta_0^3 U'_0 + 4U_0 \delta_0^2 \delta'_0 + 7\delta_0 \delta_1 U'_0 + 7U_0 \delta_1 \delta'_0 = 0 \end{cases}$$

2.4.2.2.1 Resolución del sistema para $n = 0$

Tomando las ecuaciones correspondientes al parámetro de curvatura de grado cero:

$$\frac{1}{R^0}:$$

Cantidad de Movimiento

[2-8]

$$2U_0 \delta_0^2 U'_0 + U_0^2 \delta_0 \delta'_0 = 35N\delta_0^2 - 105\nu U_0$$

Energía

[2-9]

$$\delta_0^2 U'_0 + U_0 \delta_0 \delta'_0 = 60\alpha$$

Es claro que este sistema corresponde a una pared plana, que no contempla el efecto de la curvatura; como en ese caso comúnmente se hace, se supone una solución de prueba que corresponde a variaciones de la ley de potencias para U y δ , de esta forma:

$$U_0 = A_0 z^m$$

$$\delta_0 = B_0 z^n$$

Cuyas derivadas respectivamente son:

$$U'_0 = A_0 m z^{m-1}$$

$$\delta'_0 = B_0 n z^{n-1}$$

Donde A_0, B_0, m y n son constantes a determinar.

Sustituyendo estas soluciones de prueba en el sistema de orden cero para el parámetro de perturbación.

En la ecuación de movimiento [2-8]:

$$2mA_0^2 B_0^2 z^{2m+2n-1} + nA_0^2 B_0^2 z^{2m+2n-1} = 35NB_0^2 z^{2n} - 105vA_0 z^m$$

En la ecuación de energía [2-9]:

$$mA_0 B_0^2 z^{m+2n-1} + nA_0 B_0^2 z^{m+2n-1} = 60\alpha$$

En estas ecuaciones la potencia de z debe ser idéntica en cada término lo que nos lleva a tener un sistema de ecuaciones en el cual podemos hallar los exponentes m y n :

$$2m + 2n - 1 = 2n = m$$

$$m + 2n - 1 = 0$$

que se resuelve satisfactoriamente para

$$m = \frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo estos valores en las dos ecuaciones [2-8] y [2-9] para encontrar los coeficientes A_0 y B_0 :

Momentum:

$$A_0^2 B_0^2 = 28NB_0^2 - 84vA_0$$

Energía:

$$A_0 B_0^2 = 80\alpha$$

Resolviendo el sistema:

$$A_0^2 B_0^2 = 28NB_0^2 - 84vA_0$$

$$A_0 B_0^2 = 80\alpha$$

Se obtiene:

$$A_0^2 = \frac{560N\alpha}{21v + 20\alpha}$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{80}{3}} v \left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

En forma aproximada:

$$A_0 \approx 5.1640v \left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

como se presenta en Karlekar.

Ahora buscando el valor de B_0 en

$$B_0^2 = \frac{80\alpha}{A_0}$$

$$B_0 = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 80^2}{80}} \left(\frac{\alpha}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2} \right]^{\frac{1}{4}}$$

$$B_0 = \sqrt[4]{240} \left(\frac{v}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2} \right]^{\frac{1}{4}}$$

o aproximadamente, según Karlekar:

$$B_0 \approx 3.9360 \left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2} \right]^{\frac{1}{4}} \left(\frac{v}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

De esta manera las expresiones para U y δ son

$$U_0 = A_0 z^m = \sqrt{\frac{80}{3}} v \left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty) z^3}{v^2} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z}$$

$$U_0(z) = \sqrt{\frac{80}{3}} v \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{-\frac{1}{2}} Gr_z^{\frac{1}{2}} \frac{1}{z}$$

y de la misma forma

$$\delta_0(z) = \sqrt[4]{240} Pr^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{\frac{1}{4}} Gr_z^{-\frac{1}{4}} z$$

2.4.2.2.2 Resolución del sistema para $n = 1$

Tomando las ecuaciones correspondientes al parámetro de curvatura de primer grado:

$$\frac{1}{R^1};$$

Cantidad de Movimiento

[2-10]

$$8U_0\delta_0\delta_1U_0' + 4U_0^2\delta_0\delta_1' + 8U_1\delta_0^2U_0' + 8U_0\delta_0^2U_1' + 8U_0U_1\delta_0\delta_0' + 3U_0\delta_0^3U_0' + 3U_0^2\delta_0^2\delta_0' + 8U_0\delta_0\delta_1U_0' + 4U_0^2\delta_1\delta_0' = 280N\delta_0\delta_1 + 35N\delta_0^3 - 420vU_1$$

Energía

[2-11]

$$7\delta_0\delta_1U_0' + 7U_0\delta_0\delta_1' + 7\delta_0^2U_1' + 7U_1\delta_0\delta_0' + 2\delta_0^3U_0' + 4U_0\delta_0^2\delta_0' + 7\delta_0\delta_1U_0' + 7U_0\delta_1\delta_0' = 0$$

Es claro que la resolución de este sistema ya será una primera aproximación al hecho de que el cilindro es superficie curva, de la misma manera se supone, como en el anterior caso, una solución de prueba U_1 y δ_1 en modelo potencial, teniendo ya conocidas U_0 y δ_0

$$U_1 = A_1 z^p$$

$$\delta_1 = B_1 z^q$$

Cuyas derivadas respectivamente son:

$$U'_1 = A_1 p z^{p-1}$$

$$\delta'_1 = B_1 q z^{q-1}$$

Donde A_1, B_1, p y q son constantes a determinar.

Resolviendo el sistema de potencia cero se encuentra que:

$$U_0 = A_0 z^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta_0 = B_0 z^{\frac{1}{4}}$$

Derivando:

$$U'_0 = \frac{1}{2} A_0 z^{-\frac{1}{2}}$$

$$\delta'_0 = \frac{1}{4} B_0 z^{-\frac{3}{4}}$$

Sustituyendo estas soluciones de prueba en el sistema de primer orden para el parámetro de perturbación, conformado por las ecuaciones [2-10] y [2-11]:

En la ecuación de movimiento [2-10]:

$$\begin{aligned} 4(9 + 4q)A_0^2 B_0 B_1 z^{q+\frac{1}{4}} + 8(3 + 4p)A_0 B_0^2 A_1 z^p + 9A_0^2 B_0^3 z^{\frac{3}{4}} \\ = 1120NB_0 B_1 z^{q+\frac{1}{4}} - 1680vA_1 z^p + 140NB_0^3 z^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

En la ecuación de energía [2-11]:

$$7(5 + 4q)A_0 B_0 B_1 z^{q-\frac{1}{4}} + 7B_0^2 A_1 (1 + 4p)z^{p-\frac{1}{2}} + 8A_0 B_0^3 z^{\frac{1}{4}} = 0$$

La dependencia de z se elimina en estas ecuaciones si los exponentes p y q cumplen que:

$$q + \frac{1}{4} = p = \frac{3}{4}$$

$$q - \frac{1}{4} = p - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

que se resuelve satisfactoriamente para

$$p = \frac{3}{4}, \quad q = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo estos valores en las dos ecuaciones [2-10] y [2-11] para encontrar los coeficientes A_1 y B_1 :

Momentum:

$$60(16\alpha + 7\nu)A_1 + B_0(11A_0^2 - 280N)B_1 = 5B_0(7NB_0^2 - 36\alpha A_0)$$

Energía:

$$28B_0A_1 + 49A_0B_1 = -640\alpha$$

Resolviendo el sistema con incógnitas A_1 y B_1 :

$$60(16\alpha + 7\nu)A_1 + B_0(11A_0^2 - 280N)B_1 = 5B_0(7NB_0^2 - 36\alpha A_0)$$

$$28B_0A_1 + 49A_0B_1 = -640\alpha$$

Se tiene la solución

$$A_1 = -\frac{4(656\alpha + 315\nu)}{7(64\alpha + 63\nu)} \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{A_0} = -\frac{1}{7\sqrt{5}} \frac{(656\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} \alpha^{\frac{1}{2}} \sqrt{A_0}$$

$$A_1 = -\frac{\sqrt{5}(656\alpha + 315\nu)}{35(64\alpha + 63\nu)} \alpha^{\frac{1}{2}} \sqrt{A_0}$$

$$B_1 = -\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2$$

$$B_1 = -\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2$$

2.4.2.3 Número de Nusselt

Una vez encontrados todos los parámetros de los perfiles de velocidad y temperatura propuestos entonces se procede a hallar el número de Nusselt.

2.4.2.3.1 Local

Un balance de calor en la interfase, $r = R$, proporciona:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Flujo de calor} \\ \text{que sale por} \\ \text{conducción por la pared} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Flujo de calor} \\ \text{que entra por} \\ \text{convección al fluido} \end{array} \right)$$

$$\dot{Q}_{cond.}|_R = \dot{Q}_{conv.}$$

$$-k_f A \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = hA(T_w - T_\infty)$$

Despejando h :

$$h = -\frac{k_f}{T_w - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

Del perfil parabólico de temperatura asumido, se tiene:

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left[1 - \frac{r - R}{\delta_T(z)} \right]^2 = \left[1 - \frac{r - R}{\Delta\delta(z)} \right]^2$$

Como se asumió que $\Delta = 1$ y despejando T para derivar parcialmente respecto a la coordenada radial:

$$T = (T_w - T_\infty) \left[1 - \frac{r - R}{\delta(z)} \right]^2 + T_\infty$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 2(T_w - T_\infty) \left(1 - \frac{r - R}{\delta} \right) \left(-\frac{1}{\delta} \right) = -\frac{2(T_w - T_\infty)}{\delta} \left(1 - \frac{r - R}{\delta} \right)$$

Evaluando en $r = R$:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = -\frac{2(T_w - T_\infty)}{\delta} \left(1 - \frac{R - R}{\delta} \right) = -\frac{2(T_w - T_\infty)}{\delta}$$

Entonces el coeficiente de transferencia de calor queda:

$$h = -\frac{k_f}{T_w - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = -\frac{k_f}{T_w - T_\infty} \left[-\frac{2(T_w - T_\infty)}{\delta} \right] = \frac{2k_f}{\delta}$$

Se había aproximado que:

$$\delta(z) \approx \delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1$$

Por tanto el coeficiente local de transferencia de calor será:

$$h = \frac{2k_f}{\delta} = \frac{2k_f}{B_0 z^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{R} B_1 z^{\frac{1}{2}}}$$

con los valores de

$$B_1 = -\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2$$

$$h = \frac{2k_f}{B_0 z^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{R} \left[-\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2 \right] z^{\frac{1}{2}}} = \frac{2k_f}{B_0 z^{\frac{1}{4}} \left[1 - \frac{1}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0 z^{\frac{1}{4}} \right]}$$

desarrollando el algebra se llega a:

[2-12]

$$h(z) = \frac{2k_f Pr^{\frac{1}{2}} Gr_z^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{240} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{\frac{1}{4}} z \left\{ 1 - \frac{\sqrt[4]{240} (272 + 315Pr)}{35R} Pr^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{\frac{1}{4}} Gr_z^{-\frac{1}{4}} z \right\}}$$

Por tanto el Nusselt local será

$$Nu_z = \frac{2Pr^{\frac{1}{2}} Gr_z^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{240} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{\frac{1}{4}} \left\{ 1 - \frac{\sqrt[4]{240} (272 + 315Pr)}{35R} Pr^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{\frac{1}{4}} Gr_z^{-\frac{1}{4}} z \right\}}$$

2.4.2.3.2 Promedio

Para hallar ahora el Nusselt promedio se requiere encontrar el coeficiente promedio de transferencia de calor por el teorema integral del valor medio, de esta forma:

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(z) dz$$

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{2k_f}{B_0 z^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{R} B_1 z^{\frac{1}{2}}} dz = \frac{2k_f}{L} \int_0^L \frac{1}{B_0 z^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} z^{\frac{1}{4}}\right)} dz$$

Se integra por sustitución y se obtiene:

$$\bar{h} = \frac{2k_f}{B_0 L} \int_0^L \frac{1}{z^{\frac{1}{4}} \left(1 + az^{\frac{1}{4}}\right)} dz = \frac{2k_f}{B_0 L} \frac{2}{a^3} \left[a^2 z^{\frac{1}{2}} - 2az^{\frac{1}{4}} - 3 + 2 \ln \left| 1 + az^{\frac{1}{4}} \right| \right]_0^L$$

$$\bar{h} = \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left[a^2 L^{\frac{1}{2}} - 2aL^{\frac{1}{4}} - 3 + 2 \ln \left| 1 + aL^{\frac{1}{4}} \right| + 3 \right] = \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left[a^2 L^{\frac{1}{2}} - 2aL^{\frac{1}{4}} + 2 \ln \left| 1 + aL^{\frac{1}{4}} \right| \right]$$

$$a = \frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0}$$

$$\bar{h} = \frac{4k_f R L^{-\frac{1}{2}}}{B_1} - \frac{8k_f B_0 R^2 L^{-\frac{3}{4}}}{B_1^2} + \frac{8k_f B_0^2 R^3 L^{-1}}{B_1^3} \ln \left| 1 + \frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} L^{\frac{1}{4}} \right|$$

Si

$$B_1 = -\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2$$

Se llega a:

[2-13]

$$\bar{h} = -140k_f R \frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \frac{1}{B_0^2 L^{\frac{1}{2}}} - 9800k_f R^2 \left(\frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \right)^2 \frac{1}{B_0^3 L^{\frac{3}{4}}} - 280k_f R^3 \left(\frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \right)^3 \frac{1}{B_0^4 L} \ln \left| 1 - \frac{1}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0 L^{\frac{1}{4}} \right|$$

donde

$$B_0 = \sqrt[4]{240} \left(\frac{\nu}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-\frac{1}{4}}$$

El Nusselt promedio será entonces:

[2-14]

$$\begin{aligned} \overline{Nu} = & -140R \frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \frac{1}{B_0^2 L^{-\frac{1}{2}}} - 9800R^2 \left(\frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \right)^2 \frac{1}{B_0^3 L^{-\frac{1}{4}}} \\ & - 280R^3 \left(\frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \right)^3 \frac{1}{B_0^4} \ln \left| 1 - \frac{1}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0 L^{\frac{1}{4}} \right| \end{aligned}$$

una expresión más sencilla consiste en tomar en el valor promedio del coeficiente de transferencia [2-13], una aproximación para el logaritmo natural:

$$\ln(1 + X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n = X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{4}X^4 + \dots$$

Para $|X| \leq 1$

Bajo este criterio se puede expresar que:

$$\ln \left| 1 + aL^{\frac{1}{4}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(aL^{\frac{1}{4}} \right)^n = aL^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \left(aL^{\frac{1}{4}} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(aL^{\frac{1}{4}} \right)^3 - \frac{1}{4} \left(aL^{\frac{1}{4}} \right)^4 + \frac{1}{5} \left(aL^{\frac{1}{4}} \right)^5 \dots$$

Aproximando a los cuatro primeros términos:

$$\ln \left| 1 + aL^{\frac{1}{4}} \right| \approx \sum_{n=1}^4 \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n L^{\frac{n}{4}} = aL^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} a^2 L^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} a^3 L^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{4} a^4 L$$

Reemplazando en la expresión del coeficiente promedio:

$$\bar{h} = \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left[a^2 L^{\frac{1}{2}} - 2aL^{\frac{1}{4}} + 2 \left(aL^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} a^2 L^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} a^3 L^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{4} a^4 L + \dots \right) \right]$$

[2-15]

$$\bar{h} = k_f \left\{ \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{L} + \frac{2}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} + \dots \right\}$$

Hallando el Nusselt promedio:

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k_f} = k_f \left\{ \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{L} + \frac{2}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} + \dots \right\} \frac{L}{k_f}$$

$$\overline{Nu} = \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} + \frac{2}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu) L}{(64\alpha + 63\nu) R} + \dots$$

Si se expresa en función del diámetro, D :

[2-16]

$$\begin{aligned} \overline{Nu} &= \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} + \frac{4}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu) L}{(64\alpha + 63\nu) D} + \dots \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Ra_L Pr}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} + \frac{4}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu) L}{(64\alpha + 63\nu) D} + \dots \end{aligned}$$

Ya que $Ra_L = Pr Gr_L$. Esta solución fue obtenida por Le Fevre y Ede, donde el primer término representa la solución de una pared plana vertical, mientras que del segundo en adelante, los términos contienen el efecto de la curvatura, ya que llevan el radio o el diámetro, y por ende su relación con la altura. Se puede observar matemáticamente que el coeficiente y el Nusselt de un cilindro es mayor que el de una pared plana, gracias al efecto de la curvatura.

3. CONSTRUCCIÓN Y SOLUCIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

El problema fundamental que se formuló en esta tesis fue determinar experimentalmente el coeficiente de transferencia de calor alrededor del bulbo de un termómetro. Para cumplir con este objetivo básico es necesario modelar el funcionamiento del termómetro de vidrio para generar una ecuación, que pueda utilizarse para calcular el coeficiente de transferencia de calor. Para poder confrontar los resultados del modelo del termómetro, es necesario comparar los resultados experimentales emanados por el mismo modelo con los cálculos del coeficiente de transferencia de calor producidos por los modelos teóricos basados en la teoría de la capa límite. Por ello el presente capítulo se divide en dos partes: construcción del modelo de funcionamiento del termómetro de vidrio y construcción de modelos para predecir el coeficiente de transferencia de calor.

Antes de modelar un fenómeno físico es necesario hacer una descripción fenomenológica de la situación que se quiere estudiar. Estos modelos deben estar disponibles a recibir la información experimental para procesarla y producir como salida el coeficiente de transferencia de calor. La materia prima necesaria para esto son las curvas temporales de temperatura, las propiedades de los fluidos (tanto el termométrico como el fluido que está rodeando al bulbo), y los datos geométricos del mismo bulbo.

3.1 FUNCIONAMIENTO DEL TERMÓMETRO DE VIDRIO: FLUIDO TERMOMÉTRICO

Una estrategia para el modelamiento es: Primero describir fenomenológicamente la situación física que se quiere modelar. Posteriormente con base en lo que se observe en la descripción fenomenológica, se plantean modelos teniendo en cuenta restricciones impuestas. Los modelos más sencillos son los que tienen más restricciones y los más complejos los que tienen menos restricciones.

A continuación se hace una descripción fenomenológica de la situación que se quiere estudiar, en este caso la descripción del funcionamiento del termómetro de vidrio.

3.1.1 Descripción Fenomenológica

El funcionamiento de los termómetros de vidrio con líquido se basa en la dilatación térmica de un líquido termométrico introducido en un recipiente de vidrio de paredes delgadas (recipiente termométrico el cual es el bulbo) comunicado con un capilar de paredes gruesas (capilar del termómetro). Al capilar se le ha asignado una escala. El líquido termométrico que se encuentra en el capilar se denomina columna y su menisco (menisco de la columna) sirve como marca de lectura. Existen varios líquidos que pueden servir como fluidos termométricos, algunos de ellos son: Mercurio, mercurio-Talio, Toluol, Alcohol, Mezcla de Pentano.

Para el propósito del presente trabajo, el termómetro se considera como un sistema que consta de un subsistema llamado bulbo o extremo expuesto al fluido, estando dentro de una posición determinada dentro de un fluido o ambiente, en la cual se mide la temperatura local, y además del otro subsistema delimitado por el capilar de vidrio que se denomina columna, dentro de la cual se mueve el fluido termométrico bien sea dilatándose o contrayéndose.

La transferencia de calor desde el bulbo hacia el medio que lo rodea se da primero por conducción-convección dentro del fluido termométrico seguida por la transferencia de calor conductiva a través de su pared y finalmente convección-radiación de la superficie exterior del bulbo hacia el medio.

Cuando el bulbo está recibiendo o perdiendo calor durante el funcionamiento del termómetro en la columna hay una diferencia de temperatura entre el extremo de la columna cercana al bulbo y el otro extremo de la columna; entonces en términos generales hay transferencia de calor conductiva y convectiva a lo largo de la columna. Si la columna de fluido termométrico y la envoltura de la columna de vidrio tienen diferentes temperaturas existirá transferencia de calor a través de la envoltura y entre ésta y el medio externo.

Los fenómenos de transferencia que se identifican son:

- Transporte de calor conductivo (dentro del bulbo y dentro de la columna) y flujo convectivo (dentro y fuera del bulbo), se desprecia la radiación desde la superficie del bulbo hacia el medio.
- Transporte de cantidad de movimiento en el capilar del termómetro.

Una vez realizada la descripción fenomenológica se identifican todos los subsistemas que conforman el sistema para proceder a realizar el modelamiento del funcionamiento del termómetro. Entonces de la descripción fenomenológica anterior puede identificarse, que el termómetro consta de al menos tres subsistemas:

- El bulbo del termómetro (que es la frontera por la que se transfiere calor).
- La columna de fluido (que se asume adiabática).
- La envoltura de vidrio del fluido termométrico.

3.1.2 Construcción

El sistema está formado por varios subsistemas. Como primer modelo, el más sencillo, considera el sistema formado por dos subsistemas: el bulbo y la columna de fluido termométrico.

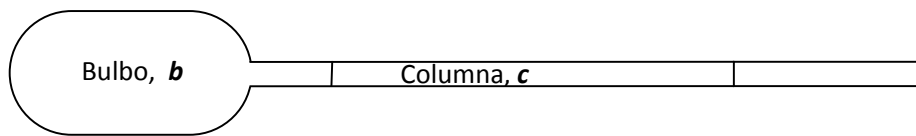


Figura 3.1 Subsistemas básicos del termómetro

Según lo anterior el termómetro puede idealizarse, como formado por una columna de mercurio cilíndrica unida al cilindro de mercurio con mayor diámetro que el de la misma columna. Los dos cilindros de mercurio están inicialmente a una temperatura ambiente, y a partir de un instante dado, se calienta o se enfría el cilindro que sirve de bulbo exponiéndolo a un ambiente convectivo de temperatura constante, $T_{\infty} = T_m$, (temperatura del medio a medir). Para modelar va a suponerse que el bulbo gana calor (el balance diferencial de energía da la misma ecuación bien sea calentando o enfriando), debido al calentamiento el fluido termométrico se expande. Se hacen las siguientes restricciones adicionales:

- En el fluido termométrico sólo se considera flujo conductivo de calor y el calor se propaga instantáneamente (difusividad térmica infinita) y no se considera flujo convectivo dentro del fluido termométrico. Esto equivale a que la columna tenga la misma temperatura del bulbo que en la realidad correspondería a un termómetro de inmersión total.

- Con respecto a lo anterior puede decirse que para el bulbo se aplica el método de resistencia interna despreciable, que es válido para números de Biot menores a 0.1. Si el mercurio a 25 °C tiene una conductividad térmica aproximada de 8.81 W/m°C, con un coeficiente de transferencia de calor por convección natural en aire de alrededor de 5 W/m²°C, y para un bulbo del termómetro asumido con un cilindro con una longitud característica (Relación Volumen-Área, V/A, ver en características del termómetro, Tabla 4.1) de 1.85 x 10⁻³ m, se tiene que el número de Biot estimado es:

$$Bi = \frac{hL_c}{k} = \frac{5 \cdot 1.85 \times 10^{-3}}{8.81} = 0.00105 < 0.1$$

- La transferencia de calor entre el medio externo y el mercurio sólo se da a través del bulbo del termómetro, mientras que la columna de vidrio que contiene el resto de mercurio se supone que no transfiere calor desde o hacia el ambiente externo que lo rodea, es decir, el capilar de vidrio se considera adiabático, perfectamente aislado.
- Se supone que el espesor de la pared de vidrio del bulbo del termómetro es tal que la resistencia conductiva de calor en la pared de vidrio es pequeña, ello debido a la poca inercia que tiene el termómetro, es decir, el menisco del mercurio se mueve tan pronto como la temperatura cambia en el bulbo. Esto se verifica calculando el número de Biot con las especificaciones de la pared de vidrio del bulbo dadas en la Tabla 5.2 y tomando un valor de coeficiente de transferencia de calor por convección libre en el aire alrededor de 5 W/m²°C; se encuentra que este valor está entre 0.0017 y 0.0054, mientras que para un valor de 7 W/m²°C el máximo valor alcanzado es de 0.012. Lo que indica que como el Número de Biot es menor de 0.1 la resistencia interna es despreciable y esta consideración es válida para el caso del aire.
- El fluido termométrico no moja la pared, despreciándose los efectos de tensión superficial.
- Se ignoran los efectos debidos a las fuerzas capilares en la columna termométrica.
- No hay condensación de los vapores del fluido termométrico en las paredes de la columna capilar del termómetro.
- Como consideración final, en este modelo va a suponerse que el fluido en el termómetro se expande a presión constante dentro del capilar, lo cual implica suponer que se trabaja con el calor específico a presión constante.

El desarrollo paso a paso de la construcción del modelo del fluido termométrico se puede observar en el Apéndice B de este libro.

Por las relaciones termodinámicas, se puede lograr una relación entre el calor específico a presión constante, c_p , y el coeficiente de expansión térmica, κ , del fluido termométrico:

Dado que

$$h = u + Pv$$

Derivando parcialmente respecto a T a P constante:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P + P \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$$

Se define que

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = c_p$$

$$\kappa = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \therefore \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \kappa v$$

Luego:

$$c_p = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P + P\kappa v$$

Despejando:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P = c_p - P\kappa v$$

Restricciones adicionales: va a suponerse que el valor del calor específico, c_p , y el valor del coeficiente de expansión térmica, κ , son constantes en el intervalo de tiempo de trabajo del termómetro.

El considerar como fluido termométrico el mercurio, el cual es un metal líquido, permite aproximadamente considerar que la temperatura se distribuye instantáneamente en él, es decir no existe distribución espacial de temperatura tanto en el bulbo como en el columna del termómetro (ver resistencia interna despreciable).

Como anteriormente ya se mencionó el hecho de que al expandirse isobáricamente todo el fluido termométrico y la implicación derivada por ello de asumir el calor específico a presión constante, c_p , y por ende también se debe asumir el coeficiente de expansión térmica, κ .

Para modelar el termómetro puede iniciarse por aplicar el principio de conservación de la energía, el cual se puede expresar en términos de un balance de energía sobre un volumen de control correspondiente al sistema a modelar.

Según los fundamentos de la mecánica de fluidos, el balance de energía aplicado a un volumen macroscópico de control [FOX]

$$\dot{Q} + \dot{W}_s + \dot{W}_{cortante} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(u + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \rho dV + \int_S \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

que es la primera ley de la termodinámica, donde se representan los siguientes términos:

$$\left(\begin{array}{c} \text{flujos de} \\ \text{energía} \\ \text{transferible} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{acumulación: cambios de} \\ \text{energía interna y mecánica} \\ \text{del sistema} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{energía de las corrientes} \\ \text{materiales de entrada y} \\ \text{salida al sistema} \end{array} \right)$$

\dot{Q} : Flujo de Calor que atraviesa la superficie de control

\dot{W}_s : Flujo de Trabajo debido a piezas móviles dentro del volumen de control

$\dot{W}_{cortante}$: Flujo de Trabajo debido esfuerzos cortantes o tangenciales sobre la superficie de control

v_s : Velocidad del fluido que atraviesa la superficie de control

v : Velocidad del fluido dentro del volumen de control

ρ : Densidad del fluido

\vec{v} : Vector Velocidad

z : Altura para la energía potencial de los flujos o corrientes materiales

3.1.2.1 Termómetro

El balance de energía global o en todo el termómetro se desarrolla de la siguiente manera. Se selecciona un volumen de control, que en este caso es el volumen limitado por el contorno del sistema (paredes del termómetro) y la superficie libre de mercurio. En este modelo \dot{Q} es el flujo de calor convectivo que atraviesa la superficie del bulbo y el término \dot{W}_s que en este caso representa:

$$\dot{W}_s = (\text{flujo de trabajo de eje} - \text{flujo de trabajo de expansión})$$

Como no hay trabajo de eje, es decir trabajo debido a piezas que giran respecto a un eje, \dot{W}_s , se reduce a:

$$\dot{W}_s = -(\text{flujo de trabajo de expansión del volumen contra la presión reinante sobre la superficie libre de la columna termométrica})$$



Figura 3.2. Termómetro ASTM 56C-86 usado en la experimentación [El Autor]

También puede ignorarse el trabajo debido a fuerzas cortantes ejercidas por el movimiento del fluido sobre las fronteras del volumen de control, por lo cual $\dot{W}_{cortante} = 0$. De los términos de la integral de volumen que en conjunto representan la energía total dentro del volumen de control, el término de energía potencial es insignificante y el término de flujo de trabajo debido a fuerzas de presión internas al volumen de control es pequeño, pues los cambios de presión dentro del volumen de control no son grandes. Como no hay flujo de masa debido al movimiento del fluido que atraviese la superficie de control, entonces la integral de superficie en la ecuación es cero. Según las restricciones anteriores, la ecuación del balance de energía se reduce a:

$$hA_b(T_m - T) = \frac{\partial}{\partial t} \left[Mc_p(T - T_r) + \frac{1}{2} \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c m_c + \frac{1}{2} \vec{v}_b \cdot \vec{v}_b m_b \right] + P \frac{dV}{dt}$$

donde

h : coeficiente de calor convectivo

T_m : temperatura de equilibrio en el medio

T : temperatura en un instante dado

T_r : temperatura de referencia

M : masa total del fluido en el termómetro

m_b : masa del fluido en el bulbo

m_c : masa del fluido en la columna

m_b : masa del fluido en el bulbo

c_p : calor específico a presión constante del fluido

\vec{v}_b : velocidad del fluido en el bulbo

\vec{v}_c : velocidad del fluido en la columna

P : presión en la superficie libre del líquido

\forall : volumen del fluido en el termómetro

ρ : densidad del fluido

t : tiempo

La ecuación anterior se interpreta como: El flujo convectivo de calor suministrado al bulbo del termómetro es igual al cambio de la energía interna en el bulbo y la columna más el cambio de la energía cinética en el bulbo y la columna al moverse debido a la dilatación del fluido, más la potencia del trabajo de expansión del volumen de control contra la presión sobre la superficie libre de mercurio.

En la ecuación se considera c_p constante. Desde el punto de vista termodinámico significa que cuando el calor específico se determina a presión constante, una parte de la energía suministrada al sistema se convierte en energía interna y la otra se utiliza para hacer el trabajo de expansión de las fronteras del volumen de control [WEBER], mientras que cuando se determina el calor específico a volumen constante toda la energía suministrada se convierte en energía interna. Usualmente los términos caloríficos involucrados son mucho mayores que los términos de energía cinética por lo cual el balance global conduce a:

[3-1]

$$hA_b(T_m - T) = \frac{\partial}{\partial t} [M c_p (T - T_r)] + P \frac{d\forall}{dt}$$

El balance global expresado en términos de números adimensionales es:

[3-2]

$$Bi\theta = -\frac{d\theta}{d\tau} + \omega \frac{dv}{d\tau}$$

Donde

θ : temperatura adimensional

$$\theta = \frac{T_m - T}{T_m - T_0}$$

T_0 : temperatura inicial en el termómetro

τ : tiempo adimensional

$$\tau = \frac{t}{t_m}$$

t_m : tiempo en el que el termómetro alcanza la temperatura de equilibrio en el medio, T_m

v : volumen adimensional o fraccional

$$v = \frac{V}{V_0}$$

V : Volumen total del fluido termométrico en el termómetro

V_0 : Volumen total inicial del fluido termométrico en el termómetro

Y los números adimensionales resultantes junto con su significado:

$$Bi = \frac{hA_b t_m}{Mc_p} = \frac{\text{flujo convectivo}}{\text{velocidad de cambio de la energía interna total}}$$

$$\omega = \frac{PV_0}{Mc_p(T_m - T_0)} = \frac{\text{flujo de trabajo de frontera móvil}}{\text{velocidad de cambio de energía interna total}}$$

El volumen en el termómetro es la suma del volumen en el bulbo más el volumen en la columna. Este balance de volúmenes expresado en términos de volúmenes fraccionales y longitudes fraccionales da:

$$v = v_{b0}l_b + v_{c0}l_c$$

donde los volúmenes fraccionales son:

$$v = \frac{V}{V_0}, \quad v_{b0} = \frac{V_{b0}}{V_0} \quad \text{y} \quad v_{c0} = \frac{V_{c0}}{V_0}$$

v : Volumen fraccional total en el termómetro respecto al volumen total inicial

v_{b0} : volumen fraccional en el bulbo del termómetro respecto al volumen total para la condición inicial

v_{c0} : volumen fraccional en la columna del termómetro respecto al volumen total para la condición inicial

Y las longitudes fraccionales son:

$$l_b = \frac{x_b}{x_{b0}} \text{ y } l_c = \frac{x_c}{x_{c0}}$$

l_b : longitud fraccional en el bulbo, es decir la razón entre la longitud del fluido en el bulbo en cualquier momento y la longitud del fluido en el bulbo en el estado inicial.

l_c : longitud fraccional en la columna, es decir la razón entre la longitud del fluido en la columna en cualquier momento y la longitud del fluido en la columna en el estado inicial.

Para expresar la velocidad fraccional que figura en el balance global en términos de velocidad se realiza lo siguiente. Se deriva respecto al tiempo el volumen fraccional v , y expresándolo en términos del tiempo adimensional conduce a

$$\frac{dv}{d\tau} = v_{c0}v$$

donde $v = \frac{dl_c}{d\tau}$ y el balance global de energía en términos de la velocidad fraccional es

$$Bi\theta = -\frac{d\theta}{d\tau} + \omega v_{c0}v$$

El fluido termométrico en el termómetro sufre dilatación y contracción. La relación entre la temperatura y la expansión o contracción de un fluido puede determinarse mediante algunas relaciones termodinámicas según la literatura [VAN NESS]:

Definiendo el volumen específico, v , como: $v = \frac{V}{M}$ por termodinámica se tiene:

$$v = v(T, P)$$

la derivada total será:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP$$

dividiendo entre v

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P dT + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T dP$$

Se tiene que el coeficiente de dilatación o expansión térmica, κ , se define como:

$$\kappa = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P$$

Y el coeficiente de compresibilidad, γ , como:

$$\gamma = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T$$

La expresión de volumen específico queda:

$$\frac{dv}{v} = \kappa dT + \gamma dP$$

$$\ln \frac{v}{v_0} \approx \kappa(T - T_0) + \gamma(P - P_0)$$

Si se trabaja con expansión a presión constante, $P = P_0$, por lo cual la ecuación anterior conduce a:

$$v \approx v_0 e^{\kappa(T - T_0)}$$

Esta última ecuación puede expresarse en términos del volumen global V del fluido termométrico y de la masa total M en el termómetro como

$$\frac{V}{M} \approx \frac{V_0}{M} e^{\kappa(T - T_0)}$$

Lo cual conduce a

$$\frac{V}{V_0} \approx e^{\kappa(T - T_0)}$$

La ecuación anterior relaciona el volumen del fluido termométrico con la temperatura y puede expresarse en términos del volumen fraccional como

$$v \approx e^{K(\theta_0 - \theta)} = e^{-K(\theta - \theta_0)} = e^{-K(\theta - 1)}$$

Donde K es el coeficiente de dilatación térmica adimensional, definido como $K = \kappa(T_m - T_0)$.

Desarrollando en series de Taylor el miembro derecho de la última ecuación

$$v \approx e^{-K(\theta - \theta_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-K(\theta - \theta_0)]^n}{n!}$$

$$v \approx e^{-K(\theta - \theta_0)} = 1 + [-K(\theta - \theta_0)] + \frac{[-K(\theta - \theta_0)]^2}{2!} + \frac{[-K(\theta - \theta_0)]^3}{3!} + \dots + \frac{[-K(\theta - \theta_0)]^i}{i!} + \dots$$

Según los manuales de las casas fabricantes de termómetros [HAUSER] un buen termómetro de fluido líquido termométrico debe satisfacer que el volumen del fluido sea proporcional a los cambios de temperatura con respecto a una temperatura inicial. Por lo que en la serie de Taylor solo se tiene en cuenta el término lineal y se descartan los términos no lineales, ello conduce a:

$$v \approx e^{-K(\theta - \theta_0)} = 1 + [-K(\theta - \theta_0)] = 1 - K(\theta - \theta_0)$$

$$v \approx 1 - K(\theta - \theta_0)$$

Con esta ecuación puede determinarse la velocidad con que cambia el volumen de líquido en el termómetro y también la velocidad de desplazamiento de la superficie libre del mercurio. Para ello es necesario derivar respecto al tiempo esta ecuación y a continuación expresarla en términos del tiempo adimensional,

$$\frac{dv}{d\tau} \approx -K \frac{d\theta}{d\tau}$$

Pero anteriormente se había encontrado

$$\frac{dv}{d\tau} = v_{c0} v$$

Combinando estas dos ecuaciones la velocidad fraccional queda expresada en términos de la temperatura, θ como:

$$v = -\frac{K}{v_{c0}} \frac{d\theta}{d\tau}$$

Sustituyendo esta velocidad en términos de la temperatura en la ecuación de balance [3-2], finalmente el balance global en términos de la temperatura adimensional es

[3-3]

$$Bi\theta = -(1 + K\omega) \frac{d\theta}{d\tau}$$

Este modelo está compuesto por dos subsistemas: la columna termométrica y el bulbo. A continuación va a efectuarse un balance de energía en cada uno de ellos.

3.1.2.2 Columna

Para este subsistema puede seleccionarse como volumen de control, el volumen del capilar en el cual la única frontera que es atravesada por fluido, es que une el bulbo con el capilar. Teniendo en cuenta las restricciones iniciales junto con la consideración de expansión del fluido a presión constante en la columna, y al aplicar el balance de energía macroscópico, este se reduce a:

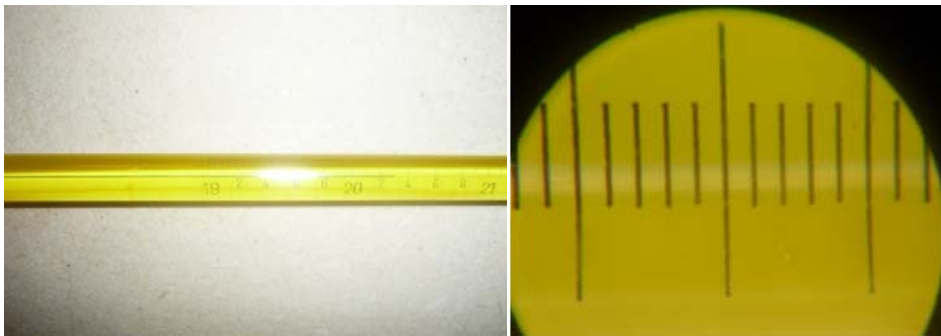


Figura 3.3 Columna (izq.) y capilar (der.) del termómetro usado [El Autor]

$$m_c c_p \frac{dT}{dt} = -P A_c v_c$$

El balance de la energía para la columna en términos de números y variables adimensionales es:

[3-4]

$$I_c \frac{d\theta}{d\tau} = v_{c0} \omega v$$

donde los números adimensionales I_c y ω son y significan

$$I_c = \frac{U_c}{U} = \frac{\text{velocidad de cambio de energía interna en la columna}}{\text{velocidad de cambio de energía interna total}}$$

$$\omega_c = \frac{P \nabla_{c0}}{M c_p (T_m - T_0)} = \frac{\text{flujo de trabajo por cambio de volumen en la columna}}{\text{velocidad de cambio de energía interna total}}$$

3.1.2.3 Bulbo



Figura 3.4 Bulbo del termómetro usado [El Autor]

Aplicando el balance macroscópico de energía y tomando como volumen de control el volumen del bulbo del termómetro, la ecuación de balance de energía para el bulbo queda:

$$\frac{d}{dt} [m_b c_p (T - T_r)] = h A_b (T_m - T) - \dot{m} c_p (T - T_r)$$

Donde $\dot{m} = \frac{dm_b}{dt}$

Desarrollando y simplificando la ecuación anterior se obtiene finalmente el balance de energía en el bulbo del termómetro:

$$m_b c_p \frac{dT}{dt} = h A_b (T_m - T)$$

La ecuación del bulbo en términos de números adimensionales es:

[3-5]

$$Bi \theta = -I_b \frac{d\theta}{d\tau}$$

Los números adimensionales son

$$Bi = \frac{h A_b t_m}{M c_p}, \quad I_b = \frac{U_b}{U}$$

donde

$$U = \frac{M c_p (T_m - T_0)}{t_m} \text{ y } U_b = \frac{m_b c_p (T_m - T_0)}{t_m}$$

el significado del número adimensional es

$$I_b = \frac{U_b}{U} = \frac{\text{velocidad de cambio de energía interna en el bulbo}}{\text{velocidad de cambio de energía interna total}}$$

Expresando el balance de energía de cada subsistema en la forma:

$$\text{Columna: } I_c \frac{d\theta}{d\tau} = v_{c0} \omega v$$

$$\text{Bulbo: } I_b \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta$$

Sumando estas dos ecuaciones término a término se obtiene

$$I_b \frac{d\theta}{d\tau} + I_c \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta + v_{c0} \omega v$$

$$(I_b + I_c) \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta + v_{c0} \omega v$$

Donde la suma de los flujos fraccionales de acumulación es

$$I_b + I_c = \frac{U_b}{U} + \frac{U_c}{U}$$

Pero $U_b + U_c = U$ de donde $I_b + I_c = 1$ por lo que la ecuación general del termómetro puede reducirse a

$$Bi\theta = -\frac{d\theta}{d\tau} + v_{c0} \omega v$$

Que corresponde efectivamente al balance global en el termómetro.

Comprobado el balance global en el termómetro, y expresando en términos de la temperatura adimensional queda:

$$(1 + K\omega) \frac{d\theta}{d\tau} + Bi\theta = 0$$

3.1.3 Solución

Para resolver el balance global de energía obtenido [3-3] y obtener la variación de la temperatura del fluido termométrico, se asume que los parámetros K , ω y Bi de esta ecuación son constantes, ello conduce a:

[3-6]

$$\ln \frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{Bi}{1 + K\omega} \tau$$

o en forma exponencial:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{Bi}{1+K\omega}\tau}$$

Para hacer estimativos de algunos términos de la ecuación anterior, en la literatura [KREITH] se consultaron los siguientes datos para el mercurio a la temperatura promedio entre $T_0 = 30^\circ\text{C}$, y $T_\infty = 20^\circ\text{C}$, es decir 25°C : $\kappa = 0.000182^\circ\text{C}^{-1}$; $\rho_0 = 13567\text{ kg/m}^3$; $c_p = 139\text{ J/kg}^\circ\text{C}$. Teniendo en cuenta que el bulbo del termómetro usado tiene un diámetro interior aproximado de 4.73 mm y una longitud de 47.40 mm, se desprecia además la masa y volumen de la columna al compararla con la del bulbo. Asumiendo además presión atmosférica reinante dentro de la superficie libre de mercurio y con los datos anteriores se obtienen el valor de los términos:

$$\omega = \frac{P\nabla_0}{Mc_p(T_m - T_0)} = \frac{P}{\rho_0 c_p (T_m - T_0)} \frac{101300\text{ Pa}}{13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 140 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} (20^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C})} = -5.32 \times 10^{-3}$$

$$K = \kappa(T_m - T_0) = 0.000182^\circ\text{C}^{-1}(20^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C}) = -1.82 \times 10^{-3}$$

Que permiten calcular el término

$$K\omega = (-1.82 \times 10^{-3})(5.32 \times 10^{-3}) = 9.68 \times 10^{-6}$$

De donde puede observarse que el número adimensional $K\omega \ll 1$, lo cual significa que el flujo de trabajo fraccional (número ω) es muy pequeño comparado con los términos calóricos, por tanto la respectiva expresión se reduce a:

$$1 + K\omega + 1 \approx 1$$

Y de esta manera la ecuación de balance queda finalmente como:

[3-7]

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-Bi\tau}$$

Se recuerda que esta expresión se obtuvo para el caso en el cual el fluido termométrico se dilata por calentamiento. Si se repite todo el procedimiento aplicado pero para el caso en el que la columna termométrica se contrae por enfriamiento en el bulbo del termómetro, se obtiene la misma ecuación, lo cual indica que el balance de energía es invariante de la dirección de flujo de calor al entrar o salir del termómetro.

Transformando el modelo logrado a la forma dimensional:

Si $T_0 > T_m$:

$$T = (T_0 - T_m)e^{-\frac{hA_b t}{Mc_p}} + T_m$$

de manera que

$$\frac{T - T_m}{T_0 - T_m} = e^{-\frac{hA_b t}{Mc_p}}$$

$$\ln\left(\frac{T - T_m}{T_0 - T_m}\right) = -\frac{hA_b}{Mc_p} t$$

[3-8]

$$\ln\left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right) = -\frac{hA_b}{Mc_p} t$$

Otra manera más simplificada de lograr el mismo modelo se explica a continuación.

Un balance de energía sobre el sistema cerrado y en estado permanente correspondiente al fluido termométrico:

$$\left(\begin{matrix} \text{flujo de} \\ \text{calor} \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} \text{flujo de} \\ \text{trabajo} \end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix} \text{cambio de} \\ \text{energía interna} \end{matrix}\right)$$

$$\dot{Q} = \dot{W} + \frac{dU}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = P \frac{dV}{dt} + \frac{d}{dt} \{M[u_r + c_p(T - T_r)]\}$$

$$hA_b(T_m - T) = P \frac{dV}{dt} + Mc_p \frac{dT}{dt}$$

Anteriormente se había establecido que el modelo de dilatación del fluido termométrico se aproximaba a:

$$V \approx V_0 e^{\kappa(T - T_0)}$$

$$V \approx V_0 e^{\kappa(T - T_0)} \approx V_0 [1 + \kappa(T - T_0)]$$

Derivando esta expresión respecto al tiempo con κ constante:

$$\frac{dV}{dt} \approx \frac{d}{dt} V_0 [1 + \kappa(T - T_0)] = V_0 \kappa \frac{dT}{dt}$$

Reemplazado en el balance de energía:

$$hA_b(T_m - T) = (P V_0 \kappa + M c_p) \frac{dT}{dt}$$

introduciendo las variables adimensionales:

$$Bi\theta = -(1 + K\omega) \frac{d\theta}{d\tau}$$

O en forma más general:

Desarrollamos anteriormente el balance hasta este punto:

$$\dot{Q} = \dot{W} + \frac{dU}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = P \frac{dV}{dt} + M \frac{du}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = P \frac{dV}{dt} + M \frac{d}{dt} [c_p(T - T_r)]$$

$$hA_b(T_m - T) = P \frac{dV}{dt} + M \frac{d}{dt} (c_p T)$$

despejando h :

$$h = \frac{1}{A_b(T_m - T)} \left[P \frac{dV}{dt} + M \frac{d}{dt} (c_p T) \right]$$

$$h = \frac{M}{A_b(T_m - T)} \left[P \frac{dV}{dt} + \frac{d}{dt} (c_p T) \right]$$

donde todos los parámetros son medibles, lo que exige desarrollar:

| t | T | $c_p(T)$ | $v(t)$ |
|----------|----------|----------|--------|
| 0 | T_0 | | |
| t_1 | T_1 | | |
| t_2 | T_2 | | |
| \vdots | \vdots | | |
| t_m | T_m | | |

3.2 CONVECCIÓN LIBRE ALREDEDOR DEL BULBO DEL TERMÓMETRO

Parte de los objetivos del presente trabajo es generar algunas ecuaciones para predecir teóricamente el coeficiente de transferencia de calor. En el presente numeral, con base en los principios y fundamentos de fenómenos de transporte, se plantearán y solucionarán algunos modelos teóricos para calcular el coeficiente de Transferencia de calor para convección libre alrededor del bulbo de un termómetro de vidrio. La forma expedita y explícita de construcción y solución de los tres siguientes modelos se puede encontrar en el Apéndice C del presente trabajo.

Situación física a modelar: El problema o situación física de la cual quiere predecirse el coeficiente de transferencia de calor corresponde básicamente a los dos experimentos que se enuncian a continuación:

Primer experimento: Se tiene un termómetro de vidrio colgado y fijo verticalmente. A partir de un determinado instante se calienta el bulbo del termómetro con un mechero hasta que alcance la temperatura cercana a la máxima de la escala del termómetro. Seguidamente se suspende el calentamiento. Entonces el bulbo del termómetro comienza a enfriarse por convección libre en el ambiente que lo rodea.

Segundo experimento: Se tiene un termómetro de vidrio situado horizontalmente y mantenido fijo. A partir de un determinado instante se calienta el bulbo del termómetro con un mechero hasta que alcance la temperatura cercana a la máxima de la escala del termómetro. Seguidamente se suspende el calentamiento. Entonces el bulbo del termómetro comienza a enfriarse por convección libre en el ambiente que lo rodea.

3.2.1 Termómetro En Posición Vertical Con Flujo Transitorio

3.2.1.1 Descripción Fenomenológica

El fenómeno de convección natural del fluido alrededor del bulbo para las configuraciones vertical fue ampliamente discutido en la sección 2.2.

Aquí se parte del hecho que despreciando la resistencia térmica del vidrio, el modelo transitorio del fluido termométrico debe coincidir con el modelo transitorio del fluido alrededor del bulbo en un valor radial igual al radio del bulbo.

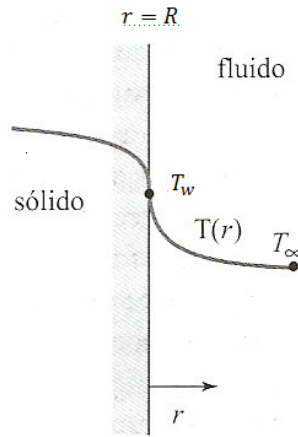


Figura 3.5 Relación instantánea entre los perfiles de temperatura en la interfaz [El Autor]

Al observar el bulbo del termómetro, en la cual sucede el transporte de calor, puede verse que el bulbo geoméricamente está compuesto por dos partes: el cuerpo del bulbo de forma cilíndrica y el extremo del bulbo conformado por una semiesfera. Para efectos de modelamiento la estrategia es inicialmente simplificar el problema asumiendo algunas restricciones. Y a medida que se plantea el modelo van asumiéndose otras restricciones.

Restricción geométrica: Asumir que el bulbo del termómetro es básicamente un cilindro.

Suposiciones:

- Flujo transitorio de transporte de calor y de cantidad de movimiento.
- Velocidad radial $v_r \rightarrow 0$: No existe desplazamiento lateral de materia. A partir de la observación de fotografías del campo de flujo de velocidad en cilindros calentados, Figuras 1.9 y 2.3 se ve que básicamente el flujo solo tiene componente axial de velocidad.
- No existe movimiento angular $v_\theta = 0$.
- Gradiente de velocidad axial $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$: Ello en virtud de las pequeñas dimensiones del bulbo, el recorrido que hace el aire en la longitud de bulbo es pequeño.
- Gradiente de velocidad radial $\frac{\partial v_r}{\partial r}$: Es el más importante.

- Se tienen en cuenta las fuerzas de flotación.

Considerando que la velocidad del aire es pequeña alrededor del bulbo, según la literatura para números de Mach menores a 0.3 el gas puede tratarse como fluido incompresible y para efecto en la ecuación de energía se considera propiedades medias constantes tales como la densidad y la viscosidad. Bajo esta restricción y añadiendo la restricción de suponer que no existe gradiente axial de temperatura además de las restricciones dadas anteriormente, se procede a la construcción del modelo.

3.2.1.2 Construcción

Va a utilizarse el método diferencial. Partiendo de las ecuaciones diferenciales de conservación de movimiento y energía y bajo las consideraciones establecidas anteriormente y en 2.2, exceptuando la de estado estacionario:

Cantidad de Movimiento:

Componente z

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + g\beta(T - T_\infty)$$

Energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Si el componente radial de la velocidad es insignificante comparado con el axial y además considerando como aproximación adicional que $L \ll \delta, \delta_T$, lo que puede inducir a despreciar los cambios de velocidad y temperatura axiales o, dicho de otra manera, estos son muy pequeños comparados con los cambios radiales, se pueden despreciar los términos que contengan los factores:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial T}{\partial z}$$

Lo que permite reescribir las ecuaciones de la siguiente forma:

Cantidad de Movimiento:

Componente z

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + g\beta(T - T_\infty)$$

Energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Que se pueden escribir como:

Cantidad de Movimiento:

Componente z

[3-9]

$$\nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + g\beta(T - T_\infty) = \frac{\partial v_z}{\partial t}$$

Energía:

[3-10]

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Aquí se puede resolver la ecuación de energía desacoplada a la de cantidad de movimiento y con esta solución bajo la condición inicial y de frontera se procede a resolver la ecuación de movimiento o flujo.

Resolviendo entonces la ecuación [3-10]:

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Bajo las condiciones limites:

Inicial:

$$T(R, 0) = T_{w0}$$

Frontera

$$T(R, t) = T_w$$

en la superficie del bulbo

$$\dot{Q}_{conducción} = \dot{Q}_{convección}$$

$$T(\infty, t) = T_\infty$$

3.2.1.3 Solución

El desarrollo en detalle de estas ecuaciones se puede encontrar en el Apéndice C. Por el método de separación de variables planteando una solución de la forma:

$$T(r, t) = W(r)G(t) + c$$

hallando las derivadas parciales respectivas y reemplazando en la ecuación de energía:

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\alpha \left[W''(r)G(t) + \frac{1}{r} W'(r)G(t) \right] = W(r)G'(t)$$

Dividiendo entre $W(r)G(t)$:

$$\frac{1}{W(r)} \left[W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) \right] = \frac{1}{\alpha} \frac{G'(t)}{G(t)}$$

Si esto es igual al parámetro, $-\lambda^2$:

$$\frac{1}{W(r)} \left[W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) \right] = \frac{1}{\alpha} \frac{G'(t)}{G(t)} = -\lambda^2$$

Se desprenden las dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{G'(t)}{G(t)} = -\lambda^2$$

$$\frac{1}{W(r)} \left[W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) \right] = -\lambda^2$$

Resolviendo cada ecuación independientemente,

empezando con la de G :

$$G'(t) = -\alpha\lambda^2 G(t)$$

Despejando G :

$$G(t) = c_0 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

ahora se prosigue con la segunda ecuación de W :

$$W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) = -\lambda^2 W(r)$$

$$W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + \lambda^2 W(r) = 0$$

A partir de la sustitución:

$$s = \lambda r$$

con lo cual se cambia de variable independiente en cada uno de los términos de la ecuación.

Sustituyendo en la ecuación y dividiendo por λ^2 :

$$\frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dW}{ds} + W = 0$$

La cual es una *ecuación de Bessel* con parámetro, $\nu = 0$, siendo un número real no negativo.

La forma estándar de dicha ecuación es [KREYSZING]:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0$$

Si $\nu = n = 0$, cuando toma el valor del entero cero, la ecuación se reduce a:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

Que tiene como solución:

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$$

Donde $J_0(x)$ es la función de Bessel de primera clase de orden cero y $Y_0(x)$ es la función de Bessel de segunda clase de orden cero.

Para el caso de estudio la solución es:

$$W(s) = c_1 J_0(s) + c_2 Y_0(s)$$

entonces:

$$W(r) = c_1 J_0(\lambda r) + c_2 Y_0(\lambda r)$$

por tanto el perfil espacio-temporal de temperatura:

$$T(r, t) = W(r)G(t) + c$$

$$T(r, t) = [c_1 c_1 J_0(\lambda r) + c_2 c_2 Y_0(\lambda r)]e^{-\alpha \lambda^2 t} + c$$

Llamando las nuevas constantes como

$$c_1 c_1 = A_1 \quad \text{y} \quad c_2 c_2 = b$$

queda:

$$T(r, t) = [A_1 J_0(\lambda r) + b Y_0(\lambda r)]e^{-\alpha \lambda^2 t} + c$$

aplicando las condiciones iniciales y de frontera para hallar las constantes A_1 , b y c :

Espaciales (de frontera):

$$T(\infty, t) = T_\infty$$

$$c = T_\infty$$

$$T(R, t) = T_w$$

$$[A_1 J_0(\lambda R) + b Y_0(\lambda R)]e^{-\alpha \lambda^2 t} = T_w - T_\infty$$

$$-kA \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = hA(T_w - T_\infty) \quad \forall t, t > 0$$

$$[hJ_0(\lambda R) - k\lambda J_1(\lambda R)]A_1 + [hY_0(\lambda R) - k\lambda Y_1(\lambda R)]b = 0$$

Temporales (iniciales):

$$T(R, 0) = T_{w0}$$

$$J_0(\lambda R)A_1 + Y_0(\lambda R)b = T_{w0} - T_\infty$$

Resolviendo el sistema para hallar A_1 y b :

$$\begin{cases} [hJ_0(\lambda R) - k\lambda J_1(\lambda R)]A_1 + [hY_0(\lambda R) - k\lambda Y_1(\lambda R)]b = 0 \\ J_0(\lambda R)A_1 + Y_0(\lambda R)b = T_{w0} - T_\infty \end{cases}$$

Por regla de Cramer:

$$A_1 = \frac{Y_1(\lambda R) - \frac{h}{k\lambda} Y_0(\lambda R)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} (T_{w0} - T_\infty)$$

$$b = \frac{\frac{h}{k\lambda} J_0(\lambda R) - J_1(\lambda R)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} (T_{w0} - T_\infty)$$

Por tanto la solución queda:

$$T(r, t) = T_\infty + e^{-\alpha\lambda^2 t} [A_1 J_0(\lambda r) + b Y_0(\lambda r)]$$

Sustituyendo las constantes en la ecuación se obtiene:

[3-11]

$$\frac{T - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = \frac{J_0(\lambda r)Y_1(\lambda R) + \frac{h}{k\lambda} [J_0(\lambda R)Y_0(\lambda r) - J_0(\lambda r)Y_0(\lambda R)] - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda r)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

Si $T(R, t) = T_R = T_w$, en $r = R$ (superficie del bulbo) la evolución en el tiempo es

[3-12]

$$\frac{T_w - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

o en su forma logarítmica:

$$\ln \frac{T_w - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = -\alpha\lambda^2 t$$

o despejando:

$$T_w = (T_{w0} - T_\infty)e^{-\alpha\lambda^2 t} + T_\infty$$

La ecuación anterior, representa la evolución en el tiempo de la temperatura en la superficie del bulbo, obtenida a partir del perfil de temperatura del fluido que rodea al bulbo. Ecuación que tiene la misma forma exponencial de la evolución de temperatura que se obtuvo anteriormente en 3.1 (en *Fluido Termométrico*) dentro del bulbo [3-8]:

$$\ln \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = -\frac{hA_b}{Mc_p} t$$

3.2.1.4 Parámetro λ

3.2.1.4.1 Despreciando la resistencia de pared $T_w \approx T$, y $T_{w0} \approx T_0$

Por comparación entre los dos perfiles [3-8] y [3-12]:

$$\ln \frac{T_w - T_{\infty}}{T_{w0} - T_{\infty}} \approx \ln \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}$$

Se obtiene que:

$$\lambda^2 = \frac{\alpha' Bi}{\alpha L_c^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha'}{L_c^2} Bi = \frac{1}{\alpha} \frac{Fo}{t} \cdot Bi = Bi Fo \frac{1}{\alpha t}$$

o de otra manera:

$$\lambda = \sqrt{\frac{h}{\alpha \rho L_c c_p}} = \sqrt{\frac{\alpha' Bi}{\alpha L_c^2}} = \frac{1}{L_c} \sqrt{\frac{\alpha' Bi}{\alpha L_c^2}} = \sqrt{\frac{Bi Fo}{\alpha t}}$$

Donde α' es la difusividad térmica del fluido termométrico. No olvidar que el número de Fourier, Fo , está dado por:

$$Fo = \frac{\alpha' t}{L_c^2}$$

3.2.1.4.2 Considerando la resistencia de la pared

El balance de calor establece:

$$\dot{Q}_{conducción} = \dot{Q}_{convección}$$

$$\frac{T - T_w}{R_w} = hA(T_w - T_\infty) = \frac{T - T_\infty}{R_w + \frac{1}{hA}}$$

$$T_w - T_\infty = \frac{T - T_\infty}{R_w + \frac{1}{hA}}$$

Igualmente, al inicio:

$$T_{w0} - T_\infty = \frac{T_0 - T_\infty}{R_{w0} + \frac{1}{h_0A}}$$

Dividiendo estas dos últimas expresiones, extrayendo logaritmos, aplicando propiedades y haciendo sustituciones se llega a:

$$\ln \frac{T_w - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = \ln \frac{T_0 - T_\infty}{T - T_\infty} + \ln \frac{R_{w0} + \frac{1}{h_0A}}{R_w + \frac{1}{hA}}$$

Recordando los perfiles [3-8] y [3-12] para sustituir en los dos primeros términos logarítmicos de la ecuación anterior:

$$-\alpha \lambda^2 t = -\frac{h^* A_b}{Mc_p} t + \ln \frac{R_{w0} + \frac{1}{h_0A}}{R_w + \frac{1}{hA}}$$

donde h^* es un coeficiente global de transferencia de calor (en realidad U), ya que tiene incluida la resistencia de pared:

Despejando:

$$\lambda^2 = \frac{h^* A_b}{\alpha M c_p} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{R_{w0} + \frac{1}{h_0A}}{R_w + \frac{1}{hA}}$$

3.2.1.5 Relación entre h^* y h

Por Fourier y Ley de Omh de Calor se tiene para el coeficiente global U :

$$\dot{Q} = UA\Delta T = \frac{\Delta T}{R_T}$$

De donde

$$R_T = \frac{1}{UA} = \frac{1}{h^*A}$$

Despejando h^* :

$$h^* = \frac{1}{R_T A}$$

Como:

$$\Delta T = T - T_\infty$$

Las resistencias presentes entre estas dos temperaturas:

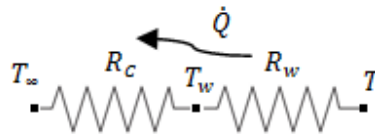


Figura 3.6 Circuito de Resistencias Térmicas [El Autor]

Se puede evaluar la resistencia térmica total equivalente del circuito anterior,

$$R_T = R_w + R_C = R_w + \frac{1}{hA}$$

no olvidar que la resistencia de pared, R_w , es conductiva en un cilindro hueco:

$$R_w = \frac{1}{2\pi kL} \ln \frac{D_{ext}}{D_{int}}$$

luego el coeficiente global será:

$$h^* = \frac{1}{R_T A} = \frac{1}{A \left(R_w + \frac{1}{hA} \right)} = \frac{1}{AR_w + \frac{1}{h}}$$

también:

$$\frac{1}{h^*A} = R_T = R_w + \frac{1}{hA}$$

$$\frac{1}{h^*A} = \frac{1}{hA} + R_w$$

o también despejando h , que es el coeficiente individual (que no contiene la resistencia conductiva de la pared) es:

[3-13]

$$h = \frac{1}{\frac{1}{h^*} - A_b R_w}$$

Con todo lo anterior se puede reescribir la expresión de λ^2 obtenida inmediatamente atrás en 3.2.1.4.2:

$$\lambda^2 = \frac{h^* A_b}{\alpha M c_p} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*} = \frac{h^*}{\alpha \rho L_c c_p} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*} = \frac{\alpha' Bi}{\alpha L_c^2} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*} = \frac{Bi Fo}{\alpha t} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*} = \frac{1}{\alpha t} \left[Bi Fo - \ln \frac{h^*}{h_0^*} \right]$$

[3-14]

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^*}{\alpha \rho L_c c_p} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*}} = \sqrt{\frac{\alpha' Bi}{\alpha L_c^2} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha t} \left[Bi Fo - \ln \frac{h^*}{h_0^*} \right]}$$

Se observa que si $h^* = h_0^*$, se obtiene:

$$\lambda = \sqrt{\frac{Bi Fo}{\alpha t}}$$

Esto puede suceder si se desprecia R_w ante $\frac{1}{h_A}$ y $\frac{1}{h_{0A}}$ y si además $h = h_0$.

3.2.1.6 Relación con el perfil de velocidad

La constante λ surge durante el proceso de solución de la ecuación de energía, y ésta depende de la velocidad del fluido, como se observara al sustituir el perfil de temperatura en la ecuación de cantidad de movimiento. El parámetro λ puede obtenerse de los datos experimentales de temperatura en el bulbo y por mínimos cuadrados por la ecuación de la evolución de la temperatura.

De los datos de temperatura del termómetro puede determinarse λ y conocido λ se tiene el perfil de temperaturas con el cual se resuelve la ecuación de cantidad de movimiento [3-9] para determinar el perfil de velocidad:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + g\beta(T - T_\infty)$$

Condición inicial $t = 0 \quad v_z = v_i$

Condición en la superficie $r = R \quad v_z = 0$

Retomando el perfil de temperatura [3-11]:

$$\frac{T - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = \frac{J_0(\lambda r)Y_1(\lambda R) + \frac{h}{k\lambda} [J_0(\lambda R)Y_0(\lambda r) - J_0(\lambda r)Y_0(\lambda R)] - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda r)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$T - T_\infty = \frac{J_0(\lambda r)Y_1(\lambda R) + \frac{h}{k\lambda} [J_0(\lambda R)Y_0(\lambda r) - J_0(\lambda r)Y_0(\lambda R)] - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda r)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} (T_{w0} - T_\infty) e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

El parámetro λ queda vinculado a la velocidad cuando la solución anterior se reemplaza en la ecuación de cantidad de movimiento $\lambda = f(\bar{v}_z)$.

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{J_0(\lambda r)Y_1(\lambda R) + \frac{h}{k\lambda} [J_0(\lambda R)Y_0(\lambda r) - J_0(\lambda r)Y_0(\lambda R)] - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda r)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} g\beta(T_{w0} - T_\infty) e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

La solución de esta ecuación permite relacionar la velocidad con el parámetro λ .

3.2.1.7 Número de Nusselt

Aplicando la condición en $r = \delta$, $T = T_\infty$ al perfil de temperatura [3-11] se obtiene:

$$[J_0(\lambda R)Y_0(\lambda\delta) - J_0(\lambda\delta)Y_0(\lambda R)] \frac{Nu}{\lambda D} = J_1(\lambda R)Y_0(\lambda\delta) - J_0(\lambda\delta)Y_1(\lambda R)$$

Finalmente el Nusselt para todo el sistema es:

[3-15]

$$Nu = \frac{\begin{vmatrix} J_1(\lambda R) & Y_1(\lambda R) \\ J_0(\lambda\delta) & Y_0(\lambda\delta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_0(\lambda R) & Y_0(\lambda R) \\ J_0(\lambda\delta) & Y_0(\lambda\delta) \end{vmatrix}} \lambda D$$

Obsérvese que así el perfil de temperatura varia en el tiempo, la solución produce un solo número de Nusselt para el sistema que no depende del tiempo, si el parámetro λ no depende del tiempo, lo que implica que la resistencia de pared es despreciable y que el coeficiente de transferencia de calor por convección es constante a través del tiempo, lo que en realidad no sucede, pero que es salvable en la medida de que se podría asumir el valor promedio como

constante. Como no se conoce el espesor de la capa límite, δ , y dado que se obtuvo experimentalmente un valor de Nu y de λ tanto instantáneo como promedio, con estos resultados y a través de la ecuación anterior es posible encontrar dicho espesor tanto instantáneo como promedio.

3.2.2 Termómetro En Posición Vertical Con Flujo Cuasiestacionario

3.2.2.1 Planteamiento

Durante los experimentos se observó que la temperatura en la escala del termómetro a partir de terminado instante varía muy lentamente. Definiendo una escala de tiempo adecuada puede considerarse en este intervalo de tiempo que la derivada de la temperatura y velocidad con respecto al tiempo no cambian apreciablemente y el problema puede tratarse como en estado estacionario $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$. Manteniendo las restricciones del modelo anterior más la consideración de Estado estacionario las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía se reducen a:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{g\beta(T - T_\infty)}{\nu}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

3.2.2.2 Solución

Las condiciones para la ecuación de energía son

$$\begin{aligned} \text{En } r = R \rightarrow T = T_R = T_w \\ \rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R \end{aligned}$$

Considerando que $T(r, z) = T(r)$, para que esta ecuación de energía sea diferencial ordinaria y multiplicando dicha ecuación por r^2 :

$$r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + r \frac{dT}{dr} = 0$$

Lo cual es una ecuación de Cauchy-Euler [ZILL] de la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 0$$

Cuya solución está dada de la forma

$$y = x^m$$

Aplicando a la ecuación de energía, la solución será:

$$T = r^m$$

Derivando

$$\frac{dT}{dr} = mr^{m-1}$$

$$\frac{d^2 T}{dr^2} = m(m-1)r^{m-2}$$

y sustituyendo en la ecuación de energía:

$$m^2 = 0$$

$$m = 0$$

de orden de multiplicidad 2.

Luego la solución es de la forma:

$$T = c_1 + c_2 \ln(r)$$

Bajo las condiciones de frontera:

En $r = R \rightarrow T = T_R = T_w$:

$$T_w = c_1 + c_2 \ln(R)$$

En $r = R \rightarrow \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$

$$T = c_1 + c_2 \ln(r)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{c_2}{r}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = \frac{c_2}{R}$$

Despejando c_2 :

$$c_2 = R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

Luego para c_1 :

$$c_1 = T_w - c_2 \ln(R) = T_w - R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \ln(R)$$

Reemplazando en el perfil:

$$\begin{aligned} T &= c_1 + c_2 \ln(r) \\ T &= T_w - R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \ln(R) + R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \ln(r) \\ T &= T_w - R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R [\ln(R) - \ln(r)] \\ T &= T_w - R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \ln \frac{R}{r} \end{aligned}$$

La solución de la ecuación de energía bajo estas condiciones es también de la forma:

[3-16]

$$T = T_w + R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \ln \frac{r}{R}$$

De la segunda condición se puede definir el número de Nusselt, definiendo como longitud característica el diámetro del bulbo del termómetro, aunque se está en libertad de elegir la longitud del cilindro como longitud característica.

$$Nu_D = - \frac{D}{T_w - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

3.2.2.3 Ecuación cantidad de movimiento

3.2.2.3.1 Relación con el perfil de temperaturas

Se procede a sustituir el perfil de temperatura obtenido en la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{g\beta(T - T_\infty)}{v}$$

Para obtener:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{g\beta}{v} \left(T_w + R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \ln \frac{r}{R} - T_\infty \right)$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \ln \frac{r}{R} \right)$$

Donde a y b son:

$$a = T_w - T_\infty$$

$$b = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

Condiciones límite:

$$\text{En } r = R \rightarrow v_z = 0$$

$$\text{En } r = \delta \rightarrow v_z = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$$

3.2.2.3.2 Solución

Solucionando la ecuación de cantidad de movimiento junto con las condiciones límite:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \ln \frac{r}{R} \right)$$

Es también una ecuación no homogénea de Cauchy-Euler análoga a la de energía. Por lo tanto la solución de la homogénea:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$$

es la función complementaria:

$$v_{z_c} = c_1 + c_2 \ln(r)$$

Ahora se encuentra la particular por variación de parámetros [ZILL]:

$$v_{zp} = u_1 v_{z1} + u_2 v_{z2}$$

Donde

$$v_{z1} = 1$$

$$v_{z2} = \text{Ln}(r)$$

Aplicando el Wronskiano W y los determinantes W_1 y W_2 para determinar los parámetros u_1 y u_2 . Se conoce que la función no complementaria es:

$$f(r) = -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right)$$

Así

$$W = \begin{vmatrix} v_{z1} & v_{z2} \\ v_{z1}' & v_{z2}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{Ln}(r) \\ 0 & \frac{1}{r} \end{vmatrix} = \frac{1}{r}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & v_{z2} \\ f(r) & v_{z2}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \text{Ln}(r) \\ -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) & \frac{1}{r} \end{vmatrix} = -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) \text{Ln}(r)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} v_{z1} & 0 \\ v_{z1}' & f(r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) \end{vmatrix} = -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right)$$

De esta manera:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) r \text{Ln}(r)$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) r$$

Encontrando

$$u_1 = \int -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) r \text{Ln}(r) dr$$

Integrando por partes:

$$u_1(r) = -\frac{1}{2} \frac{g\beta bR}{v} r^2 \text{Ln}^2 r - \frac{1}{2} \frac{g\beta}{v} [a - bR(\text{Ln}R + 1)] r^2 \text{Ln} r + \frac{1}{4} \frac{g\beta}{v} [[a - bR(\text{Ln}R + 1)]] r^2$$

De la misma forma para u_2 :

$$u_2(r) = -\frac{1}{2} \frac{g\beta(a - bRLnR)}{v} r^2 - \frac{g\beta bR}{v} \left(\frac{1}{2} r^2 Ln r - \frac{1}{4} r^2 \right)$$

Así

$$v_{zp} = u_1 v_{z1} + u_2 v_{z2}$$

$$v_{zp} = u_1 + u_2 Ln(r)$$

$$v_{zp} = -\frac{1}{4} \frac{g\beta bR}{v} r^2 Ln^2 r + \frac{3}{4} \frac{g\beta bR}{v} r^2 Ln r + \frac{1}{4} \frac{g\beta}{v} [[a - bR(LnR + 1)]] r^2$$

entonces el perfil general de velocidad esta dado por:

$$v_z = v_{zc} + v_{zp} = c_1 + c_2 Ln(r) - \frac{1}{4} \frac{g\beta bR}{v} r^2 Ln^2 r + \frac{3}{4} \frac{g\beta bR}{v} r^2 Ln r + \frac{1}{4} \frac{g\beta}{v} [[a - bR(LnR + 1)]] r^2$$

3.2.2.3.3 Perfil de velocidad

Ajustando a las condiciones de frontera:

[3-17]

$$v_z = \frac{g\beta}{4v} \left\{ (a - bR)(R^2 - r^2) + \left[2\delta^2 \left(a + bRLn \frac{\delta}{R} \right) + \frac{1}{2} \delta^2 - bR(\delta^2 + r^2) \right] Ln \left(\frac{r}{R} \right) \right\}$$

3.2.2.4 Número de Nusselt

Obsérvese que si se utiliza la ecuación del perfil de temperaturas conociendo **b** (el gradiente de temperatura en la superficie del bulbo) entonces quedaría determinado el número de Nusselt. Esta constante puede determinarse al aplicar la condición en $r = \delta \rightarrow v_z = 0$ en la ecuación del perfil de velocidad pues se obtiene el gradiente de temperatura en la superficie del bulbo, es decir **b**.

Realizando lo anterior se obtiene **b**, al ajustar la condición de $r = \delta \rightarrow v_z = 0$ en el perfil de velocidad:

$$b = \frac{-\frac{1}{2}(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 Ln \frac{\delta}{R} + \frac{1}{2}(R^2 - \delta^2) \right]}{R \left[\delta^2 Ln \frac{\delta}{R} \left(Ln \frac{\delta}{R} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4}(R^2 - \delta^2) \right]}$$

El recordar que $b = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R$ y sustituirlo en la ecuación del perfil de temperatura, permite obtener finalmente el número de Nusselt:

[3-18]

$$Nu = \left| 2 \frac{\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \left(1 - 2Ln\frac{\delta}{R}\right) - 1}{\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \left[1 - 2Ln\frac{\delta}{R}\left(1 - Ln\frac{\delta}{R}\right)\right] - 1} \right|$$

Nota: las dos barras indican valor absoluto.

Es decir que Nusselt depende solo del espesor de la capa límite térmica.

3.2.3 Termómetro En Posición Horizontal Con Flujo Cuasiestacionario

3.2.3.1 Consideraciones y Construcción

Para plantear el modelo correspondiente al cilindro horizontal, es necesario considerar que este problema es más complejo que el de convección en cilindro vertical, dado que en este caso, la fuerza de flotación al trabajar el problema en coordenadas cilíndricas no tiene una sola componente sino, tiene dos componentes (la angular y la radial). Pese a que en coordenadas rectangulares la fuerza de flotación tiene una componente, el problema se planteará en coordenadas cilíndricas pues al trabajarlo en coordenadas rectangulares el problema es más difícil de plantear, y sobre todo de resolver.

En coordenadas cilíndricas se tiene el vector velocidad:

$$\vec{v} = v_r e_r + v_\theta e_\theta + v_z e_z$$

Inicialmente se asumen las siguientes restricciones:

Al observar en el interferograma (*Figura 3.7*) de la visualización de las líneas de corriente del fluido en convección libre alrededor de un cilindro horizontal se considera que cerca a la superficie del bulbo (dentro de la capa límite) el movimiento es principalmente angular pues el

flujo tiende a seguir el contorno del cilindro; despreciando por ello las componentes radial y axial de velocidad ante la angular, y por ello $v_r = v_z = 0$, para que el vector velocidad se reduzca a: $\vec{v} = v_\theta e_\theta$

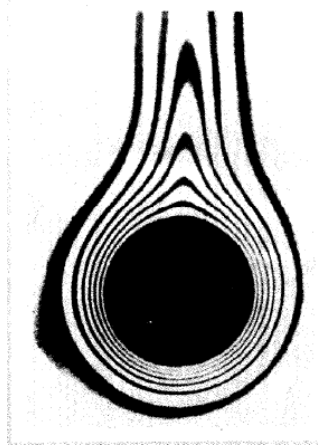


Figura 3.7 Interferograma de cilindro enfriándose por convección natural [HOLMAN]

la fuerza de flotación por metro cúbico es

$$\vec{F}_E = \rho g \beta (T - T_\infty) \cos \theta e_r + \rho g \beta (T - T_\infty) \sin \theta e_\theta + 0 e_z$$

3.2.3.2 Caso de gradiente angular de temperatura constante

Al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento expuestas en el numeral 2.1.1 se obtiene:

Componente radial:

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}$$

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + g\beta(T - T_\infty) \cos \theta$$

Componente angular:

$$\rho \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right]$$

$$\frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} = v \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_{\theta}) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right] + g\beta(T - T_{\infty}) \sin \theta$$

Considerando gradiente angular de temperatura constante e ignorando la generación de calor por fricción viscosa y propiedades constantes bajo el supuesto de flujo incompresible (que es válida si el Número de Mach es <0.3), la ecuación de energía expuesta en el mismo numeral 2.2.1 conduce a:

$$\rho C_v \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

$$\frac{v_{\theta}}{r} \Lambda = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Donde Λ = Gradiente de temperatura angular

$$\Lambda = \frac{\partial T}{\partial \theta} = cte$$

Combinando las componentes angular y radial de cantidad de movimiento y utilizando la ecuación de energía, se obtiene la ecuación:

$$2v \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} - rv_{\theta}^2 - vv_{\theta} \cot \theta = 0$$

Condiciones en $r = R$ $v_{\theta} = 0$ y en $\theta = 0$ $v_{\theta} = 0$

Al Solucionar la ecuación anterior, en serie de potencias la distribución de velocidad angular tiene la forma:

[3-19]

$$v_{\theta} = v_{max} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right] \sqrt{\theta}$$

Combinando la ecuación de energía con el perfil anterior de velocidad, se obtiene

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{v_{max} \Lambda}{\alpha} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{R^2} \right) \sqrt{\theta}$$

Bajo las condiciones límite en la superficie del bulbo

$$\text{En } r = R \quad T = T_w$$

$$\text{En } r = \delta \quad T = T_\infty$$

Solucionando y forzando condiciones límite se obtiene el perfil de temperatura

[3-20]

$$\frac{T - T_w}{T_w - T_\infty} = \text{Ln} \frac{\delta}{R} + \text{Ln} \frac{r}{R} - \frac{v_{max} \Lambda}{\alpha(T_w - T_\infty)} \left\{ \left(\begin{array}{l} \phi(r) \quad \text{Ln} \frac{r}{R} \\ \varphi(r) \quad \text{Ln} \frac{\delta}{R} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} r \quad \text{Ln} \frac{r}{R} \\ \delta \quad \text{Ln} \frac{\delta}{R} \end{array} \right) + \frac{8}{9} R \right\} \sqrt{\theta}$$

donde

$$\phi(r) = \frac{r^3}{9R^2}$$

$$\varphi(r) = \frac{\delta^3}{9R^2}$$

Al derivar el perfil de temperatura y evaluarlo en $r = R$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = \frac{v_{max} \Lambda}{\alpha(T_w - T_\infty)} \left(\frac{\delta}{R} - \frac{2}{3} \text{Ln} \frac{\delta}{R} - 1 \right) \sqrt{\theta} - \frac{1}{R}$$

Se definen los números de Nusselt basados en el gradiente radial y angular de temperatura:

$$Nu_D = - \frac{D}{T_w - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

$$Nu_\theta = \frac{\Lambda}{T_w - T_\infty}$$

Y sustituyendo en la ecuación anterior del gradiente radial en $r = R$, se obtiene

$$Nu_D \text{Ln} \frac{\delta}{R} = 2 - \frac{Ra Re}{Gr} Nu_\theta \sqrt{\theta} \left(\frac{\delta}{R} - \frac{2}{3} \text{Ln} \frac{\delta}{R} - 1 \right)$$

Pero $Ra = Gr Pr$

$$Nu_D \ln \frac{\delta}{R} = 2 - Pr Re Nu_\theta \sqrt{\theta} \left(\frac{\delta}{R} - \frac{2}{3} \ln \frac{\delta}{R} - 1 \right)$$

Como una aproximación podría considerarse $Nu_D \approx Nu_\theta$, lo cual conduce a

[3-21]

$$Nu_D = \frac{2}{Pr Re \left(\frac{\delta}{R} - \frac{2}{3} \ln \frac{\delta}{R} - 1 \right) \sqrt{\theta} + \ln \frac{\delta}{R}}$$

3.2.3.3 Caso sin gradiente angular de temperatura: $T(r, \theta) \approx T(r)$

El caso anterior consideró gradiente angular constante de temperatura Λ . Si ahora se considera la temperatura angular constante, es decir el gradiente angular de temperatura igual a cero. Al repetir todo el procedimiento anterior, El número de Nusselt es

[3-22]

$$Nu_D = \frac{2}{\ln \frac{\delta}{R}}$$

Solución idéntica a la obtenida por Langmuir para una superficie curva [MARTINENKO]

NOTA: El valor de δ usado en las secciones 3.2.1 hasta 3.2.3 en realidad no corresponde al espesor de la capa límite, δ_T , sino que corresponde a la distancia radial desde el eje axial del cilindro hasta el borde de dicha capa, es decir que lleva incluido el radio, a saber: $\delta = R + \delta_T$.

En el capítulo 2 si se usó correctamente este parámetro.

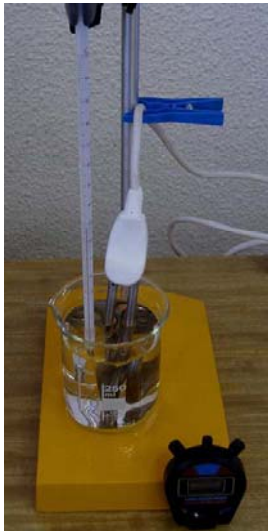
4. DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL

Es este capítulo se da una descripción detallada de la manera como partiendo de unos ensayos previos se realizó la determinación experimental para obtener los coeficientes de transferencia de calor de las situaciones propuestas, además de la exposición de los montajes usados y el procedimiento a seguir. El desarrollo de este capítulo, junto con apartes de los Capítulos 2 y 5, es la base para la construcción de un modelo de guía como práctica de laboratorio y que se expone en el Capítulo 6.

4.1 ENSAYOS Y SELECCIÓN DE EXPERIMENTOS

Para realizar la parte experimental, de la convección libre alrededor del bulbo de un termómetro de vidrio, se pensó inicialmente en calentar el bulbo del termómetro, y registrar en la cámara de video como aumentaba la temperatura según el ascenso del menisco. Para calentar el bulbo del termómetro se hicieron las siguientes pruebas preliminares.

4.1.1 Ensayo-1: Calentamiento del bulbo con agua a temperatura máxima permisible



Se calentó agua, agitándola magnéticamente, en un vaso de precipitados de 500 mL, colocando el vaso sobre una plancha eléctrica de calentamiento, hasta alcanzar la temperatura máxima del termómetro, que es de 35°C. El ascenso de temperatura en el vaso, se monitoreaba con un termómetro de vidrio de los que se usan comúnmente en las prácticas de operaciones unitarias. Una vez alcanzada la temperatura de 35°C se sumergía el bulbo del termómetro de precisión en el vaso con agua caliente y se observaba como ascendía el menisco en el termómetro; aquí el agua caliente no se agitaba durante el calentamiento del bulbo. En este experimento de calentamiento, se observó, que pese a que el agua no se agitaba, la temperatura ascendía muy rápidamente en el termómetro de vidrio, es decir el menisco del fluido termométrico subía a alta velocidad. Luego, se hicieron varios intentos de tratar mover la cámara para seguir el movimiento del menisco, pero éste se movía de tal forma que

manualmente era prácticamente imposible seguir su movimiento. De esta manera no se lograba registrar todo el ascenso de temperatura en el termómetro de vidrio.

4.1.2 Ensayo-2: Calentamiento del bulbo con agua a menor temperatura

Como resultó imposible seguir el ascenso de la temperatura en el experimento del bulbo sumergido y calentado con el agua, se procedió inicialmente a calentar el agua, ya no hasta 35°C, si no hasta una temperatura menor, como 30°C; así como la diferencia de temperatura inicial entre la superficie del bulbo y la temperatura inicial del agua, es menor que en el ensayo-1, se esperaba que la velocidad de ascenso del menisco fuese menor en este caso que en el ensayo-1. Ello debido a que a menor diferencia de temperatura menor velocidad de calentamiento. Efectivamente el menisco en el termómetro ascendía a menor velocidad, pero aun así, resultaba difícil seguir con la cámara el ascenso del menisco.

4.1.3 Ensayo-3 calentamiento del bulbo con aceite

En los dos experimentos anteriores no se fue posible registrar en el termómetro la variación temporal de temperaturas, por ser muy rápido el movimiento, se pensó de los dos experimentos anteriores, que el coeficiente de Transferencia de calor era relativamente alto en las vecindades del bulbo y el agua. Para disminuir el coeficiente de transferencia de calor, y por ende las corrientes convectivas naturales, se pensó en cambiar de fluido en el vaso: en lugar de agua se utilizó un fluido con mayor viscosidad, con el ánimo de disminuir el movimiento del mismo fluido, como el caso de aceite mineral que se calentó en el vaso de precipitados hasta 30°C. Efectivamente el menisco ascendió a menor velocidad que en el caso del agua, para la misma diferencia de temperatura inicial entre el bulbo y el fluido .y si se pudo, en este caso, registrar la variación de temperatura con la cámara, como se encuentra registrado.

4.1.4 Ensayo-4: Enfriamiento del bulbo en agua y aceite a temperatura ambiente

De los tres experimentos anteriores se concluye, mediante observación cualitativa, que el calentamiento del bulbo con fluidos líquidos es relativamente rápido, para seguir cómodamente el registro de temperatura con la cámara. De esta manera, ahora en vez de registrar el calentamiento del bulbo, se registrará su enfriamiento por lo que se calentó el bulbo del termómetro con un mechero hasta alcanzar la temperatura máxima permisible en el termómetro, pero sin registrar la temperatura; una vez se alcanzaba esta máxima temperatura,

hasta la cual ascendió el menisco, se inicia el registro fílmico y también simultáneamente se enfría el bulbo al sumergirlo en un vaso con agua a temperatura ambiente. Se observó que en el caso de enfriamiento del bulbo con fluidos líquidos el menisco en este caso descendía muy rápidamente y no se podía hacer el registro con la cámara para registrar el cambio de la temperatura respecto al tiempo.

4.1.5 Ensayo-5: Enfriamiento del bulbo con aire a temperatura ambiente

Se hicieron pruebas de enfriar el bulbo, pero en lugar de utilizar líquidos a temperatura ambiente, se utilizó un gas, en este caso aire a temperatura ambiente. Se observó que en este caso, si podía seguirse cómodamente la variación de temperatura con la cámara, es decir, la cámara podía moverse casi que a la misma velocidad a la que descendía el menisco. Indicando ello que el coeficiente de Transferencia de calor es, cualitativamente, menor con gases que con líquidos. Por tal razón, los experimentos en los cuales se hicieron registros fílmicos de la evolución de la temperatura, fueron de enfriamiento del bulbo utilizando aire en reposo a temperatura ambiente.

4.2 DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

El experimento consiste básicamente en tomar las lecturas de cambio de temperatura en función del tiempo registradas por un termómetro de vidrio. Se considera como sistema que transfiere calor con los alrededores, el bulbo del termómetro, el cual es asumido como un cilindro.

El bulbo se calienta con una llama hasta llevar al termómetro a su límite superior de temperatura. Se expone al medio ambiente externo (más frío, T_{∞}) y una vez comienza el enfriamiento del bulbo con el aire estancado, se registra el descenso de temperatura con una video cámara que sigue el menisco de mercurio de la columna hasta que prácticamente llega a equilibrio térmico con el ambiente. Para evitar corrientes de aire, el termómetro es encerrado en un recipiente cilíndrico de muchísimo mayor diámetro. La temperatura ambiente y la humedad relativa del momento del ensayo también son registradas.



En los siguientes dos experimentos se hizo entonces el registro con la cámara de la velocidad de descenso de temperatura, para luego hacer la determinación experimental de los coeficientes de transferencia de calor por convección libre; sobre los valores obtenidos de los coeficientes, se prueban tanto el modelo del termómetro como algunas expresiones teóricas reportadas por la literatura y generadas por los autores que trabajaron en esta tesis.

A continuación se describen estos experimentos seleccionados, y sobre los cuales se centra el presente trabajo.

4.2.1 Experimento-1: Convección libre en aire alrededor del bulbo de un termómetro orientado verticalmente (enfriamiento)

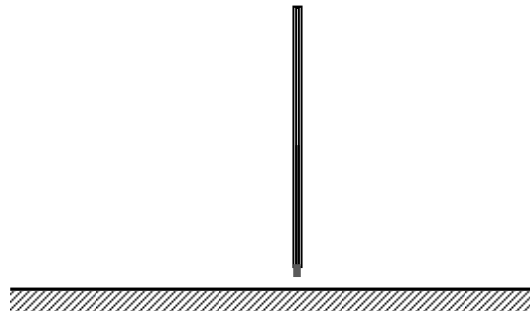


Figura 4.1 Orientación vertical del termómetro [El Autor]

Inicialmente se cuelga, en un soporte, el termómetro de vidrio con el bulbo en posición vertical como se muestra en la Figura 4.7, situando adecuadamente una cámara digital de video al frente del menisco del termómetro. Seguidamente, con un mechero se calienta el bulbo del termómetro e inmediatamente el menisco del fluido termométrico comienza a ascender, se prosigue el calentamiento hasta que el menisco casi que alcance la lectura máxima de la escala. Instantes antes de que el menisco alcance la temperatura máxima, se activa la cámara para que comience a filmar. Una vez alcanzada la temperatura máxima permisible se retira el mechero y se sitúa rápidamente un vaso bajo el termómetro de tal forma que el bulbo del termómetro quede sumergido dentro del vaso (ver Figura 4.7). Una vez se retira el mechero, el menisco del termómetro comienza a descender, debido a que el bulbo del termómetro se enfría por convección, en este caso natural, y a medida que descende el menisco, es necesario mover hacia abajo la cámara filmadora, con la misma velocidad a la que descende el menisco, y con el auxilio de una guía de cremallera que sirve también de soporte de la video-cámara. De esta forma queda registrado en video la evolución temporal de la temperatura. El vaso es

necesario incluirlo para minimizar perturbaciones externas que puedan inducir corrientes en el aire que rodea las vecindades próximas al termómetro. Se hizo el experimento por duplicado.

Inicialmente se realizó el experimento de enfriamiento pero sin colocar el bulbo dentro del vaso, se registraron las temperaturas en la cámara. El experimento se hizo varias veces debido a que cuando se repetía sin el vaso, se encontraba que la evolución de la temperatura en el enfriamiento del bulbo difería bastante. Al analizar la situación se encontró que las mediciones de temperatura en el experimento sin el vaso, eran muy sensibles a condiciones como, si la puerta del laboratorio estaba abierta o cerrada, los extractores estaban o no prendidos y a si las personas que se encontraban en el laboratorio cerca al termómetro, se movían o no. De esta manera, una vez estuviese caliente el bulbo del termómetro, se opta por introducir el bulbo dentro de un vaso, para así garantizar la condición de convección libre.

4.2.2 Experimento-2: Convección libre en aire alrededor del bulbo de un termómetro orientado horizontalmente (enfriamiento)

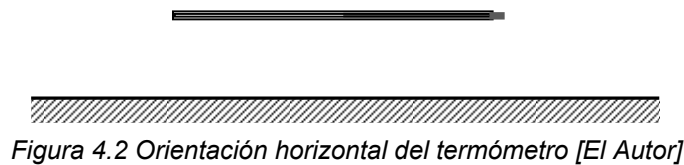


Figura 4.2 Orientación horizontal del termómetro [El Autor]

En este experimento el termómetro se sitúa horizontalmente sobre un soporte elaborado para tal fin como se muestra en la Figura 4.8. A continuación para lograr el registro del descenso de temperatura del bulbo del termómetro, el experimento se desarrolla de forma similar al experimento-1. En esta orientación, cualitativamente se observa que se alcanza más rápido el equilibrio térmico con respecto al experimento-1, de lo que se infiere: los coeficientes de transferencia de calor por convección libre alrededor de un cilindro horizontal son mayores que los correspondientes a un cilindro orientado verticalmente.

4.3 MATERIALES E IMPLEMENTOS

A parte de los elementos de soporte diseñados y/o adecuados (universal, trípode y pinzas de aro de nuez) para lograr los montajes que se ven en las figuras, las guías para la cámara, el

vaso de precipitados (de 500 mL o mayor capacidad), un mechero y un cronometro, para materializar el experimento se requirieron los siguientes implementos esenciales.

4.3.1 Termómetro de Precisión

El termómetro usado es uno de repuesto de la bomba calorimétrica ubicada en el Laboratorio de Ingeniería Química de la Universidad Nacional. Las características fundamentales de dicho termómetro son las siguientes:

ASTM 56C – 86

INTERVALO: 19 °C – 35 °C

PRECISIÓN: 0.02 °C o $\frac{1}{50}$ °C (división)



Figura 4.3 Termómetro de la bomba calorimétrica [El Autor]

| DIMENSIONES mm | Bulbo | | | Columna | Capilar | Termómetro |
|-------------------|-------|--------|-------|---------|---------|------------|
| | Total | Pared | Punta | | | |
| Longitud | 47.40 | 1.3273 | 2.10 | 541.10 | 541.10 | 588.50 |
| Diámetro | 7.38 | - | - | 7.40 | 0.20 | - |

Tabla 4.1 Dimensiones del termómetro usado [El Autor]

Estas dimensiones se midieron con un calibrador. Las especificaciones de este termómetro pueden verificarse en la norma ASTM E1. (2007): *Standard Specification for ASTM Liquid-in-Glass Thermometers*, pág. 1-6, 22, 49, 50, 54, 58-64; En la tabla 4.2 se muestran las más importantes junto con la Figura 4.4. Según la norma este termómetro debe calibrarse cada 2 °C desde los 19 °C.

| ASTM | 56C-86 |
|--|--|
| Nombre | Bomba Calorimétrica |
| Rango | 10 a 35°C |
| Para pruebas de | |
| A Inmersión, mm | total |
| Graduaciones: | |
| Subdivisiones | 0.02°C |
| Líneas largas cada | 0.1°C |
| Números cada | 0.2°C |
| Error máximo de escala | 0.10 °C (sobre un intervalo de 2°C el cambio en la corrección no excede 0.02°C) |
| Inscripción Especial | ASTM 56C-86 |
| Cámara de Expansión | |
| Permite calentamiento a | 66°C |
| B Longitud total, mm | 570 a 600 |
| C Diámetro Externo de la Columna | 7.0 a 8.0 |
| D Longitud del Bulbo | 35 a 55 |
| E Diámetro Externo del Bulbo | 7.0 a 8.0 (El diámetro del bulbo no puede tener más de 0.5 mm que el de la columna) |
| Localización de la Escala | |
| Desde el fondo del bulbo a la línea de | 19°C |
| F Distancia, mm | 165 a 187 |
| G Longitud de la parte graduada | 323 a 385 |
| Cámara de Contracción | |
| I Distancia máxima hasta arriba, mm | 76 |

Tabla 4.2 Especificaciones ASTM del termómetro usado [ASTM E1 (2007)]

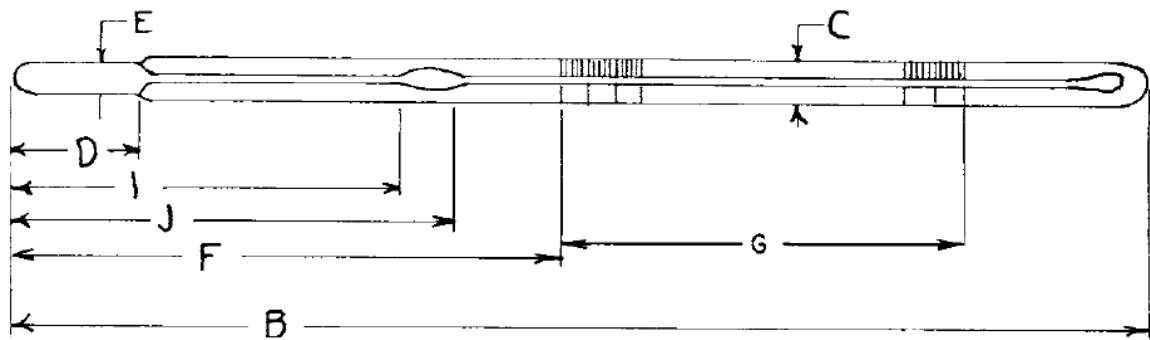


Figura 4.4 Termómetro ASTM 56C -86 [ASTM E1 (2007)]

El grosor o espesor de la pared del bulbo del termómetro se midió con la ayuda de un Estereoscopio *Advanced Optical* del Instituto de Ciencias Naturales de la Universidad Nacional de Colombia como se muestra a continuación.

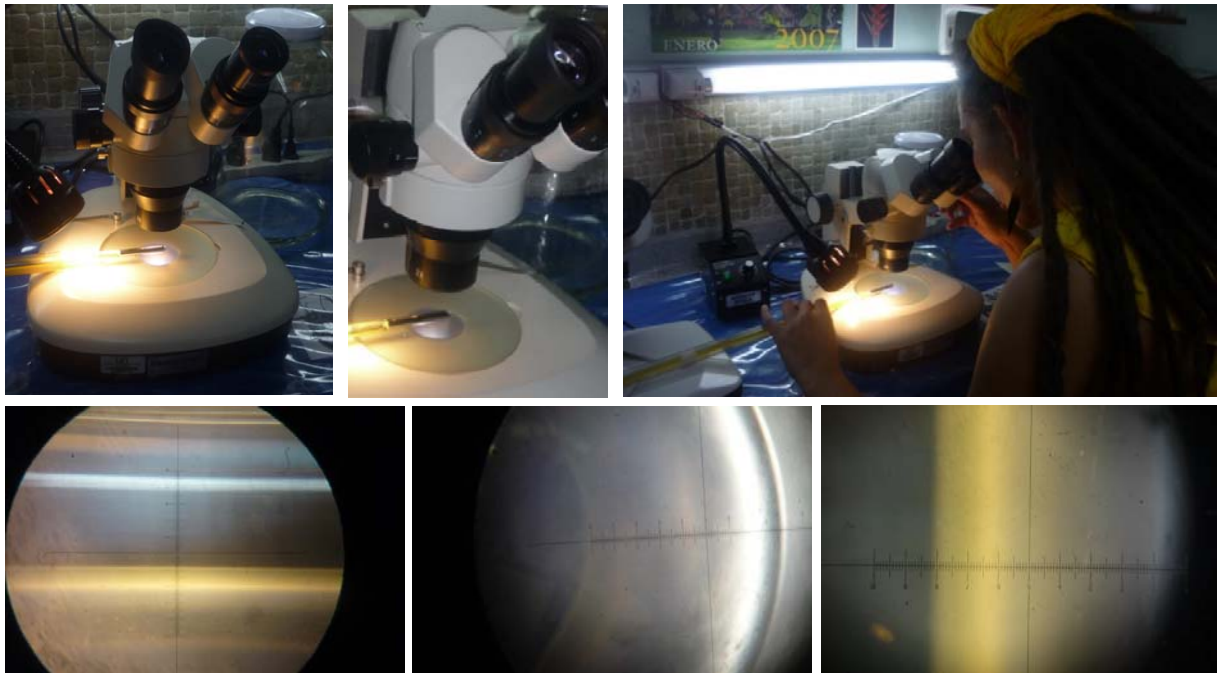


Figura 4.5 Medición del espesor de la pared del Bulbo con el Estereoscopio

4.3.2 Video grabadora y Software

Las grabaciones se realizaron con una handycam Sony. Se realizaron dos registros filmicos para cada orientación. La filmación de cada uno se llevó al programa Vegas Pro, donde se digitalizaron 12 cuadros por segundo, cada uno de los cuales quedó en una imagen. Para la lectura se tomaron sólo 4 imágenes por segundo, para un cambio de $\frac{1}{4}$ de segundo.



Figura 4.6 Elementos de grabación y edición [El Autor]

4.4 MONTAJE

4.4.1 Cilindro Vertical

Para este montaje se requiere de un soporte universal y pinzas de nuez para mantener el termómetro aplomado verticalmente, y de otro soporte móvil para la video cámara con el fin de guiar el seguimiento de la filmación del menisco.



Figura 4.7 Montaje para el termómetro vertical [El Autor]

4.4.2 Cilindro Horizontal

Para este montaje se diseñó una guía para la cámara, en forma de riel, véase la Figura 4.8.



Figura 4.8 Montaje para termómetro horizontal [El Autor]

4.5 PROCEDIMIENTO

A partir de la experiencia tenida se diseña la siguiente secuencia de pasas para llevar a cabo el experimento en forma satisfactoria:

- Realizar el montaje que se muestra esquemáticamente en la figuras, ya sea para cilindro vertical u horizontal.
- Cerrar la puerta del laboratorio para eliminar corrientes de aire que podrían influir en el ensayo. Y garantizar que no se induzca movimiento de aire durante el ensayo.
- Acercar lentamente al bulbo del termómetro la llama del mechero y observar que el menisco del mercurio en el termómetro alcance la temperatura máxima que se fije para el ensayo. Esta temperatura no debe sobrepasar nunca la temperatura máxima de la escala del termómetro, pues si esto ocurre el termómetro se descalibra y podría dañarse.

- Una vez alcanzada la temperatura máxima fijada, la cual se toma como temperatura inicial, retirar el mechero y colocar el vaso de tal forma que el bulbo del termómetro quede dentro del vaso como muestra la figura.
- Al final del procedimiento anterior ya la cámara de video debe estar filmando.
- Al enfriarse el bulbo del termómetro, para la orientación vertical el menisco del mercurio desciende por lo cual se debe mover la cámara sobre el soporte de la cámara y en la caso de la orientación horizontal la columna de mercurio se contrae por lo cual se debe mover la cámara sobre el riel; esto es importante tenerlo en cuenta para seguir el movimiento del menisco y así registrar y grabar la evolución de la temperatura en el tiempo.
- Durante el ensayo si hay personas alrededor, es importante que éstas no caminen cerca del ensayo pues al desplazarse se originan corrientes forzadas de aire y esto afecta el experimento pues ya no se tendría convección libre.

5. ANALISIS DE RESULTADOS

Según lo expuesto en el capítulo anterior, se realizaron unos ensayos preliminares que permitieron seleccionar los dos experimentos sobre los cuales se hace el estudio de la convección. Los experimentos seleccionados fueron los de enfriamiento del aire por convección libre alrededor del bulbo del termómetro. Uno para el termómetro en posición vertical y el otro en posición horizontal.

Se presentan los datos de las mediciones realizadas para cada uno de los experimentos, tanto verticales como horizontales, realizados para la determinación de los coeficientes de transferencia de calor. Luego se exponen los tratamientos matemáticos que se efectuaron a dichos datos y que se compilan de tres maneras: regresión por mínimos cuadrados, derivación e integración numérica y corrección por resistencia de pared. Seguidamente se muestran los resultados obtenidos por aplicar tales procesos para finalmente ser discutidos y analizados, comparando contra los valores esperados por distintos autores de la literatura.

5.1 MEDICIONES

En el capítulo anterior se mencionó como se registraron los datos de temperatura versus tiempo. Para la lectura del tiempo se utilizó el cronometro que trae incorporada la cámara y que se activa cuando comienza la filmación.

Una vez obtenidos con la cámara los registros temporales de temperatura, se transfirió la información digital de la cámara al computador. Posteriormente, se siguió el proceso de extraer del video las series de tiempo de temperatura, para ello se corrió el video con uno de los reproductores de video que trae el software de video del computador. Este proceso de lectura, que se esperaba que fuese fácil, resultó en la realidad muy laborioso, pues si se quería leer la temperatura para cierto intervalo regular de tiempo, no se lograba siempre lo mismo, ya que al parar la ejecución del video para registrar el tiempo que aparecía en la pantalla del computador, y haciendo varias repeticiones no se obtenía duplicidad. Así que fue necesario recurrir a un software especial, Vegas Pro, que permite producir hasta 24 cuadros por segundo de grabación, con los cual se obtuvo una serie de fotogramas, 12 por segundo, de los cuales se tomó la decisión de sólo hacer la lectura de 4 por segundo.

Los 4 experimentos registrados en convección natural en aire para flujo externo alrededor de un cilindro son:

| No. | EXPERIMENTO | T_0 °C | T_∞ °C | T_f °C | t_f, s | % H.R. | No. Fotogramas (leídos) |
|-----|-------------------------------|-------------|------------------|-------------|----------|--------|-------------------------|
| V-1 | Cilindro Horizontal | 30.025 | 20.5 | 21.405 | 1557.50 | 43 | 6231 |
| V-2 | Cilindro Horizontal (replica) | 30.200 | 20.6 | 21.439 | 1317.75 | 43 | 5272 |
| H-1 | Cilindro Vertical | 34.880 | 20.6 | 21.280 | 742,50 | 43 | 2971 |
| H-2 | Cilindro Vertical (replica) | 34.825 | 20.7 | 20.960 | 1104.25 | 43 | 4418 |

Tabla 5.1 Experimentos trabajados

Los datos están compilados en el Apéndice D. Aquí se exponen las gráficas de dichas curvas temporales, donde el intervalo entre uno y otro fotograma es de $\frac{1}{4}$ de segundo, es decir 0.25 s.

5.1.1 Cilindro Vertical

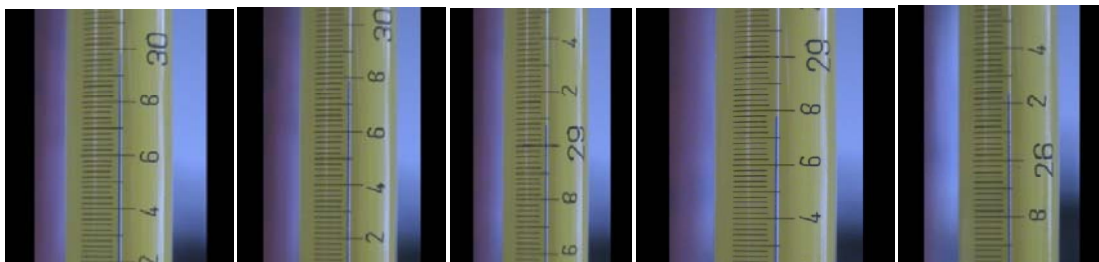


Figura 5.1 Fotogramas cilindro vertical

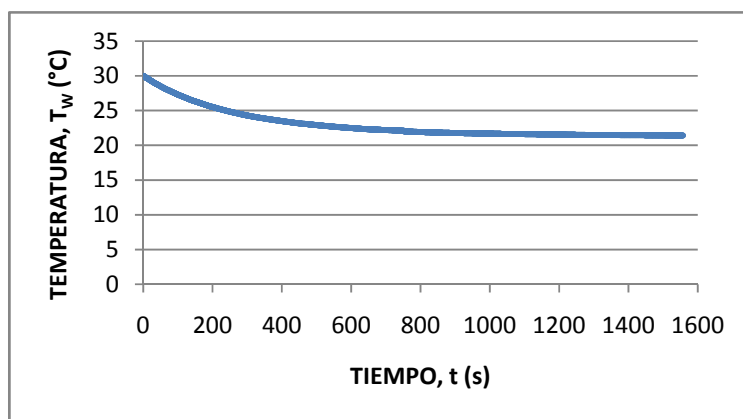


Figura 5.2 Experimento V-1

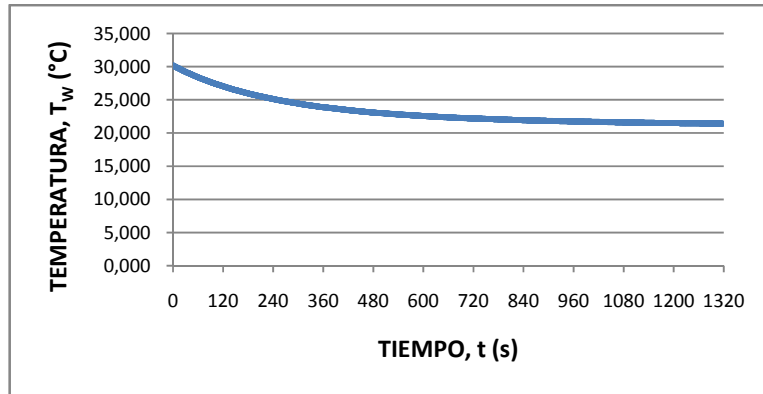


Figura 5.3 Experimento V-2.

5.1.2 Cilindro Horizontal

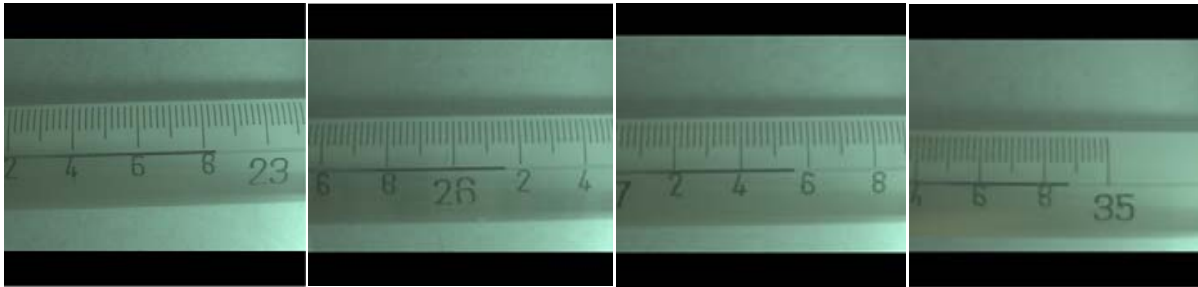


Figura 5.4 Fotogramas cilindro horizontal (sentido inverso)

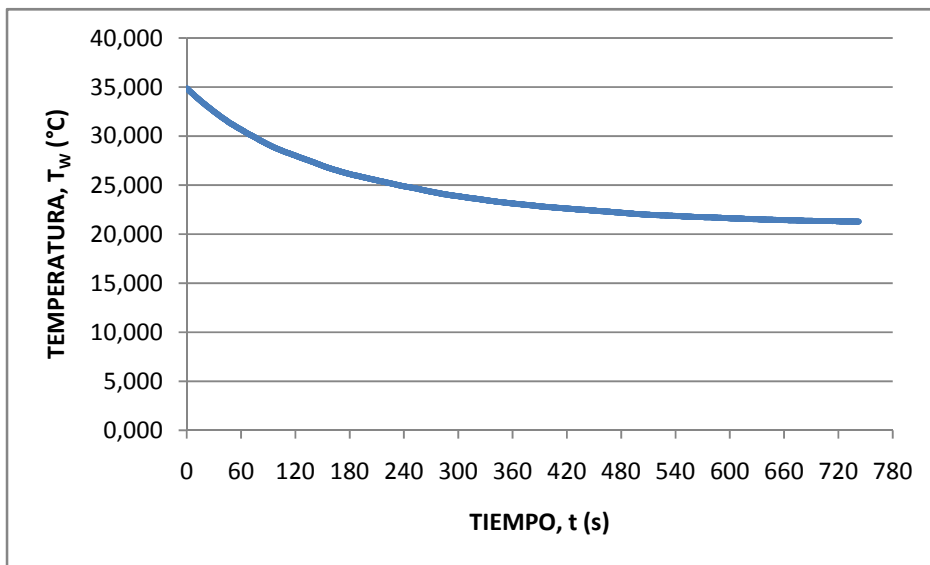


Figura 5.5 Experimento H-1

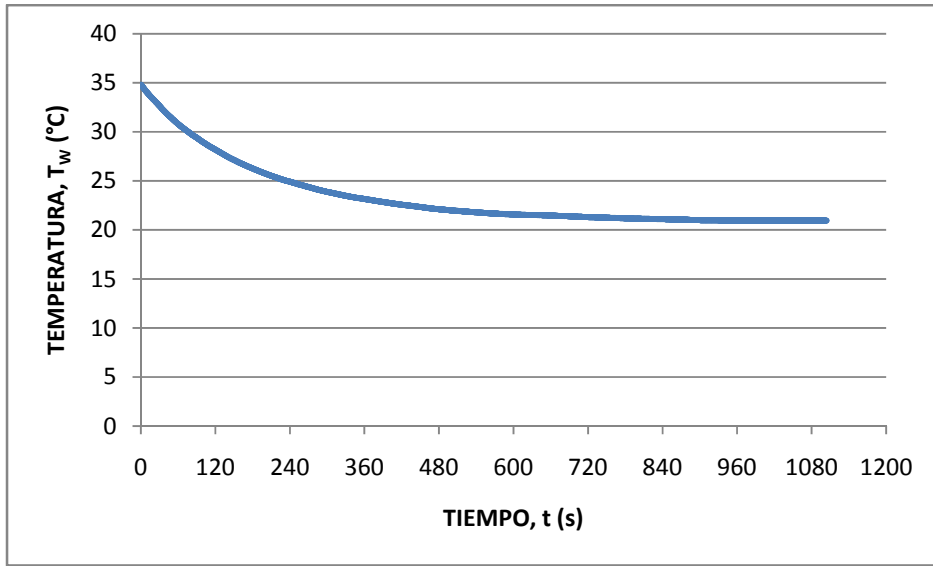


Figura 5.6 Experimento H-2

5.2 TRATAMIENTO DE DATOS

5.2.1 Determinación del intervalo de temperatura a trabajar

Usando el concepto de *constante de tiempo*, τ , como el tiempo requerido para lograr aproximadamente al $(1 - e^{-1}) \cdot 100\% \approx 63.21\%$ del cambio total de temperatura [SMITH], que corresponde a $T_0 - T_\infty$. De esta manera podemos plantear que la temperatura inferior del intervalo, T_m , está dada por:

$$T_m = e^{-1}(T_0 - T_\infty) + T_\infty = T_0 - (1 - e^{-1})(T_0 - T_\infty)$$

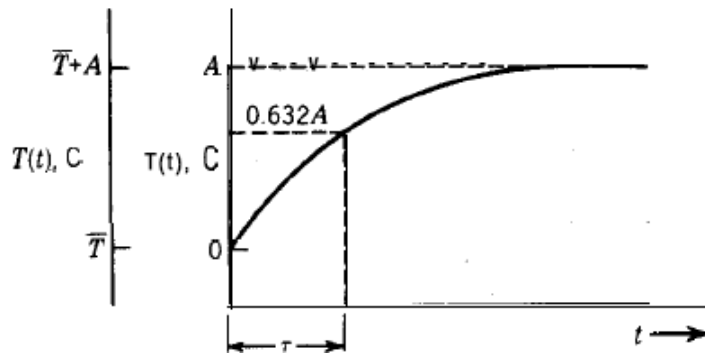


Figura 5.7 Significado de la Constante de Tiempo [SMITH]

Con ello se busca rechazar la zona de la curva que obedece a una respuesta estacionaria, ya que de acuerdo a la teoría de control cuando se tiene un $(1 - e^{-1}) \cdot 100\% \approx 63.21\%$ del cambio transitorio prácticamente se estabiliza en un estado estacionario. Cuando se acerca al equilibrio termodinámico el valor de los coeficientes instantáneos de transferencia de calor tiende a disminuir y a ser cero, debido a que la diferencia de temperatura también tiende a reducirse y a ser cero. De esta manera se asegura el estado transitorio, al trabajar en la región exponencial definida por $[T_m, T_0]$.

Es decir que de la serie de datos obtenidos, correspondientes a la evolución de la temperatura para cada experimento, sólo se toman desde T_0 hasta T_m , lo que implica rechazar desde T_m hasta T_f .

5.2.2 Parámetros

5.2.2.1 Propiedades Físicas

Las propiedades se calcularon teniendo en cuenta la temperatura promedio entre la inicial y final, que se evalúa por el teorema integral del valor medio, y la integral a su vez se resuelve mediante la Regla de Simpson 1/3:

$$\bar{T}_w = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} T(t) dt \approx \frac{\Delta t}{3t_m} [T(t_0) + 4T(t_1) + 2T(t_2) + 4T(t_3) + \dots + 2T(t_{n-2}) + 4T(t_{n-1}) + T(t_n)]$$

Y la temperatura de película promedio con la que se determinan las propiedades del aire es:

$$\bar{T}_f = \frac{1}{2}(\bar{T}_w + T_\infty)$$

Los valores de las variaciones de las propiedades con la temperatura se extrajeron de la literatura [KRETIH], con los cuales se generaron (por regresión) las siguientes correlaciones en **SI** (la temperatura en °C, excepto para el c_p , β y ρ del aire que además estarán en K):

Mercurio:

$$\rho = -2.4291T + 13628 \quad R^2 = 1.0$$

$$c_p = 4 \times 10^{-6}T^3 + 0.0006T^2 - 0.0559T + 140.3 \quad R^2 = 1.0$$

para el intervalo: $0^\circ\text{C} \leq T \leq 100^\circ\text{C}$

Aire:

$$\mu = (0.0412T + 17446) \times 10^{-6} \quad R^2 = 0.9994$$

$$k = 7 \times 10^{-5} + 0.0237 \quad R^2 = 1.0$$

para el intervalo: $0^\circ\text{C} \leq T \leq 60^\circ\text{C}$

$$c_p \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right] = \frac{1}{M} (28.11 + 1.97 \times 10^{-3}T + 4.80 \times 10^{-6}T^2 - 1.97 \times 10^{-9}T^3)$$

para el intervalo: $273 \text{ K} \leq T \leq 1800 \text{ K}$

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

$$\beta = \frac{1}{T}$$

con [CENGEL]:

$$M = 28.97 \text{ kg/kmol} \quad \text{y} \quad R = 0.2897 \text{ kJ/kgK}$$

5.2.2.2 Condiciones de Trabajo

Las condiciones de presión atmosférica local y aceleración gravitacional son:

$$P_{atm} = 560 \text{ mm Hg} = 74660.53 \text{ Pa}$$

$$g = 9.803 \text{ m/s}^2$$

5.2.2.3 Especificaciones del Bulbo

Para la envolvente cilíndrica o pared del bulbo se tienen las siguientes especificaciones:

| | |
|--------------------|--------------|
| D_{ext} , mm | 7.38 |
| t , mm (espesor) | 1.3273 |
| D_{int} , mm | 4.73 |
| L^* , mm | 45.3 |
| Material | Vidrio Pyrex |
| k , W/m°C | 1.09 [MILLS] |

Tabla 5.2 Especificaciones de la pared del bulbo

5.2.3 Regresión por mínimos cuadrados

Para determinar los coeficientes de transferencia de calor y comprobar el modelo va a utilizarse el método de mínimos cuadrados aplicando a la solución de la ecuación [3-7]

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-Bi\tau}$$

Si se arregla de la siguiente forma:

$$Z = BiY$$

donde:

$$Z = \ln \frac{\theta}{\theta_0} \quad Y = -\tau$$

como $\theta_0 = 1$ entonces:

$$Z = \ln \theta \quad Y = -\tau$$

Aplicando el método de mínimos cuadrados puede obtenerse el coeficiente convectivo en términos de datos experimentales:

$$Bi = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i Z_i}{\sum_{i=1}^n Y_i^2}$$

esta última asume que el intercepto con el eje de la variable dependiente es cero, de lo contrario se debe asumir que [CHAPRA]:

$$Bi = \frac{n \sum_{i=1}^n Y_i Z_i - \sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n Z_i}{n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2}$$

El índice de correlación, o coeficiente de determinación se encuentra mediante la fórmula [CHAPRA]:

$$r^2 = \frac{(n \sum_{i=1}^n Y_i Z_i - \sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n Z_i)^2}{[n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2][n \sum_{i=1}^n Z_i^2 - (\sum_{i=1}^n Z_i)^2]}$$

Aplicando lo anterior a todos los datos se obtiene un coeficiente de transferencia de calor promedio para todo el proceso de enfriamiento de acuerdo a la definición del número de Biot dada 3.1:

$$\bar{h}^* = \frac{Mc_p}{A_b t_m} Bi$$

Y el Nusselt promedio será:

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} \quad o \quad \overline{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{k}$$

5.2.4 Derivación e integración numérica

Para cada pareja de datos (t, T) o punto de la curva de enfriamiento se determina numéricamente la derivada, dT/dt , o cambio instantáneo de temperatura usando las formulas de primera derivada por diferencias finitas con cinco puntos: hacia adelante para los dos primeros puntos, las de hacia atrás para los dos últimos puntos y centradas para el resto de puntos [CHAPRA]. Adaptando y aplicando dichas formulas para el caso:

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t_i} = \frac{-T(t_{i+2}) + 4T(t_{i+1}) - 3T(t_i)}{2\Delta t} \quad \text{hacia adelante}$$

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t_i} = \frac{3T(t_i) - 4T(t_{i-1}) + T(t_{i-2})}{2\Delta t} \quad \text{hacia atras}$$

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t_i} = \frac{-T(t_{i+2}) + 8T(t_{i+1}) - 8T(t_{i-1}) + T(t_{i-2})}{12\Delta t} \quad \text{centrada}$$

Luego se calcula cada coeficiente de transferencia de calor instantáneo a través de la definición:

$$h(t_i)^* = \frac{M(t_i)c_p(t_i)}{A_b [T_\infty - T(t_i)]} \left. \frac{dT}{dt} \right|_{t_i}$$

Ahora por el teorema integral del valor medio se determina el valor promedio del coeficiente:

$$\bar{h}^* = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} h(t) dt$$

Dicha integral definida se resuelve por la Regla de Simpson de 1/3, la cual requiere un número par de particiones, n . Si los datos arrojan número impar de particiones, se elimina el último par de mediciones (T, t) .

$$\bar{h}^* = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} h(t) dt =$$

$$\bar{h}^* \approx \frac{1}{t_m} \left\{ \frac{\Delta t}{3} [h(t_0) + 4h(t_1) + 2h(t_2) + 4h(t_3) + 2h(t_4) + \dots + 2h(t_{n-2}) + 4h(t_{n-1}) + h(t_n)] \right\}$$

El error de esta determinación numérica es:

$$E_r = \frac{(\Delta t)^4}{180} \left. \frac{dh^4}{dt^4} \right|_{\xi} \quad \text{con } 0 \leq \xi \leq t_m$$

Para la determinación de este error, se procede con la serie temporal de coeficientes de calor instantáneos obtenidos anteriormente de la siguiente manera. Para cada tiempo se calcula numéricamente la cuarta derivada usando las siguientes formulas adaptadas a la presente situación [CHAPRA, MATHEWS]:

$$\left. \frac{dh^4}{dt^4} \right|_{t_i} = \frac{-2T(t_{i+5}) + 11T(t_{i+4}) - 24T(t_{i+3}) + 26T(t_{i+2}) - 14T(t_{i+1}) + 3T(t_i)}{(\Delta t)^4} \quad \text{hacia adelante}$$

$$\left. \frac{dh^4}{dt^4} \right|_{t_i} = \frac{3T(t_i) - 14T(t_{i-1}) + 26T(t_{i-2}) - 24T(t_{i-3}) + 11T(t_{i-4}) - 2T(t_{i-5})}{(\Delta t)^4} \quad \text{hacia atras}$$

$$\left. \frac{dh^4}{dt^4} \right|_{t_i} = \frac{-T(t_{i+3}) + 12T(t_{i+2}) - 39T(t_{i+1}) + 56T(t_i) - 39T(t_{i-1}) + 12T(t_{i-2}) - T(t_{i-3})}{6(\Delta t)^4} \quad \text{centrada}$$

Para los tres primeros puntos se aplica la formula de diferencias divididas finitas hacia adelante, para los tres últimos puntos la formula de diferencias divididas finitas hacia atrás y para el resto de puntos la formula de diferencias divididas finitas centradas. Luego se ubica tanto el máximo y como el mínimo de estos valores de 4ª derivada, y entre estos dos se toma la 4ª derivada de mayor valor absoluto, con la cual se calcula en la formula el error máximo debido a la aplicación de la integración numérica.

5.2.5 Corrección por Resistencia de Pared

Finalmente la corrección por haber incluido la resistencia térmica conductiva de la pared del bulbo (en realidad un coeficiente global aire-vidrio), y que está dada en la ecuación [3-13] permite hallar el coeficiente de transferencia de calor individual del aire:

$$h = \frac{1}{\frac{1}{h^*} - A_b R_w}$$

donde R_w es la resistencia de pared dada por la ecuación de la resistencia conductiva en un cilindro hueco:

$$R_w = \frac{1}{2\pi kL} \ln \frac{D_{ext}}{D_{int}}$$

Este valor del largo del bulbo tiene excluido el grosor de la punta, que también es una envoltura de vidrio de espesor 2.1 mm.

$$L = L_b - t_{punta} = 47.4 - 2.1 = 45.3 \text{ mm}$$

De esta manera la resistencia conductiva de pared es:

$$R_w = \frac{1}{2\pi kL} \ln \frac{D_{ext}}{D_{int}} = \frac{1}{2\pi \cdot 1.09 \text{ W/m}^\circ\text{C} \cdot 0.0453 \text{ m}} \ln \frac{7.38 \text{ mm}}{4.73 \text{ mm}} = 1.43696 \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}}$$

Como la superficie lateral exterior del cilindro es: $A_b = 1.10 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. Entonces la corrección por resistencia de pared para hallar el verdadero coeficiente de transferencia de calor es:

$$h = \frac{1}{\frac{1}{h^*} - A_b R_w} = \frac{1}{\frac{1}{h^*} - 1.10 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot 1.43696 \text{ }^\circ\text{C/W}} = \frac{1}{\frac{1}{h^*} - 0.00157917}$$

5.3 RESULTADOS

Los valores de Nusselt promedio obtenidos experimentalmente para los cilindros verticales están referenciados con respecto a la altura, **L**, mientras que para cilindros horizontales están referenciados con respecto al diámetro, **D**.

5.3.1 Intervalos de temperatura

| Exp. No. | V-1 | V-2 | H-1 | H-2 |
|-----------------------|--------|--------|----------|--------|
| $T_m, ^\circ\text{C}$ | 24.004 | 24.068 | 25.79011 | 25.772 |
| t_m, s | 333.00 | 340.50 | 196.00 | 199.50 |

Tabla 5.3 Determinación de la temperatura correspondiente a la constante de tiempo

5.3.2 Regresión por Mínimos Cuadrados

| Exp. No. | n | ΣY | ΣZ | ΣYZ | ΣY^2 | ΣZ^2 | t_m, s |
|----------|------|------------|------------|-------------|--------------|--------------|-----------------|
| V-1 | 1333 | -666.5000 | -705.2689 | 463.8816 | 444.5001 | 484.5755 | 333.00 |
| V-2 | 1363 | -681.5000 | -722.3564 | 474.6259 | 454.5001 | 496.1782 | 340.50 |
| H-1 | 785 | -392.5000 | -417.2790 | 274.0391 | 261.8335 | 287.1623 | 196.00 |
| H-2 | 799 | -399.5000 | -414.2404 | 273.3962 | 266.5002 | 280.6190 | 199.50 |

| Exp. No. | R^2 | Con intercepto en el origen | | | Sin intercepto en el origen | | |
|----------|----------|-----------------------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|-----------------------------|---------------|
| | | Bi | $h^*, \text{W/m}^2\text{K}$ | Nu^* | Bi | $h^*, \text{W/m}^2\text{K}$ | Nu^* |
| V-1 | 0.998341 | 1.043603 | 4.2768 | 8.0000 | 0.999973 | 4.0980 | 7.6656 |
| V-2 | 0.998226 | 1.044281 | 4.1851 | 7.8275 | 0.997341 | 3.9970 | 7.4756 |
| H-1 | 0.997935 | 1.046616 | 7.2783 | 2.1111 | 0.997195 | 6.9347 | 2.0114 |
| H-2 | 0.999218 | 1.025876 | 7.0087 | 2.0327 | 0.992896 | 6.7834 | 1.9674 |

Tabla 5.4 Evaluación del coeficiente por regresión con mínimos cuadrados

5.3.3 Derivación e integración numérica

| Exp. No. | $\Sigma h_i c_i$ | t_m, s | $h^*, \text{W/m}^2\text{K}$ | Nu^* | Error Máx |
|----------|------------------|-----------------|-----------------------------|---------------|-----------|
| V-1 | 16387.05 | 333.00 | 4.1009 | 7.6710 | 0.34 |
| V-2 | 16385.35 | 340.50 | 4.0101 | 7.5002 | 0.29 |
| H-1 | 16363.02 | 196.00 | 6.9571 | 2.0179 | 0.38 |
| H-2 | 16349.15 | 199.50 | 6.8292 | 1.9806 | 0.53 |

Tabla 5.5 Evaluación del coeficiente por derivación e integración numérica

5.3.4 Valores corregidos por resistencia de pared

| Exp. No. | Regresión | | | | Derivación e integración numérica | |
|----------|-----------------------------|--------|-----------------------------|--------|-----------------------------------|--------|
| | Con intercepto en el origen | | Sin intercepto en el origen | | | |
| | h, W/m ² K | Nu | h, W/m ² K | Nu | h, W/m ² K | Nu |
| V-1 | 4.3059 | 8.0544 | 4.1247 | 7.7155 | 4.1276 | 7.7210 |
| V-2 | 4.2130 | 7.8796 | 4.0224 | 7.5231 | 4.0357 | 7.5480 |
| H-1 | 7.3630 | 2.1357 | 7.0114 | 2.0337 | 7.0343 | 2.0404 |
| H-2 | 7.0872 | 2.0554 | 6.8569 | 1.9887 | 6.9037 | 2.0022 |

Tabla 5.6 Valores corregidos por resistencia de pared

Los cambios porcentuales en el coeficiente al introducir esta corrección son:

| Exp. No. | Regresión | | Derivación e integración numérica |
|----------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|
| | Con intercepto en el origen | Sin intercepto en el origen | |
| V-1 | 0.68 | 0.65 | 0.65 |
| V-2 | 0.67 | 0.64 | 0.64 |
| H-1 | 1.16 | 1.11 | 1.11 |
| H-2 | 1.12 | 1.08 | 1.09 |

Tabla 5.7 Aumentos porcentuales debidos a la corrección por resistencia de pared

5.3.5 Valores esperados

5.3.5.1 Cilindro Vertical

| EXPERIMENTO | V-1 | | V-2 | |
|---------------------------|---------|-----------------------|---------|-----------------------|
| | Nu | h, W/m ² K | Nu | h, W/m ² K |
| <i>Predicción Teórica</i> | 10.7897 | 5.7681 | 10.8201 | 5.7852 |
| <i>Cebeci</i> | 12.5340 | 6.7006 | 12.5613 | 6.7161 |
| <i>Cebeci Pr=0.72</i> | 12.7041 | 6.7916 | 12.7613 | 6.8070 |
| <i>Yang</i> | 11.3330 | 6.0586 | 11.3670 | 6.0776 |
| <i>Janna*</i> | 2.2105 | 7.5898 | 2.2163 | 7.6110 |
| <i>Elbass*</i> | 2.7036 | 9.2830 | 2.7147 | 9.3224 |
| <i>Kuehn*</i> | 1.9118 | 6.5642 | 1.9166 | 6.5818 |

Tabla 5.8 Valores esperados de coeficientes de transferencia de calor para cilindros verticales

*Usan Nu_D , el resto son con Nu_L

| Exp. No. | T_{∞} , °C | $T_{W_{proy}}$, °C | $T_{f_{proy}}$, °C | Pr | Gr_L | Ra_L | Gr_D | Ra_D |
|----------|-------------------|---------------------|---------------------|---------|----------|----------|--------|--------|
| V-1 | 20.50 | 26.35 | 23.43 | 0.73023 | 45883.09 | 33504.99 | 173.18 | 126.46 |
| V-2 | 20.50 | 26.45 | 23.48 | 0.73021 | 46640.81 | 34057.67 | 176.04 | 128.54 |

Tabla 5.9 Condiciones y valores de números adimensionales para el aire usados en cilindros verticales

5.3.5.2 Cilindro Horizontal

| EXPERIMENTO | H-1 | | H-2 | |
|--------------------------|--------|----------------|--------|----------------|
| | Nu_D | h , W/m^2K | Nu_D | h , W/m^2K |
| <i>Merk and Prins</i> | 1.6107 | 5.5530 | 1.6141 | 5.5654 |
| <i>Hermann</i> | 1.4868 | 5.1260 | 1.4900 | 5.1374 |
| <i>Eckert</i> | 1.9579 | 6.7502 | 1.9621 | 6.7653 |
| <i>Churchill</i> | 1.8121 | 6.2474 | 1.8152 | 6.2587 |
| <i>Churchill Laminar</i> | 1.8904 | 6.5175 | 1.8934 | 6.5286 |
| <i>Morgan</i> | 2.2709 | 7.8291 | 2.3136 | 7.9873 |
| <i>Kuehn</i> | 2.3268 | 8.0220 | 2.3301 | 8.0343 |

Tabla 5.10 Valores esperados de coeficientes de transferencia de calor para cilindros horizontales

| Exp. No. | T_{∞} , °C | $T_{W_{proy}}$, °C | $T_{f_{proy}}$, °C | Pr | Gr_D | Ra_D |
|----------|-------------------|---------------------|---------------------|--------|--------|--------|
| H-1 | 20.50 | 29.31 | 24.90 | 0.7298 | 255.19 | 186.25 |
| H-2 | 20.50 | 29.39 | 24.95 | 0.7298 | 257.36 | 187.83 |

Tabla 5.11 Condiciones y valores de números adimensionales para aire usados en cilindros horizontales

5.3.6 Comparación

Se toma como base de referencia para el cilindro vertical la regresión de la solución de Cebeci, mientras que para el cilindro horizontal la de Churchill (Laminar con 4.5% de error), que son las formulas más complejas y las que ofrecen mayor precisión, además de su reconocimiento.

5.3.6.1 Cilindro Vertical

Se enlistan los valores del coeficiente, en W/m^2K , de transferencia de calor considerando las correcciones por resistencia de pared.

| Exp. No. | REFERENCIA | EXPERIMENTAL | | | TEÓRICO |
|----------|---------------|--|--|-------------------------------------|-------------------|
| | <i>Cebeci</i> | <i>Regresión con intercepto cero</i> | <i>Regresión sin intercepto cero</i> | <i>Derivación e integración</i> | <i>Predicción</i> |
| V-1 | 6.7006 | 4.3059 | 4.1247 | 4.1276 | 5.7681 |
| V-2 | 6.7161 | 4.2130 | 4.0224 | 4.0357 | 5.7852 |

Tabla 5.12 Coeficientes de transferencia de calor para cilindros verticales

Los errores relativos porcentuales tomando como base la referencia son:

| Exp. No. | <i>Regresión con intercepto cero</i> | <i>Regresión sin intercepto cero</i> | <i>Derivación e integración</i> | <i>Predicción</i> |
|-----------------|--|--|-------------------------------------|-------------------|
| V-1 | -35.74 | -38.44 | -38.40 | -13.92 |
| V-2 | -37.27 | -40.11 | -39.91 | -13.86 |
| Promedio | -36.50 | -39.28 | -39.15 | -13.89 |

Tabla 5.13 Errores relativos porcentuales de los coeficientes para cilindros verticales

Tomando el promedio del error relativo porcentual de cada uno de los dos ensayos en comparación respecto a cada uno de los modelos:

| MODELO | <i>Regresión con intercepto cero</i> | <i>Regresión sin intercepto cero</i> | <i>Derivación e integración</i> | <i>Predicción</i> |
|---------------------------|--|--|-------------------------------------|-------------------|
| <i>Predicción Teórica</i> | -26.26 | -29.48 | -29.34 | - |
| <i>Cebeci</i> | -36.50 | -39.28 | -39.15 | -13.89 |
| <i>Cebeci Pr=0.72</i> | -37.35 | -40.09 | -39.97 | -15.04 |
| <i>Yang</i> | -29.80 | -32.87 | -32.73 | -4.80 |
| <i>Janna*</i> | -43.96 | -46.40 | -46.30 | -24.00 |
| <i>Elebass*</i> | -54.21 | -56.21 | -56.12 | -37.90 |
| <i>Kuehn*</i> | -35.20 | -38.02 | -37.90 | -12.12 |

Tabla 5.14 Errores relativos porcentuales promedio por ensayo para cilindros verticales

5.3.6.2 Cilindro Horizontal

| Exp. No. | REFERENCIA | EXPERIMENTAL | | |
|----------|--------------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------|
| | <i>Churchill (Laminar)</i> | <i>Con intercepto cero</i> | <i>Sin intercepto cero</i> | <i>Derivación e Integración</i> |
| H-1 | 6.5175 | 7.3630 | 7.0114 | 7.0343 |
| H-2 | 6.5286 | 7.0872 | 6.8569 | 6.9037 |

Tabla 5.15 Coeficientes de transferencia de calor para cilindros horizontales

| <i>Exp. No.</i> | <i>Regresión con intercepto cero</i> | <i>Regresión sin intercepto cero</i> | <i>Derivación e integración</i> |
|-----------------|--|--|---------------------------------|
| <i>H-1</i> | 12.97 | 7.58 | 7.93 |
| <i>H-2</i> | 8.56 | 5.03 | 5.75 |
| <i>Promedio</i> | 10.76 | 6.30 | 6.84 |

Tabla 5.16 Errores relativos porcentuales de los coeficientes para cilindros horizontales

| MODELO | <i>Regresión intercepto cero</i> | <i>Regresión no intercepto cero</i> | <i>Derivación e integración</i> |
|--------------------------|--------------------------------------|---|---------------------------------|
| <i>Merk and Prins</i> | 29.97 | 24.73 | 25.36 |
| <i>Hermann</i> | 40.80 | 35.13 | 35.80 |
| <i>Eckert</i> | 6.92 | 2.61 | 3.13 |
| <i>Churchill</i> | 15.55 | 10.89 | 11.45 |
| <i>Churchill Laminar</i> | 10.76 | 6.30 | 6.84 |
| <i>Morgan</i> | -8.61 | -12.30 | -11.86 |
| <i>Kuehn</i> | -10.00 | -13.63 | -13.19 |

Tabla 5.17 Errores relativos porcentuales promedio por ensayo para cilindros horizontales

5.4 ANALISIS Y DISCUSIÓN

Desde el punto de vista meramente cualitativo, en los experimentos preliminares se observó que cuando se utilizan líquidos bien sea para calentar o enfriar el bulbo del termómetro, la temperatura variaba más rápidamente que cuando se utiliza un gas (aire). Ello es indicio que el transporte de calor es mayor en los fluidos líquidos que en el fluido gaseoso (aire) y como el flujo de calor convectivo es proporcional al coeficiente convectivo de transferencia de calor entonces el coeficiente de transferencia de calor bajo las mismas condiciones es mayor en los fluidos líquidos que transportaron el calor.

Al comparar el experimento denominado ensayo-1 con el experimento denominado ensayo-2, el cual se hizo con una diferencia de temperatura $T_{\infty} - T_0$ mayor entre fluido y bulbo, se observó que el menisco descendía más rápidamente cuando la diferencia de temperatura $T_{\infty} - T_0$ era menor, por lo cual el coeficiente convectivo de transferencia de calor es menor en

este caso. Por lo cual es de esperarse que en el ensayo-2 los coeficientes de Transferencia de Calor sean menores con respecto al ensayo-1.

Ahora desde un punto de vista más cuantitativo se observa que la totalidad de los valores de los coeficientes de calor encontrados experimentalmente están dentro de los valores esperados, por lo menos en cuanto al orden de magnitud, caso de convección natural en aire, tanto para el cilindro vertical como para el vertical ya que todos están oscilando alrededor del orden de magnitud esperado de $5 \text{ W/m}^2\text{K}$ de convección libre en aire. Sin embargo, los valores obtenidos del coeficiente de transferencia de calor para los cilindros verticales presentan una mayor desviación de los valores esperados por la literatura frente a los cilindros horizontales.

Los índices de correlación muestran un excelente ajuste de los datos experimentales al modelo planteado para el termómetro. Como el menor valor de correlación fue de 0.997935 para el experimento H-1, podemos decir que el modelo de ajuste del termómetro por lo menos explica aproximadamente el 99.79% de la incertidumbre original. Este ajuste en promedio del 99.8% se pudo lograr gracias a la exclusión y rechazo de la parte estacionaria del intervalo de temperaturas trabajado, y por ende solo se maneja el 63.21% del cambio total teórico posible de temperatura, desde T_0 hasta T_∞ . Si esto no se hubiera efectuado el menor valor de correlación caería hasta un 91%.

Se observa también una notoria concordancia entre los coeficientes de transferencia de calor obtenidos por diferentes procesos numéricos, es decir hay una buena convergencia entre los coeficientes arrojados por la regresión por mínimos cuadrados y los que se procesaron con derivación e integración numéricas. Comparando numéricamente, se tiene que los menores valores de coeficientes se obtienen con la regresión sin intercepto en el origen, siendo levemente mayores (entre un 0.1 y 0.7% aproximadamente) aquellos que resultan con la derivación e integración numéricas, mientras que los de regresión con intercepto en el origen aumentan (entre un 3 a 5% aproximadamente), es decir son los mayores. Esto indica que el método de regresión sin intercepto en el origen resulta equivalente al método numérico derivativo-integrativo.

Es notorio que los errores máximos generados al realizar la integración numérica se encuentren entre el 5.5 y el 8.3%. La confrontación de los coeficientes obtenidos experimental y teóricamente con respecto a los valores esperados se da a continuación; para ello se verificó que los números de Pr , Gr y Ra de las Tablas 5.9 y 5.11 de los experimentos realizados

pertencieran a los intervalos de las restricciones de cada una de las correlaciones empleadas para así poder habilitar su uso; también se aclara que no todas las correlaciones extraídas de la literatura declaran la incertidumbre y margen de error, solo la de Churchill Laminar con 4.5%.

Para cilindros verticales se tiene que los valores determinados experimentalmente están por debajo de los esperados tanto por la predicción teórica como por los de otros autores de la literatura. El error oscila deficitariamente entre un 26.26 (Teórica) hasta un 56.21% (Elenbass); frente a los modelos de predicción teórica y de Yang se tienen las menores desviaciones (alrededor del 30%), mientras que ante los modelos de Elenbass y Janna se presentan los mayores alejamientos (del 50% aproximadamente). Los menores errores frente a los modelos siempre se logran cuando se realiza el tratamiento de datos experimentales con regresión con intercepto en el origen. Con respecto al modelo que ofrece mayor confiabilidad y exactitud, Cebeci, los valores obtenidos están casi que un 38% por debajo de los esperados.

Una posible explicación de esta desviación, es una reducción muy notable de la turbulencia natural producida por la interacción del vaso alrededor del bulbo, tal vez lo mas recomendado sea colocar un recipiente de mucho mayor diámetro o hacer el experimento dentro de una cámara o campana. También por comparación con los correspondientes coeficientes en una pared plana vertical, se observa que los coeficientes determinados experimentalmente son levemente superiores en alrededor un 3.5%, lo que no está siendo notable el efecto de la curvatura; sin embargo, este debe ser tenido en cuenta ya que se encuentra apenas en un 6.5% para cumplir con el criterio de Gebhart y así tratar el cilindro vertical como una pared como una plana.

Analizando ahora el valor del coeficiente para el cilindro vertical obtenido por predicción con el método integral, la máxima desviación frente a los resultados experimentales es de alrededor del 30.47%, la condición más favorable se da cuando se compara con los arrojados por el procesamiento de regresión-intercepto cero, del 25.35%. Comparando la predicción contra los otros modelos de la literatura se tiene un error relativo desde el -4.8% (Yang) hasta un -37.9% (Elenbass). Frente al modelo de Cebeci, los valores predichos teóricamente están alrededor del 13.9% por debajo. El error medio frente al conjunto de modelos es del 18.8%.

El valor predicho se encuentra por debajo de los valores esperados por la literatura, lo cual aparece como obvio, ya que durante el desarrollo del modelo teórico (empezando que se utilizó un método integral aproximado) se hicieron varias aproximaciones, como por ejemplo el uso de apenas dos términos para los perfiles de capa límite y velocidad de escala propuestos para la

resolución del sistema de ecuaciones diferenciales por el método de perturbación, además de una siguiente aproximación con cuatro términos al usar una expansión del logaritmo natural en serie de Maclaurin para el coeficiente promedio de transferencia de calor en las ecuaciones [2-14] y [2-15]; es de esperarse que el valor del número de Nusselt y por ende de los coeficientes predichos por la ecuación obtenida sean menores a los esperados, debido a que se descartan términos que aportan en el incremento del efecto de la curvatura.

En términos generales hay una muy buena convergencia entre los valores de coeficientes predichos para el cilindro vertical con los coeficientes que se esperan por la literatura, como ya se mencionó, su valor es siempre inferior a los esperados, y se ajustan mucho al modelo de Yang (solo un 4.8% de diferencia), mientras que a modelos como el de Cebeci y Kuehn que son más exactos la variación va de un 12 a 14%. Es decir que hay convergencia del modelo de predicción obtenido conforme a las correlaciones de la literatura para hallar el coeficiente de transferencia de calor.

Lógicamente los valores de los coeficientes deben ser mayores que a los de una pared plana para las mismas condiciones, el coeficiente de transferencia de calor promedio es de alrededor de $4 \text{ W/m}^2\text{K}$ por el modelo de Pared Plana de Churchill y Chu. Lo que se debe al efecto de la curvatura convexa que estimula el fenómeno de transferencia. Es de esperar que en superficies de curvatura cóncava, los coeficientes de transferencia de calor sean menores a los de una superficie plana, ya que presentan mayores zonas de estancamiento, es decir que la forma de la superficie puede favorecer o desfavorecer el flujo. La expresión teórica que se logró para predecir coeficientes de transferencia de calor por convección libre alrededor de cilindros verticales aplicada al bulbo del termómetro en las condiciones de trabajo, indica un aumento del 45% del valor del coeficiente respecto a si su hubiera asumido como una pared plana correspondiente. El segundo término de la expresión que indica el aporte de la curvatura al fenómeno representa para estos casos alrededor de un 31% del total del coeficiente.

Para cilindros horizontales los resultados arrojados indican que hay una mayor convergencia con los modelos de la literatura, la desviaciones están desde -13.63% (Kuhén) hasta 40.80% (Hermann). En general se tiene un error promedio del 9.4% ante la totalidad de los modelos. Los valores obtenidos están en la mayoría de caso por encima de los esperados, a excepción de Morgan y Kuehn que reportan valores más altos (Error del 32%). El modelo al que más se ajusta la determinación es al de Eckert ya que el valor obtenido por procesamiento con regresión por intercepto arroja un 2.61% de error y por derivación e integración numérica un

3.13% de error. El modelo más alejado a los resultados es el de Hermann ya que tiene alrededor de un 37% de error; no olvidar que el modelo de Hermann es meramente teórico. Enfrentado al modelo de Kuehn, que es el más complejo y que viene de una deducción de teoría de capa límite, los resultados de la experimentación están alrededor de un 12.3% por debajo de lo esperado, mientras que al de Churchill Laminar están 8% por encima.

El análisis efectuado a la comparación entre los valores obtenidos experimentalmente a través de los tres procedimientos para cilindros verticales es similar al de horizontales: Los mayores valores son los de regresión con intercepto en el origen (4% en promedio mayores a los de sin intercepto en el origen) y a la vez también son los que presentan mayor desviación (alrededor de 12.2% en promedio) frente a los valores esperados por la literatura; los valores obtenidos a través de derivación e integración numérica son 0.5% superiores a los de regresión sin intercepto en el origen y en conjunto estos dos métodos arrojan resultados alejados en promedio tan solo un 7.9% de los esperados.

Al realizar la corrección de los valores de los coeficientes obtenidos por la inclusión en estos de la resistencia de pared, lo que los hacen globales vidrio-aire, se observa lógicamente que al lograr los coeficientes individuales aire, estos son mayores que cuando estaban sin corregir. En los experimentos para el cilindro vertical las correcciones permitieron un aumento relativo porcentual en casi un 0.65%; mientras que para los efectuados con el cilindro horizontal fue de alrededor de 1.10% aproximadamente. Estos incrementos se hacen mayores a medida que también sean mayores los coeficientes globales a corregir (para convertirlos en individuales).

En conjunto, y tomando un promedio, los modelos de la literatura predicen que los coeficientes para el mismo cilindro y a las mismas condiciones son ligeramente superiores para un cilindro horizontal, que para uno vertical en apenas un 2%. Cualitativamente se observó que los valores obtenidos horizontalmente fueron mayores –ya que el tiempo de llegada al equilibrio fue menor– y cuantitativamente también se verifica este hecho, pero de manera exagerada ya que los horizontales obtenidos son un 70% mayores a los verticales. Con esto se refuerza lo ya expresado anteriormente: los resultados experimentales para cilindro vertical presentan más error que los horizontales.

Entonces la desviación de los valores arrojados experimentalmente para los coeficientes de transferencia de calor en cilindros verticales encierran alguna explicación física, explicación diferente a la de los errores de medición, ya que el déficit de los valores está en alrededor de un 35%.

6. PRÁCTICA: COEFICIENTE DE TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN LIBRE ALREDEDOR DE UN CILINDRO

6.1 OBJETIVOS

- Determinar el coeficiente de transferencia de calor en situaciones de convección libre alrededor de un cilindro.
- Comparar el coeficiente experimental con los obtenidos a través de las correlaciones teóricas y empíricas.
- Determinar el número de Nusselt para las configuraciones trabajadas.

6.2 FUNDAMENTO TEÓRICO

Usualmente el coeficiente de transferencia de calor viene reportado en términos del número de Nusselt, el cual se define como:

$$Nu = \frac{hL_c}{k}$$

Donde Nu : Número de Nusselt basado en la longitud característica L_c ; h : Coeficiente de transferencia de calor ($\text{vatios}/\text{m}^2 \cdot \text{°K}$); k : conductividad térmica del fluido.

El experimento que permite determinar el coeficiente de Transferencia de Calor, está basado en la ley de enfriamiento de Newton:

$$\dot{Q} = hA(T_w - T_\infty)$$

Donde: \dot{Q} : Flujo de calor [W]; A : Área de Transferencia de Calor Convectiva [m^2]; $T_w - T_\infty$: diferencia de temperatura entre la superficie del bulbo del termómetro y la temperatura en el espesor de la capa límite térmica [°C ó K].

Para transferencia de calor alrededor de un cilindro (vertical u horizontal) en contacto con un fluido de diferente temperatura existen varias correlaciones en la literatura. Algunas de ellas son teóricas y otras completamente empíricas. A continuación se listan algunas de las anteriores además de las desarrolladas en esta tesis.

6.2.1 Correlaciones Teóricas

Para un cilindro vertical y basándose en la hipótesis aproximada de Langmuir de capa límite estacionaria de una superficie curva, Elenbaas (1948) planteó:

$$Nu_D = 0.6 \left(\frac{D}{L}\right)^{1/4} Ra^{1/4} \exp\left(\frac{2}{Nu_D}\right)$$

Si $D \rightarrow \infty$ se tiene que

$$Nu_D = 0.6Ra^{1/4}$$

solución que corresponde a una pared plana.

De hecho el criterio para tratar un cilindro vertical igual que una pared plana vertical fue dado por Gebhart:

$$\frac{D}{L} \geq \frac{35}{Gr^{1/4}}$$

Las soluciones distan de menos 5% de la solución de pared plana para Pr desde 0.72 a 1.0

LeFevre y Ede (1956) emplearon un método integral para solucionar las ecuaciones de gobierno del fenómeno obteniendo la siguiente expresión del número de Nusselt promedio para régimen laminar [BEJAN]:

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k} = \frac{4}{3} \left[\frac{7Gr \cdot Pr^2}{5(20 + 21Pr)} \right]^{1/4} + \frac{4(272 + 315Pr)L}{35(64 + 63Pr)D}$$

Donde tanto \overline{Nu} y Gr están basados en la altura, L , del cilindro vertical.

Hermann (1936) dedujo una expresión para cilindros horizontales en régimen laminar resolviendo las ecuaciones diferenciales por el método de no similaridad, estableciendo que para aire:

$$\overline{Nu}_D = 0.372Gr_D^{1/4}$$

Merk and Prins (1953-1954) obtuvieron para cilindros horizontales en régimen laminar una solución empleando el método integral y asumiendo espesores iguales entre las capas límites térmica e hidrodinámica [BEJAN]:

$$\overline{Nu}_D = C(Pr)(Gr_D Pr)^{1/4} = C(Pr)Ra_D^{1/4}$$

Para valores de Pr de 0.7 (aire) el valor de la constante, $C(Pr)$ fue calculado como 0.436.

6.2.2 Correlaciones Empíricas

- Cilindros Verticales

Para cilindros verticales con un flujo de calor constante se tiene [JANNA]:

$$\overline{Nu}_D = C \left(Ra_D \frac{D}{L} \right)^n$$

| $Ra_D \frac{D}{L}$ | C | n |
|--------------------|------|------|
| ≤ 0.05 | 0.93 | 0.05 |
| 0.05- 10^4 | 1.37 | 0.16 |
| $\geq 10^4$ | 0.6 | 0.25 |

Tabla 6.1 Constantes para la ecuación de convección libre en cilindros verticales

Todos los valores de las propiedades se determinan a la temperatura de película, T_f , que corresponde al promedio aritmético entre la temperatura de pared, T_w , y la temperatura del seno del fluido T_∞ , excepto el coeficiente de expansión térmica, β , que en el caso de gases se determina a T_∞ .

$$T_f = \frac{1}{2}(T_w + T_\infty)$$

Se recuerda que para un gas ideal como el aire

$$\beta = \frac{1}{T_\infty}$$

Una correlación general recomendada por Yang para regiones en régimen laminar y turbulento tiene la forma [POPIEL]:

$$\overline{Nu}_L = \left\{ 0.60 \left(\frac{L}{D} \right)^{0.5} + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{[1 + (0.492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2$$

Los valores de los cálculos numéricos obtenidos por Cebeci para un parámetro de curvatura

$$\xi = \frac{\sqrt{32} H}{Gr_L^{0.25} D} < 5$$

pueden ser representados por la ecuación simple, para $Pr = 0.72$, en la región laminar [POPIEL]:

$$\overline{Nu}_L = \overline{Nu}_{L,PP} \left[1 + 0.300 \left(32^{0.5} Gr_L^{-0.25} \frac{L}{D} \right) \right]^{0.9091}$$

donde $\overline{Nu}_{L,PP}$ corresponde al de una pared plana vertical, dado por la correlación teórica [KARLEKAR]:

$$\overline{Nu}_{L,PP} = 0.677 Pr^{1/2} (0.952 + Pr)^{-1/4} Gr_L^{1/4}$$

o también por la correlación empírica desarrollada por Churchill y Chu para una placa vertical de altura, L , y con un borde frontal abrupto para flujo laminar [MILLS] :

$$\overline{Nu}_{L,PP} = 0.68 + 0.670 (Ra_L \psi)^{1/4}$$

donde la función del número de Prandtl, ψ , definida por Churchill y Usagi se define como:

$$\psi = \left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-16/9}$$

Los valores de Cebeci también pueden ser aproximados por una ecuación validada para números de Prandtl entre 0.01-100, es decir, $0.01 \leq Pr \leq 10$ [POPIEL]:

$$\overline{Nu}_L = \overline{Nu}_{L,PP} \left[1 + B \left(32^{0.5} Gr_L^{-0.25} \frac{L}{D} \right) \right]^C$$

donde:

$$B = 0.0571322 + 0.20305 Pr^{-0.43}$$

$$C = 0.9165 - 0.0043 Pr^{0.5} + 0.01333 \ln Pr + 0.0004809 / Pr$$

Popiel obtuvo una correlación a partir del enfriamiento de un cilindro en estado transitorio que tiene una incertidumbre promedio de 3.5% con un 95% de confianza, válida para:

$10^8 < Ra_L < 1,1 \times 10^9$, y, $L/D < 60$:

$$\overline{Nu}_L = A Ra_L^n$$

donde:

$$A = 0.519 + 0.03454 \left(\frac{L}{D}\right) + 0.0008772 \left(\frac{L}{D}\right)^2 + 8.855 \times 10^{-6} \left(\frac{L}{D}\right)^3$$

y

$$n = 0.25 - 0.00253 \left(\frac{L}{D}\right) + 1.152 \times 10^{-5} \left(\frac{L}{D}\right)^2$$

La dependencia generalizada de transferencia de calor por convección libre en un gas para flujo laminar y turbulento sobre un cilindro vertical está dada por la expresión de Kuehn [MARTINENKO]:

$$Nu_D = 2 / \ln \left[1 + 2 / \left\{ \left(0.67 (Ra_D D/L)^{1/4} [1 + (0.599/Pr)^{3/5}]^{-5/12} \right)^{15} + \left(0.1 Ra_D^{1/3} \right)^{15} \right\}^{1/15} \right]$$

Que es válida para:

$$0.01 \leq D/L \leq 1, \quad 0 \leq Pr \leq 1, \quad 10^{-5} \leq Ra_D \leq 10^{13} \quad y \quad T_f = (T_w + T_f)/2$$

- Cilindros Horizontales

Para $10^3 \leq Gr \leq 10^9$ y $Pr \geq 0.5$ se correlacionaron los datos experimentales de Eckert y Soehnghen [KREITH]:

$$\overline{Nu}_D = 0.53 (Gr_D Pr)^{1/4}$$

En forma más general Morgan para un cilindro isotérmico sugiere una expresión de la forma [INCROPERA]:

$$\overline{Nu}_D = C Ra_D^n$$

| Ra_D | C | n |
|------------------------|-------|-------|
| 10^{-10} - 10^{-2} | 0.675 | 0.058 |
| 10^{-2} - 10^2 | 1.020 | 0.148 |
| 10^2 - 10^4 | 0.850 | 0.188 |
| 10^4 - 10^7 | 0.480 | 0.250 |
| 10^7 - 10^{14} | 0.125 | 0.333 |

Tabla 6.2 Constantes para la ecuación de convección libre en cilindros horizontales

Churchill y Chu dan la siguiente correlación válida para $10^{-6} \leq Ra_D \leq 10^9$ [MILLS]:

$$\overline{Nu}_D = 0.36 + \frac{0.518Ra_D^{1/4}}{[1 + (0.559/Pr)^{9/16}]^{4/9}}$$

Cuando $Ra_D \geq 10^9$ ocurre transición de una capa límite laminar a una turbulenta y el aumento del número de Nusselt con el número de Rayleigh es mayor [MILLS]:

$$\overline{Nu}_D = \left\{ 0.60 + \frac{0.387Ra_D^{1/6}}{[1 + (0.559/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right\}^2$$

Por el método de la capa límite Kuehn deduce [MARTINENKO]:

$$Nu_D = 2 / \ln \left[1 + 2 / \left\{ \left(0.518Ra_D^{1/4} [1 + (0.599/Pr)^{3/5}]^{-5/12} \right)^{15} + \left(0.1Ra_D^{1/3} \right)^{15} \right\}^{1/15} \right]$$

En la región de régimen laminar para $Ra_D > 1$, la aproximación que realiza Churchill se puede aplica con un error del 4.5% [MARTINENKO]:

$$Nu^{1/2} = 0.36^{1/2} + \left[\frac{Ra_D}{300[1 + (0.5/Pr)^{9/16}]^{16/9}} \right]^{1/6}$$

6.2.3 Modelo Experimental

En la determinación experimental del coeficiente de transferencia de calor es necesario disponer del modelo de la transferencia de calor en el bulbo de un termómetro. El modelo se obtiene al aplicar un balance de energía al sistema (columna y bulbo del termómetro). La evolución de la temperatura, T , con el tiempo, t , instantes después de someter a enfriamiento o calentamiento el bulbo de un termómetro de vidrio es:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = e^{-\frac{hA_b t}{Mc_p}}$$

Donde T_0 es la temperatura inicial en el termómetro, T_{∞} la temperatura en el seno del fluido, A_b el área del bulbo del termómetro, h el coeficiente de transferencia de calor, c_p y M el calor específico y la masa del fluido termométrico respectivamente.

En la forma adimensional de esta ecuación interviene el Número de Biot, $Bi = \frac{hA_b t_m}{Mc_p}$, el cual contiene el coeficiente de Transferencia de Calor:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-Bi\tau}$$

Donde $\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}}$ es la temperatura adimensional, $\tau = \frac{t}{t_m}$, es el tiempo adimensional con t_m como el tiempo en que tarda el termómetro en llegar al equilibrio térmico práctico.

El siguiente modelo es válido bajo las siguientes restricciones:

- Se desprecia la radiación en el aire debido a la baja diferencia de temperaturas. Es decir que mecanismo predominante en el aire es la radiación.
- En el fluido termométrico sólo se considera flujo conductivo de calor y el calor se propaga instantáneamente (difusividad térmica infinita) y no se considera flujo convectivo dentro del fluido termométrico. Esto equivale a que la columna tenga la misma temperatura del bulbo que en la realidad correspondería a un termómetro de inmersión total.
- Con respecto a lo anterior puede decirse que para el bulbo se aplica el método de resistencia interna despreciable, que es válido para números de Biot menores a 0,1.
- La transferencia de calor entre el medio externo y el mercurio sólo se da a través del bulbo del termómetro, mientras que la columna de vidrio que contiene el resto de mercurio se supone que no transfiere calor desde o hacia el ambiente externo que lo rodea, es decir, el capilar de vidrio se considera adiabático, perfectamente aislado.
- Se supone que el espesor de la pared de vidrio del bulbo del termómetro es tal que la resistencia conductiva de calor en la pared de vidrio es pequeña, ello debido a la poca inercia que tiene el termómetro, es decir, el menisco del mercurio se mueve tan pronto como la temperatura cambia en el bulbo.

- El fluido termométrico no moja la pared, despreciándose los efectos de tensión superficial.
- Se ignoran los efectos debidos a las fuerzas capilares en la columna termométrica.
- No hay condensación de los vapores del fluido termométrico en las paredes de la columna capilar del termómetro.
- Como consideración final, en este modelo el fluido en el termómetro se expande a presión constante dentro del capilar, lo cual implica suponer que se trabaja con el calor específico a presión constante.

6.3 EQUIPO

El equipo consiste de:

- 1) Un termómetro de precisión: Puede utilizarse el termómetro de vidrio de un calorímetro. Se recomienda el termómetro de referencia ASTM 56C – 86. Ver en las siguientes dos figuras las especificaciones.

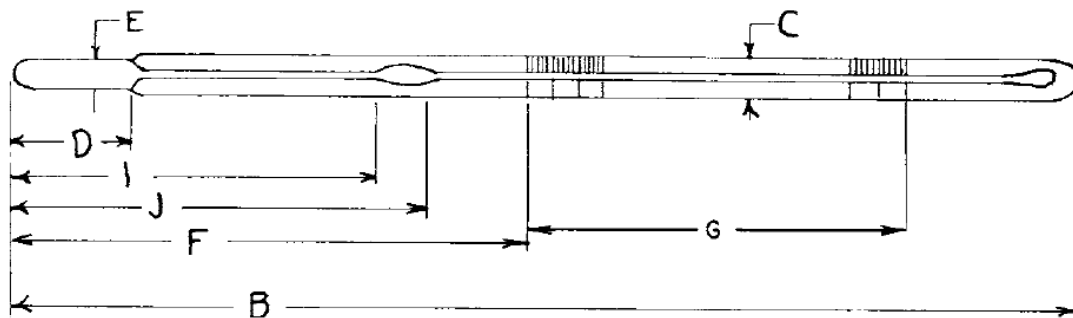


Figura 6.1 Termómetro ASTM 56C -86



Figura 6.2 Termómetro de la bomba calorimétrica

- 2) Un vaso de precipitados de 500ml o mayor capacidad.
- 3) Un mechero.
- 4) Soportes: universal, trípode y pinzas de aro de nuez.
- 5) Un cronómetro.

6) Una Cámara de video.



Figura 6.3 Elementos de grabación y edición

7) Un tablero adecuado para desplazar la cámara.

| ASTM No. | 56C-86 | 56F-86 ^{FF} |
|-----------------------------------|--------------------------|----------------------|
| IP No. | Bomb Calorimeter | |
| Name | 9 | |
| Reference Fig. No. | | |
| Range | 19 to 35°C | 66 to 95°F |
| For test at | | |
| A Immersion, mm | total | |
| Graduations: | | |
| Subdivisions | 0.02°C | 0.05°F |
| Long lines at each | 0.1°C | 0.1 and 0.5°F |
| Numbers at each | 0.2°C | 1°F |
| Scale error, max | 0.10°C ^Y | 0.20°F ^Z |
| Special inscription | ASTM 56C-86 or 56F-86 | |
| Expansion chamber: | | |
| Permit heating to | 66°C | 150°F |
| B Total length, mm | 570 to 600 | |
| C Stem OD, mm | 7.0 to 8.0 | |
| D Bulb length, mm | 35 to 55 | |
| E Bulb OD, mm | 7.0 to 8.0 ^{BB} | |
| Scale location: | | |
| Bottom of bulb to line at | 19°C | 66°F |
| F Distance, mm | 165 to 197 | |
| G Length of graduated portion, mm | 323 to 385 ^O | |
| Ice-point scale: | | |
| Range | | |
| H Bottom of bulb to ice-point, mm | | |
| Contraction chamber: | | |
| I Distance to bottom, min, mm | | |
| J Distance to top, max, mm | 76 | |
| Stem enlargement: | | |
| K OD, mm | | |
| L Length, mm | | |
| M Distance to bottom, mm | | |

^O Capillary clearances shall conform to Section 8.

^W Expansion chamber shall be of the long narrow type and there shall be not less than 10 mm of unchaned capillary between the base of the chamber and the top graduation.

^Y Over any interval of 2°C the change in correction shall not exceed 0.02°C.

^Z Over any interval of 4°F the change in correction shall not exceed 0.05°F.

^{BB} The bulb diameter shall not be more than 0.5 mm greater than the stem.

^{FF} For Fahrenheit thermometers, dimension G (length of graduated portion) shall be measured as the length of graduated portion corresponding to the nominal Celsius range.

^{MM} Bulb shape ellipsoidal (see Fig. 2).

Tabla 6.3 Especificaciones del termómetro ASTM 56C – 86 [ASTM E1. (2007)]

6.4 PROCEDIMIENTO

El experimento consiste básicamente en tomar las lecturas de cambio de temperatura en función del tiempo registradas por un termómetro de vidrio. Se considera como sistema que transfiere calor con los alrededores, el bulbo del termómetro, el cual es asumido como un cilindro.

El bulbo se calienta con una llama hasta llevar al termómetro a su límite superior de temperatura. Se expone al medio ambiente externo (mas frío, T_{∞}) y una vez comienza el enfriamiento del bulbo con el aire estancado, se registra el descenso de temperatura con una video cámara que sigue el menisco de mercurio de la columna hasta que prácticamente llega a equilibrio térmico con el ambiente. Para evitar corrientes de aire, el termómetro es encerrado en un recipiente cilíndrico de muchísimo mayor diámetro. La temperatura ambiente y la humedad relativa



del momento del ensayo también son registradas. Se debe conocer la mayor cantidad posible de características del termómetro. Tome las mediciones de las longitudes del bulbo con un calibrador y mida el espesor de la pared apoyado con un estereoscopio.

Se recomienda realizar por lo menos dos registros fílmicos por cada experimento replicando las mismas condiciones con el ánimo de aplicar la teoría de errores. La filmación de cada registro se puede procesar para digitalizar en fotos por medios de software como, Vegas Pro, donde se generan hasta 24 cuadros por segundo.

6.4.1 Ensayos preliminares cualitativos

Para estudios cualitativos se proponen los siguientes ensayos

6.4.1.1 Ensayo-1: Calentamiento del bulbo con agua a temperatura máxima permisible

Caliente agua y agítela en un vaso de precipitados de 500 mL, colocando el vaso sobre una plancha eléctrica de calentamiento, hasta alcanzar la temperatura máxima del termómetro, que es de 35°C. Monitoree el ascenso de temperatura en el agua del vaso con otro termómetro. Una vez alcanzada la temperatura de 35°C se sumerja el bulbo del termómetro de precisión en

el vaso con agua caliente y observe como asciende el menisco en el termómetro; no agite el agua durante el calentamiento del bulbo.

6.4.1.2 Ensayo-2: Calentamiento del bulbo con agua a menor temperatura

Repita todo el Ensayo-1 pero caliente inicialmente el agua, ya no hasta 35°C, si no hasta una temperatura menor, 25°C. Compare los dos ensayos anteriores, ¿Qué observa respecto de la velocidad con que se mueve el menisco?.

6.4.1.3 Ensayo-3 calentamiento del bulbo con aceite

Repita el ensayo anterior pero cambie el fluido en el vaso, por uno de mayor viscosidad como aceite mineral. Anote la diferencia cualitativa que se presenta al cambiar de fluido de calentamiento.

6.4.1.4 Ensayo-4: Enfriamiento del bulbo en agua y aceite a temperatura ambiente

Ahora registre el enfriamiento, por lo que debe calentar el bulbo del termómetro con un mechero hasta alcanzar la temperatura máxima permisible en el termómetro, pero sin registrar la temperatura; una vez se alcance esta máxima temperatura, inicia el registro fílmico y también simultáneamente enfríe el bulbo al sumergirlo en un vaso con agua a temperatura ambiente.

Nota: Para calentar el bulbo acerque y retire el mechero al bulbo para que la temperatura no supere la temperatura máxima de la escala del termómetro, de lo contrario podría dañar el termómetro.

6.4.1.5 Ensayo-5: Enfriamiento del bulbo con aire a temperatura ambiente

En cambio de líquidos ahora utilice un gas, como el caso aire a temperatura ambiente.

6.4.2 Experimento Enfriamiento Cilindro Vertical

Convección libre alrededor del bulbo del termómetro orientado verticalmente en aire.



Figura 6.4 Orientación vertical del termómetro

Para este montaje se requiere de un soporte universal y pinzas de nuez para mantener el termómetro aplomado verticalmente, y de otro soporte móvil para la video cámara con el fin de guiar el seguimiento de la filmación del menisco.

- Realice el montaje que se muestra esquemáticamente en la Figura 6.5



Figura 6.5 Montaje para el termómetro vertical

- Cerrar la puerta del laboratorio para eliminar corrientes de aire que podrían influir en el ensayo. Y garantizar que no se induzca movimiento de aire durante el ensayo.
- Acercar lentamente al bulbo del termómetro la llama del mechero y observar que el menisco del mercurio en el termómetro alcance la temperatura máxima que se fije para el ensayo. Esta temperatura no debe sobrepasar nunca la temperatura máxima de la escala del termómetro, pues si esto ocurre el termómetro se descalibra y podría dañarse.

- Una vez alcanzada la temperatura máxima fijada, la cual se toma como temperatura inicial, se retira el mechero y se coloca el vaso de tal forma que el bulbo del termómetro quede dentro del vaso como muestra la figura.
- Al final del procedimiento anterior ya la cámara de video debe estar filmando.
- Al enfriarse el bulbo del termómetro, el menisco del mercurio desciende por lo cual mueva la cámara sobre el soporte de la cámara para seguir el movimiento del menisco y así registrar y grabar la evolución de la temperatura en el tiempo.
- Durante el ensayo si hay personas alrededor, es importante que éstas no caminen cerca del ensayo pues al desplazarse se originan corrientes forzadas de aire y esto afecta el experimento pues ya no se tendría convección libre.

6.4.3 Experimento Enfriamiento Cilindro Horizontal

Convección libre alrededor de un cilindro orientado horizontalmente en aire

Figura 6.6 Orientación horizontal del termómetro

- Realice el montaje que se muestra esquemáticamente en la figura 6.7
- Use una guía en forma de riel para la cámara.



Figura 6.7 Montaje para termómetro horizontal

- Cerrar la puerta del laboratorio para eliminar corrientes de aire que podrían influir en el ensayo. Y garantizar que no se induzca movimiento de aire durante el ensayo.
- Acercar lentamente al bulbo del termómetro la llama del mechero y observar que el menisco del mercurio en el termómetro alcance la temperatura máxima que se fije para el ensayo. Esta temperatura no debe sobrepasar nunca la temperatura máxima de la escala del termómetro, pues si esto ocurre el termómetro se descalibra y podría dañarse.
- Una vez alcanzada la temperatura máxima fijada, la cual se toma como temperatura inicial, se retira el mechero y se coloca el vaso de tal forma que el bulbo del termómetro quede dentro del vaso.
- Al final del procedimiento anterior ya la cámara de video debe estar filmando.
- Al enfriarse el bulbo del termómetro la columna de mercurio se contrae por lo cual se debe mover la cámara sobre el riel para seguir el movimiento del menisco y así registrar y grabar la evolución de la temperatura en el tiempo.
- Durante el ensayo si hay personas alrededor, es importante que éstas no caminen cerca del ensayo pues al desplazarse se originan corrientes forzadas de aire y esto afecta el experimento pues ya no se tendría convección libre.

6.4.4 Ensayos Para Calentamiento (Opcional)

Como práctica opcional se propone: Bajo el bulbo del termómetro vertical situar a una distancia conveniente un bombillo de 100 vatios. Al encender el bombillo el calor radiado calentará el bulbo. Y la temperatura comenzará a aumentar. Filmar el ascenso de la columna termométrica.

6.5 GRÁFICAS NECESARIAS PARA EL INFORME

Construya las siguientes gráficas:

- Evolución de temperatura junto con su réplica para un cada experimento (Temperatura-tiempo).
- Evolución adimensional de temperatura junto con su réplica para cada experimento.
- Linealización de la temperatura adimensional respecto al tiempo adimensional.
- Evolución del número de Biot.
- Coeficiente de transferencia de Calor instantáneo.
- Número de Nusselt instantáneo.

6.6 CÁLCULOS Y REQUERIMIENTOS PARA EL INFORME

6.6.1 Parámetros

6.6.1.1 Propiedades Físicas

Las propiedades se calcularon teniendo en cuenta la temperatura promedio entre la inicial y final, que se evalúa por el teorema integral del valor medio, y la integral a su vez se resuelve mediante la Regla de Simpson 1/3:

$$\bar{T}_w = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} T(t) dt \approx \frac{\Delta t}{3t_m} [T(t_0) + 4T(t_1) + 2T(t_2) + 4T(t_3) + \dots + 2T(t_{n-2}) + 4T(t_{n-1}) + T(t_n)]$$

Entonces la temperatura de película promedio con la que usualmente se encuentran las propiedades del aire es:

$$\bar{T}_f = \frac{1}{2}(\bar{T}_w + T_\infty)$$

Los valores de las variaciones de las propiedades con la temperatura se extrajeron de la literatura [KRETIH], con los cuales se generaron (por regresión) las siguientes correlaciones en SI (la temperatura en °C, excepto para el c_p , β y ρ del aire que además estarán en K):

Mercurio:

$$\rho = -2.4291T + 13628 \quad R^2 = 1.0$$

$$c_p = 4 \times 10^{-6}T^3 + 0.0006T^2 - 0.0559T + 140.3 \quad R^2 = 1.0$$

para el intervalo: $0^\circ\text{C} \leq T \leq 100^\circ\text{C}$

Aire:

$$\mu = (0.0412T + 17446) \times 10^{-6} \quad R^2 = 0.9994$$

$$k = 7 \times 10^{-5} + 0.0237 \quad R^2 = 1.0$$

para el intervalo: $0^\circ\text{C} \leq T \leq 60^\circ\text{C}$

$$c_p \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right] = \frac{1}{M} (28.11 + 1.97 \times 10^{-3}T + 4.80 \times 10^{-6}T^2 - 1.97 \times 10^{-9}T^3)$$

para el intervalo: $273 \text{ K} \leq T \leq 1800 \text{ K}$

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

$$\beta = \frac{1}{T}$$

con [CENGEL]:

$$M = 28.97 \text{ kg/kmol} \text{ y } R = 0.2897 \text{ kJ/kgK}$$

6.6.1.2 Condiciones de Trabajo

Las condiciones de presión atmosférica local y aceleración gravitacional son:

$$P_{atm} = 560 \text{ mm Hg} = 74660.53 \text{ Pa}$$

$$g = 9.803 \text{ m/s}^2$$

6.6.1.3 Especificaciones del Bulbo

Con la información suministrada sobre el termómetro y/o las mediciones realizadas al bulbo complete la siguiente tabla las especificaciones para la envolvente cilíndrica o pared del bulbo:

| | |
|-------------------------------------|--|
| D_{ext}, mm | |
| t, mm (espesor) | |
| D_{int}, mm | |
| L, mm | |
| Material | |
| k, W/m°C | |

Tabla 6.4 Especificaciones de la pared del bulbo

Con estos valores calcule para el bulbo: el área lateral del bulbo, A_b ; el volumen, V y la longitud característica L_c .

6.6.2 Determinación del intervalo de temperatura a trabajar

Usando el concepto de *constante de tiempo*, como el tiempo requerido para lograr aproximadamente al $(1 - e^{-1}) \cdot 100\% \approx 63.21\%$ del cambio total de temperatura, que

corresponde a $T_0 - T_\infty$. De esta manera podemos plantear que la temperatura inferior del intervalo, T_m , está dada por:

$$T_m = e^{-1}(T_0 - T_\infty) + T_\infty = T_0 - (1 - e^{-1})(T_0 - T_\infty)$$

Con ello se busca rechazar la zona de la curva que obedece a una respuesta estacionaria, ya que de acuerdo a la teoría de control cuando se tiene un $(1 - e^{-1}) \cdot 100\% \approx 63.21\%$ del cambio transitorio prácticamente se estabiliza en un estado estacionario. Cuando se acerca al equilibrio termodinámico el valor de los coeficientes instantáneos de transferencia de calor tiende a disminuir y a ser cero, debido a que la diferencia de temperaturas también tiende a reducirse y a ser cero. De esta manera se asegura el estado transitorio, al trabajar en la región exponencial definida por $[T_m, T_0]$.

Es decir que de la serie de datos obtenidos, correspondientes a la evolución de la temperatura para cada experimento, sólo se toman desde T_0 hasta T_m , lo que implica rechazar desde T_m hasta T_f .

6.6.3 Determinación del Coeficiente de Transferencia de Calor y el Número de Nusselt

Con los datos experimentales de temperatura Vs. tiempo puede determinarse el coeficiente de Transferencia de Calor y con este el Nusselt promedio, que será de esta manera:

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}L}{k} \quad o \quad \overline{Nu}_D = \frac{\bar{h}D}{k}$$

Los métodos para lograr dichos coeficientes son dos:

6.6.3.1 Regresión por Mínimos Cuadrados

Aplicando el método de mínimos cuadrados puede obtenerse el coeficiente convectivo en términos de datos experimentales:

$$Bi = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i Z_i}{\sum_{i=1}^n Y_i^2}$$

esta última asume que el intercepto con el eje de la variable dependiente es cero, de lo contrario se debe asumir que [CHAPRA]:

$$Bi = \frac{n \sum_{i=1}^n Y_i Z_i - \sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n Z_i}{n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2}$$

El índice de correlación, o coeficiente de determinación se determina mediante la fórmula [CHAPRA]:

$$r^2 = \frac{(n \sum_{i=1}^n Y_i Z_i - \sum_{i=1}^n Y_i \sum_{i=1}^n Z_i)^2}{\left[n \sum_{i=1}^n Y_i^2 - (\sum_{i=1}^n Y_i)^2 \right] \left[n \sum_{i=1}^n Z_i^2 - (\sum_{i=1}^n Z_i)^2 \right]}$$

Aplicando lo anterior a todos los datos se obtiene un coeficiente promedio para todo el proceso de enfriamiento.

$$\bar{h}^* = \frac{M c_p}{A_b t_m} Bi$$

6.6.3.2 Derivación e integración numérica

Para cada pareja de datos (t, T) o punto de la curva de enfriamiento se determina numéricamente la derivada, dT/dt , o cambio instantáneo de temperatura usando las formulas de primera derivada por diferencias finitas con cinco puntos: hacia adelante para los dos primeros puntos, las de hacia atrás para los dos últimos puntos y centradas para el resto de puntos [CHAPRA]. Adaptando y aplicando dichas formulas para el caso:

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t_i} = \frac{-T(t_{i+2}) + 4T(t_{i+1}) - 3T(t_i)}{2\Delta t} \quad \text{hacia adelante}$$

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t_i} = \frac{3T(t_i) - 4T(t_{i-1}) + T(t_{i-2})}{2\Delta t} \quad \text{hacia atras}$$

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t_i} = \frac{-T(t_{i+2}) + 8T(t_{i+1}) - 8T(t_{i-1}) + T(t_{i-2})}{12\Delta t} \quad \text{centrada}$$

Luego se calcula cada coeficiente de transferencia de calor instantáneo a través de la definición:

$$h(t_i)^* = \frac{M(t_i) c_p(t_i)}{A_b [T_\infty - T(t_i)]} \left. \frac{dT}{dt} \right|_{t_i}$$

Ahora por el teorema integral del valor medio se determina el valor promedio del coeficiente:

$$\bar{h}^* = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} h(t) dt$$

Dicha integral definida se resuelve por la Regla de Simpson de 1/3, la cual requiere un número par de particiones. Si los datos arrojan número impar de particiones, se elimina la última pareja de medidas.

$$\bar{h}^* = \frac{1}{t_m} \int_0^{t_m} h(t) dt =$$

$$\bar{h}^* = \frac{1}{t_m} \left\{ \frac{\Delta t}{3} [h(t_0) + 4h(t_1) + 2h(t_2) + 4h(t_3) + 2h(t_4) + \dots + 2h(t_{n-2}) + 4h(t_{n-1}) + h(t_n)] \right\}$$

El error de esta determinación numérica es:

$$E_r = \frac{1}{180} (\Delta t)^2 \left. \frac{dh^4}{dt^4} \right|_{\xi} \quad \text{con } 0 \leq \xi \leq t_m$$

Para la determinación de este error, se procede con la serie temporal de coeficientes de calor instantáneos obtenidos anteriormente de la siguiente manera. Para cada tiempo se calcula numéricamente la cuarta derivada usando las siguientes formulas adaptadas a la presente situación [CHAPRA, MATHEWS]:

$$\left. \frac{dh^4}{dt^4} \right|_{t_i} = \frac{-2T(t_{i+5}) + 11T(t_{i+4}) - 24T(t_{i+3}) + 26T(t_{i+2}) - 14T(t_{i+1}) + 3T(t_i)}{(\Delta t)^4} \quad \text{hacia adelante}$$

$$\left. \frac{dh^4}{dt^4} \right|_{t_i} = \frac{3T(t_i) - 14T(t_{i-1}) + 26T(t_{i-2}) - 24T(t_{i-3}) + 11T(t_{i-4}) - 2T(t_{i-5})}{(\Delta t)^4} \quad \text{hacia atras}$$

$$\left. \frac{dh^4}{dt^4} \right|_{t_i} = \frac{-T(t_{i+3}) + 12T(t_{i+2}) - 39T(t_{i+1}) + 56T(t_i) - 39T(t_{i-1}) + 12T(t_{i-2}) - T(t_{i-3})}{6(\Delta t)^4} \quad \text{centrada}$$

Para los tres primeros puntos se aplica la formula de diferencias divididas finitas hacia adelante, para los tres últimos puntos la formula de diferencias divididas finitas hacia atrás y para el resto de puntos la formula de diferencias divididas finitas centradas. Luego se ubica tanto el máximo y como el mínimo de estos valores de 4ª derivada, y entre estos dos se toma la 4ª derivada de mayor valor absoluto, con la cual se calcula en la formula el error máximo debido a la aplicación de la integración numérica.

6.6.3.4 Corrección por Resistencia de Pared

Corrija el coeficiente global (aire-vidrio) que incluye la resistencia térmica conductiva de la pared del bulbo para hallar el coeficiente de transferencia de calor individual del aire, usando:

$$h = \frac{1}{\frac{1}{h^*} - A_b R_w}$$

donde R_w es la resistencia de pared correspondiente a la conducción en un cilindro hueco:

$$R_w = \frac{1}{2\pi kL} \ln \frac{D_{ext}}{D_{int}}$$

6.6.3.5 Valores Esperados

De acuerdo a la información suministrada en el Fundamento Teórico y de ser necesaria otra complementaria, calcule los coeficientes esperados y los valores de los números de Nusselt.

6.6.3.6 Errores Relativos Porcentuales

Encuentre el error relativo de cada uno de los coeficientes encontrados experimentalmente con respecto al valor esperado del modelo seleccionado que presente mayor confiabilidad.

6.7 RESULTADOS

Presente adecuadamente los resultados obtenidos en las tablas y gráficas que considere pertinentes.

6.8 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para desarrollar esto tenga en cuenta los cuestionamientos presentados en el numeral 6.9.

6.9 ASPECTOS, ITEMS Y PREGUNTAS DE DISCUSIÓN

¿Es indispensable el coeficiente de transferencia de calor para los cálculos de transferencia de calor? Señale las ventajas y desventajas de su utilización en la ingeniería de hoy ¿Cuál es la tendencia actual?

Elija el modelo teórico y experimental que mejor predice el coeficiente de transferencia de calor por convección libre y externa tanto para un cilindro vertical como para uno horizontal. De sus razones.

Analice si se obtendrá experimentalmente el mismo coeficiente de transferencia de calor si en vez de enfriar, se calienta el bulbo, considerando el resto de condiciones idénticas.

Explique cómo son generados los gradientes de densidad para la convección libre y su relación con las capa límite.

De acuerdo a los ensayos cualitativos explique las diferencias entre los coeficientes que se obtendrían en cada uno con respecto a las modificaciones como temperatura inicial, fluido, etc.

Dibuje la forma de la capa límite para una superficie cilíndrica fría y caliente, tanto vertical como horizontal, y de hecho discuta las diferencias entre el calentamiento y el enfriamiento para una misma orientación. También realice un análisis comparativo de la capa límite de un cilindro horizontal Vs. vertical ¿A qué atribuye las diferencias entre los coeficientes obtenidos para cada una de estas configuraciones?

¿Cuáles pueden ser las posibles causas del error de la determinación experimental? ¿El(los) valor(es) obtenido(s) es (son) aceptado(s) o rechazado(s)? De sus argumentos.

¿El tomar un recipiente para evitar la turbulencia no altera la convección libre?

¿A qué otros fluidos es aplicable esta práctica? ¿aceite, por ejemplo?

¿Qué mejoras sugiere para hacer la práctica más eficaz y con menor grado de incertidumbre?

¿Es posible diseñar y construir un dispositivo que mida directamente el coeficiente de transferencia de calor? Explique sus razones.

6.10 CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

Con base en los objetivos planteados y el análisis de resultados realice este ítem.

6.11 REFERENCIAS

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El modelo planteado y resuelto para el funcionamiento del termómetro de vidrio permite determinar experimentalmente los coeficientes de transferencia de calor bajo las restricciones impuestas. Los resultados de los coeficientes obtenidos experimentalmente fueron validados para el funcionamiento del termómetro en posición vertical y horizontal rodeado de aire estancado, que representa la transferencia de calor por convección natural en aire ($Pr=0.72$ aprox.) alrededor de un cilindro vertical (flujo externo en el bulbo) para un régimen laminar. Estos valores se alejan de los pronosticados por la literatura en promedio un 35% para los que se encuentran orientados verticalmente y en un 9 % para los que están horizontalmente; cabe notar que los modelos de la literatura también tienen un margen de incertidumbre.

En estas tesis se obtuvo el modelo (adimensional) simplificado del termómetro [3-7]:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-B\tau}$$

o con variables dimensionales [3-8]:

$$\ln\left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right) = -\frac{hA_b}{Mc_p} t$$

Se concluye que el termómetro puede utilizarse para medir coeficientes locales de transferencia de calor en sitios del fluido donde se cumplan las restricciones del modelo: Flujo reptante (en este caso corresponde a movimiento convectivo natural lento), como por ejemplo si se tiene una placa vertical inicialmente caliente que se está enfriando por convección natural en aire. Sería necesario situar el bulbo del termómetro a una altura con respecto al borde inferior de la placa en sitios donde sea muy lento el movimiento del aire, esta condición puede darse en cerca al borde inferior de la placa, pues allí comienza a acelerarse el aire.

Se determinó teóricamente el coeficiente de transferencia para convección natural alrededor de cilindros verticales usando el método integral que permite plantear un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya solución se desarrolla mediante la técnica de la

perturbación. La expresión que permite encontrar el número de Nusselt promedio [2-16] y por ende el coeficiente de transferencia de calor promedio es

$$\overline{Nu} = \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} + \frac{4}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu) L}{(64\alpha + 63\nu) D} + \dots$$

La cual está en concordancia con las correlaciones de la literatura, aun cuando genera valores de coeficiente levemente menores a los de las correlaciones empíricas debido principalmente a que solamente se trabaja con dos términos en la soluciones por el método de perturbación. El primer término de esta ecuación representa una pared plana, mientras que los siguientes describen la curvatura.

Se desarrollaron ecuaciones específicas para el problema propuesto en esta tesis de determinar el coeficiente de transferencia de calor para convección libre con movimiento laminar lento (flujo reptante), obteniéndose así la ecuación [3.18] para flujo cuasiestacionario y una para flujo transitorio ecuación [3.15] para el termómetro orientado verticalmente.

Para flujo cuasiestacionario:

$$Nu = \left| 2 \frac{\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \left(1 - 2Ln\frac{\delta}{R}\right) - 1}{\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \left[1 - 2Ln\frac{\delta}{R}\left(1 - Ln\frac{\delta}{R}\right)\right] - 1} \right|$$

Para flujo transitorio:

$$Nu = \frac{\begin{vmatrix} J_1(\lambda R) & Y_1(\lambda R) \\ J_0(\lambda \delta) & Y_0(\lambda \delta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_0(\lambda R) & Y_0(\lambda R) \\ J_0(\lambda \delta) & Y_0(\lambda \delta) \end{vmatrix}} \lambda D$$

Tanto para flujo cuasiestacionario como para flujo transitorio no fue posible efectuar la confrontación de los resultados de estas dos ecuaciones para calcular el número de Nusselt debido a que se requiere el conocer el valor del espesor de la capa límite, δ_T , o del radio de la capa límite, δ . No olvidar que estos dos se relacionan mediante: $\delta = R + \delta_T$.

Del modelo de flujo transitorio, se esperaba que para cada instante de tiempo correspondiera un número de Nusselt, es decir que durante el enfriamiento del bulbo el Nusselt dependiera de el tiempo, pero al desarrollar el modelo y calcular el Nusselt se encontró que la variable tiempo se eliminaba por lo cual el número de Nusselt obtenido es global para todo el sistema. Por ello con los datos de temperatura versus tiempo se determinó experimentalmente un coeficiente de transferencia de calor para el enfriamiento en el bulbo del termómetro.

Se encontró que cuando el flujo convectivo natural es muy lento (flujo reptante), el número de Grashof se elimina de la ecuación del número de Nusselt. Entonces puede preguntarse en que términos del número de Nusselt se representa el movimiento del fluido. Para el caso de flujo transitorio figura un parámetro λ , el cual está incluido en la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{J_0(\lambda r)Y_1(\lambda R) + \frac{h}{k\lambda} [J_0(\lambda R)Y_0(\lambda r) - J_0(\lambda r)Y_0(\lambda R)] - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda r)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} g\beta(T_{w0} - T_\infty)e^{-a\lambda^2 t}$$

que al expresarla en forma adimensional aparecerá el número de Grashof y al solucionarla, el parámetro λ quedará en función del número de Grashof y también el radio de la capa límite.

Para flujo de calor cuasiestacionario, donde Nusselt está en función únicamente del radio de la capa límite, este espesor queda expresado implícitamente en términos del número de Grashof en la ecuación que permite calcular la velocidad axial:

$$v_z = \frac{Gr_D \nu g \beta}{32 |T_w - T_\infty|} \left\{ \left(\frac{a}{R} - b \right) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] + \left[2 \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 \left(\frac{a}{R} + b \ln \frac{\delta}{R} \right) + \frac{1}{2R} \left(\frac{\delta}{R} \right)^2 - b \left(\frac{\delta^2 + r^2}{R^2} \right) \right] \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right\}$$

donde a y b son:

$$a = T_w - T_\infty$$

$$b = \frac{-\frac{1}{2}(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 \ln \frac{\delta}{R} + \frac{1}{2}(R^2 - \delta^2) \right]}{R \left[\delta^2 \ln \frac{\delta}{R} \left(\ln \frac{\delta}{R} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4}(R^2 - \delta^2) \right]}$$

Para el cilindro horizontal en estado cuasiestacionario se dedujeron las siguientes dos expresiones:

Caso de gradiente angular de temperatura constante [3-21]:

$$Nu_D = \frac{2}{PrRe \left(\frac{\delta}{R} - \frac{2}{3} \ln \frac{\delta}{R} - 1 \right) \sqrt{\theta} + \ln \frac{\delta}{R}}$$

Caso sin gradiente angular de temperatura [3-22]:

$$Nu_D = \frac{2}{\ln \frac{\delta}{R}}$$

Como los resultados obtenidos con el termómetro de precisión fueron relativamente aceptables se propone la creación de un instrumento de medición directa de coeficientes locales de transferencia de calor, utilizando según las restricciones del modelo, que fundamente su funcionamiento por ejemplo en la localización del bulbo del termómetro sobre una gran superficie que se encuentre en contacto con un fluido. Dicho sistema de medición debe tomar como entrada la evolución temporal de la temperatura, la que puede ser detectada y codificada por software que digitalice cambios en los pixeles de las imágenes; estos valores traducidos a números son tratados también por otro software (como por ejemplo MATLAB) a través de la derivación e integración numérica, y de acuerdo a los parámetros del mismo sistema, debe generar como salida el coeficiente de transferencia de calor. Es un primer estudio para más adelante utilizar un termómetro de precisión como medidor local de coeficiente de transferencia de calor dentro de un fluido que transfiera calor.

Por lo anterior, es factible realizar a mediano plazo un diseño básico y en detalle de dicho artefacto. De hecho se tiene proyectado construir una unidad de medición experimental de coeficientes de transferencia de calor que contenga los anteriores elementos y que sirva como apoyo didáctico para el aprendizaje de la Transferencia de Calor a nivel universitario.

El procedimiento experimental descrito en el cuarto capítulo de este documento, además de las recomendaciones efectuadas, sirve como base y guía para abordar distintas prácticas relacionadas con fenómenos de transporte (calor, cantidad de movimiento y masa). Gracias a la experiencia recogida en este trabajo se propone y estructura una primera versión de Práctica de Laboratorio de Fenómenos de Transporte para la determinación de los coeficientes de transferencia de calor por convección libre en aire, la cual se encuentra en el Capítulo 6 de este trabajo. Así una aplicación inmediata es el diseño de una práctica académica de fenómenos de transporte, específicamente en transferencia de calor: esta práctica servirá para ilustrar los

rasgos típicos de la transferencia de calor por convección, tanto cualitativa como cuantitativamente, como observarse en los ensayos experimentales 1 a 5; además permite realizar una práctica de flujo de calor en flujo transitorio para determinar el número de Biot y el número de Nusselt.

Para seguir validando el modelo se propone realizar otros experimentos conservando la misma estructura básica pero adicionando ciertas variaciones: si se usan además como fluidos agua y aceite se barre un amplio intervalo de números de Prandtl; si se usan termómetros con otras dimensiones de bulbo y rangos distintos se amplía la gama de números de Grashof trabajados; si se usan además otras situaciones, distintas a la convección libre, como la forzada cruzada o tangencial al bulbo, u orientaciones inclinadas del termómetro, o sumersión de éste en un fluido liquido con agitación o también situándolo a cierta distancia de una fuente calefactora, etc. se podrían obtener entonces correlaciones más generales de números de Nusselt respecto a Rayleigh en convección libre o respecto a Reynolds y Prandtl en forzada.

Buscando un refinamiento de la parte experimental se requiere elaborar montajes propios para la medición específica (que a futuro van a servir para el diseño del instrumento de medición) del coeficiente de transferencia de calor, que estén apoyados por otros equipos como interferómetros así como termopares, que conecten en línea la información medida a sistemas computarizados como proponen algunos autores [POPIEL]. De la misma manera la necesidad de trabajar en un recinto más controlado, usando cámaras o campanas, para evitar interferencias o la incidencia de otras fuentes de turbulencia que pueden alterar el tipo y régimen de la convección.

Es posible que, la relativamente alta desviación de los resultados experimentales obtenidos cuando se orienta el termómetro verticalmente, se deba a una reducción muy notable de la turbulencia natural producida por la interferencia del vaso alrededor del bulbo, debe haber una relación entre las dimensiones del elemento (bulbo) con respecto al confinamiento (vaso); tal vez lo mas recomendado sea colocar un recipiente de mucho mayor diámetro o hacer el experimento dentro de una cámara o campana.

Para el estudio de ciertos fenómenos de transporte, como la Transferencia de Masa y de Cantidad de Movimiento asociadas a la de Transferencia de Calor se sugiere introducir ciertas modificaciones y/o enfoques al experimento realizado.

En la determinación de coeficientes de transferencia de masa: se calienta el bulbo en un medio fluido para luego extraerlo y dejarlo enfriar “húmedo” en el ambiente, situación en la que también se miden los perfiles temporales de temperatura; luego se realiza una comparación con los perfiles obtenidos de un enfriamiento “seco”, pero con el resto de condiciones iguales.

En la determinación de perfiles de velocidad: se asocia la solución desacoplada del modelo de flujo transitorio para el termómetro vertical [3-11], con la ecuación de cantidad de movimiento, que junto con el perfil de temperaturas encontrado a través de la determinación experimental del coeficiente, permite encontrar el parámetro, λ , [3-14] (véase Capítulo 3) que a su vez conecta con la solución para el perfil de velocidades; en este aspecto es interesante observar que los modelos obtenidos para los perfiles de evolución de la temperatura, tanto del fluido termométrico como del fluido alrededor del bulbo, se encuentran perfectamente articulados y concatenados, claro que intermediados por la resistencia térmica conductiva de la pared, que de acuerdo a la condición puede o no despreciarse. De la misma manera las expresiones teóricas halladas en el Capítulo 3 desde [3-15] hasta [3-22] se pueden asociar con los resultados experimentales para encontrar el cambio temporal del espesor de la capa límite, ya que dicho parámetro resultó siendo la incógnita que impidió llegar por estos modelos al valor del número de Nusselt.

Si los valores de los coeficientes obtenidos con las mediciones experimentales del estado transitorio no se corrigen por la inclusión de la resistencia conductiva de pared, se obtendrán coeficientes globales vidrio-aire; el proceso de corrección mediante la expresión obtenida por el balance en el circuito térmico, permite disminuir el error en aproximadamente un 1% y obtener coeficientes individuales de fluido (aire) que excluyen por tanto la fase sólida (vidrio); en un inicio se consideró erróneamente que la pared de vidrio del bulbo no era tan gruesa con respecto al diámetro del mismo bulbo, pero la medición de su espesor con el estereoscopio lo desmintió, sin embargo, al tener dicha pared un número de Biot menor de 0.1 se puede asumir como un sistema de resistencia interna despreciable. Este valor de la pared tiene una mayor influencia en el cálculo de la masa del fluido termométrico dentro del bulbo que es usada para la determinación experimental de los coeficientes.

Para la confrontación-validación del método experimental y la comprensión del fenómeno, se hace necesario disponer de modelos teóricos de mayor complejidad, que se pueden construir a

través del uso de otros métodos de solución del sistema de ecuaciones de conservación; para la convección libre en cilindros verticales usar el menor número de restricciones posibles en el método diferencial en la búsqueda de una solución exacta por métodos numéricos con diferencias y/o elementos finitos; mientras que para los horizontales la deducción del coeficiente a través del método aproximado integral (usando la técnica de perturbación) y por soluciones no similares; también la posibilidad de usar la función corriente en el método diferencial que permite transformar el sistema de ecuaciones diferenciales parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineal que puede resolverse por ejemplo con Simulink de MATLAB; quedó entonces pendiente la resolución numérica del sistema de ecuaciones de conservación para lograr una solución exacta aunque no analítica.

La pertinencia de la convección libre alrededor de un cilindro circular es indiscutible, ya que el papel de las cantidades físicas que describen este fenómeno es relevante en muchas aplicaciones actuales y futuras de la ingeniería, como por ejemplo: las pérdidas de calor en tuberías verticales, la carga de calor requerida para el enfriamiento o calentamiento de elementos cilíndricos, en los que se puede contar los conductores en dispositivos electrónicos y la barras de fisión de reactores nucleares. No en vano, se encuentra que muchas de las investigaciones asociadas a este tema han sido promovidas y desarrolladas por la NASA, en su versión anterior NACA de los años 50's.

REFERENCIAS

BIBLIOGRAFIA

AHMAD, S., ARIFIN, N. M. , NAZAR, R. and POP, I. *Free Convection Boundary Layer Flow Over Cylinders of Elliptic Cross Section with Constant Surface Heat Flux*. European Journal of Scientific Research, Vol.23 No.4, 2008. Pag. 613-625,

AMBROSINI D., PAOLETTI, D., and SPAGNOLO G.S. *Study of free-convective onset on a horizontal wire using speckle pattern interferometry*, Int. J. Heat Mass Transfer 46 (22) (2003) 4145–4155.

ARNAS, O. A. *On laminar free convection stagnation heat transfer from an isothermal cylinder with internal sources-sinks*. Appl. Sci. Res. 27.

ASTM E1. (2007). *Standard Specification for ASTM Liquid-in-Glass Thermometers*. Pág. 1-6, 22, 49, 50, 54, 58-64.

ATMANE, M.A., CHAN, V.S.S. and MURRAY, D.B. *Natural convection around a horizontal heated cylinder: the effects of vertical confinement*, Int. J. Heat Mass Transfer 46 (19) (2003) 3661–3672.

ASHJAEI, M., AMIRI, M. and ROSTAMI J. *A correlation for free convection heat transfer from vertical wavy surfaces*. Heat Mass Transfer 44:101–111, 2007.

AZIZ, and NA, T.Y. *Improved Perturbation Solutions for Laminar Natural Convection on a Vertical Cylinder*. Wärme and Stoffübertragung Springer-Verlag 1982. Pag 83-87.

BARKER, Adam R. and FLOWERS WILLIAMS, John E. *Transient measurements of the heat transfer coefficient in unsteady, turbulent pipe flow*. Int. J. Heat Mass Transfer 43 (2000), Pag. 3197-3207.

BHATIA, J.C. *Laminar Boundary Layer on a Cylinder With Symmetric Cross-Section Bounded by Two Equal Circular Arcs-Part I*.

BEJAN, A. *Convection Heat Transfer*. 2nd edition, John Wiley and Sons Inc., New York, 1995.

BEJAN, Adrian. *Heat transfer*. John Wiley, New York, 1993.

BEJAN, Adrian and KRAUS, Allan D. *Heat Transfer Handbook*. John Wiley and Sons Inc., 2003. Pag. 466-469, 482-483, 533-548.

BETANCOURT, Grajales R. *Transferencia Molecular de Calor, Masa y de Cantidad de Movimiento*. Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, 2002. Pag. 285 y 286.

BIRD, R. B; STEWART, W. E. y LIGHTFOOT, E. N. *Fenómenos de Transporte*. Editorial Reverté, 1982.

BLAIR, M.F. *Heat Transfer*, 105. 1983.

BOJKOVSKI, Jovan; DRNOVSEK, Janko and PUSNIK, Igor. *Analysis of equalising blocks in calibration of thermometers*. Measurement 23 (1998), 145–150.

BUCHLIN, Jean-Marie. *Natural and forced convective heat transfer on slender cylinders*. Rev. Gen. Therm. Elsevier (1998) 37, 653-660.

BURMEISTER, LOUIS. *Convective Heat Transfer*. John Willey and Sons. Second Edition. Canada, 1993. Pag 400-405.

CARSON, James K.; WILLIX, Jim and NORTH, Mike F. *Measurements of heat transfer coefficients within convection ovens*. Journal of Food Engineering 72 (2006), 293–301.

CEBECI, Tuncer, QASIM, J. and NA, T. Y. *Free convective heat transfer from slender cylinders subject to uniform wall heat flux*. Letters in heat and mass transfer Vol. I, Pag. 159- 162, 1974.

ÇENGEL, Yunus A. *Heat Transfer: A Practical Approach*. 2nd edition, McGraw-Hill, New York, 2003. Pag.408-414, 510-514.

CHAND, Jagdish and VIR, Dharam. *Natural convection heat transfer from horizontal cylinders*. Journal of Chemical Engineering of Japan vol. 12 No. 3, 1979, Pag. 242-247.

CHAPRA, Steven C. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. Quinta Edition, Mc. Graw-Hill, México 2006. Pag. 668-679.

CHEESEWRIGHT, R. *Turbulent Natural Convection from a Vertical Plane Surface*. J. Heat Transfer, vol. 90, p. 1, febrero 1968.

CHILDS, P.; GREENWOODS, J and LONG C. *Review of temperature measurements*. Rev. Sc. Instrum. 71, 2959 (2000).

CHILDS, Peter. *Heat flux measurement. Practical Temperature Measurement*, 2001, Pages 324-361.

CHILDS, P.R.N. *Advances in temperature measurement. Advances in Heat Transfer*, Volume 36, 2003, Pages 111-181.

CHILDS, P.R.N. *Thermocouples. Practical Temperature Measurement*, 2001, Pages 98-144.

CHOHAN, R. K.. *Forced convection from liquids to industrial thermometers in cross-flow*.

DULUC M.C., XIN, S., and LEQUERE P. *Transient natural convection and conjugate transients around a line heat source*, Int. J. Heat Mass Transfer 46 (2) (2003) 341–354.

EDE, A.J. *Advances in Free Convection*. In IRVINE, T. F. *Advances in Heat Transfer*, 1967. USA, 1967. Pag. 1-62.

ERDOGDU, Ferruh. *A review on simultaneous determination of thermal diffusivity and heat transfer coefficient*. *Journal of Food Engineering* Volume 86, Issue 3, June 2008, Pages 453-459.

FLACK, R. D., and WITT, C. L. *Velocity Measurements in Two Natural Convection Air Flows Using a Laser Velocimeter*. *J. Heat Transfer*, vol. 101, p. 256, 1979.

FOX, Robert W and McDONALD, Alan T. *Introduction to Fluid Mechanics*. 2a Edition, John Wiley & Sons, 1978.

FROLOVSKAYA, O. A. *Self-similar solutions of unsteady boundary layers*. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 43, No. 1, pag. 54-58, 2002.

GOLDSTEIN, R.J.; IBELE, W.E.; PATANKAR, S.V.; SIMON, T.W.; KUEHN, T.H.; STRYKOWSKI, P.J.; TAMMA, K.K.; HEBERLEIN, J.V.R.; DAVIDSON, J.H.; BISCHOF, J.; KULACKI, F.A.; KORTSHAGEN, U.; GARRICK, S. and SRINIVASAN, V. *Review Heat transfer—A review of 2003 literature*. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 49 (2006), 451–534.

GOLDSTEIN, Aaron S. *A Computational Model for Teaching Free Convection*. *Chemical Engineering Education*, 2004. Pag. 272-278.

GORI, F., SERRANO, M. G., and WANG, Y. *Natural Convection along a Vertical Thin Cylinder with Uniform and Constant Wall Heat Flux*. *International Journal of Thermophysics*, Vol. 27, No. 5, September 2006.

GOROBETS, V. G. *Free-convective heat transfer from cylindrical surfaces with transverse sectional finning*. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, Vol. 75, No. 6, 2002.

HAGISHIMA, Aya and TANIMOTO, Jun. *Field measurements for estimating the convective heat transfer coefficient at building surfaces*. *Building and Environment* 38 (2003), 873 – 881.

HALDAR, S.C., *Conjugate analysis of heat transfer from a horizontal insulated cylinder*, *Int. Commun. Heat Mass Transfer* 30 (1) (2003) 139–147.

HALDAR, S.C., KOCHHAR, G.S., MANOHAR, K. and SAHOO, R.K.. *Numerical study of laminar free convection about a horizontal cylinder with longitudinal fins of finite thickness*. *International Journal of Thermal Sciences* 46 (2007) 692–698.

HAUSER, W. *Reglamentos de Prueba del PBT*. Tomo 2, Termómetros de Vidrio con Líquidos. Deutscher Eichverlag GmbH Berlin, 1983.

HEGGSAND, P.J. and BURNS D. *Single-blow experimental prediction of heat transfer coefficients: A comparison of four commonly used techniques*. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Volume 2, Issue 1, March 1989, Pages 40-48.

HERMANN R. *Heat Transfer by Free Convection from Horizontal Cylinders in Diatomic Gases*. NACA Technical Memorandum 1366, 1954.

HOLMAN J. P. *Transferencia de Calor*. 8ª Edición, Mc. Graw-Hill, 1998, España. Pag. 149-191, 229-226.

INCROPERA, F. P., DEWITT D. P., BERGMAN, T. and LAVINE, A. S. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 6th Edition, John Wiley and Sons Inc., New York, 2007. Pag. 403, 579-580.

IOAN, Pop and INGHAM Derek B.. *Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational Modelling*. Elsevier Science, 2001. Pag. 209-244.

ISLAM, Md; RAISUL, WIJEYSUNDERA, N.E. and HO, J.C. *Evaluation of heat and mass transfer coefficients for falling-films on tubular absorbers*. International Journal of Refrigeration 26 (2003), 197–204.

JABBAR, Abdul and KHALIFA, N. *Natural convective heat transfer coefficient - a review I Isolated vertical and horizontal surfaces*. Energy Conversion and Management 42 (2001) 491-504.

JALURIA, Yogesh. *Natural Convection*. Pag. 525-570.

JANNA, William S. *Engineering Heat Transfer*. Second Edition. CRC Press LLC, 2000. Pag. 406-413, 426-429.

KAISER, E. *Dynamic measuring error correction of encapsulated auxiliary wall heat flux sensors made of film resistance thermometers*.

KARLEKAR, B.V. Y DESMOND, R.M. T *Transferencia de calor*. 2ª Edición. Nueva Editorial Interamericana, México, 1985 Pág. 590-613.

KERN, DONALD Q. *Procesos de Transferencia de Calor*. México, 1965. Ed. CECSA

KHALIFA, Abdul-Jabbar N.. *Natural convective heat transfer coefficient -a review I. Isolated vertical and horizontal surfaces*. Energy Conversion and Management 42 (2001), 491-504.

KMONL, Vladimir. *The determination of unsteady heat flow to wall from the measurements of surface temperature made with thin film resistance thermometers*.

KOBUS, C.J. *Utilizing disk thermistors to indirectly measure convective heat transfer coefficients for forced, natural and combined (mixed) convection*. Experimental Thermal and Fluid Science 29 (2005) 659–669.

KOH, J.C.Y and PRICE, J.F. *Laminar Free Convection from a Non-Isothermal Horizontal Cylinder*. Mathematics Research, 1963.

- KOUSAR, Nabeela y LIAO ShiJun. *Series solution of non-similarity natural convection boundary-layer flows over permeable vertical surface*. Science China: Physics, mechanics & astronomy. February Vol. 53 No. 2: 360–368, 2010
- KREITH, Frank y BOHN, Mark S. *Principios de Transferencia de Calor*. Thomson Learning. Sexta Edición, 2001. Pág. 233-286, 301-342
- KREYSZIG, Erwin. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*. Limusa-Wiley. Tercera Edición, México, 2003. Vol. I: pág. 260-276 y Vol. II: pág. 92-145.
- KUMAR, M. and NATH, g. *Unsteady Free Convection MHD Boundary Layer Flow Near a Three-Dimensional Stagnation Point*. Indian J. Pure Appl. Math, 17 (7): Pag. 957-968, 1986.
- KUZNETSOV, V. V. and FROLOVSKAYA, O. A. *Boundary layers in free convection*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Vol. 41, No. 3, 2000.
- LARSEN, Poul S. and ARPACI, Vedat S. *On the similarity solutions to laminar natural convection boundary layers*. Int. J. Heat and Mass Transfer. Vol. 29, No. 2, pp. 342-344, 1986
- LOVEDAY, D. L. and TAKI, A. H. *Convective heat transfer coefficients at a plane surface on a full-scale building facade*. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 39, No. 8, pp. 1729-1742, 1996.
- MACHADO COTTA, Renato. *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*. CRC Press, Inc., 1993.
- MAHFOUZ, F.M., *Transient free convection from a horizontal cylinder placed in a micropolar fluid*, Heat Mass Transfer 39 (5–6) (2003) 455–462.
- MAHFOUZ, F.M. and KOCABIYIK, S., *Transient numerical simulation of buoyancy driven flow adjacent to an elliptic tube*, Int. J. Heat Fluid Flow 24 (6) (2003) 864–873.
- MARTINI, William R and CHURCHILL, Stuart W. *Natural Convection Inside a Horizontal Cylinder*. A.I.Ch.E. Journal, 1960, Pag. 251-257.
- MARTYNENKO, Oleg G. and KHRAMTSOV, Pavel P. *Free-Convective Heat Transfer With Many Photographs of Flows and Heat Exchange*. Springer, Berlin, 2005. Chapter 1: Basic Statements and Equation of Free Convection, pag. 1-79. Chapter 3: Free Convection on Curved Surfaces, pag. 219-246. Chapter 6: Nonstationary Processes in Free convection, pag. 393-401.
- MATHEWS, John H. y FINK, D. Kurtis. *Métodos Numéricos con MATLAB*. 3ª Edición, Pearson, Prentice Hall, Madrid, 2000. Pág.356.
- MERK, J. H. and PRINS, J. A. *Thermal Convection in Laminar Boundary Layers II y III*. Appl Sci. Res., Section A, Vol 4, 1953, pag. 195-221.
- MERRICK DUSINBERRE, George. *Heat Transfer Calculations by Finite Differences*. International Textbook Company, 1961.

MILLS, Anthony F. *Transferencia de calor*. México: Irwin, 1995. Pag. 305-307, 385-434, 488-492.

MINKINA, Waldemar. *Theoretical and experimental identification of the temperature sensor unit step response non-linearity during air temperature measurement*. Sensors and Actuators 78 (1999), 81–87.

MOHAMMED, Hussein A and SALMAN, Yasin K. *Free and forced convection heat transfer in the thermal entry region for laminar flow inside a circular cylinder horizontally oriented*. Energy Conversion and Management 48 (2007) 2185–2195.

MUNOZ-COBO J.L., CORBERAN, J.M., and CHIVA,S. *Explicit formulas for laminar natural convection heat transfer along vertical cylinders with power-law wall temperature distribution*, Heat Mass Transfer 39 (3) (2003) 215–222.

NA, Tsung-Yen. *Effect of Wall Conduction on Natural Convection over a Vertical Slender Hollow Circular Cylinder*. Applied Scientific Research 54: Pag. 39-50, 1995.

NA, T.Y. and CHIOU, J.P. *Turbulent Natural Convection Over a Slender Circular Cylinder*. Wärme- und Stoffübertragung 14, 157-164, Springer Verlag, 1980.

NIEUWVELT, C.; BESSEM, J.M. and TRINES, G.R.M.. *A rapid thermometer for measurement in turbulent flow*.

OOSTHUIZEN, P.H. and PAUL, J.T. *Natural convective heat transfer from an isothermal vertical cylinder with an exposed upper surface mounted on a flat adiabatic base with a flat adiabatic surface above the cylinder*. 5th European Thermal-Sciences Conference, The Netherlands, 2008.

OSTRACH, Simon. *An Analysis of Laminar Free-Convection Flow and Heat Transfer About a Flat Plate Parallel to the Direction of the Generating Body Force*. Report 1111-National Advisory Committee for Aeronautics, NACA, 1952. Pag. 63-69.

PEREZ CRUZ, Justo Roberto. *La Termodinámica de Galileo a Gibbs*. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, Tenerife, 1998. Pág. 17-20.

POPIEL C.O. and WOJTKOWIAK J. *Experiments on free convective transfer from side walls of a vertical square cylinder en air*. ELSEIVER, ScienceDirect, 2004. Pag. 1-8.

POPIEL C.O., WOJTKOWIAK J. and BOBER K. *Laminar free convective heat transfer from isothermal vertical slender cylinder. Experiments on free convective transfer from side walls of a vertical square cylinder en air*. ELSEIVER, ScienceDirect, 2007. Pag. 607-613.

RANI, Hari Ponnamma and NYUNG, Chang Kim. *A numerical study of the Dufour and Soret effects on unsteady natural convection flow past an isothermal vertical cylinder*. Korean J. Chem. Eng., 26(4), 946-954, 2009.

RANI, H.P. *Transient natural convection along a vertical cylinder with variable surface temperature and mass diffusion*. Heat and Mass Transfer 40: 67–732, 2003.

RANI, Hari Ponnamma and NYUNG, Chang Kim. *Transient free convection flow over an isothermal vertical cylinder with temperature dependent viscosity*. Korean J. Chem. Eng., 25(1), 34-40 (2008).

RANI, H.P and GANESAN, P. *Transient natural convection along vertical cylinder with Heat and Mass transfer*. Heat and Mass Transfer 33 (1998) 449-455, Springer-Verlag 1998.

RAY, AK. *Natural Convection*, Pag. 1-12.

REES, S.J.; McGUIRK, J.J. and HAVES, P. *Numerical investigation of transient buoyant flow in a room with a displacement ventilation and chilled ceiling system*. International Journal of Heat and Mass Transfer 44 (2001), 3067-3080.

RODI W. and MULAS, M. *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 6*. Elsevier, 2005.

SHOEMAKER, David P. *Experiments in physical chemistry*. 5th ed. New York, McGraw-Hill, 1989. Pag. 113, 399-400.

SIGALES, B. *Transferencia de Calor Técnica*. Vol. 1. Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 2002. Pag. 30-35, 197-206, 508-514.

SMITH, Carlos A. y CORRIPIO, Armando B. *Control Automático de Procesos. Teoría y Práctica*. 1ª Edición. Noriega Editores, Limusa. México, 1991. Pág. 96, 151, 161.

TAKHAR, H.S., CHAMKHA A.J., and NATH, G. *Natural convection on a vertical cylinder embedded in a thermally stratified high-porosity medium*. Int. J. Therm. Sci. 41 (2002) 83–93.

THOMAS, L.C. *Heat Transfer – Professional Version*, 2nd edition. Capstone Publishing Corp, 1999.

UZEL, Ali R.; EDWARDS, Richard J. and BUTTON, Bryan L. *An expert system for convective heat transfer measurements using a transient analysis*.

VAN NESS H. C. and ABBOTT M. M. *Thermodynamics*. McGraw-Hill, 1972.

VLIET, G. C., and LIN C. K. *An Experimental Study of Turbulent Natural Convection Boundary Layers*. J. Heat Transfer, vol. 91, p.517, 1969.

WEBER, Robert L. and WHITE, Marsh W. *College Physics*. McGraw Hill Book Company, Inc., 1960.

WEDEKIND, G. L. and KOBUS, C. J. *Technical notes: Predicting the average heat transfer coefficient for an isothermal vertical circular disk with assisting and opposing combined forced and natural convection*. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 39, No. 13, pag. 2843-2845, 1996.

WEDEKIND, G. L. and KOBUS, C. J. *Modeling the local and average heat transfer coefficient for an isothermal vertical flat plate with assisting and opposing combined forced and natural convection*. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 39, No. 13, pp. 2723-2733, 1996.

XUA, Hang, LIAO, Shi-Jun and POP, Ioan. *Series solution of unsteady boundary layer flows of non-Newtonian fluids near a forward stagnation point*. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 139 (2006) 31-43.

ZHANG, N., ZHENG, Z.C., and ECKELS S. *Study of heat-transfer on the surface of a circular cylinder in flow using an immersed-boundary method*. International Journal of Heat and Fluid Flow 29 (2008) 1558-1566.

ZILL, Dennis G. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. Thomson Learning, Séptima Edición. Colombia, 2002. Pág. 292-300.

ZUBAIR, Syed M. *A Laboratory Manual for the ME 316: Thermo-Fluids Laboratory (Part b: Heat Transfer)*. Mechanical Engineering Department. King Fahd University of Petroleum & Minerals Dhahran 31261, Saudi Arabia.

INFOGRAFIA

<http://asi-se-hace.seriespepito.com/capitulos-doceava-temporada-12/capitulo-3-termometros-balanzas-comerciales-pintado-de-aviones-y-bombones-de-lujo/>

www.adsabs.harvard.edu

www.deepblue.lib.umich.edu/handle

www.metas.com.mx/guiametas/La-Guia-MetAs-08-09-termometros-liquido-en-vidrio.pdf

www.sinab.unal.edu.co/contenido/recursos/bases.php

www.sinab.unal.edu.co/ntc/NTC4505.pdf

www.sinab.unal.edu.co:2048/login?user=mamayorgab&pass=__&url=http://enterprise.astm.org

www.unidata.ucar.edu.co/staff/blynds/acerca.html

APENDICE A

DEDUCCIÓN DEL NÚMERO DE NUSSELT PROMEDIO PARA CONVECCIÓN NATURAL ALREDEDOR DE UN CILINDRO VERTICAL

I. PRINCIPIO DE SEMEJANZA

La resolución de tal sistema acoplado de manera analítica es muy difícil por su no linealidad.

Dado un cilindro vertical de altura, L , y diámetro, D . Se introducen las siguientes variables adimensionales:

θ : temperatura adimensional

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}$$

ζ : distancia vertical adimensional

$$\zeta = \frac{z}{L}$$

η : distancia radial adimensional

$$\eta = \left[\frac{g\beta(T_w - T_{\infty})}{\nu\alpha L} \right]^{1/4} r$$

ϕ_z : velocidad vertical adimensional

$$\phi_z = \left[\frac{\nu}{g\beta(T_w - T_{\infty})\alpha L} \right]^{1/4} v_z$$

ϕ_r : velocidad radial adimensional

$$\phi_r = \left[\frac{\nu L}{g\beta(T_w - T_{\infty})\alpha^3} \right]^{1/4} v_r$$

$$Pr = \frac{L^3 g\beta(T_w - T_{\infty})}{\nu^2}$$

Ecuaciones y Condiciones Límite Adimensionales

Adimensionalizando ahora las ecuaciones de conservación:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\eta \phi_r) + \frac{\partial \phi_z}{\partial \zeta} = 0$$

$$\frac{1}{Pr} \left(\phi_r \frac{\partial \phi_z}{\partial \eta} + \phi_z \frac{\partial \phi_r}{\partial \zeta} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \phi_z}{\partial \eta} \right) + \theta$$

$$\phi_r \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \phi_z \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)$$

Las condiciones limite de contorno o frontera adimensionales de estas ecuaciones son:

- En la pared:
Para

$$\eta = \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu\alpha L} \right]^{1/4} R = \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu\alpha L} \right]^{1/4} \frac{L}{L} R = \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu\alpha} \right]^{1/4} \frac{R}{L} = Ra_L^{1/4} \frac{R}{L}$$

$$\eta = Ra_L^{1/4} \frac{R}{L} = Pr^{1/4} Gr^{1/4} \frac{R}{L}$$

para todo $0 < \zeta < 1$

se tiene

$$\theta = 1$$

$$\phi_r = 0$$

$$\phi_z = 0$$

- En el seno del fluido:
En $\eta \rightarrow \infty$
para todo $0 < \zeta < 1$
se tiene

$$\theta = 1$$

$$\phi_z = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial \eta} = 0$$

Solución

El propósito principal al resolver las ecuaciones es obtener el flujo de calor transferido y para ello se requiere el coeficiente de transferencia de calor a través del Número de Nusselt medio, Nu .

$$\dot{Q}_{conducción} = \dot{Q}_{convección}$$

$$-kA \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = hA(T_w - T_\infty)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = h(T_w - T_\infty)$$

en forma adimensional, dado que

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_w - T_\infty}{L} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

de donde:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = \frac{T_w - T_\infty}{L} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{Ra^{1/4} \frac{R}{L}}$$

se tiene

$$\begin{aligned} -k \frac{T_w - T_\infty}{L} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{Ra^{1/4} \frac{R}{L}} &= h(T_w - T_\infty) \\ -\frac{k}{L} Ra^{1/4} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{Ra^{1/4} \frac{R}{L}} &= h \\ Nu_L = \frac{hL}{k} &= -\frac{k}{L} Ra^{1/4} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{Ra^{1/4} \frac{R}{L}} \cdot \frac{L}{k} = -Ra^{1/4} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{Ra^{1/4} \frac{R}{L}} \end{aligned}$$

Se observa que en el sistema de ecuaciones de conservación, en la ecuación de cantidad de movimiento aparece el parámetro adimensional, número de Prandtl, Pr , y en las condiciones límite aparece el número de Rayleigh, Ra , pero como se tiene que $Ra = GrPr$, y lo que se requiere contiene el número de Rayleigh, Ra , por ende es correcto establecer que:

$$Nu_L = f(Ra_L) = f(Gr_L, Pr)$$

II. ANÁLISIS DE ESCALA

Para el análisis de escala se requiere que todas las variables adimensionales queden parametrizadas, lo que se logra eligiendo valores característicos que garanticen que todas estas variables tengan un orden de magnitud de la unidad o menor. Este análisis indicara que términos de las ecuaciones diferenciales no son indispensables, además que también indica algo sobre la estructura y forma de la solución.

Se definen entonces las variables adimensionales:

$$z^* = \frac{z}{L}; \quad r^* = \frac{r}{\Delta}; \quad v_z^* = \frac{v_z}{U}; \quad v_r^* = \frac{v_r}{(\Delta/L)U}; \quad T^* = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$$

Observe que la escala de v_r surge de la ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow v_r = -\frac{1}{r} \int_R^r r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

U es la velocidad de escala y su magnitud apropiada se determina a partir de las ecuaciones. Se usa el espesor de la capa límite térmica, Δ , en la escala de r y en todas las ecuaciones, en lugar de usar el espesor de la capa límite hidrodinámica, δ , para las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento. Para $Pr \ll 1$, δ y Δ tienen de hecho una magnitud similar, puesto que la fuerza de empuje produce un flujo en la capa límite térmica, si bien la velocidad máxima ocurre cerca de la pared. Para $Pr \gg 1$, Δ es mucho menor que δ , ya que las fuerzas viscosas ejercen una fuerza de arrastre sobre el fluido que se encuentra fuera de la capa límite térmica, aunque es la fuerza de empuje la que impulsa al flujo, y la velocidad máxima, U , debe ocurrir para un valor de $r < \Delta$. Usando Δ en las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento se garantiza que $\partial v_z^* / \partial r^*$, y $\partial v_r^* / \partial r^*$ sean del orden de la unidad.

De acuerdo a la definición de las variables, se tiene que:

$$z = Lz^*; \quad r = \Delta r^*; \quad v_z = Uv_z^*; \quad v_r = \left(\frac{\Delta}{L}\right) Uv_r^*; \quad T - T_\infty = (T_w - T_\infty)T^*$$

$$\partial z = L\partial z^*; \quad \partial r = \Delta\partial r^*; \quad \partial v_z = U\partial v_z^*; \quad \partial v_r = \left(\frac{\Delta}{L}\right) U\partial v_r^*; \quad \partial T = (T_w - T_\infty)\partial T^*$$

Las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía a escala quedan:

Ecuación de Cantidad de Movimiento:

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + g\beta(T - T_\infty)$$

Entonces:

Se sustituyen estas equivalencias:

$$\left(\frac{\Delta}{L}\right) Uv_r^* \frac{U\partial v_z^*}{\Delta\partial r^*} + Uv_z^* \frac{U\partial v_z^*}{L\partial z^*} = \frac{\nu}{\Delta r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\Delta r^* \frac{U\partial v_z^*}{\Delta\partial r^*} \right) + g\beta(T_w - T_\infty)T^*$$

$$\frac{U^2}{L} \left(v_r^* \frac{U\partial v_z^*}{\Delta\partial r^*} + v_z^* \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} \right) = \frac{\nu U}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} \right) + g\beta(T_w - T_\infty)T^*$$

Ecuación de Energía:

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

De la misma manera

$$\left(\frac{\Delta}{L}\right) Uv_r^* \frac{(T_w - T_\infty)\partial T^*}{\Delta\partial r^*} + Uv_z^* \frac{(T_w - T_\infty)\partial T^*}{L\partial z^*} = \frac{\alpha}{\Delta r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\Delta r^* \frac{(T_w - T_\infty)\partial T^*}{\Delta\partial r^*} \right)$$

$$\frac{U(T_w - T_\infty)}{L} \left(v_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + v_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) = \frac{\alpha(T_w - T_\infty)}{\Delta^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right)$$

Número Prandtl Grande, $Pr \gg 1$

Este caso es el límite cuando Prandtl es grande; para estos fluidos, $\Delta \ll \delta$; la transferencia de calor está controlada por el interior de la capa límite, donde las fuerzas de inercia (aceleración) son despreciables y por tanto las fuerzas de empuje son equilibradas por las fuerzas viscosas.

Por tanto en la ecuación adimensional de cantidad de movimiento se tiene:

$$\frac{\nu U}{\Delta^2} \sim g\beta(T_w - T_\infty)$$

de donde:

$$\frac{U}{\Delta^2} \sim \frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu}$$

Y por la ecuación de energía:

$$\frac{U(T_w - T_\infty)}{L} \sim \frac{\alpha(T_w - T_\infty)}{\Delta^2}$$

de donde:

$$U\Delta^2 \sim \alpha L$$

Resolviendo las ecuaciones

$$\frac{U}{\Delta^2} \sim \frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu}$$

$$U\Delta^2 \sim \alpha L$$

con variables U y Δ .

Multiplicando las ecuaciones:

$$\frac{U}{\Delta^2} \cdot U\Delta^2 \sim \frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu} \cdot \alpha L$$

$$U^2 \sim \frac{g\beta(T_w - T_\infty)\alpha L}{\nu}$$

$$U \sim \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L}{\nu/\alpha} \right]^{1/2}$$

Reemplazando este valor de U en la segunda ecuación (energía):

$$U\Delta^2 \sim \alpha L$$

$$\Delta^2 \sim \frac{\alpha L}{U}$$

$$\Delta^2 \sim \frac{\alpha L}{\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L}{\nu/\alpha} \right]^{1/2}}$$

$$\Delta^2 \sim \frac{L}{\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L}{\nu/\alpha \cdot \alpha^2} \right]^{1/2}} \cdot \frac{L}{L}$$

$$\Delta^2 \sim \frac{L^2}{\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L \cdot L^2}{\nu\alpha} \right]^{1/2}}$$

$$\frac{\Delta^2}{L^2} \sim \frac{1}{\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu\alpha} \right]^{1/2}}$$

$$\frac{\Delta}{L} \sim \frac{1}{\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu\alpha} \right]^{1/4}}$$

donde el grupo adimensional

$$\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu\alpha}$$

es el número de Rayleigh, Ra_L , por tanto:

$$\frac{\Delta}{L} \sim \frac{1}{Ra_L^{1/4}}$$

Número Prandtl Pequeño, $Pr \ll 1$

Este caso es el límite cuando Prandtl es pequeño; la alta difusividad térmica de estos fluidos, hace que $\Delta \ll \delta$ y por tanto la transferencia de calor está controlada por el exterior de la capa límite, donde las fuerzas viscosas son muy pequeñas y por tanto las fuerzas de empuje son equilibradas por las fuerzas inerciales.

Así de la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{U^2}{L} \sim g\beta(T_w - T_\infty)$$

de donde:

$$U \sim [g\beta(T_w - T_\infty)L]^{1/2}$$

Que al sustituir en la de energía:

$$U\Delta^2 \sim \alpha L$$

se obtiene:

$$\Delta^2 \sim \frac{\alpha L}{U}$$

$$\Delta^2 \sim \frac{\alpha L}{[g\beta(T_w - T_\infty)L]^{1/2}} \cdot \frac{L}{L}$$

$$\frac{\Delta^2}{L^2} \sim \left[\frac{\alpha^2}{g\beta(T_w - T_\infty)L^3} \right]^{1/2}$$

$$\frac{\Delta}{L} \sim \frac{1}{\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\alpha^2} \right]^{1/4}}$$

donde el grupo adimensional

$$\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\alpha^2}$$

es el número de Boussinesq, Bo_L , por tanto:

$$\frac{\Delta}{L} \sim \frac{1}{Bo_L^{1/4}}$$

Número de Prandtl Unitario $Pr \rightarrow 1$.

En este caso el Número de Prandtl tiende a uno, o tiene orden de la unidad. Para fluidos en los que $\Delta \approx \delta$, tanto la fuerza inercial como viscosa tienen una magnitud comparable respecto a la fuerza de empuje, la que está impulsando el flujo en todo momento.

De la ecuación de cantidad de movimiento,

$$\frac{U^2}{L} \sim \frac{\nu U}{\Delta^2} \sim g\beta(T_w - T_\infty)$$

que se puede desglosar en las dos ecuaciones:

$$\frac{U^2}{L} \sim \frac{\nu U}{\Delta^2}$$

$$\frac{\nu U}{\Delta^2} \sim g\beta(T_w - T_\infty)$$

Despejando de U de:

$$\frac{U^2}{L} \sim \frac{\nu U}{\Delta^2}$$

se obtiene:

$$U \sim \frac{\nu L}{\Delta^2}$$

y reemplazando en

$$\frac{\nu U}{\Delta^2} \sim g\beta(T_w - T_\infty)$$

se llega a:

$$\frac{\nu}{\Delta^2} \cdot \frac{\nu L}{\Delta^2} \sim g\beta(T_w - T_\infty)$$

$$\frac{\nu^2 L}{\Delta^4} \sim g\beta(T_w - T_\infty)$$

$$\frac{L}{\Delta^4} \cdot L^3 \sim \frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \cdot L^3$$

$$\frac{L^4}{\Delta^4} \sim \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2}$$

Despejando $\frac{\Delta}{L}$:

$$\frac{\Delta^4}{L^4} \sim \frac{\nu^2}{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}$$

$$\frac{\Delta}{L} \sim \frac{1}{\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2} \right]^{1/4}}$$

donde el grupo adimensional

$$\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2}$$

es el número de Grashof, Gr_L , por tanto:

$$\frac{\Delta}{L} \sim \frac{1}{Gr_L^{1/4}}$$

Resultado

La magnitud del número de Prandtl determina si la convección libre se caracteriza por el número de Rayleigh, el de Boussinesq o el de Grashof. Teniendo en cuenta que:

$$Ra = GrPr \quad y \quad Bo = RaPr = GrPr^2$$

para el caso en que $Pr \rightarrow 1$, los tres grupos adimensionales son equivalentes.

Determinando el Número de Nusselt

De acuerdo al balance en la frontera:

$$\dot{Q}_{conducción} = \dot{Q}_{convección}$$

$$-kA \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = hA(T_w - T_\infty)$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = h(T_w - T_\infty)$$

en forma adimensional, dado que

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{(T_w - T_\infty)}{\Delta} \frac{\partial T^*}{\partial r^*}$$

se tiene

$$-k \frac{(T_w - T_\infty)}{\Delta} \left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{R^*} = h(T_w - T_\infty)$$

$$\frac{k}{\Delta} \left. \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right|_{R^*} = h$$

de esta manera,

$$h \sim \frac{k}{\Delta}$$

Como se define el número de Nusselt:

$$Nu_L = \frac{hL}{k}$$

Entonces

$$Nu_L = \frac{hL}{k} \sim \frac{k}{\Delta} \cdot \frac{L}{k}$$

$$Nu_L \sim \frac{L}{\Delta}$$

Se obtuvieron los valores de Δ/L para los tres casos de Prandtl, y por esto:

$$Nu_L \sim \begin{cases} Bo_L^{1/4} = Ra_L^{1/4} Pr^{1/4} = Gr_L^{1/4} Pr^{1/2} & Pr \ll 1 \\ Gr_L^{1/4} & Pr \approx 1 \\ Ra_L^{1/4} = Gr_L^{1/4} Pr^{1/4} & Pr \gg 1 \end{cases}$$

o de otra manera:

$$Nu_L \sim Gr_L^{1/4} Pr^n = c Gr^{1/4} Pr^n$$

Donde la constante c se encuentra experimental o teóricamente, mientras que el exponente predicho teóricamente por el análisis de escala asume los siguientes valores:

| Exponente | $Pr \ll 1$ | $Pr \approx 1$ | $Pr \gg 1$ |
|-----------|------------|----------------|------------|
| n | 1/2 | 0 | 1/4 |

Para el caso del aire como fluido de trabajo $Pr \approx 0.72 \rightarrow 1$, el análisis lleva a:

$$Nu \sim Gr^{1/4}$$

Estas expresiones sirven para correlacionar datos experimentales. Tanto el análisis dimensional por el teorema Pi de Buckingham como el principio de semejanza solo lleva al resultado $Nu = f(Gr, Pr)$, mientras que el análisis de escala nos permite obtener la forma de esta función.

III. RESOLUCIÓN POR TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE

- Sistema adimensional

Se suponen perfiles semejantes de velocidad y de temperatura

$$\frac{v_z}{U} = \phi(\eta) \quad \text{donde} \quad \eta = \frac{r-R}{\delta(z)}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \theta(\eta_T) \quad \text{donde} \quad \eta_T = \frac{r-R}{\delta_T(z)}$$

Si las dos capas límites se relacionan:

$$\delta_T = \Delta \delta$$

donde

$$\Delta = \frac{\delta_T}{\delta} = cte$$

De la ecuación de continuidad:

$$v_r = -\frac{1}{r} \int_R^r r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

Reemplazando en la ecuación de movimiento junto con los perfiles:

$$U \int_0^\eta (\eta\delta + R)\phi'\eta d\eta \cdot \delta \frac{d\delta}{dz} - U(\eta\delta + R)\phi\phi'\eta\delta \frac{d\delta}{dz} = \nu[\delta\phi' + (\eta\delta + R)\phi'']$$

Integrando dentro de la capa limite, respecto a η , $0 \leq \eta \leq 1$

$$\left\{ \int_0^1 \left[\int_0^\eta (\eta\delta + R)\phi'\eta d\eta \right] d\eta - \int_0^1 (\eta\delta + R)\phi\phi'\eta d\eta \right\} \delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\nu}{U} \int_0^1 [\delta\phi' + (\eta\delta + R)\phi''] d\eta$$

Definiendo:

$$A = \int_0^1 (\eta\delta + R)\phi\phi'\eta d\eta$$

$$B = \int_0^1 \left[\int_0^\eta (\eta\delta + R)\phi'\eta d\eta \right] d\eta$$

$$C = \int_0^1 [\delta\phi' + (\eta\delta + R)\phi''] d\eta$$

La ecuación de movimiento queda:

$$(B - A)\delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\nu}{U} C$$

Análogamente en la ecuación de energía,

De la ecuación de continuidad se tenía que

$$v_r = -\frac{1}{r} \int_R^r r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

Introduciendo esto en la ecuación de energía junto a los perfiles queda:

$$U \left[\int_0^\eta \phi' (\eta\delta + R)\eta\delta' d\eta \right] \theta' \frac{1}{\delta_T} - U\phi(\eta_T\delta_T + R)\eta_T \frac{\delta_T'}{\delta_T} = \alpha \frac{1}{\delta_T} [\delta_T\theta' + (\eta_T\delta_T + R)\theta'']$$

Ahora si

$$\eta = \eta_T \Delta$$

Se tiene que:

$$\left\{ \Delta \left[\int_0^{\eta_T \Delta} \phi' (\eta\delta + R)\eta d\eta \right] \theta' - \Delta^2 \phi(\eta_T\delta_T + R)\eta_T \right\} \delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\alpha}{U} [\delta_T\theta' + (\eta_T\delta_T + R)\theta'']$$

Integrando dentro de la capa limite $0 \leq \eta_T \leq 1$:

$$\left\{ \Delta \int_0^1 \left[\int_0^{\eta_T \Delta} \phi' (\eta \delta + R) \eta d\eta \right] \theta' d\eta_T - \Delta^2 \int_0^1 \phi (\eta_T \delta_T + R) \eta_T d\eta_T \right\} \delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\alpha}{U} \int_0^1 [\delta_T \theta' + (\eta_T \delta_T + R) \theta''] d\eta_T$$

Definiendo:

$$D = \Delta^2 \int_0^1 \phi (\eta_T \delta_T + R) \eta_T d\eta_T$$

$$E = \Delta \int_0^1 \left[\int_0^{\eta_T \Delta} \phi' (\eta \delta + R) \eta d\eta \right] \theta' d\eta_T$$

$$F = \int_0^1 [\delta_T \theta' + (\eta_T \delta_T + R) \theta''] d\eta_T$$

Así la ecuación de energía queda como:

$$(E - D) \delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\alpha}{U} F$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias considerando un perfil de capa límite:

$$(B - A) \delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\nu}{U} C$$

$$(E - D) \delta \frac{d\delta}{dz} = \frac{\alpha}{U} F$$

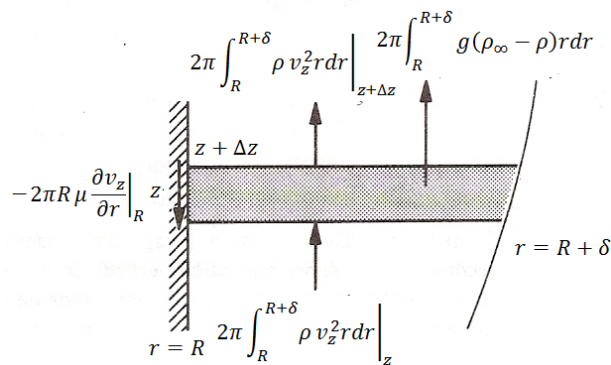
Combinando estas ecuaciones al dividir las entre sí:

$$\frac{B - A}{E - D} = Pr \frac{C}{F}$$

Una vez que se conoce Δ , se puede encontrar $\delta_T(z)$ a partir de las ecuaciones anteriores y así saber el perfil de temperatura.

IV. MÉTODO INTEGRAL

Planteamiento del modelo



Ecuación de cantidad de movimiento

Aplicando la Segunda Ley de Newton:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{neto} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext}$$

Desarrollando lo correspondiente al cambio o flux de cantidad e movimiento:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} = \dot{m}v$$

Y por continuidad $\dot{m} = \rho v A$,

Así:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho v A v = \rho v^2 A$$

Se encuentra la cantidad de movimiento que entra y que sale del elemento diferencial:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{sale} = \frac{d\vec{p}}{dt}\Big|_{z+\Delta z} = \int_{A_1}^{A_2} \rho v_z^2 dA\Big|_{z+\Delta z}$$

Si

$$A = \pi(r^2 - R^2)$$

Y derivando respecto a r:

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$A_1 \rightarrow R \quad \wedge \quad A_2 \rightarrow R + \delta$$

Donde δ es el espesor de la capa limite, y R es el radio del cilindro.

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{sale} = \frac{d\vec{p}}{dt}\Big|_{z+\Delta z} = \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 (2\pi r dr)\Big|_{z+\Delta z} = 2\pi \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 r dr\Big|_{z+\Delta z}$$

De la misma manera el flux de cantidad de movimiento que entra

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{entra} = \frac{d\vec{p}}{dt}\Big|_z = \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 (2\pi r dr)\Big|_z = 2\pi \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 r dr\Big|_z$$

o en términos generales:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 2\pi \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 r dr$$

Luego el flux de cantidad de movimiento neto sobre el elemento diferencial será:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{neto} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{sale} - \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{entra}$$

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{neto} = \frac{d\vec{p}}{dt}\Big|_{z+\Delta z} - \frac{d\vec{p}}{dt}\Big|_z$$

donde

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 2\pi \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 r dr$$

Ahora identificando todas las fuerzas externas que actúan sobre el volumen de control elemental en dirección z para encontrar la fuerza neta:

Fuerza Viscosa en la Pared:

$$\vec{F}_{vis} = \tau_{rz} A_L \Big|_{r=R} = -\mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_R (2\pi R \Delta z) = -2\pi R \Delta z \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_R$$

Donde A_L es el área lateral del cilindro.

Fuerza de Flotación:

$$\vec{F}_{flot} = B$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} \rho_{\infty} g dV$$

Peso:

$$\vec{W} = - \int_{V_1}^{V_2} \rho g dV$$

Calculo de la fuerza neta:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_{i,ext} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_{iz,ext} = \vec{F}_{flot} + \vec{W} + \vec{F}_{vis}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext} = \int_{V_1}^{V_2} \rho_{\infty} g dV - \int_{V_1}^{V_2} \rho g dV - 2\pi R \Delta z \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_R$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext} = \int_{V_1}^{V_2} (\rho_{\infty} - \rho) g dV - 2\pi R \Delta z \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_R$$

dado que:

$$V = A \Delta z$$

derivando respecto al área

$$\frac{dV}{dA} = \Delta z$$

$$dV = \Delta z dA$$

y aplicando que

$$dA = 2\pi r dr$$

queda:

$$dV = \Delta z (2\pi r dr)$$

$$dV = 2\pi \Delta z r dr$$

Además:

$$V_1 \rightarrow R \quad \wedge \quad V_2 \rightarrow R + \delta$$

sustituyendo en la ecuación de fuerza neta

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext} = \int_R^{R+\delta} (\rho_\infty - \rho) g (2\pi \Delta z r dr) - 2\pi R \Delta z \mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext} = 2\pi \Delta z \int_R^{R+\delta} g (\rho_\infty - \rho) r dr - 2\pi R \Delta z \mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext} = 2\pi \Delta z \left[\int_R^{R+\delta} g (\rho_\infty - \rho) r dr - R \mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R \right]$$

Ahora ya conocidos cada uno de los términos, se aplica la segunda Ley de Newton:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{neto} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext}$$

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right)_{neto} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_{z+\Delta z} - \frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_z \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i,ext} = 2\pi \Delta z \left[\int_R^{R+\delta} g (\rho_\infty - \rho) r dr - R \mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R \right]$$

y queda:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_{z+\Delta z} - \frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_z = 2\pi \Delta z \left[\int_R^{R+\delta} g (\rho_\infty - \rho) r dr - R \mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R \right]$$

Dividendo entre Δz y tomando el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\frac{\frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_{z+\Delta z} - \frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_z}{\Delta z} = \frac{2\pi \Delta z \left[\int_R^{R+\delta} g (\rho_\infty - \rho) r dr - R \mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R \right]}{\Delta z}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_{z+\Delta z} - \frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_z}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ 2\pi \left[\int_R^{R+\delta} g (\rho_\infty - \rho) r dr - R \mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R \right] \right\}$$

Por definición de derivada:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right) = 2\pi \left[\int_R^{R+\delta} g(\rho_\infty - \rho) r dr - R\mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R \right]$$

Recordando que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 2\pi \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 r dr$$

de esta manera se tiene:

$$\frac{d}{dz} \left(2\pi \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 r dr \right) = 2\pi \left[\int_R^{R+\delta} g(\rho_\infty - \rho) r dr - R\mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R \right]$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 r dr = \int_R^{R+\delta} g(\rho_\infty - \rho) r dr - R\mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R$$

Anteriormente se había establecido la aproximación de Bousinesq (con $\rho = cte$ en todos los términos excepto en los de la fuerza de empuje), dividiendo entre ρ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} \rho v_z^2 r dr = \frac{1}{\rho} \left[\int_R^{R+\delta} g(\rho_\infty - \rho) r dr - R\mu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R \right]$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \int_R^{R+\delta} g \frac{(\rho_\infty - \rho)}{\rho} r dr - R \frac{\mu}{\rho} \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R$$

donde:

$$\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} \approx \beta(T - T_\infty) \quad \wedge \quad \frac{\mu}{\rho} = \nu$$

Para finalmente obtener:

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr - R\nu \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R$$

Ecuación de energía

Aplicando la Primera Ley de Termodinámica al elemento de control elemental:

$$\dot{Q} + \sum_{i=1}^m \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,ent} = \dot{W} + \sum_{i=1}^n \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,sal} + \frac{d}{dt} E_{sist}$$

Se considera que el flujo es estacionario, se desprecia la conducción en la dirección z , y la conducción en la dirección r es cero por fuera de la capa límite. La transferencia de calor se da de la pared al volumen de control elemental por conducción.

Donde:

el sistema está en estado estacionario:

$$\frac{d}{dt} E_{sist} = 0$$

no hay intercambio de trabajo con los alrededores:

$$\dot{W} = 0$$

Existen dos corrientes de salida y una de entrada en las cuales se desprecian los cambios en sus energía potenciales y cinéticas porque el elemento es muy pequeño.

$$\sum_{i=1}^m \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,ent} = \sum_{i=1}^1 h_i \dot{m}_{i,ent} = h \dot{m}|_z$$

$$\sum_{i=1}^n \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,sal} = \sum_{i=1}^2 h_i \dot{m}_{i,sal} = h \dot{m}|_{z+\Delta z} + h \dot{m}|_{r=R+\delta_T}$$

$$\text{Y por continuidad } \dot{m} = \rho v A,$$

Para la dirección z se tiene que:

$$h \dot{m} = \int_{A_1}^{A_2} h \rho v_z dA$$

$$dA = 2\pi r dr$$

$$A_1 \rightarrow R \quad \wedge \quad A_2 \rightarrow R + \delta_T$$

Donde δ_T es el espesor de la capa límite térmica

$$h \dot{m} = \int_{A_1}^{A_2} h \rho v_z dA = \int_R^{R+\delta_T} h \rho v_z (r dr) = 2\pi \int_R^{R+\delta_T} h \rho v_z r dr$$

Para la dirección r se tiene que:

$$h \dot{m}|_{R+\delta_T} = h \rho v_r A_L|_{R+\delta_T} = h_\infty [2\pi(R + \delta_T)\Delta z] \rho v_r|_{R+\delta_T} = 2\pi(R + \delta_T)\Delta z h_\infty \rho v_r|_{R+\delta_T}$$

Ahora de la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Podemos establecer v_r en función de v_z al despejar:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = -r \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Separando variables:

$$\partial(r v_r) = -r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

Integrando bajo la condición de frontera:

$$r = R \rightarrow v_r = 0$$

$$\int_{R-0}^{r v_r} d(r v_r) = \int_R^r -r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

$$\int_0^{rv_r} d(rv_r) = - \int_R^r r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

$$rv_r = - \int_R^r r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

$$v_r = - \frac{1}{r} \int_R^r r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

Calculado en

$$r = R + \delta_T$$

$$v_r|_{R+\delta} = - \frac{1}{R + \delta_T} \int_R^{R+\delta_T} r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

$$h\dot{m}|_{R+\delta_T} = 2\pi(R + \delta_T)\Delta z h_{\infty} \rho v_r|_{R+\delta} = 2\pi(R + \delta_T)\Delta z h_{\infty} \rho \left(- \frac{1}{R + \delta_T} \int_R^{R+\delta_T} r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr \right)$$

$$h\dot{m}|_{R+\delta_T} = -2\pi\Delta z h_{\infty} \rho \int_R^{R+\delta} r \frac{\partial v_z}{\partial z} dr$$

intercambiando el orden de integración y diferenciación:

$$h\dot{m}|_{R+\delta_T} = -2\pi\Delta z h_{\infty} \rho \frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} r v_z dr$$

El flujo de calor en la pared hacia el fluido se da por conducción en la dirección radial:

$$\dot{Q} = -kA \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = -k(2\pi R \Delta z) \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = -2\pi k R \Delta z \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R$$

Así la primera Ley se puede reescribir como:

$$\dot{Q} = \sum_{i=1}^n \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,sal} - \sum_{i=1}^m \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,ent}$$

$$\sum_{i=1}^n \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,sal} - \sum_{i=1}^m \left(h + \frac{1}{2} v^2 + gz \right)_i \dot{m}_{i,ent} = \dot{Q}$$

Reemplazando se obtiene que:

$$h\dot{m}|_{z+\Delta z} + h\dot{m}|_{R+\delta_T} - h\dot{m}|_z = -2\pi k R \Delta z \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R$$

dividiendo entre Δz :

$$\frac{h\dot{m}|_{z+\Delta z} - h\dot{m}|_z + h\dot{m}|_{R+\delta_T}}{\Delta z} = - \frac{2\pi k R \Delta z}{\Delta z} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R$$

Además sabiendo que

$$h\dot{m}|_{R+\delta_T} = -2\pi\Delta z h_{\infty} \rho \frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z dr$$

$$\frac{h\dot{m}|_{z+\Delta z} - h\dot{m}|_z}{\Delta z} - \frac{2\pi\Delta z h_\infty \rho}{\Delta z} \frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} r v_z dr = -2\pi k R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

y tomando el límite cuando $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{h\dot{m}|_{z+\Delta z} - h\dot{m}|_z}{\Delta z} - 2\pi h_\infty \rho \frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} r v_z dr \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(-2\pi k R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \right)$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{h\dot{m}|_{z+\Delta z} - h\dot{m}|_z}{\Delta z} \right) - 2\pi h_\infty \rho \frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} r v_z dr = -2\pi k R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

Por definición de derivada

$$\frac{d}{dz} (h\dot{m}) - 2\pi h_\infty \rho \frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} r v_z dr = -2\pi k R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

Y recordando que

$$h\dot{m} = 2\pi \int_R^{R+\delta_T} h \rho v_z r dr$$

entonces:

$$\frac{d}{dz} \left(2\pi \int_R^{R+\delta_T} h \rho v_z r dr \right) - 2\pi h_\infty \rho \frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z r dr = -2\pi k R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

$$2\pi \rho \frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} h v_z r dr - 2\pi h_\infty \rho \frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z r dr = -2\pi k R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

dividiendo entre $2\pi\rho$:

$$\frac{d}{dz} \left(\int_R^{R+\delta_T} h v_z r dr - \int_R^{R+\delta_T} h_\infty v_z r dr \right) = -\frac{kR}{\rho} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} (h - h_\infty) v_z r dr = -\frac{kR}{\rho} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

Se sabe que a partir de:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = c_P$$

se llega a:

$$dh = c_P dT$$

Integrando definitivamente con la condición:

$$T = T_\infty \rightarrow h = h_\infty$$

$$h - h_\infty = \int_{T_\infty}^T c_P dT$$

como las propiedades se asumen constantes:

$$h - h_\infty = c_P \int_{T_\infty}^T dT = c_P (T - T_\infty)$$

reemplazando este resultado tenemos:

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} c_p(T - T_\infty) v_z r dr = -R \frac{k}{\rho} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R$$

Dividiendo entre c_p

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z(T - T_\infty) r dr = -R \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R$$

Por definición del coeficiente de difusividad térmica

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z(T - T_\infty) r dr = -\alpha R \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R$$

Solución del modelo

Resolución simultánea de ecuaciones:

Resolviendo el sistema:

Conservación Cantidad de Movimiento:

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr - Rv \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_R$$

Conservación Energía

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z(T - T_\infty) r dr = -\alpha R \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R$$

Las condiciones de frontera para este caso son:

$$r = R \rightarrow v_z = 0, \quad T = T_w$$

$$r = R + \delta \rightarrow v_z = 0$$

$$r = R + \delta_T \rightarrow T = T_\infty$$

Se establece la relación constante (independiente de z) entre las capas límites hidrodinámica y térmica:

$$\Delta = \frac{\delta_T(z)}{\delta(z)} \quad \therefore \quad \delta_T(z) = \Delta \delta(z)$$

Si se plantea que

$$\frac{v_z}{U} = \phi(\eta) \quad \text{siendo} \quad \eta = \frac{r - R}{\delta(z)}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \theta(\eta_T) \quad \text{siendo} \quad \eta_T = \frac{r - R}{\delta_T(z)} = \frac{r - R}{\Delta \delta(z)}$$

Donde se tiene que

$$\delta_r(z) = \Delta\delta(z)$$

Se tiene que para la ecuación de movimiento:

$$v_z = U\phi(\eta)$$

$$r = \delta(z)\eta + R$$

Derivando esta última:

$$dr = \delta(z)d\eta$$

Y para la ecuación de energía:

$$T - T_\infty = (T_w - T_\infty)\theta(\eta_T)$$

$$r = \Delta\delta(z)\eta + R$$

Derivando esta última:

$$dr = \Delta\delta(z)d\eta$$

Se halla para la ecuación de movimiento:

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr - Rv \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \frac{d}{dz} \int_0^1 [U\phi(\eta)]^2 [\delta(z)\eta + R] \delta(z) d\eta = U^2 \frac{d}{dz} \left\{ \delta(z) \int_0^1 [\phi(\eta)]^2 [\delta(z)\eta + R] d\eta \right\}$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \frac{d}{dz} \left\{ U^2 \left[\delta \int_0^1 (\phi^2 \delta \eta + R\phi) d\eta \right] \right\} = \frac{d}{dz} \left(U^2 \delta^2 \int_0^1 \phi^2 \eta d\eta + RU^2 \delta \int_0^1 \phi^2 d\eta \right)$$

$$\int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr = \int_0^1 g\beta(T_w - T_\infty)\theta(\eta_T) [\delta(z)\eta + R] \delta(z) d\eta$$

$$\int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr = g\beta(T_w - T_\infty)\delta \int_0^1 \theta(\delta\eta + R) d\eta = g\beta(T_w - T_\infty) \left(\delta^2 \int_0^1 \theta \eta d\eta + R\delta \int_0^1 \theta d\eta \right)$$

$$Rv \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R = Rv \left. \frac{\partial}{\partial \eta} [U\phi(\eta)] \right|_0 = \frac{RvU}{\delta} \left. \frac{d\phi}{d\eta} \right|_0$$

Para la ecuación de Energía se tiene:

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z(T - T_\infty) r dr = -\alpha R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z(T - T_\infty) r dr = \frac{d}{dz} \int_0^1 U\phi(\eta)(T_w - T_\infty)\theta(\eta_T) [\Delta\delta(z)\eta + R] \Delta\delta(z) d\eta_T$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z(T - T_\infty) r dr = (T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left[U\Delta\delta \int_0^1 \phi\theta (\Delta\delta\eta_T + R) d\eta_T \right]$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z (T - T_\infty) r dr = (T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left(U \delta^2 \Delta^2 \int_0^1 \phi \theta \eta_T d\eta_T + U \delta \Delta R \int_0^1 \phi \theta d\eta_T \right)$$

$$\alpha R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = \alpha R \frac{\partial}{\partial \delta \partial \eta_T} [(T_w - T_\infty) \theta(\eta_T) + T_\infty] \Big|_R = \frac{\alpha R (T_w - T_\infty)}{\delta \Delta} \left. \frac{d\theta}{d\eta_T} \right|_R$$

Se proponen las siguientes formas para los perfiles de velocidad y temperatura:

$$\frac{v_z}{U} = \frac{r-R}{\delta(z)} \left[1 - \frac{r-R}{\delta(z)} \right]^2$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left[1 - \frac{r-R}{\delta_T(z)} \right]^2$$

Donde U es una velocidad de escala. Estos perfiles están acordes con las condiciones de frontera y además son suaves en el borde de las respectivas capas limites, es decir:

$$\left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{R+\delta} = 0 \wedge \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{R+\delta_T} = 0$$

pero no se cumple que:

$$\left. \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} \right|_R = 0$$

aunque estos perfiles en paredes planas han resultado sorprendentemente buenos [MILLS]

Llevando a las nuevas variables adimensionales estos perfiles son:

$$\frac{v_z}{U} = \frac{r-R}{\delta(z)} \left[1 - \frac{r-R}{\delta(z)} \right]^2 \rightarrow \phi(\eta) = \eta(1-\eta)^2$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left[1 - \frac{r-R}{\delta_T(z)} \right]^2 \rightarrow \theta(\eta_T) = (1-\eta_T)^2$$

Sabiendo que

$$\delta_T = \Delta \delta$$

y como

$$\eta = \frac{r-R}{\delta(z)}$$

$$\eta_T = \frac{r-R}{\delta_T(z)} = \frac{r-R}{\Delta \delta(z)}$$

Dividiendo estas dos últimas:

$$\frac{\eta}{\eta_T} = \frac{\frac{r-R}{\delta}}{\frac{r-R}{\Delta \delta}}$$

$$\frac{\eta}{\eta_T} = \Delta$$

Tenemos que

$$\eta = \Delta \eta_T$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \frac{d}{dz} \left(U^2 \delta^2 \int_0^1 \phi^2 \eta d\eta + RU^2 \delta \int_0^1 \phi^2 d\eta \right)$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \frac{d}{dz} \left\{ U^2 \delta^2 \int_0^1 [\eta(1-\eta)^2]^2 \eta d\eta + RU^2 \delta \int_0^1 [\eta(1-\eta)^2]^2 d\eta \right\}$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \frac{d}{dz} \left\{ U^2 \delta^2 \int_0^1 \eta^2 (1-\eta)^4 \eta d\eta + RU^2 \delta \int_0^1 \eta^2 (1-\eta)^4 d\eta \right\}$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \frac{d}{dz} \left[U^2 \delta^2 \int_0^1 \eta^3 (1-4\eta+6\eta^2-4\eta^3+\eta^4) d\eta + RU^2 \delta \int_0^1 \eta^2 (1-4\eta+6\eta^2-4\eta^3+\eta^4) d\eta \right]$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \frac{d}{dz} \left[U^2 \delta^2 \int_0^1 (\eta^3 - 4\eta^4 + 6\eta^5 - 4\eta^6 + \eta^7) d\eta + RU^2 \delta \int_0^1 (\eta^2 - 4\eta^3 + 6\eta^4 - 4\eta^5 + \eta^6) d\eta \right]$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \frac{d}{dz} \left\{ U^2 \delta^2 \left[\frac{1}{4} \eta^4 - \frac{4}{5} \eta^5 + \eta^6 - \frac{4}{7} \eta^7 + \frac{1}{8} \eta^8 \right]_0^1 + RU^2 \delta \left[\frac{1}{3} \eta^3 - \eta^4 + \frac{6}{5} \eta^5 - \frac{2}{3} \eta^6 + \frac{1}{7} \eta^7 \right]_0^1 \right\}$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \frac{d}{dz} \left[U^2 \delta^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{5} + 1 - \frac{4}{7} + \frac{1}{8} \right) + RU^2 \delta \left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{6}{5} - \frac{2}{3} + \frac{1}{7} \right) \right]$$

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{280} U^2 \delta^2 + \frac{1}{105} RU^2 \delta \right)$$

$$\int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr = g\beta(T_w - T_\infty) \left(\delta^2 \int_0^1 \theta \eta d\eta + R\delta \int_0^1 \theta d\eta \right)$$

$$\int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr = g\beta(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 \int_0^1 (1-\eta_r)^2 \eta d\eta + R\delta \int_0^1 (1-\eta_r)^2 d\eta \right]$$

$$\int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr = g\beta(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 \int_0^1 \left(1 - \frac{\eta}{\Delta}\right)^2 \eta d\eta + R\delta \int_0^1 \left(1 - \frac{\eta}{\Delta}\right)^2 d\eta \right]$$

$$\int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr = g\beta(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 \int_0^1 \left(1 - 2\frac{\eta}{\Delta} + \frac{\eta^2}{\Delta^2}\right) \eta d\eta + R\delta \int_0^1 \left(1 - 2\frac{\eta}{\Delta} + \frac{\eta^2}{\Delta^2}\right) d\eta \right]$$

$$\int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr = g\beta(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 \int_0^1 \left(\eta - 2\frac{\eta^2}{\Delta} + \frac{\eta^3}{\Delta^2}\right) d\eta + R\delta \int_0^1 \left(1 - 2\frac{\eta}{\Delta} + \frac{\eta^2}{\Delta^2}\right) d\eta \right]$$

$$\int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr = g\beta(T_w - T_\infty) \left\{ \delta^2 \left[\frac{1}{2} \eta^2 - \frac{2}{3} \frac{\eta^3}{\Delta} + \frac{1}{4} \frac{\eta^4}{\Delta^2} \right]_0^1 + R\delta \left[\eta - \frac{\eta^2}{\Delta} + \frac{1}{3} \frac{\eta^3}{\Delta^2} \right]_0^1 \right\}$$

$$\int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr = g\beta(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta^2} \right) + R\delta \left(1 - \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{3} \frac{1}{\Delta^2} \right) \right]$$

$$Rv \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R = \frac{RvU}{\delta} \left. \frac{d\phi}{d\eta} \right|_0 = \frac{RvU}{\delta} \left. \frac{d}{d\eta} [\eta(1-\eta)^2] \right|_0 = \frac{RvU}{\delta} [(1-\eta)^2 - 2\eta(1-\eta)]|_0 = \frac{RvU}{\delta}$$

Para la de energía:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z(T - T_\infty) r dr &= (T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left(U \delta^2 \Delta^2 \int_0^1 \phi \theta \eta_T d\eta_T + RU \delta \Delta \int_0^1 \phi \theta d\eta_T \right) \\
\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z(T - T_\infty) r dr &= \\
&= (T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^2 \int_0^1 \eta(1-\eta)^2(1-\eta_T)^2 \eta_T d\eta_T + RU \delta \Delta \int_0^1 \eta(1-\eta)^2(1-\eta_T)^2 d\eta_T \right] \\
&= \frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^2 \int_0^1 \Delta \eta_T (1-\Delta \eta_T)^2 (1-\eta_T)^2 \eta_T d\eta_T + RU \delta \Delta \int_0^1 \Delta \eta_T (1-\Delta \eta_T)^2 (1-\eta_T)^2 d\eta_T \right] \\
&= (T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^3 \int_0^1 \eta_T^2 (1-2\Delta \eta_T + \Delta^2 \eta_T^2) (1-2\eta_T + \eta_T^2) d\eta_T + RU \delta \Delta^2 \int_0^1 \eta_T (1-2\Delta \eta_T + \Delta^2 \eta_T^2) (1-2\eta_T + \eta_T^2) d\eta_T \right] \\
&= (T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^3 \int_0^1 \eta_T^2 (1-2\eta_T + \eta_T^2 - 2\Delta \eta_T + 4\Delta \eta_T^2 - 2\Delta \eta_T^3 + \Delta^2 \eta_T^2 - 2\Delta^2 \eta_T^3 + \Delta^2 \eta_T^4) d\eta_T + RU \delta \Delta^2 \int_0^1 \eta_T (1-2\eta_T + \eta_T^2 - 2\Delta \eta_T \right. \\
&\quad \left. + 4\Delta \eta_T^2 - 2\Delta \eta_T^3 + \Delta^2 \eta_T^2 - 2\Delta^2 \eta_T^3 + \Delta^2 \eta_T^4) d\eta_T \right] \\
&= (T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^3 \int_0^1 (\eta_T^2 - 2\eta_T^3 + \eta_T^4 - 2\Delta \eta_T^2 + 4\Delta \eta_T^3 - 2\Delta \eta_T^5 + \Delta^2 \eta_T^4 - 2\Delta^2 \eta_T^5 + \Delta^2 \eta_T^6) d\eta_T + RU \delta \Delta^2 \int_0^1 (\eta_T - 2\eta_T^2 + \eta_T^3 - 2\Delta \eta_T^2 \right. \\
&\quad \left. + 4\Delta \eta_T^3 - 2\Delta \eta_T^4 + \Delta^2 \eta_T^3 - 2\Delta^2 \eta_T^4 + \Delta^2 \eta_T^5) d\eta_T \right] \\
&= (T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left\{ U \delta^2 \Delta^3 \left[\frac{1}{3} \eta_T^3 - \frac{1}{2} \eta_T^4 + \frac{1}{5} \eta_T^5 - \frac{1}{2} \Delta \eta_T^4 + \frac{4}{5} \Delta \eta_T^5 - \frac{1}{3} \Delta \eta_T^6 + \frac{1}{5} \Delta^2 \eta_T^5 - \frac{1}{3} \Delta^2 \eta_T^6 + \frac{1}{7} \Delta^2 \eta_T^7 \right]_0^1 + RU \delta \Delta^2 \left[\frac{1}{2} \eta_T^2 - \frac{2}{3} \eta_T^3 + \frac{1}{4} \eta_T^4 - \frac{2}{3} \Delta \eta_T^3 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Delta \eta_T^4 - \frac{2}{5} \Delta \eta_T^5 + \frac{1}{4} \Delta^2 \eta_T^4 - \frac{2}{5} \Delta^2 \eta_T^5 + \frac{1}{6} \Delta^2 \eta_T^6 \right]_0^1 \right\} \\
&= (T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \Delta + \frac{4}{5} \Delta - \frac{1}{3} \Delta + \frac{1}{5} \Delta^2 - \frac{1}{3} \Delta^2 + \frac{1}{7} \Delta^2 \right) + RU \delta \Delta^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \Delta + \Delta - \frac{2}{5} \Delta + \frac{1}{4} \Delta^2 - \frac{2}{5} \Delta^2 + \frac{1}{6} \Delta^2 \right) \right] \\
&= (T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^3 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{30} \Delta + \frac{1}{105} \Delta^2 \right) + RU \delta \Delta^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \Delta + \frac{1}{60} \Delta^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\alpha R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = \alpha R \frac{d}{\delta_T d\eta_T} [(T_w - T_\infty) \theta(\eta_T) + T_\infty] \Big|_0 = \frac{\alpha R (T_w - T_\infty)}{\delta_T} \left. \frac{d\theta}{d\eta_T} \right|_0$$

$$\alpha R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = \frac{\alpha R (T_w - T_\infty)}{\Delta \delta} \frac{d}{d\eta_T} (1 - \eta_T)^2 \Big|_0 = \frac{\alpha R (T_w - T_\infty)}{\Delta \delta} [-2(1 - \eta_T)] \Big|_0 = -\frac{2\alpha R (T_w - T_\infty)}{\Delta \delta}$$

Sustituyendo estos resultados entonces,

La ecuación de cantidad de movimiento

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \int_R^{R+\delta} g \beta (T - T_\infty) r dr - Rv \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R$$

con

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta} v_z^2 r dr = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{280} U^2 \delta^2 + \frac{1}{105} R U^2 \delta \right)$$

$$\int_R^{R+\delta} g\beta(T - T_\infty) r dr = g\beta(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{21}{3\Delta} + \frac{1}{4\Delta^2} \right) + R\delta \left(1 - \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{3\Delta^2} \right) \right]$$

$$Rv \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_R = \frac{RvU}{\delta}$$

queda:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{280} U^2 \delta^2 + \frac{1}{105} R U^2 \delta \right) = g\beta(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{21}{3\Delta} + \frac{1}{4\Delta^2} \right) + R\delta \left(1 - \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{3\Delta^2} \right) \right] \frac{RvU}{\delta}$$

Y la ecuación de conservación de energía:

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z(T - T_\infty) r dr = -\alpha R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

con

$$\frac{d}{dz} \int_R^{R+\delta_T} v_z(T - T_\infty) r dr = (T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^3 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{30} \Delta + \frac{1}{105} \Delta^2 \right) + R U \delta \Delta^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \Delta + \frac{1}{60} \Delta^2 \right) \right]$$

$$\alpha R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = -\frac{2\alpha R(T_w - T_\infty)}{\Delta \delta}$$

queda:

$$(T_w - T_\infty) \frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^3 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{30} \Delta + \frac{1}{105} \Delta^2 \right) + R U \delta \Delta^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \Delta + \frac{1}{60} \Delta^2 \right) \right] = - \left[-\frac{2\alpha R(T_w - T_\infty)}{\Delta \delta} \right]$$

$$\frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^3 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{30} \Delta + \frac{1}{105} \Delta^2 \right) + R U \delta \Delta^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \Delta + \frac{1}{60} \Delta^2 \right) \right] = \frac{2\alpha R}{\Delta \delta}$$

El sistema de ecuaciones se reduce a:

Movimiento:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{280} U^2 \delta^2 + \frac{1}{105} R U^2 \delta \right) = g\beta(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{21}{3\Delta} + \frac{1}{4\Delta^2} \right) + R\delta \left(1 - \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{3\Delta^2} \right) \right] - \frac{RvU}{\delta}$$

Y

Energía:

$$\frac{d}{dz} \left[U \delta^2 \Delta^3 \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{30} \Delta + \frac{1}{105} \Delta^2 \right) + RU \delta \Delta^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{15} \Delta + \frac{1}{60} \Delta^2 \right) \right] = \frac{2\alpha R}{\Delta \delta}$$

Suponiendo que los espesores de las capas térmica, δ_T , e hidrodinámica, δ , son próximos, es decir que las diferencias son despreciables, $\delta_T \approx \delta$, se tiene que $\Delta \approx 1$, lo cual es valido para números de Pr cercanos a 1. Por tanto si $\Delta = 1$, el sistema queda:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{280} U^2 \delta^2 + \frac{1}{105} RU^2 \delta \right) = g\beta(T_w - T_\infty) \left(\frac{1}{12} \delta^2 + \frac{1}{3} R\delta \right) - \frac{RvU}{\delta}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{105} U \delta^2 + \frac{1}{30} RU\delta \right) = -\frac{2\alpha R}{\delta}$$

Dividiendo cada ecuación por R :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{U^2 \delta}{105} + \frac{U^2 \delta^2}{280R} \right) = g\beta(T_w - T_\infty) \left(\frac{\delta}{3} + \frac{\delta^2}{12R} \right) - \frac{vU}{\delta}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{U\delta}{30} + \frac{U\delta^2}{105R} \right) = \frac{2\alpha}{\delta}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con U y δ como variables en función de z se resuelve por el método de perturbaciones, donde estas variables dependientes se expanden en series de potencias alrededor de $1/R$.

Esto se puede sustentar en el hecho de que este método se puede aplicar a cualquier ecuación diferencial que contenga un parámetro de perturbación, ϵ , el cual podría aparecer en las condiciones de frontera. Dicho parámetro debe ser una constante positiva, tal que $\epsilon \ll 1$.

En este caso dicho parámetro es el recíproco del radio del cilindro, R , el cual se encuentra en el sistema de ecuaciones y en el condición de frontera, luego:

$$\epsilon = \frac{1}{R}$$

Que en las ecuaciones se observa:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{U^2 \delta}{105} + \frac{U^2 \delta^2}{280R} \right) = g\beta(T_w - T_\infty) \left(\frac{\delta}{3} + \frac{\delta^2}{12R} \right) - \frac{vU}{\delta}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{U\delta}{30} + \frac{U\delta^2}{105R} \right) = \frac{2\alpha}{\delta}$$

Haciendo que $R \rightarrow \infty$, se tiene que el sistema de ecuaciones queda:

$$\frac{1}{105} \frac{d}{dz} (U^2 \delta) = \frac{1}{3} g\beta(T_w - T_\infty) \delta - \frac{vU}{\delta}$$

$$\frac{1}{30} \frac{d}{dz} (U\delta) = \frac{2\alpha}{\delta}$$

Que son las ecuaciones que permiten encontrar a U y δ para una placa vertical (KARLEKAR, MILLS).

Se observa que si el parámetro de perturbación tiende a cero, $\varepsilon \rightarrow 0$, se anula el efecto de la curvatura, lo que implica que, $R \rightarrow \infty$. El mismo resultado se puede obtener asumiendo que el espesor de la capa limite, δ , es pequeño comparado con el radio, R , de tal manera que la relación δ/R también tiende a cero y los mismos términos del sistema de ecuaciones de conservación se cancelan quedando el modelo de la pared plana vertical.

Entonces se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales con el método de perturbaciones en $1/R$, lo cual requiere expresar la solución de la siguiente manera:

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{R}\right)^n U_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} U_n = U_0 + \frac{1}{R} U_1 + \frac{1}{R^2} U_2 + \frac{1}{R^3} U_3 + \dots$$

$$\delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \delta_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{R}\right)^n \delta_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} \delta_n = \delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 + \frac{1}{R^2} \delta_2 + \frac{1}{R^3} \delta_3 + \dots$$

Tomando solo los dos primeros términos $n = 0$ y 1 , queda:

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} U_n \approx \sum_{n=0}^1 \frac{1}{R^n} U_n = U_0 + \frac{1}{R} U_1$$

$$\delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^n} \delta_n \approx \sum_{n=0}^1 \frac{1}{R^n} \delta_n = \delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1$$

Esto es válido como una aproximación aceptable, ya que al aumentar n cada término siguiente va a ser mucho más pequeño. Es de esperar que el primer término, en $n = 0$, sea de una pared plana ya que carece del parámetro de curvatura, $1/R$.

Estos desarrollos de $U(z)$ y $\delta(z)$ en serie de potencias con dos términos exigen averiguar los valores de U_0 , U_1 , δ_0 y δ_1 . Para lograr dicho objetivo se procede a sustituir estas expresiones en el sistema de ecuaciones de conservación:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{U^2 \delta}{105} + \frac{U^2 \delta^2}{280R} \right) = g\beta(T_w - T_\infty) \left(\frac{\delta}{3} + \frac{\delta^2}{12R} \right) - \frac{vU}{\delta}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{U\delta}{30} + \frac{U\delta^2}{105R} \right) = \frac{2\alpha}{\delta}$$

donde

$$U \approx U_0 + \frac{1}{R} U_1 \quad y \quad \frac{dU}{dz} = U' \approx U_0' + \frac{1}{R} U_1'$$

$$\delta \approx \delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \quad y \quad \frac{d\delta}{dz} = \delta' \approx \delta_0' + \frac{1}{R} \delta_1'$$

Multiplicando la ecuación de movimiento por 840δ y la de energía por 210δ . Llamando N , a la cantidad $g\beta(T_w - T_\infty)$, es decir, $N = g\beta(T_w - T_\infty)$

$$\delta \frac{d}{dz} \left(8U^2 \delta + \frac{3}{R} U^2 \delta^2 \right) = N \left(280\delta^2 + \frac{70}{R} \delta^3 \right) - 840vU$$

$$\delta \frac{d}{dz} \left(7U\delta + \frac{2}{R} U\delta^2 \right) = 420\alpha$$

Reemplazando en la ecuación de cantidad de movimiento las expansiones:

$$\left(\delta_0 + \frac{1}{R}\delta_1\right)\frac{d}{dz}\left[8\left(U_0 + \frac{1}{R}U_1\right)^2\delta + \frac{3}{R}\left(U_0 + \frac{1}{R}U_1\right)^2\left(\delta_0 + \frac{1}{R}\delta_1\right)^2\right] = N\left[280\left(\delta_0 + \frac{1}{R}\delta_1\right)^2 + \frac{70}{R}\left(\delta_0 + \frac{1}{R}\delta_1\right)^3\right] - 840v\left(U_0 + \frac{1}{R}U_1\right)$$

$$\begin{aligned} &\left(\delta_0 + \frac{1}{R}\delta_1\right)\frac{d}{dz}\left[8\left(U_0^2 + \frac{2}{R}U_0U_1 + \frac{1}{R^2}U_1^2\right)\left(\delta_0 + \frac{1}{R}\delta_1\right) + \frac{3}{R}\left(U_0^2 + \frac{2}{R}U_0U_1 + \frac{1}{R^2}U_1^2\right)\left(\delta_0^2 + \frac{2}{R}\delta_0\delta_1 + \frac{1}{R^2}\delta_1^2\right)\right] \\ &= N\left[280\left(\delta_0^2 + \frac{2}{R}\delta_0\delta_1 + \frac{1}{R^2}\delta_1^2\right) + \frac{70}{R}\left(\delta_0^3 + \frac{3}{R}\delta_0^2\delta_1 + \frac{3}{R^2}\delta_0\delta_1^2 + \frac{1}{R^3}\delta_1^3\right)\right] - 840v\left(U_0 + \frac{1}{R}U_1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\delta_0 + \frac{1}{R}\delta_1\right)\frac{d}{dz}\left[8\left(U_0^2\delta_0 + \frac{1}{R}U_0^2\delta_1 + \frac{2}{R}U_0U_1\delta_0 + \frac{2}{R^2}U_0U_1\delta_1 + \frac{1}{R^2}U_1^2\delta_0 + \frac{1}{R^3}U_1^2\delta_1\right)\right. \\ &\quad \left.+ \frac{3}{R}\left(U_0^2\delta_0^2 + \frac{2}{R}U_0^2\delta_0\delta_1 + \frac{1}{R^2}U_0^2\delta_1^2 + \frac{2}{R}U_0U_1\delta_0^2 + \frac{4}{R^2}U_0U_1\delta_0\delta_1 + \frac{2}{R^3}U_0U_1\delta_1^2 + \frac{1}{R^2}U_1^2\delta_0^2 + \frac{2}{R^3}U_1^2\delta_0\delta_1 + \frac{1}{R^4}U_1^2\delta_1^2\right)\right] \\ &= N\left(280\delta_0^2 + \frac{560}{R}\delta_0\delta_1 + \frac{280}{R^2}\delta_1^2 + \frac{70}{R}\delta_0^3 + \frac{210}{R^2}\delta_0^2\delta_1 + \frac{210}{R^3}\delta_0\delta_1^2 + \frac{70}{R^4}\delta_1^3\right) - 840vU_0 - \frac{840v}{R}U_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\delta_0 + \frac{1}{R}\delta_1\right)\frac{d}{dz}\left(8U_0^2\delta_0 + \frac{8}{R}U_0^2\delta_1 + \frac{16}{R}U_0U_1\delta_0 + \frac{16}{R^2}U_0U_1\delta_1 + \frac{8}{R^2}U_1^2\delta_0 + \frac{8}{R^3}U_1^2\delta_1 + \frac{3}{R}U_0^2\delta_0^2 + \frac{6}{R^2}U_0^2\delta_0\delta_1 + \frac{3}{R^3}U_0^2\delta_1^2 + \frac{6}{R^2}U_0U_1\delta_0^2\right. \\ &\quad \left.+ \frac{12}{R^3}U_0U_1\delta_0\delta_1 + \frac{6}{R^4}U_0U_1\delta_1^2 + \frac{3}{R^3}U_1^2\delta_0^2\right) \\ &+ \frac{6}{R^4}U_1^2\delta_0\delta_1 + \frac{3}{R^5}U_1^2\delta_1^2) = 280N\delta_0^2 + \frac{560N}{R}\delta_0\delta_1 + \frac{280N}{R^2}\delta_1^2 + \frac{70N}{R}\delta_0^3 + \frac{210N}{R^2}\delta_0^2\delta_1 + \frac{210N}{R^3}\delta_0\delta_1^2 + \frac{70N}{R^4}\delta_1^3 - 840vU_0 - \frac{840v}{R}U_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\delta_0 + \frac{1}{R}\delta_1\right)\left(16U_0\delta_0U_0' + 8U_0^2\delta_0' + \frac{16}{R}U_0\delta_1U_0' + \frac{8}{R}U_0^2\delta_1' + \frac{16}{R}U_1\delta_0U_0' + \frac{16}{R}U_0\delta_0U_1' + \frac{16}{R}U_0U_1\delta_0' + \frac{16}{R^2}U_1\delta_1U_0' + \frac{16}{R^2}U_0\delta_1U_1' + \frac{16}{R^2}U_0U_1\delta_1'\right. \\ &\quad \left.+ \frac{16}{R^2}U_1\delta_0U_1' + \frac{8}{R^2}U_1^2\delta_0' + \frac{16}{R^3}U_1\delta_1U_1'\right) \\ &+ \frac{8}{R^3}U_1^2\delta_1' + \frac{6}{R}U_0\delta_0^2U_0' + \frac{6}{R}U_0^2\delta_0\delta_0' + \frac{12}{R^2}U_0\delta_0\delta_1U_0' + \frac{6}{R^2}U_0^2\delta_1\delta_0' + \frac{6}{R^2}U_0^2\delta_0\delta_1' + \frac{6}{R^3}U_0\delta_1^2U_0' + \frac{6}{R^3}U_0^2\delta_1\delta_1' + \frac{6}{R^2}U_1\delta_0^2U_0' + \frac{6}{R^2}U_0\delta_0^2U_1' \\ &\quad \left.+ \frac{12}{R^2}U_0U_1\delta_0\delta_0' + \frac{12}{R^3}U_1\delta_0\delta_1U_0'\right) \\ &+ \frac{12}{R^3}U_0\delta_0\delta_1U_1' + \frac{12}{R^3}U_0U_1\delta_1\delta_0' + \frac{12}{R^3}U_0U_1\delta_0\delta_1' + \frac{6}{R^4}U_1\delta_1^2U_0' + \frac{6}{R^4}U_0\delta_1^2U_1' + \frac{12}{R^4}U_0U_1\delta_1\delta_1' + \frac{6}{R^3}U_1\delta_0^2U_1' + \frac{6}{R^3}U_1^2\delta_0\delta_0' + \frac{12}{R^4}U_1\delta_0\delta_1U_1' \\ &\quad \left.+ \frac{6}{R^4}U_1^2\delta_1\delta_0' + \frac{6}{R^4}U_1^2\delta_0\delta_1' + \frac{6}{R^5}U_1\delta_1^2U_1' + \frac{6}{R^5}U_1^2\delta_1\delta_1'\right) \\ &= 280N\delta_0^2 + \frac{560N}{R}\delta_0\delta_1 + \frac{280N}{R^2}\delta_1^2 + \frac{70N}{R}\delta_0^3 + \frac{210N}{R^2}\delta_0^2\delta_1 + \frac{210N}{R^3}\delta_0\delta_1^2 + \frac{70N}{R^4}\delta_1^3 - 840vU_0 - \frac{840v}{R}U_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 16U_0\delta_0^2U'_0 + 8U_0^2\delta_0\delta'_0 + \frac{16}{R}U_0\delta_0\delta_1U'_0 + \frac{8}{R}U_0^2\delta_0\delta'_1 + \frac{16}{R}U_1\delta_0^2U'_0 + \frac{16}{R}U_0\delta_0^2U'_1 + \frac{16}{R}U_0U_1\delta_0\delta'_0 + \frac{16}{R^2}U_1\delta_0\delta_1U'_0 + \frac{16}{R^2}U_0\delta_0\delta_1U'_1 + \frac{16}{R^2}U_0U_1\delta_0\delta'_1 \\
& \quad + \frac{16}{R^2}U_1\delta_0^2U'_1 + \frac{8}{R^2}U_1^2\delta_0\delta'_0 \\
& + \frac{16}{R^3}U_1\delta_0\delta_1U'_1 + \frac{8}{R^3}U_1^2\delta_0\delta'_1 + \frac{6}{R}U_0\delta_0^3U'_0 + \frac{6}{R}U_0^2\delta_0^2\delta'_0 + \frac{12}{R^2}U_0\delta_0^2\delta_1U'_0 + \frac{6}{R^2}U_0^2\delta_0\delta_1\delta'_0 + \frac{6}{R^2}U_0^2\delta_0^2\delta'_1 + \frac{6}{R^3}U_0\delta_0\delta_1^2U'_0 + \frac{6}{R^3}U_0^2\delta_0\delta_1\delta'_1 \\
& \quad + \frac{6}{R^2}U_1\delta_0^3U'_0 + \frac{6}{R^2}U_0\delta_0^3U'_1 + \frac{12}{R^2}U_0U_1\delta_0^2\delta'_0 \\
& + \frac{12}{R^3}U_1\delta_0^2\delta_1U'_0 + \frac{12}{R^3}U_0\delta_0^2\delta_1U'_1 + \frac{12}{R^3}U_0U_1\delta_0\delta_1\delta'_0 + \frac{12}{R^3}U_0U_1\delta_0^2\delta'_1 + \frac{6}{R^4}U_1\delta_0\delta_1^2U'_0 + \frac{6}{R^4}U_0\delta_0\delta_1^2U'_1 + \frac{12}{R^4}U_0U_1\delta_0\delta_1\delta'_1 + \frac{6}{R^3}U_1\delta_0^3U'_1 \\
& \quad + \frac{6}{R^3}U_1^2\delta_0^2\delta'_0 + \frac{12}{R^4}U_1\delta_0^2\delta_1U'_1 + \frac{6}{R^4}U_1^2\delta_0\delta_1\delta'_0 + \frac{6}{R^4}U_1^2\delta_0^2\delta'_1 + \frac{6}{R^5}U_1\delta_0\delta_1^2U'_1 + \frac{6}{R^5}U_1^2\delta_0\delta_1\delta'_1 \\
& + \frac{16}{R}U_0\delta_0\delta_1U'_0 + \frac{8}{R}U_0^2\delta_1\delta'_0 + \frac{16}{R^2}U_0\delta_1^2U'_0 + \frac{8}{R^2}U_0^2\delta_1\delta'_1 + \frac{16}{R^2}U_1\delta_0\delta_1U'_0 + \frac{16}{R^2}U_0\delta_0\delta_1U'_1 + \frac{16}{R^2}U_0U_1\delta_1\delta'_0 + \frac{16}{R^3}U_1\delta_1^2U'_0 + \frac{16}{R^3}U_0\delta_1^2U'_1 \\
& \quad + \frac{16}{R^3}U_0U_1\delta_1\delta'_1 + \frac{16}{R^3}U_1\delta_0\delta_1U'_1 \\
& + \frac{8}{R^3}U_1^2\delta_1\delta'_0 + \frac{16}{R^4}U_1\delta_1^2U'_1 + \frac{8}{R^4}U_1^2\delta_1\delta'_1 + \frac{6}{R^2}U_0\delta_0^2\delta_1U'_0 + \frac{6}{R^2}U_0^2\delta_0\delta_1\delta'_0 + \frac{12}{R^3}U_0\delta_0\delta_1^2U'_0 + \frac{6}{R^3}U_0^2\delta_1^2\delta'_0 + \frac{6}{R^3}U_0^2\delta_0\delta_1\delta'_1 + \frac{6}{R^4}U_0\delta_1^3U'_0 \\
& \quad + \frac{6}{R^4}U_0^2\delta_1^2\delta'_1 + \frac{6}{R^3}U_1\delta_0^2\delta_1U'_0 + \frac{6}{R^3}U_0\delta_0^2\delta_1U'_1 \\
& + \frac{12}{R^3}U_0U_1\delta_0\delta_1\delta'_0 + \frac{12}{R^4}U_1\delta_0\delta_1^2U'_0 + \frac{12}{R^4}U_0\delta_0\delta_1^2U'_1 + \frac{12}{R^4}U_0U_1\delta_1^2\delta'_0 + \frac{12}{R^4}U_0U_1\delta_0\delta_1\delta'_1 + \frac{6}{R^5}U_1\delta_1^3U'_0 + \frac{6}{R^5}U_0\delta_1^3U'_1 + \frac{12}{R^5}U_0U_1\delta_1^2\delta'_1 \\
& \quad + \frac{6}{R^4}U_1\delta_0^2\delta_1U'_1 + \frac{6}{R^4}U_1^2\delta_0\delta_1\delta'_0 + \frac{12}{R^5}U_1\delta_0\delta_1^2U'_1 + \frac{6}{R^5}U_1^2\delta_1^2\delta'_0 + \frac{6}{R^5}U_1^2\delta_0\delta_1^2\delta'_1 + \frac{6}{R^6}U_1\delta_1^3U'_1 + \frac{6}{R^6}U_1^2\delta_1^2\delta'_1 \\
& = 280N\delta_0^2 + \frac{560N}{R}\delta_0\delta_1 + \frac{280N}{R^2}\delta_1^2 + \frac{70N}{R}\delta_0^3 + \frac{210N}{R^2}\delta_0^2\delta_1 + \frac{210N}{R^3}\delta_0\delta_1^2 + \frac{70N}{R^4}\delta_1^3 - 840vU_0 - \frac{840v}{R}U_1
\end{aligned}$$

Organizando de acuerdo a las potencias de $1/R$:

$$\begin{aligned}
& (16U_0\delta_0^2U'_0 + 8U_0^2\delta_0\delta'_0) + \frac{16}{R}U_0\delta_0\delta_1U'_0 + \frac{8}{R}U_0^2\delta_0\delta'_1 + \frac{16}{R}U_1\delta_0^2U'_0 + \frac{16}{R}U_0\delta_0^2U'_1 + \frac{16}{R}U_0U_1\delta_0\delta'_0 + \frac{6}{R}U_0\delta_0^3U'_0 + \frac{6}{R}U_0^2\delta_0^2\delta'_0 + \frac{16}{R}U_0\delta_0\delta_1U'_0 \\
& \quad + \frac{8}{R}U_0^2\delta_1\delta'_0 \\
& + \frac{16}{R^2}U_1\delta_0\delta_1U'_0 + \frac{16}{R^2}U_0\delta_0\delta_1U'_1 + \frac{16}{R^2}U_0U_1\delta_0\delta'_1 + \frac{16}{R^2}U_1\delta_0^2U'_1 + \frac{8}{R^2}U_1^2\delta_0\delta'_0 + \frac{12}{R^2}U_0\delta_0^2\delta_1U'_0 + \frac{6}{R^2}U_0^2\delta_0\delta_1\delta'_0 + \frac{6}{R^2}U_0^2\delta_0^2\delta'_1 + \frac{6}{R^2}U_1\delta_0^3U'_0 \\
& \quad + \frac{6}{R^2}U_0\delta_0^3U'_1 + \frac{12}{R^2}U_0U_1\delta_0^2\delta'_0 + \frac{16}{R^2}U_0\delta_0^2\delta_1U'_0 + \frac{8}{R^2}U_0^2\delta_1\delta'_1 + \frac{16}{R^2}U_1\delta_0\delta_1U'_0 + \frac{16}{R^2}U_0\delta_0\delta_1U'_1 + \frac{16}{R^2}U_0U_1\delta_1\delta'_0 + \frac{6}{R^2}U_0\delta_0^2\delta_1U'_0 \\
& \quad + \frac{6}{R^2}U_0^2\delta_0\delta_1\delta'_0 \\
& + \frac{16}{R^3}U_1\delta_0\delta_1U'_1 + \frac{8}{R^3}U_1^2\delta_0\delta'_1 + \frac{6}{R^3}U_0\delta_0\delta_1^2U'_0 + \frac{6}{R^3}U_0^2\delta_0\delta_1\delta'_1 + \frac{12}{R^3}U_1\delta_0^2\delta_1U'_0 + \frac{12}{R^3}U_0\delta_0^2\delta_1U'_1 + \frac{12}{R^3}U_0U_1\delta_0\delta_1\delta'_0 + \frac{12}{R^3}U_0U_1\delta_0^2\delta'_1 + \frac{6}{R^3}U_1\delta_0^3U'_1 \\
& \quad + \frac{6}{R^3}U_1^2\delta_0^2\delta'_0 + \frac{16}{R^3}U_1\delta_1^2U'_0 + \frac{16}{R^3}U_0\delta_1^2U'_1 + \frac{16}{R^3}U_0U_1\delta_1\delta'_1 + \frac{16}{R^3}U_1\delta_0\delta_1U'_1 + \frac{8}{R^3}U_1^2\delta_1\delta'_0 + \frac{12}{R^3}U_0\delta_0\delta_1^2U'_0 + \frac{6}{R^3}U_0^2\delta_1^2\delta'_0 \\
& \quad + \frac{6}{R^3}U_0^2\delta_0\delta_1\delta'_1 + \frac{6}{R^3}U_1\delta_0^2\delta_1U'_0 + \frac{6}{R^3}U_0\delta_0^2\delta_1U'_1 + \frac{12}{R^3}U_0U_1\delta_0\delta_1\delta'_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6}{R^4} U_1 \delta_0 \delta_1^2 U'_0 + \frac{6}{R^4} U_0 \delta_0 \delta_1^2 U'_1 + \frac{12}{R^4} U_0 U_1 \delta_0 \delta_1 \delta'_1 + \frac{12}{R^4} U_1 \delta_0^2 \delta_1 U'_1 + \frac{6}{R^4} U_1^2 \delta_0 \delta_1 \delta'_0 + \frac{6}{R^4} U_1^2 \delta_0^2 \delta'_1 + \frac{16}{R^4} U_1 \delta_1^2 U'_1 + \frac{8}{R^4} U_1^2 \delta_1 \delta'_1 + \frac{6}{R^4} U_0 \delta_1^3 U'_0 \\
& \quad + \frac{6}{R^4} U_0^2 \delta_1^2 \delta'_1 + \frac{12}{R^4} U_1 \delta_0 \delta_1^2 U'_0 + \frac{12}{R^4} U_0 \delta_0 \delta_1^2 U'_1 + \frac{12}{R^4} U_0 U_1 \delta_1^2 \delta'_0 + \frac{12}{R^4} U_0 U_1 \delta_0 \delta_1 \delta'_1 + \frac{6}{R^4} U_1 \delta_0^2 \delta_1 U'_1 + \frac{6}{R^4} U_1^2 \delta_0 \delta_1 \delta'_0 \\
& \quad + \frac{6}{R^5} U_1 \delta_0 \delta_1^2 U'_1 + \frac{6}{R^5} U_1^2 \delta_0 \delta_1 \delta'_1 + \frac{6}{R^5} U_1 \delta_1^3 U'_0 + \frac{6}{R^5} U_0 \delta_1^3 U'_1 + \frac{12}{R^5} U_0 U_1 \delta_1^2 \delta'_1 + \frac{12}{R^5} U_1 \delta_0 \delta_1^2 U'_1 + \frac{6}{R^5} U_1^2 \delta_1^2 \delta'_0 + \frac{6}{R^5} U_1^2 \delta_0 \delta_1^2 \delta'_1 + \frac{6}{R^6} U_1 \delta_1^3 U'_1 \\
& \quad + \frac{6}{R^6} U_1^2 \delta_1^2 \delta'_1 \\
& = 280N\delta_0^2 + \frac{560N}{R} \delta_0 \delta_1 + \frac{70N}{R} \delta_0^3 - \frac{840v}{R} U_1 + \frac{280N}{R^2} \delta_1^2 + \frac{210N}{R^2} \delta_0^2 \delta_1 + \frac{210N}{R^3} \delta_0 \delta_1^2 + \frac{70N}{R^4} \delta_1^3 - 840vU_0
\end{aligned}$$

Se factoriza por potencias y como aproximación se desprecian las potencias de $1/R$, para las cuales $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
& (16U_0\delta_0^2U'_0 + 8U_0^2\delta_0\delta'_0) \\
& \quad + \frac{1}{R}(16U_0\delta_0\delta_1U'_0 + 8U_0^2\delta_0\delta'_1 + 16U_1\delta_0^2U'_0 + 16U_0\delta_0^2U'_1 + 16U_0U_1\delta_0\delta'_0 + 6U_0\delta_0^3U'_0 + 6U_0^2\delta_0^2\delta'_0 + 16U_0\delta_0\delta_1U'_0 \\
& \quad + 8U_0^2\delta_1\delta'_0) = (280N\delta_0^2 - 840vU_0) + \frac{1}{R}(560N\delta_0\delta_1 + 70N\delta_0^3 - 840vU_1)
\end{aligned}$$

Igualando las respectivas potencias, se obtiene:

$$\frac{1}{R^0}:$$

$$16U_0\delta_0^2U'_0 + 8U_0^2\delta_0\delta'_0 = 280N\delta_0^2 - 840vU_0$$

$$\frac{1}{R^1}:$$

$$\begin{aligned}
& 16U_0\delta_0\delta_1U'_0 + 8U_0^2\delta_0\delta'_1 + 16U_1\delta_0^2U'_0 + 16U_0\delta_0^2U'_1 + 16U_0U_1\delta_0\delta'_0 + 6U_0\delta_0^3U'_0 + 6U_0^2\delta_0^2\delta'_0 + 16U_0\delta_0\delta_1U'_0 + 8U_0^2\delta_1\delta'_0 \\
& = 560N\delta_0\delta_1 + 70N\delta_0^3 - 840vU_1
\end{aligned}$$

Simplificando,

$$\frac{1}{R^0}: \quad 2U_0\delta_0^2U'_0 + U_0^2\delta_0\delta'_0 = 35N\delta_0^2 - 105vU_0$$

$$\frac{1}{R^1}:$$

$$\begin{aligned}
& 8U_0\delta_0\delta_1U'_0 + 4U_0^2\delta_0\delta'_1 + 8U_1\delta_0^2U'_0 + 8U_0\delta_0^2U'_1 + 8U_0U_1\delta_0\delta'_0 + 3U_0\delta_0^3U'_0 + 3U_0^2\delta_0^2\delta'_0 + 8U_0\delta_0\delta_1U'_0 + 4U_0^2\delta_1\delta'_0 \\
& = 280N\delta_0\delta_1 + 35N\delta_0^3 - 420vU_1
\end{aligned}$$

De la misma manera, ahora se reemplaza la serie de potencias en la ecuación de energía:

$$\delta \frac{d}{dz} \left(7U\delta + \frac{2}{R}U\delta^2 \right) = 420\alpha$$

$$\left(\delta_0 + \frac{1}{R}\delta_1 \right) \frac{d}{dz} \left[7 \left(U_0 + \frac{1}{R}U_1 \right) \left(\delta_0 + \frac{1}{R}\delta_1 \right) + \frac{2}{R} \left(U_0 + \frac{1}{R}U_1 \right) \left(\delta_0 + \frac{1}{R}\delta_1 \right)^2 \right] = 420\alpha$$

$$\begin{aligned} & \left(\delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \right) \frac{d}{dz} \left[7 \left(U_0 \delta_0 + \frac{1}{R} U_0 \delta_1 + \frac{1}{R} U_1 \delta_0 + \frac{1}{R^2} U_1 \delta_1 \right) + \left(\frac{2}{R} U_0 + \frac{2}{R^2} U_1 \right) \left(\delta_0^2 + \frac{2}{R} \delta_0 \delta_1 + \frac{1}{R^2} \delta_1^2 \right) \right] = 420\alpha \\ & \left(\delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \right) \frac{d}{dz} \left(7U_0 \delta_0 + \frac{7}{R} U_0 \delta_1 + \frac{7}{R} U_1 \delta_0 + \frac{7}{R^2} U_1 \delta_1 + \frac{2}{R} U_0 \delta_0^2 + \frac{4}{R^2} U_0 \delta_0 \delta_1 + \frac{2}{R^3} U_0 \delta_1^2 + \frac{2}{R^2} U_1 \delta_0^2 + \frac{4}{R^3} U_1 \delta_0 \delta_1 + \frac{2}{R^4} U_1 \delta_1^2 \right) = 420\alpha \\ & \left(\delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \right) \left(7\delta_0 U_0' + 7U_0 \delta_0' + \frac{7}{R} \delta_1 U_0' + \frac{7}{R} U_0 \delta_1' + \frac{7}{R} \delta_0 U_1' + \frac{7}{R} U_1 \delta_0' + \frac{7}{R^2} \delta_1 U_1' + \frac{7}{R^2} U_1 \delta_1' + \frac{2}{R} \delta_0^2 U_0' + \frac{4}{R} U_0 \delta_0 \delta_0' + \frac{4}{R^2} \delta_0 \delta_1 U_0' + \frac{4}{R^2} U_0 \delta_1 \delta_0' \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{R^2} U_0 \delta_0 \delta_1' + \frac{2}{R^3} \delta_1^2 U_0' + \frac{4}{R^3} U_0 \delta_1 \delta_1' + \frac{2}{R^2} \delta_0^2 U_1' + \frac{4}{R^2} U_1 \delta_0 \delta_0' + \frac{4}{R^3} \delta_0 \delta_1 U_1' + \frac{4}{R^3} U_1 \delta_1 \delta_0' + \frac{4}{R^3} U_1 \delta_0 \delta_1' + \frac{2}{R^4} \delta_1^2 U_1' \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{R^4} U_1 \delta_1 \delta_1' \right) = 420\alpha \\ & \left(\delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1 \right) \left(7\delta_0 U_0' + 7U_0 \delta_0' + \frac{7}{R} \delta_1 U_0' + \frac{7}{R} U_0 \delta_1' + \frac{7}{R} \delta_0 U_1' + \frac{7}{R} U_1 \delta_0' + \frac{7}{R^2} \delta_1 U_1' + \frac{7}{R^2} U_1 \delta_1' + \frac{2}{R} \delta_0^2 U_0' + \frac{4}{R} U_0 \delta_0 \delta_0' + \frac{4}{R^2} \delta_0 \delta_1 U_0' + \frac{4}{R^2} U_0 \delta_1 \delta_0' \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{R^2} U_0 \delta_0 \delta_1' + \frac{2}{R^3} \delta_1^2 U_0' + \frac{4}{R^3} U_0 \delta_1 \delta_1' + \frac{2}{R^2} \delta_0^2 U_1' + \frac{4}{R^2} U_1 \delta_0 \delta_0' + \frac{4}{R^3} \delta_0 \delta_1 U_1' + \frac{4}{R^3} U_1 \delta_1 \delta_0' + \frac{4}{R^3} U_1 \delta_0 \delta_1' + \frac{2}{R^4} \delta_1^2 U_1' \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{R^4} U_1 \delta_1 \delta_1' \right) = 420\alpha \\ & 7\delta_0^2 U_0' + 7U_0 \delta_0 \delta_0' + \frac{7}{R} \delta_0 \delta_1 U_0' + \frac{7}{R} U_0 \delta_0 \delta_1' + \frac{7}{R} \delta_0^2 U_1' + \frac{7}{R} U_1 \delta_0 \delta_0' + \frac{7}{R^2} \delta_0 \delta_1 U_1' + \frac{7}{R^2} U_1 \delta_0 \delta_1' + \frac{2}{R} \delta_0^3 U_0' + \frac{4}{R} U_0 \delta_0^2 \delta_0' + \frac{4}{R^2} \delta_0^2 \delta_1 U_0' \\ & \quad + \frac{4}{R^2} U_0 \delta_0 \delta_1 \delta_0' + \frac{4}{R^2} U_0 \delta_0^2 \delta_1' + \frac{2}{R^3} \delta_0 \delta_1^2 U_0' + \frac{4}{R^3} U_0 \delta_0 \delta_1 \delta_1' + \frac{2}{R^2} \delta_0^3 U_1' + \frac{4}{R^2} U_1 \delta_0^2 \delta_0' + \frac{4}{R^3} \delta_0^2 \delta_1 U_1' + \frac{4}{R^3} \delta_0 \delta_1 U_1 \delta_0' \\ & \quad + \frac{4}{R^3} \delta_0^2 U_1 \delta_1' + \frac{2}{R^4} \delta_0 \delta_1^2 U_1' + \frac{4}{R^4} U_1 \delta_0 \delta_1 \delta_1' \\ & + \frac{7}{R} \delta_0 \delta_1 U_0' + \frac{7}{R} U_0 \delta_1 \delta_0' + \frac{7}{R^2} \delta_1^2 U_0' + \frac{7}{R^2} U_0 \delta_1 \delta_1' + \frac{7}{R^2} \delta_0 \delta_1 U_1' + \frac{7}{R^2} U_1 \delta_1 \delta_0' + \frac{7}{R^3} \delta_1^2 U_1' + \frac{7}{R^3} U_1 \delta_1 \delta_1' + \frac{2}{R^2} \delta_0^2 \delta_1 U_0' + \frac{4}{R^2} U_0 \delta_0 \delta_1 \delta_0' + \frac{4}{R^3} \delta_0 \delta_1^2 U_0' \\ & \quad + \frac{4}{R^3} U_0 \delta_0^2 \delta_0' + \frac{4}{R^3} U_0 \delta_0 \delta_1 \delta_1' + \frac{2}{R^4} \delta_1^3 U_0' + \frac{4}{R^4} U_0 \delta_1^2 \delta_1' + \frac{2}{R^3} \delta_0^2 \delta_1 U_1' + \frac{4}{R^3} U_1 \delta_0 \delta_1 \delta_0' + \frac{4}{R^4} \delta_0 \delta_1^2 U_1' + \frac{4}{R^4} U_1 \delta_1^2 \delta_0' \\ & \quad + \frac{4}{R^4} U_1 \delta_0 \delta_1 \delta_1' + \frac{2}{R^5} \delta_1^3 U_1' + \frac{4}{R^5} U_1 \delta_1^2 \delta_1' = 420\alpha \end{aligned}$$

Organizando por las potencias de $1/R$:

$$\begin{aligned} & 7\delta_0^2 U_0' + 7U_0 \delta_0 \delta_0' + \frac{7}{R} \delta_0 \delta_1 U_0' + \frac{7}{R} U_0 \delta_0 \delta_1' + \frac{7}{R} \delta_0^2 U_1' + \frac{7}{R} U_1 \delta_0 \delta_0' + \frac{2}{R} \delta_0^3 U_0' + \frac{4}{R} U_0 \delta_0^2 \delta_0' + \frac{7}{R} \delta_0 \delta_1 U_0' + \frac{7}{R} U_0 \delta_1 \delta_0' + \frac{7}{R^2} \delta_0 \delta_1 U_1' + \frac{7}{R^2} U_1 \delta_0 \delta_1' \\ & \quad + \frac{4}{R^2} \delta_0^2 \delta_1 U_0' + \frac{4}{R^2} U_0 \delta_0 \delta_1 \delta_0' + \frac{4}{R^2} U_0 \delta_0^2 \delta_1' + \frac{2}{R^2} \delta_0^3 U_1' + \frac{4}{R^2} U_1 \delta_0^2 \delta_0' + \frac{7}{R^2} \delta_1^2 U_0' + \frac{7}{R^2} U_0 \delta_1 \delta_1' + \frac{7}{R^2} \delta_0 \delta_1 U_1' + \frac{7}{R^2} U_1 \delta_1 \delta_0' \\ & \quad + \frac{2}{R^2} \delta_0^2 \delta_1 U_0' + \frac{4}{R^2} U_0 \delta_0 \delta_1 \delta_0' \\ & + \frac{2}{R^3} \delta_0 \delta_1^2 U_0' + \frac{4}{R^3} U_0 \delta_0 \delta_1 \delta_1' + \frac{4}{R^3} \delta_0^2 \delta_1 U_1' + \frac{4}{R^3} \delta_0 \delta_1 U_1 \delta_0' + \frac{4}{R^3} \delta_0^2 U_1 \delta_1' + \frac{7}{R^3} \delta_1^2 U_1' + \frac{7}{R^3} U_1 \delta_1 \delta_1' + \frac{4}{R^3} \delta_0 \delta_1^2 U_0' + \frac{4}{R^3} U_0 \delta_1^2 \delta_0' + \frac{4}{R^3} U_0 \delta_0 \delta_1 \delta_1' \\ & \quad + \frac{2}{R^3} \delta_0^2 \delta_1 U_1' + \frac{4}{R^3} U_1 \delta_0 \delta_1 \delta_0' + \frac{2}{R^4} \delta_0 \delta_1^2 U_1' + \frac{4}{R^4} U_1 \delta_0 \delta_1 \delta_1' + \frac{2}{R^4} \delta_1^3 U_0' + \frac{4}{R^4} U_0 \delta_1^2 \delta_1' + \frac{4}{R^4} \delta_0 \delta_1^2 U_1' + \frac{4}{R^4} U_1 \delta_1^2 \delta_0' \\ & \quad + \frac{4}{R^4} U_1 \delta_0 \delta_1 \delta_1' + \frac{2}{R^5} \delta_1^3 U_1' + \frac{4}{R^5} U_1 \delta_1^2 \delta_1' = 420\alpha \end{aligned}$$

Se factoriza por potencias y como aproximación se desprecian las potencias de $1/R$, que corresponde a $n \geq 2$

$$7\delta_0^2 U_0' + 7U_0 \delta_0 \delta_0' + \frac{1}{R} (7\delta_0 \delta_1 U_0' + 7U_0 \delta_0 \delta_1' + 7\delta_0^2 U_1' + 7U_1 \delta_0 \delta_0' + 2\delta_0^3 U_0' + 4U_0 \delta_0^2 \delta_0' + 7\delta_0 \delta_1 U_0' + 7U_0 \delta_1 \delta_0') = 420\alpha$$

Igualando las respectivas potencias, obtenemos:

$$\frac{1}{R^0}:$$

$$7\delta_0^2 U_0' + 7U_0 \delta_0 \delta_0' = 420\alpha$$

$$\frac{1}{R^1}:$$

$$7\delta_0 \delta_1 U_0' + 7U_0 \delta_0 \delta_1' + 7\delta_0^2 U_1' + 7U_1 \delta_0 \delta_0' + 2\delta_0^3 U_0' + 4U_0 \delta_0^2 \delta_0' + 7\delta_0 \delta_1 U_0' + 7U_0 \delta_1 \delta_0' = 0$$

Simplificando,

$$\frac{1}{R^0}: \quad \delta_0^2 U_0' + U_0 \delta_0 \delta_0' = 60\alpha$$

$$\frac{1}{R^1}: \quad 7\delta_0 \delta_1 U_0' + 7U_0 \delta_0 \delta_1' + 7\delta_0^2 U_1' + 7U_1 \delta_0 \delta_0' + 2\delta_0^3 U_0' + 4U_0 \delta_0^2 \delta_0' + 7\delta_0 \delta_1 U_0' + 7U_0 \delta_1 \delta_0' = 0$$

Resolución del sistema para $n = 0$

$$\frac{1}{R^0}:$$

Cantidad de Movimiento

$$2U_0 \delta_0^2 U_0' + U_0^2 \delta_0 \delta_0' = 35N\delta_0^2 - 105vU_0$$

Energía

$$\delta_0^2 U_0' + U_0 \delta_0 \delta_0' = 60\alpha$$

Es claro que este sistema corresponde a una pared plana, que no contempla el efecto de la curvatura; como en ese caso comúnmente se hace, se supone una solución de prueba que corresponde a variaciones de la ley de potencias para U y δ , de esta forma:

$$U_0 = A_0 z^m$$

$$\delta_0 = B_0 z^n$$

Cuyas derivadas respectivamente son:

$$U_0' = A_0 m z^{m-1}$$

$$\delta_0' = B_0 n z^{n-1}$$

Donde A_0, B_0, m y n son constantes a determinar.

Sustituyendo estas soluciones de prueba en el sistema de orden cero para el parámetro de perturbación.

En la ecuación de movimiento:

$$2U_0 \delta_0^2 U_0' + U_0^2 \delta_0 \delta_0' = 35N\delta_0^2 - 105vU_0$$

$$2(A_0 z^m)(B_0 z^n)^2(A_0 m z^{m-1}) + (A_0 z^m)^2(B_0 z^n)(B_0 n z^{n-1}) = 35N(B_0 z^n)^2 - 105v(A_0 z^m)$$

$$2mA_0^2B_0^2z^{2m+2n-1} + nA_0^2B_0^2z^{2m+2n-1} = 35NB_0^2z^{2n} - 105vA_0z^m$$

En la ecuación de energía:

$$\delta_0^2 U'_0 + U_0 \delta_0 \delta'_0 = 60\alpha$$

$$(B_0 z^n)^2 (A_0 m z^{m-1}) + (A_0 z^m) (B_0 z^n) (B_0 n z^{n-1}) = 60\alpha$$

$$A_0 B_0^2 m z^{m+2n-1} + A_0 B_0^2 n z^{m+2n-1} = 60\alpha$$

En estas ecuaciones la potencia de z debe ser idéntica en todos los términos lo que lleva a tener un sistema de ecuaciones en el cual se puedan hallar los exponentes m y n:

$$2m + 2n - 1 = 2n = m$$

$$m + 2n - 1 = 0$$

Que se resuelve satisfactoriamente para

$$m = \frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo estos valores en las dos ecuaciones para encontrar los coeficientes A_0 y B_0 :

Momentum:

$$2 \cdot \frac{1}{2} A_0^2 B_0^2 z^{2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 1} + \frac{1}{4} A_0^2 B_0^2 z^{2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 1} = 35NB_0^2 z^{2 \cdot \frac{1}{4}} - 105vA_0 z^{\frac{1}{2}}$$

$$A_0^2 B_0^2 z^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} A_0^2 B_0^2 z^{\frac{1}{2}} = 35NB_0^2 z^{\frac{1}{2}} - 105vA_0 z^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{5}{4} A_0^2 B_0^2 = 35NB_0^2 - 105vA_0$$

$$A_0^2 B_0^2 = 28NB_0^2 - 84vA_0$$

Energía:

$$A_0 B_0^2 \cdot \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 1} + A_0 B_0^2 \cdot \frac{1}{4} z^{\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 1} = 60\alpha$$

$$\frac{1}{2} A_0 B_0^2 z^0 + \frac{1}{4} A_0 B_0^2 \cdot z^0 = 60\alpha$$

$$\frac{3}{4} A_0 B_0^2 = 60\alpha$$

$$A_0 B_0^2 = 80\alpha$$

Resolviendo el sistema:

$$A_0^2 B_0^2 = 28NB_0^2 - 84vA_0$$

$$A_0 B_0^2 = 80\alpha$$

Despejando B_0 en las dos ecuaciones e igualando:

$$B_0^2 = \frac{84vA_0}{28N - A_0^2}$$

$$B_0^2 = \frac{80\alpha}{A_0}$$

$$\frac{84vA_0}{28N - A_0^2} = \frac{80\alpha}{A_0}$$

Despejando A_0 :

$$84vA_0^2 = 80\alpha(28N - A_0^2)$$

$$21vA_0^2 = 20\alpha(28N - A_0^2)$$

$$21vA_0^2 + 20\alpha A_0^2 = 560N\alpha$$

$$A_0^2 = \frac{560N\alpha}{21v + 20\alpha}$$

Amplificando por $v^2/21\alpha$ y recordando que $N = g\beta(T_w - T_\infty)$

$$A_0^2 = \frac{560N\alpha}{20\alpha + 21v} \cdot \frac{v^2/21\alpha}{v^2/21\alpha}$$

$$A_0^2 = \frac{560v^2 \frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}}{21 \left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha} \right)}$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{560v^2 \frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}}{21 \left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha} \right)}}$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{80}{3}} v \left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

En forma aproximada:

$$A_0 \approx 5.1640v \left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Como se muestra en KARLEKAR

Ahora buscando el valor de B_0 en

$$B_0^2 = \frac{80\alpha}{A_0}$$

$$B_0 = \sqrt{\frac{80\alpha}{\sqrt{\frac{80}{3}}v\left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}\right]^{\frac{1}{2}}}}$$

$$B_0 = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 80^2}{80}\left(\frac{\alpha}{v}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}\right]^{\frac{1}{4}}}$$

$$B_0 = \sqrt[4]{240}\left(\frac{v}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}\right]^{\frac{1}{4}}$$

O aproximadamente según Karlekar:

$$B_0 \approx 3.9360\left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}\right]^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{v}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

De esta manera las expresiones para U y δ son

$$\begin{aligned} U_0 = A_0 z^m &= \sqrt{\frac{80}{3}}v\left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}\right]^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{80}{3}}v\left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}\right]^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}z = \sqrt{\frac{80}{3}}v\left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}\right]^{\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{80}{3}}v\left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)z^3}{v^2}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{1}{z} \end{aligned}$$

Donde

$$Pr = \frac{v}{\alpha}$$

$$Gr_z = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)z^3}{v^2}$$

Así:

$$U_0(z) = \sqrt{\frac{80}{3}}v\left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{-\frac{1}{2}}Gr_z^{\frac{1}{2}}\frac{1}{z}$$

Y

$$\delta_0 = B_0 z^n$$

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \sqrt[4]{240}\left(\frac{v}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}\right]^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{240}\left(\frac{v}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}\right]^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{z}{z} \\ &= \sqrt[4]{240}\left(\frac{v}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}\right]^{\frac{1}{4}}z^{-\frac{3}{4}}z = \sqrt[4]{240}\left(\frac{v}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)z^3}{v^2}\right]^{\frac{1}{4}}z \\ &= \sqrt[4]{240}Pr^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{\frac{1}{4}}Gr_z^{-\frac{1}{4}}z \end{aligned}$$

$$\delta_0(z) = \sqrt[4]{240}Pr^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{\frac{1}{4}}Gr_z^{-\frac{1}{4}}z$$

Resolución del sistema para $n = 1$

$$\frac{1}{R^2}$$

Cantidad de Movimiento

$$\begin{aligned} 8U_0\delta_0\delta_1U'_0 + 4U_0^2\delta_0\delta'_1 + 8U_1\delta_0^2U'_0 + 8U_0\delta_0^2U'_1 + 8U_0U_1\delta_0\delta'_0 + 3U_0\delta_0^3U'_0 + 3U_0^2\delta_0^2\delta'_0 + 8U_0\delta_0\delta_1U'_0 + 4U_0^2\delta_1\delta'_0 \\ = 280N\delta_0\delta_1 + 35N\delta_0^3 - 420vU_1 \end{aligned}$$

Energía

$$7\delta_0\delta_1U'_0 + 7U_0\delta_0\delta'_1 + 7\delta_0^2U'_1 + 7U_1\delta_0\delta'_0 + 2\delta_0^3U'_0 + 4U_0\delta_0^2\delta'_0 + 7\delta_0\delta_1U'_0 + 7U_0\delta_1\delta'_0 = 0$$

Es claro que la resolución de este sistema ya será una primera aproximación al efecto de tener una superficie curva para el cilindro, de la misma manera se supone como en el anterior caso una solución de prueba U_1 y δ_1 en modelo potencial teniendo ya conocidas U_0 y δ_0

$$U_1 = A_1z^p$$

$$\delta_1 = B_1z^q$$

Cuyas derivadas respectivamente son:

$$U'_1 = A_1pz^{p-1}$$

$$\delta'_1 = B_1qz^{q-1}$$

Donde A_1, B_1, p y q son constantes a determinar.

Resolviendo el sistema de potencia cero se encuentra que:

$$U_0 = A_0z^{\frac{1}{2}}$$

$$\delta_0 = B_0z^{\frac{1}{4}}$$

Derivando:

$$U'_0 = \frac{1}{2}A_0z^{-\frac{1}{2}}$$

$$\delta'_0 = \frac{1}{4}B_0z^{-\frac{3}{4}}$$

Sustituyendo estas soluciones de prueba en el sistema de primer orden para el parámetro de perturbación.

En la ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned} 8U_0\delta_0\delta_1U'_0 + 4U_0^2\delta_0\delta'_1 + 8U_1\delta_0^2U'_0 + 8U_0\delta_0^2U'_1 + 8U_0U_1\delta_0\delta'_0 + 3U_0\delta_0^3U'_0 + 3U_0^2\delta_0^2\delta'_0 + 8U_0\delta_0\delta_1U'_0 + 4U_0^2\delta_1\delta'_0 \\ = 280N\delta_0\delta_1 + 35N\delta_0^3 - 420vU_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8 \left(A_0 z^{\frac{1}{2}} \right) \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right) \left(B_1 z^q \right) \left(\frac{1}{2} A_0 z^{-\frac{1}{2}} \right) + 4 \left(A_0 z^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right) \left(B_1 q z^{q-1} \right) + 8 \left(A_1 z^p \right) \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{1}{2} A_0 z^{-\frac{1}{2}} \right) + 8 \left(A_0 z^{\frac{1}{2}} \right) \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(A_1 p z^{p-1} \right) \\
& + 8 \left(A_0 z^{\frac{1}{2}} \right) \left(A_1 z^p \right) \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{1}{4} B_0 z^{-\frac{3}{4}} \right) + 3 \left(A_0 z^{\frac{1}{2}} \right) \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right)^3 \left(\frac{1}{2} A_0 z^{-\frac{1}{2}} \right) + 3 \left(A_0 z^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{1}{4} B_0 z^{-\frac{3}{4}} \right) \\
& + 8 \left(A_0 z^{\frac{1}{2}} \right) \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right) \left(B_1 z^q \right) \left(\frac{1}{2} A_0 z^{-\frac{1}{2}} \right) + 4 \left(A_0 z^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(B_1 z^q \right) \left(\frac{1}{4} B_0 z^{-\frac{3}{4}} \right) \\
& = 280N \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right) \left(B_1 z^q \right) + 35N \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right)^3 - 420v \left(A_1 z^p \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4A_0^2 B_0 B_1 z^{q+\frac{1}{4}} + 4A_0^2 B_0 B_1 q z^{q+\frac{1}{4}} + 4A_0 B_0^2 A_1 z^p + 8A_0 B_0^2 A_1 p z^p + 2A_0 B_0^2 A_1 z^p + \frac{3}{2} A_0^2 B_0^3 z^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} A_0^2 B_0^3 z^{\frac{3}{4}} + 4A_0^2 B_0 B_1 z^{q+\frac{1}{4}} + A_0^2 B_0 B_1 z^{q+\frac{1}{4}} \\
& = 280N B_0 B_1 z^{q+\frac{1}{4}} + 35N B_0^3 z^{\frac{3}{4}} - 420v A_1 z^p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 16A_0^2 B_0 B_1 z^{q+\frac{1}{4}} + 16B_0 B_1 q z^{q+\frac{1}{4}} + 16A_0 B_0^2 A_1 z^p + 32A_0 B_0^2 A_1 p z^p + 8A_0 B_0^2 A_1 z^p + 6A_0^2 B_0^3 z^{\frac{3}{4}} + 3A_0^2 B_0^3 z^{\frac{3}{4}} + 16A_0^2 B_0 B_1 z^{q+\frac{1}{4}} + 4A_0^2 B_0 B_1 z^{q+\frac{1}{4}} \\
& = 1120N B_0 B_1 z^{q+\frac{1}{4}} + 140N B_0^3 z^{\frac{3}{4}} - 1680v A_1 z^p
\end{aligned}$$

$$4(9 + 4q)A_0^2 B_0 B_1 z^{q+\frac{1}{4}} + 8(3 + 4p)A_0 B_0^2 A_1 z^p + 9A_0^2 B_0^3 z^{\frac{3}{4}} = 1120N B_0 B_1 z^{q+\frac{1}{4}} - 1680v A_1 z^p + 140N B_0^3 z^{\frac{3}{4}}$$

En la ecuación de energía:

$$7\delta_0 \delta_1 U'_0 + 7U_0 \delta_0 \delta'_1 + 7\delta_0^2 U'_1 + 7U_1 \delta_0 \delta'_0 + 2\delta_0^3 U'_0 + 4U_0 \delta_0^2 \delta'_0 + 7\delta_0 \delta_1 U'_0 + 7U_0 \delta_1 \delta'_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
& 7 \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right) \left(B_1 z^q \right) \left(\frac{1}{2} A_0 z^{-\frac{1}{2}} \right) + 7 \left(A_0 z^{\frac{1}{2}} \right) \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right) \left(B_1 q z^{q-1} \right) + 7 \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(A_1 p z^{p-1} \right) + 7 \left(A_1 z^p \right) \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right) \left(\frac{1}{4} B_0 z^{-\frac{3}{4}} \right) + 2 \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right)^3 \left(\frac{1}{2} A_0 z^{-\frac{1}{2}} \right) \\
& + 4 \left(A_0 z^{\frac{1}{2}} \right) \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right)^2 \left(\frac{1}{4} B_0 z^{-\frac{3}{4}} \right) + 7 \left(B_0 z^{\frac{1}{4}} \right) \left(B_1 z^q \right) \left(\frac{1}{2} A_0 z^{-\frac{1}{2}} \right) + 7 \left(A_0 z^{\frac{1}{2}} \right) \left(B_1 z^q \right) \left(\frac{1}{4} B_0 z^{-\frac{3}{4}} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{7}{2} A_0 B_0 B_1 z^{q-\frac{1}{4}} + 7A_0 B_0 B_1 q z^{q-\frac{1}{4}} + 7B_0^2 A_1 p z^{p-\frac{1}{2}} + \frac{7}{4} B_0^2 A_1 z^{p-\frac{1}{2}} + A_0 B_0^3 z^{\frac{1}{4}} + A_0 B_0^3 z^{\frac{1}{4}} + \frac{7}{2} A_0 B_0 B_1 z^{q-\frac{1}{4}} + \frac{7}{4} A_0 B_0 B_1 z^{q-\frac{1}{4}} = 0$$

$$14A_0 B_0 B_1 z^{q-\frac{1}{4}} + 28A_0 B_0 B_1 q z^{q-\frac{1}{4}} + 28B_0^2 A_1 p z^{p-\frac{1}{2}} + 7B_0^2 A_1 z^{p-\frac{1}{2}} + 4A_0 B_0^3 z^{\frac{1}{4}} + 4A_0 B_0^3 z^{\frac{1}{4}} + 14A_0 B_0 B_1 z^{q-\frac{1}{4}} + 7A_0 B_0 B_1 z^{q-\frac{1}{4}} = 0$$

$$7(5 + 4q)A_0 B_0 B_1 z^{q-\frac{1}{4}} + 7B_0^2 A_1 (1 + 4p) z^{p-\frac{1}{2}} + 8A_0 B_0^3 z^{\frac{1}{4}} = 0$$

La dependencia de z se elimina en estas ecuaciones si los exponentes p y q si cumplen que:

$$q + \frac{1}{4} = p = \frac{3}{4}$$

$$q - \frac{1}{4} = p - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Que se resuelve satisfactoriamente para

$$p = \frac{3}{4}, \quad q = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo estos valores en las dos ecuaciones para encontrar los coeficientes A_1 y B_1 :

Momentum:

$$4 \left(9 + 4 \cdot \frac{1}{2} \right) A_0^2 B_0 B_1 z^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} + 8 \left(3 + 4 \cdot \frac{3}{4} \right) A_0 B_0^2 A_1 z^{\frac{3}{4}} + 9A_0^2 B_0^3 z^{\frac{3}{4}} = 1120N B_0 B_1 z^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} - 1680v A_1 z^{\frac{3}{4}} + 140N B_0^3 z^{\frac{3}{4}}$$

$$44A_0^2B_0B_1z^{\frac{3}{4}} + 48A_0B_0^2A_1z^{\frac{3}{4}} + 9A_0^2B_0^3z^{\frac{3}{4}} = 1120NB_0B_1z^{\frac{3}{4}} - 1680vA_1z^{\frac{3}{4}} + 140NB_0^3z^{\frac{3}{4}}$$

Si $A_0B_0^2 = 80\alpha$ tenemos:

$$44A_0^2B_0B_1 - 1120NB_0B_1 + 48(80\alpha)A_1 + 1680vA_1 = 140NB_0^3 - 9A_0^2B_0^3$$

$$44A_0^2B_0B_1 - 1120NB_0B_1 + 3840\alpha A_1 + 1680vA_1 = 140NB_0^3 - 9(A_0B_0^2)A_0B_0$$

$$4B_0(11A_0^2 - 280N)B_1 + 240(16\alpha + 7v)A_1 = 140NB_0^3 - 9(80\alpha)A_0B_0$$

$$240(16\alpha + 7v)A_1 + 4B_0(11A_0^2 - 280N)B_1 = 140NB_0^3 - 720\alpha A_0B_0$$

$$60(16\alpha + 7v)A_1 + B_0(11A_0^2 - 280N)B_1 = 5B_0(7NB_0^2 - 36\alpha A_0)$$

Energía:

$$7\left(5 + 4 \cdot \frac{1}{2}\right)A_0B_0B_1z^{\frac{1}{4}} + 7B_0^2A_1\left(1 + 4 \cdot \frac{3}{4}\right)z^{\frac{1}{4}} + 8A_0B_0^3z^{\frac{1}{4}} = 0$$

$$49A_0B_0B_1z^{\frac{1}{4}} + 28B_0^2A_1z^{\frac{1}{4}} + 8A_0B_0^3z^{\frac{1}{4}} = 0$$

$$49A_0B_0B_1 + 28B_0^2A_1 + 8(A_0B_0^2)B_0 = 0$$

$$28B_0^2A_1 + 49A_0B_0B_1 = -8(80\alpha)B_0$$

$$28B_0A_1 + 49A_0B_1 = -640\alpha$$

Resolviendo el sistema con incógnitas A_1 y B_1 :

$$60(16\alpha + 7v)A_1 + B_0(11A_0^2 - 280N)B_1 = 5B_0(7NB_0^2 - 36\alpha A_0)$$

$$28B_0A_1 + 49A_0B_1 = -640\alpha$$

Por la Regla de Cramer (determinantes):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 60(16\alpha + 7v) & B_0(11A_0^2 - 280N) \\ 28B_0 & 49A_0 \end{vmatrix} = 49A_0 \cdot 60(16\alpha + 7v) - 28B_0 \cdot B_0(11A_0^2 - 280N)$$

$$\Delta = 28[105A_0(16\alpha + 7v) - B_0^2(11A_0^2 - 280N)] = 28[1680\alpha A_0 + 735vA_0 - 11A_0^2B_0^2 + 280NB_0^2]$$

$$\Delta = 28[1680\alpha A_0 + 735vA_0 - 11(80\alpha)A_0 + 280NB_0^2] = 28[1680\alpha A_0 + 735vA_0 - 880\alpha A_0 + 280NB_0^2]$$

$$\Delta = 28[800\alpha A_0 + 735vA_0 + 280NB_0^2] = 28 \cdot 5[A_0(160\alpha + 147v) + 56NB_0^2]$$

$$\Delta = 140[A_0(160\alpha + 147v) + 56NB_0^2]$$

$$\Delta = 140 \left[\frac{80\alpha}{B_0^2} (160\alpha + 147v) + 56NB_0^2 \right]$$

$$\Delta = \frac{1120}{B_0^2} [10\alpha(160\alpha + 147v) + 7NB_0^4]$$

Si:

$$B_0 = \sqrt[4]{240} \left(\frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$B_0^4 = 240 \left(\frac{\alpha}{v}\right)^2 \left(\frac{20\alpha + 21v}{21\alpha}\right) \frac{v^2}{g\beta(T_w - T_\infty)}$$

$$g\beta(T_w - T_\infty)B_0^4 = 240 \frac{\alpha^2}{v^2} \left(\frac{20\alpha + 21v}{21\alpha}\right) v^2$$

$$7NB_0^4 = 80\alpha(20\alpha + 21v)$$

Entonces:

$$\Delta = \frac{1120}{B_0^2} [10\alpha(160\alpha + 147v) + 80\alpha(20\alpha + 21v)] = \frac{11200}{B_0^2} [\alpha(160\alpha + 147v) + 8\alpha(20\alpha + 21v)]$$

$$\Delta = \frac{11200\alpha}{B_0^2} (160\alpha + 147v + 160\alpha + 168v) = \frac{11200\alpha}{B_0^2} (320\alpha + 315v)$$

$$\Delta = \frac{56000\alpha}{B_0^2} (64\alpha + 63v)$$

$$\Delta A_1 = \begin{vmatrix} 5B_0(7NB_0^2 - 36\alpha A_0) & B_0(11A_0^2 - 280N) \\ -640\alpha & 49A_0 \end{vmatrix} = 49A_0 \cdot 5B_0(7NB_0^2 - 36\alpha A_0) - (-640\alpha)B_0(11A_0^2 - 280N)$$

$$\Delta A_1 = 5B_0[49A_0(7NB_0^2 - 36\alpha A_0) + 128\alpha(11A_0^2 - 280N)] = 5B_0(343NA_0B_0^2 - 1764\alpha A_0^2 + 1408\alpha A_0^2 - 35840N\alpha)$$

$$\Delta A_1 = 5B_0[343N(80\alpha) - 356\alpha A_0^2 - 35840N\alpha] = 20B_0[6860N\alpha - 89\alpha A_0^2 - 8960N\alpha]$$

$$\Delta A_1 = -20\alpha B_0(89A_0^2 + 2100N) = -20\alpha B_0 \left[89 \left(\frac{80\alpha}{B_0^2}\right)^2 + 2100N \right]$$

$$\Delta A_1 = -20\alpha B_0 \left[89 \cdot \frac{6400\alpha^2}{B_0^4} + 2100N \right] = -\frac{2000\alpha B_0}{B_0^4} (5696\alpha^2 + 3 \cdot 7NB_0^4)$$

$$\Delta A_1 = -\frac{2000\alpha}{B_0^3} [5696\alpha^2 + 3 \cdot 80\alpha(20\alpha + 21v)] = -\frac{16000\alpha^2}{B_0^3} [712\alpha + 30(20\alpha + 21v)]$$

$$\Delta A_1 = -\frac{16000\alpha^2}{B_0^3} (712\alpha + 600\alpha + 630v) = -\frac{16000\alpha^2}{B_0^3} (1312\alpha + 630v)$$

$$\Delta A_1 = -\frac{32000\alpha^2}{B_0^3} (656\alpha + 315v)$$

$$\Delta B_1 = \begin{vmatrix} 60(16\alpha + 7v) & 5B_0(7NB_0^2 - 36\alpha A_0) \\ 28B_0 & -640\alpha \end{vmatrix} = -640\alpha \cdot 60(16\alpha + 7v) - 28B_0 \cdot 5B_0(7NB_0^2 - 36\alpha A_0)$$

$$\Delta B_1 = -20[1920\alpha(16\alpha + 7v) + 7B_0^2(7NB_0^2 - 36\alpha A_0)] = -20[1920\alpha(16\alpha + 7v) + 7 \cdot 7NB_0^4 - 252\alpha A_0 B_0^2]$$

$$\Delta B_1 = -20[1920\alpha(16\alpha + 7v) + 7 \cdot 80\alpha(20\alpha + 21v) - 252\alpha(80\alpha)] = -20 \cdot 80\alpha[24(16\alpha + 7v) + 7(20\alpha + 21v) - 252\alpha]$$

$$\Delta B_1 = -1600\alpha[24(16\alpha + 7v) + 7(20\alpha + 21v) - 252\alpha] = -1600\alpha[384\alpha + 168v + 140\alpha + 147v - 252\alpha]$$

$$\Delta B_1 = -1600\alpha(272\alpha + 315v)$$

De esta manera:

$$A_1 = \frac{\Delta A_1}{\Delta} = \frac{-\frac{32000\alpha^2}{B_0^3}(656\alpha + 315\nu)}{\frac{56000\alpha}{B_0^2}(64\alpha + 63\nu)} = -\frac{4(656\alpha + 315\nu)\alpha}{7(64\alpha + 63\nu)B_0} = -\frac{4(656\alpha + 315\nu)\alpha}{7(64\alpha + 63\nu)\sqrt{\frac{80\alpha}{A_0}}}$$

$$A_1 = -\frac{4(656\alpha + 315\nu)}{7(64\alpha + 63\nu)} \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{A_0} = -\frac{1}{7\sqrt{5}} \frac{(656\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} \alpha^{\frac{1}{2}} \sqrt{A_0}$$

$$A_1 = -\frac{\sqrt{5}(656\alpha + 315\nu)}{35(64\alpha + 63\nu)} \alpha^{\frac{1}{2}} \sqrt{A_0}$$

$$B_1 = \frac{\Delta B_1}{\Delta} = \frac{-1600\alpha(272\alpha + 315\nu)}{\frac{56000\alpha}{B_0^2}(64\alpha + 63\nu)} = -\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2$$

$$B_1 = \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2$$

Número de Nusselt

Un balance de calor en la interfase, $r = R$, proporciona:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Flujo de calor} \\ \text{que sale por} \\ \text{conducción por la pared} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Flujo de calor} \\ \text{que entra por} \\ \text{convección al fluido} \end{array} \right)$$

$$\dot{Q}_{cond}|_R = \dot{Q}_{conv.}$$

$$-k_f A \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = hA(T_w - T_\infty)$$

Despejando h :

$$h = -\frac{k_f}{T_w - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

Del perfil parabólico de temperatura asumido tenemos:

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left[1 - \frac{r - R}{\delta} \right]^2 = \left[1 - \frac{r - R}{\Delta\delta(z)} \right]^2$$

Como se asumió que $\Delta = 1$ y despejando T para derivar parcialmente respecto a la coordenada radial

$$T = (T_w - T_\infty) \left[1 - \frac{r - R}{\delta(z)} \right]^2 + T_\infty$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 2(T_w - T_\infty) \left(1 - \frac{r - R}{\delta} \right) \left(-\frac{1}{\delta} \right) = -\frac{2(T_w - T_\infty)}{\delta} \left(1 - \frac{r - R}{\delta} \right)$$

Evaluando en $r = R$:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = -\frac{2(T_w - T_\infty)}{\delta} \left(1 - \frac{R - R}{\delta} \right) = -\frac{2(T_w - T_\infty)}{\delta}$$

Entonces el coeficiente de transferencia de calor queda:

$$h = -\frac{k_f}{T_w - T_\infty} \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R = -\frac{k_f}{T_w - T_\infty} \left[-\frac{2(T_w - T_\infty)}{\delta} \right] = \frac{2k_f}{\delta}$$

Se había aproximado que

$$\delta(z) \approx \delta_0 + \frac{1}{R} \delta_1$$

Donde se encontró:

$$\delta_0 = B_0 z^{\frac{1}{4}} \quad \text{y} \quad \delta_1 = B_1 z^{\frac{1}{2}}$$

Así:

$$\delta(z) \approx B_0 z^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{R} B_1 z^{\frac{1}{2}}$$

Por tanto el coeficiente local de transferencia de calor será

$$h = \frac{2k_f}{\delta} = \frac{2k_f}{B_0 z^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{R} B_1 z^{\frac{1}{2}}}$$

con los valores de

$$B_1 = -\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2$$

$$h = \frac{2k_f}{B_0 z^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{R} \left[-\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2 \right] z^{\frac{1}{2}}} = \frac{2k_f}{B_0 z^{\frac{1}{4}} \left[1 - \frac{1}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0 z^{\frac{1}{4}} \right]}$$

como

$$B_0 = \sqrt[4]{240} \left(\frac{\nu}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-\frac{1}{4}}$$

$$h = \frac{2k_f \left(\frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{240} \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{4}} \left\{ 1 - \frac{1}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} \sqrt[4]{240} \left(\frac{\nu}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{4}} \right\}}$$

$$h = \frac{2k_f \left(\frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{240} \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-\frac{1}{4}} z^{\frac{3}{4}} \left\{ 1 - \frac{1}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} \sqrt[4]{240} \left(\frac{\nu}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-\frac{1}{4}} z^{\frac{3}{4}} \right\}}$$

$$h = \frac{2k_f}{\sqrt[4]{240} \left(\frac{\nu}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{4}} \left\{ 1 - \frac{1}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} \sqrt[4]{240} \left(\frac{\nu}{\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-\frac{1}{4}} z^{\frac{3}{4}} \right\}}$$

$$h(z) = \frac{2k_f Pr^{\frac{1}{2}} Gr_z^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{240} \left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{\frac{1}{4}} z \left\{1 - \frac{\sqrt[4]{240} (272 + 315Pr)}{35R (64 + 63Pr)} Pr^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{\frac{1}{4}} Gr_z^{-\frac{1}{4}} z\right\}}$$

Por tanto el Nusselt local será

$$Nu_z = \frac{h_z z}{k_f} = \frac{2k_f Pr^{\frac{1}{2}} Gr_z^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{240} \left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{\frac{1}{4}} z \left\{1 - \frac{\sqrt[4]{240} (272 + 315Pr)}{35R (64 + 63Pr)} Pr^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{\frac{1}{4}} Gr_z^{-\frac{1}{4}} z\right\}} z$$

$$Nu_z = \frac{2Pr^{\frac{1}{2}} Gr_z^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{240} \left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{\frac{1}{4}} \left\{1 - \frac{\sqrt[4]{240} (272 + 315Pr)}{35R (64 + 63Pr)} Pr^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + Pr\right)^{\frac{1}{4}} Gr_z^{-\frac{1}{4}} z\right\}}$$

Para hallar ahora el Nusselt promedio requerimos encontrar el coeficiente promedio de transferencia de calor por el teorema integral del valor medio, de esta forma:

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(z) dz$$

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{2k_f}{B_0 z^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{R} B_1 z^{\frac{1}{2}}} dz = \frac{2k_f}{L} \int_0^L \frac{1}{B_0 z^{\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} z^{\frac{1}{4}}\right)} dz$$

Definiendo

$$a = \frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0}$$

$$\bar{h} = \frac{2k_f}{B_0 L} \int_0^L \frac{1}{z^{\frac{1}{4}} \left(1 + az^{\frac{1}{4}}\right)} dz$$

Resolviendo la integral indefinida

$$\int \frac{1}{z^{\frac{1}{4}} \left(1 + az^{\frac{1}{4}}\right)} dz = \int \frac{1}{\left(1 + az^{\frac{1}{4}}\right) z^{\frac{1}{4}}} dz$$

Por sustitución:

$$u = 1 + az^{\frac{1}{4}}$$

$$du = \frac{1}{4} az^{-\frac{3}{4}} dz$$

De donde se despeja dz

$$dz = \frac{4}{a} z^{\frac{3}{4}} du$$

Se divide por $z^{\frac{1}{4}}$:

$$\frac{1}{z^{\frac{1}{4}}} dz = \frac{4z^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}} du$$

$$\frac{1}{z^{\frac{1}{4}}} dz = \frac{4}{a} z^{\frac{1}{2}} du$$

De la sustitución despejamos $z^{\frac{1}{2}}$:

$$u = 1 + az^{\frac{1}{4}}$$

$$z^{\frac{1}{4}} = \frac{u-1}{a}$$

$$z^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{u-1}{a}\right)^2$$

Así el diferencial queda:

$$\frac{1}{z^{\frac{1}{4}}} dz = \frac{4}{a} z^{\frac{1}{2}} du = \frac{4}{a} \left(\frac{u-1}{a}\right)^2 du$$

Entonces sustituyendo

$$u = 1 + az^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{1}{z^{\frac{1}{4}}} dz = \frac{4}{a} \left(\frac{u-1}{a}\right)^2 du$$

en la integral se tiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{z^{\frac{1}{4}}(1+az^{\frac{1}{4}})} dz &= \int \frac{1}{u} \frac{4}{a} \left(\frac{u-1}{a}\right)^2 du = \frac{4}{a^3} \int \frac{u^2 - 2u + 1}{u} du = \frac{4}{a^3} \int \left(\frac{u^2}{u} - \frac{2u}{u} + \frac{1}{u}\right) du = \frac{4}{a^3} \int \left(u - 2 + \frac{1}{u}\right) du \\ &= \frac{4}{a^3} \left[\frac{1}{2} u^2 - 2u + \ln|u| \right] + c = \frac{4}{a^3} \left[\frac{1}{2} \left(1 + az^{\frac{1}{4}}\right)^2 - 2\left(1 + az^{\frac{1}{4}}\right) + \ln\left|1 + az^{\frac{1}{4}}\right| \right] + c \\ &= \frac{2}{a^3} \left[1 + 2az^{\frac{1}{4}} + a^2 z^{\frac{1}{2}} - 4 - 4az^{\frac{1}{4}} + 2\ln\left|1 + az^{\frac{1}{4}}\right| \right] + c = \frac{2}{a^3} \left[a^2 z^{\frac{1}{2}} - 2az^{\frac{1}{4}} - 3 + 2\ln\left|1 + az^{\frac{1}{4}}\right| \right] + c \end{aligned}$$

Retomando el problema inicial:

$$\bar{h} = \frac{2k_f}{B_0 L} \int_0^L \frac{1}{z^{\frac{1}{4}}(1+az^{\frac{1}{4}})} dz = \frac{2k_f}{B_0 L} \frac{2}{a^3} \left[a^2 z^{\frac{1}{2}} - 2az^{\frac{1}{4}} - 3 + 2\ln\left|1 + az^{\frac{1}{4}}\right| \right]_0^L$$

$$\bar{h} = \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left[\left(a^2 L^{\frac{1}{2}} - 2aL^{\frac{1}{4}} - 3 + 2\ln\left|1 + aL^{\frac{1}{4}}\right| \right) - \left(a^2 \cdot 0^{\frac{1}{2}} - 2a \cdot 0^{\frac{1}{4}} - 3 + 2\ln\left|1 + a0^{\frac{1}{4}}\right| \right) \right]$$

$$\bar{h} = \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left[a^2 L^{\frac{1}{2}} - 2aL^{\frac{1}{4}} - 3 + 2\ln\left|1 + aL^{\frac{1}{4}}\right| + 3 \right] = \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left[a^2 L^{\frac{1}{2}} - 2aL^{\frac{1}{4}} + 2\ln\left|1 + aL^{\frac{1}{4}}\right| \right]$$

Con

$$a = \frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0}$$

$$\bar{h} = \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left[a^2 L^{\frac{1}{2}} - 2aL^{\frac{1}{4}} + 2 \ln \left| 1 + aL^{\frac{1}{4}} \right| \right] = \frac{4k_f}{\left(\frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} \right)^3 B_0 L} \left[\left(\frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} \right)^2 L^{\frac{1}{2}} - 2 \left(\frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} \right) L^{\frac{1}{4}} + 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} L^{\frac{1}{4}} \right| \right]$$

$$\bar{h} = \frac{4k_f B_0^2 R^3}{B_1^3 L} \left[\left(\frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} \right)^2 L^{\frac{1}{2}} - 2 \left(\frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} \right) L^{\frac{1}{4}} + 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} L^{\frac{1}{4}} \right| \right]$$

$$\bar{h} = \frac{4k_f B_0^2 R^3}{B_1^3 L} \frac{1}{R^2 B_0^2} L^{\frac{1}{2}} - \frac{4k_f B_0^2 R^3}{B_1^3 L} \frac{2}{R B_0} L^{\frac{1}{4}} + \frac{4k_f B_0^2 R^3}{B_1^3 L} 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} L^{\frac{1}{4}} \right|$$

$$\bar{h} = \frac{4k_f R L^{\frac{1}{2}}}{B_1} - \frac{8k_f B_0 R^2 L^{\frac{3}{4}}}{B_1^2} + \frac{8k_f B_0^2 R^3 L^{-1}}{B_1^3} \ln \left| 1 + \frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} L^{\frac{1}{4}} \right|$$

Si

$$B_1 = -\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2$$

$$\bar{h} = \frac{4k_f R L^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2} - \frac{8k_f B_0 R^2 L^{\frac{3}{4}}}{\left[-\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2 \right]^2} + \frac{8k_f B_0^2 R^3 L^{-1}}{\left[-\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2 \right]^3} \ln \left| 1 + \frac{1}{R} \frac{\left[-\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2 \right]}{B_0} L^{\frac{1}{4}} \right|$$

$$\bar{h} = -140k_f R \frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \frac{1}{B_0^2 L^{\frac{1}{2}}} - 9800k_f R^2 \left(\frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \right)^2 \frac{1}{B_0^3 L^{\frac{3}{4}}} - 280k_f R^3 \left(\frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \right)^3 \frac{1}{B_0^4 L} \ln \left| 1 - \frac{1}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0 L^{\frac{1}{4}} \right|$$

donde

$$B_0 = \sqrt[4]{240} \left(\frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{\frac{1}{4}}$$

El Nusselt promedio será entonces:

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k_f} = \left[-140k_f R \frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \frac{1}{B_0^2 L^{\frac{1}{2}}} - 9800k_f R^2 \left(\frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \right)^2 \frac{1}{B_0^3 L^{\frac{3}{4}}} - 280k_f R^3 \left(\frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \right)^3 \frac{1}{B_0^4 L} \ln \left| 1 - \frac{1}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0 L^{\frac{1}{4}} \right| \right] \frac{L}{k_f}$$

$$\overline{Nu} = -140R \frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \frac{1}{B_0^2 L^{\frac{1}{2}}} - 9800R^2 \left(\frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \right)^2 \frac{1}{B_0^3 L^{\frac{3}{4}}} - 280R^3 \left(\frac{64\alpha + 63\nu}{272\alpha + 315\nu} \right)^3 \frac{1}{B_0^4 L} \ln \left| 1 - \frac{1}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0 L^{\frac{1}{4}} \right|$$

una expresión más sencilla consiste en tomar el valor promedio del coeficiente de transferencia una aproximación para el logaritmo natural, y retomando:

$$\bar{h} = \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left[a^2 L^{\frac{1}{2}} - 2aL^{\frac{1}{4}} + 2 \ln \left| 1 + aL^{\frac{1}{4}} \right| \right]$$

Si se tiene que

$$\ln(1+X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n = X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{4}X^4 + \dots$$

Para $|X| \leq 1$

Aplicando esto a:

$$\ln \left| 1 + aL^{\frac{1}{4}} \right|$$

Si

$$\left| aL^{\frac{1}{4}} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} L^{\frac{1}{4}} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{1}{RB_0} \left[-\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0^2 \right] L^{\frac{1}{4}} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{1}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} B_0 L^{\frac{1}{4}} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{1}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} \sqrt[4]{240} \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \frac{\nu}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}} \right| \leq 1$$

$$\frac{1}{35R} \frac{(272 + 315Pr)}{(64 + 63Pr)} \sqrt[4]{240} Pr^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{20 + 21Pr}{21}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right]^{-\frac{1}{4}} L^{-\frac{3}{4}} L \leq 1$$

$$\frac{L}{35R} \frac{(272 + 315Pr)}{(64 + 63Pr)} \sqrt[4]{\frac{80}{7}} Pr^{-\frac{1}{2}} (20 + 21Pr)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2} \right]^{-\frac{1}{4}} \leq 1$$

$$\frac{L}{R} \leq 35 \sqrt[4]{\frac{7}{80} \frac{(64 + 63Pr)Pr^{\frac{1}{2}}Gr^{-\frac{1}{4}}}{(272 + 315Pr)(20 + 21Pr)^{\frac{1}{4}}}}$$

Bajo este criterio se expresar que:

$$\ln \left| 1 + aL^{\frac{1}{4}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(aL^{\frac{1}{4}}\right)^n = aL^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \left(aL^{\frac{1}{4}}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(aL^{\frac{1}{4}}\right)^3 - \frac{1}{4} \left(aL^{\frac{1}{4}}\right)^4 + \frac{1}{5} \left(aL^{\frac{1}{4}}\right)^5 \dots$$

Aproximando a los cuatro primeros términos:

$$\ln \left| 1 + aL^{\frac{1}{4}} \right| \approx \sum_{n=1}^4 \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n L^{\frac{n}{4}} = aL^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} a^2 L^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} a^3 L^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{4} a^4 L$$

Reemplazando en la expresión del coeficiente promedio:

$$\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left[a^2 L^{\frac{1}{2}} - 2aL^{\frac{1}{4}} + 2 \ln \left| 1 + aL^{\frac{1}{4}} \right| \right] = \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left[a^2 L^{\frac{1}{2}} - 2aL^{\frac{1}{4}} + 2 \left(aL^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} a^2 L^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} a^3 L^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{4} a^4 L + \dots \right) \right] \\ \bar{h} &= \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left(a^2 L^{\frac{1}{2}} - 2aL^{\frac{1}{4}} + 2aL^{\frac{1}{4}} - a^2 L^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} a^3 L^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{4} a^4 L + \dots \right) = \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left(\frac{2}{3} a^3 L^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} a^4 L + \dots \right) \\ \bar{h} &= \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left(\frac{2}{3} a^3 L^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} a^4 L + \dots \right) = \frac{4k_f}{a^3 B_0 L} \left(\frac{2}{3} a^3 L^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} a^4 L + \dots \right) = \frac{8k_f}{3B_0} L^{-\frac{1}{4}} - \frac{2k_f}{B_0} a + \dots \\ \bar{h} &= \frac{8k_f}{3B_0} L^{-\frac{1}{4}} - \frac{2k_f}{B_0} \frac{1}{R} \frac{B_1}{B_0} = \frac{8k_f}{3B_0} L^{-\frac{1}{4}} - \frac{2k_f}{R} \frac{B_1}{B_0^2} + \dots = \\ \bar{h} &= \frac{8k_f}{3B_0} L^{-\frac{1}{4}} - \frac{2k_f}{R} \left[\frac{1}{35} \frac{(272\alpha + 315v) B_0^2}{(64\alpha + 63v)} \right] + \dots = \frac{8k_f}{3B_0} L^{-\frac{1}{4}} + \frac{2k_f}{35R} \frac{(272\alpha + 315v)}{(64\alpha + 63v)} + \dots \\ \bar{h} &= \frac{8}{3} \frac{k_f}{\sqrt[4]{240} \left(\frac{v}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{20}{21} + \frac{v}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2} \right]^{\frac{1}{4}}} L^{-\frac{1}{4}} + \frac{2k_f}{35R} \frac{(272\alpha + 315v)}{(64\alpha + 63v)} + \dots \\ \bar{h} &= \frac{8k_f Pr^{\frac{1}{2}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{v^2} \right]^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}} L^{-1}}{\sqrt[4]{240} \left(\frac{20}{21} + Pr \right)^{\frac{1}{4}}} + \frac{2k_f}{35R} \frac{(272\alpha + 315v)}{(64\alpha + 63v)} + \dots \\ \bar{h} &= \frac{8k_f Pr^{\frac{1}{2}} \left[\frac{g\beta(T_w - T_\infty) L^{3/4}}{v^2} \right]^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{240} \left(\frac{20 + 21Pr}{21} \right)^{\frac{1}{4}} L} + \frac{2k_f}{35R} \frac{(272\alpha + 315v)}{(64\alpha + 63v)} + \dots \\ \bar{h} &= k_f \left[\frac{8}{3} \sqrt[4]{\frac{21}{240} \frac{Pr^{\frac{2}{4}} Gr_L^{\frac{1}{4}}}{(20 + 21Pr)^{\frac{1}{4}} L}} + \frac{2}{35R} \frac{(272\alpha + 315v)}{(64\alpha + 63v)} + \dots \right] \\ \bar{h} &= k_f \left\{ \frac{8}{3} \left[\frac{7}{80} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{L} + \frac{2}{35R} \frac{(272\alpha + 315v)}{(64\alpha + 63v)} + \dots \right\} \\ \bar{h} &= k_f \left\{ \frac{4 \cdot 2}{3} \left[\frac{7}{80} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{L} + \frac{2}{35R} \frac{(272\alpha + 315v)}{(64\alpha + 63v)} + \dots \right\} \\ \bar{h} &= k_f \left\{ \frac{4}{3} \left[\frac{7 \cdot 2^4}{80} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{L} + \frac{2}{35R} \frac{(272\alpha + 315v)}{(64\alpha + 63v)} + \dots \right\} \\ \bar{h} &= k_f \left\{ \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{L} + \frac{2}{35R} \frac{(272\alpha + 315v)}{(64\alpha + 63v)} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Hallando el Nusselt promedio:

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h}L}{k_f} = k_f \left\{ \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{L} + \frac{2}{35R} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} + \dots \right\} \frac{L}{k_f}$$

$$\overline{Nu} = \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} + \frac{2}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu) L}{(64\alpha + 63\nu) R} + \dots$$

Si se expresa en función del diámetro, D , amplificando el segundo término por 2

$$\overline{Nu} = \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} + \frac{4L}{35(2R)} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} + \dots = \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} + \frac{4L}{35D} \frac{(272\alpha + 315\nu)}{(64\alpha + 63\nu)} + \dots$$

$$\overline{Nu} = \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Pr^2 Gr_L}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} + \frac{4}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu) L}{(64\alpha + 63\nu) D} + \dots = \frac{4}{3} \left[\frac{7}{5} \frac{Ra_L Pr}{(20 + 21Pr)} \right]^{\frac{1}{4}} + \frac{4}{35} \frac{(272\alpha + 315\nu) L}{(64\alpha + 63\nu) D} + \dots$$

APENDICE B

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO PARA EL TERMÓMETRO: FLUIDO TERMOMÉTRICO

Se deduce $\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P = c_p - Pv\kappa$

De la siguiente manera,

dado que

$$h = u + Pv$$

derivando parcialmente respecto a T a P constante se tiene:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P + P \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$$

se define que

$$\left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P = c_p$$

$$\kappa = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \therefore \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \kappa v$$

Luego:

$$c_p = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P + P\kappa v$$

Despejando:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_P = c_p - P\kappa v$$

Balance de energía en el volumen de control

Balance de Energía aplicado a un volumen macroscópico de control (Robert W. Fox y Alan T. McDonald "Introduction to Mechanics" segunda edición, 1978 John Wiley & Sons)

$$\dot{Q} + \dot{W}_s + \dot{W}_{cortante} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(u + \frac{1}{2}v^2 + gz\right) \rho dV + \int_S \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz\right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Que es la primera ley de la termodinámica donde se representan los siguientes términos:

$$\left(\begin{array}{c} \text{flujos de} \\ \text{energía} \\ \text{transferible} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \text{acumulación: cambios de} \\ \text{energía interna y mecánica} \\ \text{del sistema} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} \text{energía de las corrientes} \\ \text{materiales de entrada y} \\ \text{salida al sistema} \end{array}\right)$$

\dot{Q} : Flujo de Calor que atraviesa la superficie de control

\dot{W}_s : Flujo de Trabajo debido a piezas móviles dentro del volumen de control

$\dot{W}_{cortante}$: Flujo de Trabajo debido esfuerzos cortantes o tangenciales sobre la superficie de control

v_s : Velocidad del fluido que atraviesa la superficie de control

v : Velocidad del fluido dentro del volumen de control

ρ : Densidad del fluido

\vec{v} : Vector Velocidad

z : Altura para la energía potencial de los flujos

FLUJO DE CALOR, \dot{Q}

El flujo de calor, \dot{Q} es principalmente por convección ya que la radiación es despreciable porque el ΔT (entre la temperatura del medio $T_\infty = T_m$ y la temperatura de pared, es decir la de la superficie de control, T_w) es bajo.

Se tiene entonces que por la Ley de Enfriamiento de Newton:

$$\dot{Q} = hA(T_w - T_\infty)$$

Donde h , es el coeficiente de transferencia de calor convectivo del medio circundante; A es el área transversal al flujo, área que corresponde a la de la superficie de control.

Se supone que la resistencia conductiva de la pared es despreciable y por tanto la temperatura del seno del mercurio, T , es próxima a la temperatura de la pared, $T \approx T_w$, donde T_w es la temperatura de pared.

Definiendo A_p como el área de transferencia de calor, A , la cual corresponde al área lateral del cilindro.

La Ley de Enfriamiento de Newton queda:

$$\dot{Q} = hA(T_w - T_\infty)$$

$$\dot{Q} \approx hA(T - T_m)$$

$$T_w - T_\infty$$

$$T - T_m$$

Ahora, si la resistencia de la pared no es despreciable, tendríamos que hallar el circuito equivalente entre las dos temperaturas:

Ahora como se considera que $T_m > T$ (El termómetro se va a calentar), para que $\dot{Q} > 0$ se escribe:

$$\dot{Q} = hA(T_m - T)$$

FLUJO DE TRABAJO, \dot{W}

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_{cortante}$$

Siendo $\dot{W}_{cortante} = 0$ como no hay esfuerzos tangenciales sobre la superficie de control

Y el trabajo debido a piezas móviles:

$$\dot{W}_s = (\dot{W}_{ejes} - \dot{W}_{expansión})$$

Donde:

$\dot{W}_{ejes} = 0$ ya que no hay ejes que atraviesen la frontera del sistema.

$$y \quad \dot{W}_{expansión} = \frac{dW_{expansión}}{dt} = \frac{PdV}{dt} = P \frac{dV}{dt} = P\dot{V}$$

Luego:

$$\dot{W}_s = (W_{ejes} - W_{expansión})$$

$$\dot{W}_s = \left(0 - P \frac{dV}{dt}\right) = -P \frac{dV}{dt}$$

Finalmente, el único trabajo es el debido a la expansión:

$$\dot{W} = \dot{W}_s + \dot{W}_{cortante} = -P \frac{dV}{dt} + 0 = -P \frac{dV}{dt}$$

CAMBIOS DE ENERGÍA DEL SISTEMA

Los cambios de energía potencial son despreciables comparados con los cambios de energía cinética y energía interna del volumen de control.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (gz) \rho dV \ll \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(u + \frac{1}{2}v^2\right) \rho dV$$

Y también

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (gz) \rho dV = 0 \text{ (El sistema está en estado permanente, } \Delta E_c = \Delta E_p = 0)$$

Como no hay flujo de masa que atraviese la superficie de control, se tiene:

$$\int_S \left(u + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v_s^2 + gz\right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0$$

De esta manera tenemos:

Balance global: en todo el termómetro

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{dE_{sis}}{dt}$$

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{d}{dt} [E_c + U]$$

$$hA_b(T_m - T) - P \frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(u + \frac{1}{2}v^2\right) \rho dV$$

Dado que el sistema, \forall , se compone de dos subsistemas \forall_c y \forall_b :

$$hA_b(T_m - T) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\forall_c} \left(u + \frac{1}{2}v^2\right) \rho dV + \int_{\forall_b} \left(u + \frac{1}{2}v^2\right) \rho dV \right] + P \frac{dV}{dt}$$

si $\left(u + \frac{1}{2}v^2\right) \rho$ es constante como $u = u(T)$ y \forall es isotérmico y por ende en cada volumen de control

$$hA_b(T_m - T) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(u + \frac{1}{2}v_c^2\right) \rho \int_{\forall_c} dV + \left(u + \frac{1}{2}v_b^2\right) \rho \int_{\forall_b} dV \right] + P \frac{dV}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(u + \frac{1}{2}\vec{v}_c \cdot \vec{v}_c\right) \rho \forall_c + \left(u + \frac{1}{2}\vec{v}_b \cdot \vec{v}_b\right) \rho \forall_b \right] + P \frac{dV}{dt}$$

Entonces, como

$$\rho = \frac{m}{V} \therefore m = \rho V$$

$$hA_b(T_m - T) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(u + \frac{1}{2} \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c \right) m_c + \left(u + \frac{1}{2} \vec{v}_b \cdot \vec{v}_b \right) m_b \right] + P \frac{dV}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = \frac{\partial}{\partial t} \left[u(m_c + m_b) + \frac{1}{2} \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c m_c + \frac{1}{2} \vec{v}_b \cdot \vec{v}_b m_b \right] + P \frac{dV}{dt}$$

ya que $M = m_c + m_b$ y $u \approx u_r + c_p(T - T_r)$ y como es un líquido: $c_v \rightarrow c_p$ entonces: $u \approx u_r + c_p(T - T_r)$

$$hA_b(T_m - T) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ M[u_r + c_p(T - T_r)] + \frac{1}{2} \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c m_c + \frac{1}{2} \vec{v}_b \cdot \vec{v}_b m_b \right\} + P \frac{dV}{dt}$$

donde

h : coeficiente de calor convectivo

$T_m = T_\infty$: temperatura de equilibrio en el medio

T : temperatura en un instante dado

T_r : temperatura de referencia

M : masa total del fluido en el termómetro

m_b : masa del fluido en el bulbo

m_c : masa del fluido en la columna

m_b : masa del fluido en el bulbo

c_p : calor específico a presión constante del fluido

\vec{v}_b : velocidad del fluido en el bulbo

\vec{v}_c : velocidad del fluido en la columna

P : presión en la superficie libre del líquido

V : volumen del fluido en el termómetro

ρ : densidad del fluido

t : tiempo

El término de la energía cinética es despreciable respecto al de energía interna. Se tiene que:

$$M[u_r + c_p(T - T_r)] \gg \frac{1}{2} \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c m_c + \frac{1}{2} \vec{v}_b \cdot \vec{v}_b m_b$$

Así de esta manera:

$$M[u_r + c_p(T - T_r)] + \frac{1}{2} \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c m_c + \frac{1}{2} \vec{v}_b \cdot \vec{v}_b m_b \approx M[u_r + c_p(T - T_r)]$$

Por lo que la ecuación de balance se escribe como:

$$hA_b(T_m - T) = \frac{\partial}{\partial t} [M[u_r + c_p(T - T_r)]] + P \frac{dV}{dt}$$

Desarrollando la derivación:

$$hA_b(T_m - T) = Mc_p \frac{dT}{dt} + P \frac{dV}{dt}$$

Ecuación que describe el balance global.

Llevando esta ecuación en términos adimensionales:

Variables adimensionales:

θ : temperatura adimensional

$$\theta = \frac{T_m - T}{T_m - T_0}$$

donde T_0 : temperatura inicial en el termómetro

τ : tiempo adimensional

$$\tau = \frac{t}{t_m}$$

donde

t_m : tiempo en el que el termómetro alcanza la temperatura de equilibrio en el medio, T_m

Relacionemos ahora $\frac{dT}{dt}$ con $\frac{d\theta}{d\tau}$:

Derivando cada variable adimensional:

$$d\left[\theta = \frac{T_m - T}{T_m - T_0}\right]$$

$$d\theta = -\frac{1}{T_m - T_0} dT$$

$$dT = -(T_m - T_0)d\theta$$

$$d\left[\tau = \frac{t}{t_m}\right]$$

$$d\tau = \frac{1}{t_m} dt$$

$$dt = t_m d\tau$$

Luego:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-(T_m - T_0)d\theta}{t_m d\tau} = -\frac{T_m - T_0}{t_m} \frac{d\theta}{d\tau}$$

Definiendo otra variable adimensional

v : volumen adimensional o fraccional

$$v = \frac{V}{V_0}$$

Derivando:

$$d\left[v = \frac{V}{V_0}\right]$$

$$dv = \frac{1}{V_0} dV$$

$$dV = V_0 dv$$

Así se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_0 dv}{t_m d\tau} = \frac{V_0}{t_m} \frac{dv}{d\tau}$$

Reemplazando estos diferenciales en la ecuación de balance global:

$$hA_b(T_m - T) = Mc_p \frac{dT}{dt} + P \frac{dV}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = Mc_p \left[-\frac{T_m - T_0}{t_m} \frac{d\theta}{d\tau} \right] + P \frac{V_0}{t_m} \frac{dv}{d\tau}$$

multiplicando por $\frac{t_m}{Mc_p(T_m - T_0)}$

$$\frac{t_m}{Mc_p(T_m - T_0)} hA_b(T_m - T) = \frac{t_m}{Mc_p(T_m - T_0)} Mc_p \left[-\frac{T_m - T_0}{t_m} \frac{d\theta}{d\tau} \right] + \frac{t_m}{Mc_p(T_m - T_0)} P \frac{V_0}{t_m} \frac{dv}{d\tau}$$

Organizando:

$$\frac{hA_b t_m}{Mc_p} \frac{(T_m - T)}{(T_m - T_0)} = -\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{P V_0}{Mc_p(T_m - T_0)} \frac{dv}{d\tau}$$

$$\frac{hA_b t_m}{Mc_p} \theta = -\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{P V_0}{Mc_p(T_m - T_0)} \frac{dv}{d\tau}$$

Y definiendo los números adimensionales:

$$Bi = \frac{hA_b t_m}{Mc_p} = \frac{\text{flujo convectivo}}{\text{velocidad de cambio de la energía interna total}}$$

$$\omega = \frac{P V_0}{Mc_p(T_m - T_0)} = \frac{\text{flujo de trabajo de frontera móvil}}{\text{velocidad de cambio de energía interna total}}$$

Así la ecuación adimensional queda:

$$Bi\theta = -\frac{d\theta}{d\tau} + \omega \frac{dv}{d\tau}$$

ahora se desglosa el factor $\frac{dv}{d\tau}$ en función de la altura de la columna:

Definiendo los subíndices:

b: bulbo

c: columna

Para el volumen, V , del sistema se tiene:

$$V = V_b + V_c$$

y dado que para un cilindro

$$V = Ax$$

siendo A : área de sección transversal y x : altura o longitud

para que así:

$$V = A_b x_b + A_c x_c$$

y definiendo la condición inicial tanto para el bulbo como para la columna:

$$V_{b0} = A_b x_{b0}, \quad V_{c0} = A_c x_{c0}$$

donde tanto A_b como A_c son invariantes con el tiempo, se despejan:

$$A_b = \frac{V_{b0}}{x_{b0}}, \quad A_c = \frac{V_{c0}}{x_{c0}}$$

para reemplazar en la expresión de balance de volúmenes:

$$V = \frac{V_{b0}}{x_{b0}} x_b + \frac{V_{c0}}{x_{c0}} x_c = V_{b0} \frac{x_b}{x_{b0}} + V_{c0} \frac{x_c}{x_{c0}}$$

dividiendo entre V_0 queda:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{V_{b0}}{V_0} \frac{x_b}{x_{b0}} + \frac{V_{c0}}{V_0} \frac{x_c}{x_{c0}}$$

Retomando la definición de volumen adimensional $v = \frac{V}{V_0}$ podemos establecer para la condición inicial:

$$v_{b0} = \frac{V_{b0}}{V_0} \quad \text{y} \quad v_{c0} = \frac{V_{c0}}{V_0}$$

donde

v_{b0} : volumen fraccional en el bulbo del termómetro respecto al volumen total para la concición inicial

v_{c0} : volumen fraccional en la columna del termómetro respecto al volumen total para la concición inicial

Y definiendo las longitudes fraccionales en el bulbo y en la columna:

$$l_b = \frac{x_b}{x_{b0}} \quad \text{y} \quad l_c = \frac{x_c}{x_{c0}}$$

respectivamente, para que finalmente la expresión de volumen adimensional en términos de las longitudes fraccionales:

$$v = v_{b0} l_b + v_{c0} l_c$$

Donde:

l_b : longitud fraccional en el bulbo, es decir la razón entre la longitud del fluido en el bulbo en cualquier momento y la longitud del fluido en el bulbo en el estado inicial.

l_c : longitud fraccional en la columna, es decir la razón entre la longitud del fluido en la columna en cualquier momento y la longitud del fluido en la columna en el estado inicial.

Si se deriva respecto a τ , el volumen adimensional, v , sabiendo que $v_{b0} l_b$ son constantes en el tiempo, ya que el volumen del bulbo siempre permanece lleno, es decir V_b permanece invariante en el tiempo; así se obtiene:

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} [v_{b0} l_b + v_{c0} l_c] = 0 + \frac{d}{d\tau} (v_{c0} l_c) = v_{c0} \frac{dl_c}{d\tau}$$

definiendo la velocidad lineal adimensional del fluido en la columna:

$v = \frac{dl_c}{d\tau}$ queda:

$$\frac{dv}{d\tau} = v_{c0} \frac{dl_c}{d\tau} = v_{c0} v$$

así que:

$$Bi\theta = -\frac{d\theta}{d\tau} + \omega v_{c0} v$$

Definiendo el volumen específico, v , como: $v = \frac{V}{M}$ por termodinámica se tiene:

$$v = v(T, P)$$

la derivada total será:

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP$$

dividiendo entre v

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P dT + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T dP$$

Se tiene que el coeficiente de dilatación o expansión térmica, κ , se define como:

$$\kappa = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$$

Y el coeficiente de compresibilidad, γ , como:

$$\gamma = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T$$

La expresión de volumen específico queda:

$$\frac{dv}{v} = \kappa dT + \gamma dP$$

Integrando, teniendo en cuenta que κ y γ cambian muy poco en el proceso desde T_0, P_0, v_0 hasta T, P, v ya que no se cumple que $T_m \ll T_0$, se asumen constantes.

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = \int_{T_0}^T \kappa dT + \int_{P_0}^P \gamma dP$$

$$\int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv \approx \kappa \int_{T_0}^T dT + \gamma \int_{P_0}^P dP$$

$$\ln v \Big|_{v_0}^v \approx \kappa T \Big|_{T_0}^T + \gamma P \Big|_{P_0}^P$$

$$\ln \frac{v}{v_0} \approx \kappa (T - T_0) + \gamma (P - P_0)$$

Como el proceso se asume isobárico tenemos que $P = P_0$, lo cual se reduce a

$$\ln \frac{v}{v_0} \approx \kappa (T - T_0)$$

Despejando v :

$$\frac{V}{V_0} \approx e^{\kappa(T-T_0)}$$

$$V \approx V_0 e^{\kappa(T-T_0)}$$

dado que $v = \frac{V}{M}$ y $v_0 = \frac{V_0}{M}$

$$\frac{V}{M} \approx \frac{V_0}{M} e^{\kappa(T-T_0)}$$

$$V \approx V_0 e^{\kappa(T-T_0)}$$

$$\frac{V}{V_0} \approx e^{\kappa(T-T_0)}$$

$$\frac{V}{V_0} \approx e^{\kappa(T-T_0) \frac{T_m - T_0}{T_m - T_0}}$$

$$V \approx e^{\kappa(T_m - T_0) \frac{T - T_0}{T_m - T_0}}$$

$$V \approx e^{\kappa(T_m - T_0) \frac{T - T_0 + T_m - T_m}{T_m - T_0}}$$

$$V \approx e^{\kappa(T_m - T_0) \frac{(T_m - T_0) - (T_m - T)}{T_m - T_0}}$$

$$V \approx e^{\kappa(T_m - T_0) \left[\frac{T_m - T_0}{T_m - T_0} - \frac{T_m - T}{T_m - T_0} \right]}$$

Recordando que

$$\theta = \frac{T_m - T}{T_m - T_0} \text{ y de la misma manera: } \theta_0 = \frac{T_m - T_0}{T_m - T_0} = 1,$$

y también definiendo el coeficiente de dilatación térmica adimensional, K, como:

$$K = \kappa(T_m - T_0)$$

Podemos escribir la expresión del volumen termométrico adimensional del fluido en términos de la temperatura adimensional como:

$$v \approx e^{K(\theta_0 - \theta)} = e^{-K(\theta - \theta_0)} = e^{-K(\theta - 1)}$$

Por series de Taylor la función exponencial es:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^j}{j!} + \dots$$

Así queda que:

$$v \approx e^{-K(\theta - \theta_0)} =$$

$$v \approx e^{-K(\theta - \theta_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-K(\theta - \theta_0)]^k}{k!}$$

$$v \approx e^{-K(\theta - \theta_0)} = 1 + [-K(\theta - \theta_0)] + \frac{[-K(\theta - \theta_0)]^2}{2!} + \frac{[-K(\theta - \theta_0)]^3}{3!} + \dots + \frac{[-K(\theta - \theta_0)]^j}{j!} + \dots$$

Ahora si es un buen termómetro el volumen del fluido debe ser proporcional a los cambios de temperatura, es decir solo se toman en cuenta los términos lineales, por tanto si para $k = 0$ y $k = 1$.

$$v \approx e^{-K(\theta - \theta_0)} = 1 + [-K(\theta - \theta_0)] = 1 - K(\theta - \theta_0)$$

$$v \approx 1 - K(\theta - \theta_0)$$

Derivando respecto al tiempo adimensional, τ , con K constante:

$$\frac{d}{d\tau} [v \approx 1 - K(\theta - \theta_0)]$$

$$\frac{dv}{d\tau} \approx -K \frac{d\theta}{d\tau}$$

Pero anteriormente se había encontrado que

$$\frac{dv}{d\tau} = v_{c0} v$$

Igualando $\frac{dv}{d\tau}$ se obtiene

$$-K \frac{d\theta}{d\tau} = v_{c0} v$$

Así:

$$v_{c0} v = -K \frac{d\theta}{d\tau}$$

Que se reemplaza en la ecuación de balance total

$$Bi\theta = -\frac{d\theta}{d\tau} + \omega v_{c0} v$$

Y esta queda:

$$Bi\theta = -\frac{d\theta}{d\tau} + \omega \left(-K \frac{d\theta}{d\tau} \right)$$

$$Bi\theta = -\frac{d\theta}{d\tau} - \omega K \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$Bi\theta = -(1 + K\omega) \frac{d\theta}{d\tau}$$

Balance en la columna del termómetro

Los términos para la Primera Ley de la Termodinámica son:

FLUJO DE CALOR, \dot{Q}

$\dot{Q} = 0$, ya que la columna se considera adiabática

FLUJO DE TRABAJO, \dot{W}

Dado que el volumen de la columna está determinado por:

$$V_c = A_c x_c$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\frac{dV_c}{dt} = A_c \frac{dx_c}{dt} = A_c v_c$$

Donde $v_c = \frac{dx_c}{dt}$

Así el trabajo queda:

$$\dot{W} = \dot{W}_s = -P \frac{dV_c}{dt} = -P A_c \frac{dx_c}{dt} = -P A_c v_c$$

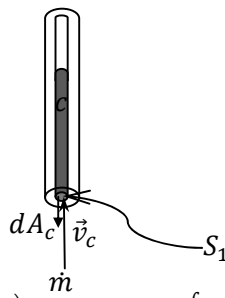
CAMBIOS DE ENERGÍA DEL SISTEMA

Teniendo en cuenta que los cambios de energía potencial y cinética del sistema con el tiempo son nulos porque es un sistema en estado permanente.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \left(u + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \rho dV \approx \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} u \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} u \rho \int_{V_c} dV = \frac{\partial}{\partial t} u \rho V_c = \frac{\partial}{\partial t} u m_c = \frac{\partial}{\partial t} \{ m_c [u_r + c_p (T - T_r)] \}$$

CORRIENTES DE ENTRADA Y/O DE SALIDA

Ahora en la columna hay una corriente de entrada de materia como se muestra en la figura:



$$\int_{S_1} \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{S_1} \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz \right) \rho v_c dA_c \cos \pi \approx - \int_{S_1} (u + Pv) \rho v_c dA_c$$

Como se define la entalpía:

$$h = u + Pv$$

$$\int_{S_1} \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \int_{S_1} h \rho v_c dA_c = -h \rho v_c \int_{S_1} dA_c = -h \rho v_c A_c$$

Por continuidad tenemos:

$$\rho v_c A_c = \dot{m}$$

ahora un balance de masa sobre la columna nos dice:

$$\left(\text{flujo de masa que entra} \right) = \left(\text{flujo de masa que sale} \right) + \left(\text{masa que se acumula} \right)$$

$$\dot{m} = 0 + \frac{dm_c}{dt} = \frac{dm_c}{dt}$$

Entonces la continuidad nos queda:

$$\rho v_c A_c = \dot{m} = \frac{dm_c}{dt}$$

Y entonces el término queda:

$$\int_{S_1} \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = -h \rho v_c A_c = -h \dot{m} = -h \frac{dm_c}{dt} = -[h_r + c_p(T - T_r)] \frac{dm_c}{dt}$$

Donde h_r es la entalpia de referencia.

Así la Primera Ley sobre la columna queda:

$$\begin{aligned} \dot{Q} + \dot{W}_s + \dot{W}_{cortante} &= \frac{d}{dt} \int_{V_c} \left(u + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \rho dV + \int_{S_1} \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} \\ 0 + (-PA_c v_c) &= \frac{d}{dt} \{ m_c [u_r + c_p(T - T_r)] \} - [h_r + c_p(T - T_r)] \frac{dm_c}{dt} \\ -PA_c v_c &= m_c c_p \frac{dT}{dt} + [u_r + c_p(T - T_r)] \frac{dm_c}{dt} - [h_r + c_p(T - T_r)] \frac{dm_c}{dt} \\ -PA_c v_c &= m_c c_p \frac{dT}{dt} + [u_r + c_p(T - T_r)] \frac{dm_c}{dt} - [h_r + c_p(T - T_r)] \frac{dm_c}{dt} \end{aligned}$$

Como es un líquido

$$u_r + c_p(T - T_r) \approx h_r + c_p(T - T_r)$$

Y por tanto

$$\begin{aligned} -PA_c v_c &= m_c c_p \frac{dT}{dt} + 0 \\ -PA_c v_c &= m_c c_p \frac{dT}{dt} \end{aligned}$$

Volviendo adimensional y sabiendo que:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T_m - T_0}{t_m} \frac{d\theta}{d\tau}$$

Y se tiene además: $v_c = \frac{dx_c}{dt}$

Con $l_c = \frac{x_c}{x_{c0}}$ y $\tau = \frac{t}{t_m}$ tenemos que $x_c = x_{c0} l_c$ y $t = t_m \tau$ derivando:

$$\begin{aligned} dx_c &= x_{c0} dl_c \\ dt &= t_m d\tau \end{aligned}$$

Dividiendo:

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{x_{c0}}{t_m} \frac{dl_c}{d\tau}$$

Luego: $v_c = \frac{x_{c0}}{t_m} \frac{dl_c}{d\tau}$

Reemplazando:

$$-PA_c \frac{x_{c0}}{t_m} \frac{dl_c}{d\tau} = m_c c_p \left[-\frac{T_m - T_0}{t_m} \frac{d\theta}{d\tau} \right]$$

Si $\forall_{c0} = A_c x_{c0}$ y dividiendo por $\frac{M c_p (T_m - T_0)}{t_m}$:

$$\frac{P \frac{A_c x_{c0}}{t_m} \frac{dl_c}{d\tau}}{M c_p (T_m - T_0)} = \frac{m_c c_p (T_m - T_0) \frac{d\theta}{d\tau}}{M c_p (T_m - T_0)}$$

$$\frac{P \forall_{c0}}{M c_p (T_m - T_0)} \frac{dl_c}{d\tau} = \frac{m_c c_p (T_m - T_0)}{M c_p (T_m - T_0)} \frac{d\theta}{d\tau}$$

Definiendo

$$U = \frac{M c_p (T_m - T_0)}{t_m}$$

$$U_c = \frac{m_c c_p (T_m - T_0)}{t_m}$$

$$\frac{U_c}{U} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{P \forall_{c0}}{M c_p (T_m - T_0)} \frac{dl_c}{d\tau}$$

Dado que

$$I_c = \frac{U_c}{U} = \frac{\text{velocidad de cambio de energía interna en la columna}}{\text{velocidad de cambio de energía interna total}}$$

$$\omega_c = \frac{P \forall_{c0}}{M c_p (T_m - T_0)} = \frac{\text{flujo de trabajo por cambio de volumen en la columna}}{\text{velocidad de cambio de energía interna total}}$$

Y retomando

$$\frac{dl_c}{d\tau} = v$$

$$I_c \frac{d\theta}{d\tau} = \omega_c v$$

O de otra manera:

$$\frac{U_c}{U} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{P \forall_{c0}}{M c_p (T_m - T_0)} \frac{dl_c}{d\tau}$$

Retomando $v_{c0} = \frac{\forall_{c0}}{\forall_0}$ tal que $\forall_{c0} = v_{c0} \forall_0$

$$I_c \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{P v_{c0} \forall_0}{M c_p (T_m - T_0)} v$$

$$I_c \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{P \forall_0}{M c_p (T_m - T_0)} v_{c0} v$$

con $\omega = \frac{P \forall_0}{M c_p (T_m - T_0)}$

$$I_c \frac{d\theta}{d\tau} = \omega v_{c0} v$$

$$I_c \frac{d\theta}{d\tau} = v_{c0} \omega v$$

Se deduce que:

$$\omega_c = v_{c0}\omega$$

Balance de energía en el bulbo del termómetro

Resolviendo los términos de la 1ª Ley:

FLUJO DE CALOR, \dot{Q}

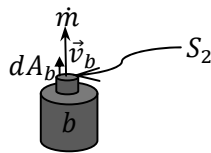
$$\dot{Q} = hA_b(T_m - T)$$

FLUJO DE TRABAJO, \dot{W}

$$\dot{W}_s = W_{\text{constante}} = 0$$

CAMBIOS DE ENERGÍA DEL SISTEMA

Teniendo en cuenta que los cambios de energía potencial y cinética del sistema con el tiempo son nulos porque es un sistema en estado permanente.



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_b} \left(u + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \rho dV \approx \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_b} u \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} u \rho \int_{V_b} dV = \frac{\partial}{\partial t} u \rho V_b = \frac{\partial}{\partial t} u m_b = \frac{\partial}{\partial t} [m_b c_p (T - T_r)]$$

CORRIENTES DE ENTRADA Y/O DE SALIDA

Ahora en la columna hay una corriente de salida de materia como se muestra en la figura:

$$\int_{S_2} \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{S_2} \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz \right) \rho v_b dA_b \cos 0 \approx \int_{S_2} (u + Pv) \rho v_b dA_b$$

$$\int_{S_2} \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_{S_2} h \rho v_b dA_b = h \rho v_b \int_{S_2} dA_b = h \rho v_b A_b$$

Por continuidad:

$$\rho v_b A_b = \rho v_c A_c = \dot{m}$$

ahora un balance de masa sobre el bulbo dice:

$$\left(\begin{array}{c} \text{flujo de masa} \\ \text{que entra} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{flujo de masa} \\ \text{que sale} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{masa que} \\ \text{se acumula} \end{array} \right)$$

$$0 = \dot{m} + \frac{dm_b}{dt}$$

$$\dot{m} = -\frac{dm_b}{dt}$$

Entonces la continuidad queda:

$$\rho v_b A_b = \dot{m} = -\frac{dm_b}{dt}$$

Y entonces el término queda:

$$\int_{S_2} \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz \right) \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = h \rho v_b A_b = h \dot{m} = h \left[-\frac{dm_b}{dt} \right] = -[h_r + c_p(T - T_r)] \frac{dm_b}{dt}$$

Así la Primera Ley sobre la columna queda:

$$\dot{Q} + W_s + W_{\text{cortante}} = \frac{d}{dt} \int_{V_b} \left(u + \frac{1}{2} v^2 + gz \right) \rho dV + \int_{S_2} \left(u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v_s^2 + gz \right) \rho \vec{v}$$

$$hA_b(T_m - T) + 0 = \frac{d}{dt} \{ m_b [u_r + c_p(T - T_r)] \} - [h_r + c_p(T - T_r)] \frac{dm_b}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = m_b c_p \frac{dT}{dt} + [u_r + c_p(T - T_r)] \frac{d}{dt} [m_b] - [h_r + c_p(T - T_r)] \frac{dm_b}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = m_b c_p \frac{dT}{dt} + [u_r + c_p(T - T_r)] \frac{dm_b}{dt} - [h_r + c_p(T - T_r)] \frac{dm_b}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = m_b c_p \frac{dT}{dt} + 0$$

$$hA_b(T_m - T) = m_b c_p \frac{dT}{dt}$$

Volviendo adimensional sabiendo que:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T_m - T_0}{t_m} \frac{d\theta}{d\tau}$$

Reemplazando:

$$hA_b(T_m - T) = m_b c_p \left[-\frac{T_m - T_0}{t_m} \frac{d\theta}{d\tau} \right]$$

$$hA_b(T_m - T) = -m_b c_p \frac{T_m - T_0}{t_m} \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$hA_b \frac{T_m - T}{T_m - T_0} = -\frac{m_b c_p}{t_m} \frac{d\theta}{d\tau}$$

Si $\theta = \frac{T_m - T}{T_m - T_0}$

$$hA_b \theta = -\frac{m_b c_p}{t_m} \frac{d\theta}{d\tau}$$

y dividiendo entre $\frac{m_b c_p (T_m - T_0)}{t_m}$:

$$\frac{hA_b \theta}{M c_p (T_m - T_0) t_m} = \frac{-\frac{m_b c_p d\theta}{t_m}}{M c_p (T_m - T_0) t_m}$$

$$\frac{hA_b t_m \theta}{M c_p} = -\frac{m_b c_p (T_m - T_0)}{M c_p (T_m - T_0) t_m} \frac{d\theta}{d\tau}$$

Si $Bi = \frac{hA_b t_m}{M c_p}$, $U = \frac{M c_p (T_m - T_0)}{t_m}$ y $U_b = \frac{m_b c_p (T_m - T_0)}{t_m}$ tenemos:

$$Bi\theta = -\frac{U_b}{U} \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$I_b = \frac{U_b}{U} = \frac{\text{velocidad de cambio de energía interna en el bulbo}}{\text{velocidad de cambio de energía interna total}}$$

$$-I_b \frac{d\theta}{d\tau} = Bi\theta$$

$$I_b \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta$$

Se tienen las tres ecuaciones de balance

TERMÓMETRO: $Bi\theta = -(1 + K\omega) \frac{d\theta}{d\tau}$

COLUMNA: $I_c \frac{d\theta}{d\tau} = v_{c0} \omega v$

BULBO: $I_b \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta$

Se demuestra que:

BULBO + COLUMNA = TERMOMETRO

COLUMNA: $I_c \frac{d\theta}{d\tau} = v_{c0} \omega v$

BULBO: $I_b \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta$

+

$$I_b \frac{d\theta}{d\tau} + I_c \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta + v_{c0} \omega v$$

$$(I_b + I_c) \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta + v_{c0} \omega v$$

$$\left(\frac{U_b}{U} + \frac{U_c}{U}\right) \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta + \omega v_{c0} v$$

dado que $-K \frac{d\theta}{d\tau} = v_{c0} v$

$$\left(\frac{U_b + U_c}{U}\right) \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta + \omega \left(-K \frac{d\theta}{d\tau}\right)$$

$$\left(\frac{m_b c_p (T_m - T_0) + m_c c_p (T_m - T_0)}{U}\right) \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta - K\omega \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$\left(\frac{m_b c_p (T_m - T_0) + m_c c_p (T_m - T_0)}{U}\right) \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta - K\omega \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$\left(\frac{(m_b + m_c) c_p (T_m - T_0)}{U}\right) \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta - K\omega \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$\left(\frac{M c_p (T_m - T_0)}{U}\right) \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta - K\omega \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$\left(\frac{U}{U}\right) \frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta - K\omega \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -Bi\theta - K\omega \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$Bi\theta = -\frac{d\theta}{d\tau} - K\omega \frac{d\theta}{d\tau}$$

TERMÓMETRO:

$$Bi\theta = -(1 + K\omega) \frac{d\theta}{d\tau}$$

Que corresponde al balance en el termómetro.

Resolviendo la ecuación

$$Bi\theta = -(1 + K\omega) \frac{d\theta}{d\tau}$$

Por separación de variables:

$$-(1 + K\omega) \frac{d\theta}{d\tau} = Bi\theta$$

$$\frac{1}{\theta} d\theta = -\frac{Bi}{1 + K\omega} d\tau$$

Asumiendo Bi , K y ω constantes en el intervalo de operación del termómetro, para integrar teniendo en cuenta las condiciones iniciales: en $\tau = 0$ se tiene $\theta = \theta_0$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\theta} d\theta = -\int_0^{\tau} \frac{Bi}{1 + K\omega} d\tau$$

$$\ln \frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{Bi}{1 + K\omega} \tau$$

Despejando:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-\frac{Bi}{1+K\omega}\tau}$$

Para el mercurio se tiene que para el intervalo de trabajo que

$$K\omega \ll 1$$

Entonces: $1 + K\omega \approx 1$

Así:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-Bi\tau}$$

Transformar en forma dimensional

$$\theta = \frac{T_m - T}{T_m - T_0}, \theta_0 = \frac{T_m - T_0}{T_m - T_0} = 1, Bi = \frac{hA_b t_m}{Mc_p}, \tau = \frac{t}{t_m}$$

$$\frac{T_m - T}{T_m - T_0} = e^{-\frac{hA_b t_m}{Mc_p} \frac{t}{t_m}}$$

$$\frac{T_m - T}{T_m - T_0} = e^{-\frac{hA_b t}{Mc_p}}$$

Despejando, T :

$$T_m - T = (T_m - T_0)e^{-\frac{hA_b t}{Mc_p}}$$

$$-T_m + T = (-T_m + T_0)e^{-\frac{hA_b t}{Mc_p}}$$

Si $T_0 > T_m$:

$$T = (T_0 - T_m)e^{-\frac{hA_b t}{Mc_p}} + T_m$$

Otra manera más simplificada:

Un balance de energía con base de tiempo sobre el sistema cerrado y en estado permanente correspondiente al fluido termométrico:

$$\left(\begin{matrix} \text{flujo de} \\ \text{calor} \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} \text{flujo de} \\ \text{trabajo} \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} \text{cambio de} \\ \text{energía interna} \end{matrix} \right)$$

$$\dot{Q} = \dot{W} + \frac{dU}{dt}$$

Donde:

$$\dot{Q} = hA_b(T_m - T)$$

$$\dot{W} = P \frac{dV}{dt}$$

$$U = Mu = Mc_p(T - T_r)$$

$$hA_b(T_m - T) = P \frac{dV}{dt} + \frac{d}{dt}[Mc_p(T - T_r)]$$

$$hA_b(T_m - T) = P \frac{dV}{dt} + M c_p \frac{dT}{dt}$$

Anteriormente se había establecido que el modelo de dilatación del fluido termométrico se aproximaba a:

$$V \approx V_0 e^{\kappa(T-T_0)}$$

dado el comportamiento lineal del termómetro, se puede realizar aproximar:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^j}{j!} + \dots \approx 1 + x$$

entonces:

$$V \approx V_0 e^{\kappa(T-T_0)} \approx V_0 [1 + \kappa(T - T_0)]$$

Derivando esta expresión respecto al tiempo con κ constante:

$$\frac{dV}{dt} \approx \frac{d}{dt} V_0 [1 + \kappa(T - T_0)] = V_0 \kappa \frac{dT}{dt}$$

Reemplazado en el balance de energía:

$$hA_b(T_m - T) = P \frac{dV}{dt} + M c_p \frac{dT}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = P V_0 \kappa \frac{dT}{dt} + M c_p \frac{dT}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = (P V_0 \kappa + M c_p) \frac{dT}{dt}$$

introduciendo las variables adimensionales:

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{T_m - T_0}{t_m} \frac{d\theta}{d\tau}$$

Se tiene:

$$hA_b(T_m - T) = (P V_0 \kappa + M c_p) \left[- \frac{T_m - T_0}{t_m} \frac{d\theta}{d\tau} \right]$$

$$-hA_b t_m \frac{T_m - T}{T_m - T_0} = (P V_0 \kappa + M c_p) \frac{d\theta}{d\tau}$$

Y dado que

$$\theta = \frac{T_m - T}{T_m - T_0}$$

$$-hA_b t_m \theta = (P V_0 \kappa + M c_p) \frac{d\theta}{d\tau}$$

Dividiendo por $M c_p$:

$$- \frac{hA_b t_m \theta}{M c_p} = \frac{(P V_0 \kappa + M c_p) \frac{d\theta}{d\tau}}{M c_p}$$

$$-\frac{hA_b t_m}{Mc_p} \theta = \left(\frac{P \forall_0 \kappa}{Mc_p} + 1 \right) \frac{d\theta}{d\tau}$$

De acuerdo a los grupos adimensionales:

$$Bi = \frac{hA_b t_m}{Mc_p}$$

$$K = \kappa(T_m - T_0) \text{ de donde } \kappa = \frac{K}{(T_m - T_0)}$$

Así queda:

$$-Bi\theta = \left(\frac{P \forall_0}{Mc_p} \cdot \frac{K}{T_m - T_0} + 1 \right) \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$-Bi\theta = \left(\frac{P \forall_0}{Mc_p (T_m - T_0)} \cdot K + 1 \right) \frac{d\theta}{d\tau}$$

También recordando el grupo adimensional

$$\omega = \frac{P \forall_0}{Mc_p (T_m - T_0)}$$

Queda:

$$-Bi\theta = (\omega K + 1) \frac{d\theta}{d\tau}$$

Que es la misma ecuación obtenida anteriormente de balance general:

$$Bi\theta = -(1 + K\omega) \frac{d\theta}{d\tau}$$

En forma más general:

Se desarrolla el balance anterior hasta este punto:

$$\dot{Q} = W + \frac{dU}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = P \frac{d\forall}{dt} + M \frac{du}{dt}$$

$$hA_b(T_m - T) = P \frac{d\forall}{dt} + M \frac{d}{dt} [c_p(T - T_r)]$$

$$hA_b(T_m - T) = P \frac{d\forall}{dt} + M \frac{d}{dt} (c_p T)$$

despejando h :

$$h = \frac{1}{A_b(T_m - T)} \left[P \frac{d\forall}{dt} + M \frac{d}{dt} (c_p T) \right]$$

$$h = \frac{M}{A_b(T_m - T)} \left[P \frac{d\forall}{dt} + \frac{d}{dt} (c_p T) \right]$$

APENDICE C

CONVECCIÓN LIBRE ALREDEDOR DEL BULBO DEL TERMÓMETRO

I. TERMÓMETRO EN POSICIÓN VERTICAL CON FLUJO TRANSITORIO

Al observar el bulbo del termómetro, en la cual sucede el transporte de calor. Puede verse que el bulbo geoméricamente está compuesto por dos partes el cuerpo del bulbo de forma cilíndrica y el extremo del bulbo con formado por una semiesfera. Para efectos de modelamiento la estrategia es inicialmente simplificar el problema asumiendo algunas restricciones. Y a medida que se plantea el modelo van asumiéndose otras restricciones

Restricción geométrica: Asumir que el bulbo del termómetro es básicamente un cilindro.

Suposiciones:

Flujo transitorio de transporte de calor y de cantidad de movimiento.

Velocidad radial $v_r \rightarrow 0$: No existe desplazamiento lateral de materia. A partir de la observación de fotografías del campo de flujo de velocidad en cilindros calentados, se ve que básicamente el flujo solo tiene componente axial de velocidad.

No existe movimiento angular $v_\theta = 0$.

Gradiente de velocidad axial $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$: Ello en virtud de las pequeñas dimensiones del bulbo, el recorrido que hace el aire en la longitud de bulbo es pequeño.

Gradiente de velocidad radial $\frac{\partial v_z}{\partial t}$: Es el más importante.

Se tienen en cuenta las fuerzas de flotación.

Va a utilizarse el método diferencial.

Al aplicar la Ecuación de c.mov. bajo las restricciones impuestas. El componente axial de la ecuación de cantidad de movimiento se reduce a:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + g\beta(T - T_\infty) = \frac{\partial v_z}{\partial t}$$

Considerando que la velocidad del aire es pequeña alrededor del bulbo, según la literatura para números de Mach menores a 0.3 el gas puede tratarse como fluido incompresible y para efecto en la ecuación de energía se considera propiedades medias constantes tales como la densidad y la viscosidad. Bajo esta restricción y añadiendo la restricción de suponer que no existe gradiente axial de temperatura más las restricciones dadas anteriormente, Al aplicar la ecuación de energía, ésta se reduce a:

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Aquí se puede resolver la ecuación de energía desacoplada de la de cantidad de movimiento y con esta solución bajo la condición inicial y de frontera se procede a resolver la ecuación de movimiento o flujo.

Resolviendo entonces la ecuación

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Bajo las condiciones:

- Inicial:

$$T(R, 0) = T_{w0}$$

- Frontera

$$T(R, t) = T_w$$

Condición en la superficie del bulbo $\dot{Q}_{conducción} = \dot{Q}_{convección}$

$$T(\infty, t) = T_\infty$$

Solución

Por el método de separación de variables planteando una solución de la forma:

$$T(r, t) = W(r)G(t) + c$$

hallando las derivadas parciales respectivas:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = W'(r)G(t)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = W''(r)G(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = W(r)G'(t)$$

Reemplazando en la ecuación de energía:

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\alpha \left[W''(r)G(t) + \frac{1}{r} W'(r)G(t) \right] = W(r)G'(t)$$

Dividiendo entre $W(r)G(t)$:

$$\alpha \left[\frac{W''(r)G(t)}{W(r)G(t)} + \frac{1}{r} \frac{W'(r)G(t)}{W(r)G(t)} \right] = \frac{W(r)G'(t)}{W(r)G(t)}$$

$$\alpha \left[\frac{W''(r)}{W(r)} + \frac{1}{r} \frac{W'(r)}{W(r)} \right] = \frac{G'(t)}{G(t)}$$

$$\alpha \left[\frac{W''(r)}{W(r)} + \frac{1}{r} \frac{W'(r)}{W(r)} \right] = \frac{G'(t)}{G(t)}$$

$$\frac{1}{W(r)} \left[W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) \right] = \frac{1}{\alpha} \frac{G'(t)}{G(t)}$$

Si esto es igual a la constante, $-\lambda^2$:

$$\frac{1}{W(r)} \left[W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) \right] = \frac{1}{\alpha} \frac{G'(t)}{G(t)} = -\lambda^2$$

Se desprenden las dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{G'(t)}{G(t)} = -\lambda^2$$

$$\frac{1}{W(r)} \left[W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) \right] = -\lambda^2$$

Resolviendo cada ecuación independientemente, empezando con la de G :

$$G'(t) = -\alpha\lambda^2 G(t)$$

$$G'(t) + \alpha\lambda^2 G(t) = 0$$

$$\frac{dG}{dt} = -\alpha\lambda^2 G$$

Separando las variables:

$$\frac{dG}{G} = -\alpha\lambda^2 dt$$

Integrando,

$$\int \frac{1}{G} dG = -\alpha\lambda^2 \int dt$$

$$\ln|G| = -\alpha\lambda^2 t + c^*$$

Despejando G :

$$G(t) = c_0 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

ahora se prosigue con la segunda ecuación de W :

$$W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) = -\lambda^2 W(r)$$

$$W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + \lambda^2 W(r) = 0$$

A partir de la sustitución:

$$s = \lambda r$$

se tiene que:

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{s}$$

y también

$$\frac{ds}{dr} = \lambda$$

$$dr = \frac{1}{\lambda} ds$$

con lo cual se cambia de variable independiente en cada uno de los términos de la ecuación:

$$W'(r) = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds} \cdot \frac{ds}{dr} = \frac{dW}{ds} \cdot \lambda = \lambda \frac{dW}{ds} = \lambda W'(s)$$

$$W''(r) = \frac{d^2W}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left[\frac{dW}{dr} \right] = \frac{d}{\frac{1}{\lambda} ds} \left[\lambda \frac{dW}{ds} \right] = \lambda^2 \frac{d}{ds} \left[\frac{dW}{ds} \right] = \lambda^2 \frac{d^2W}{ds^2} = \lambda^2 W''(s)$$

Sustituyendo en la ecuación

$$W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + \lambda^2 W(r) = 0$$

$$\lambda^2 \frac{d^2W}{ds^2} + \frac{1}{r} \lambda \frac{dW}{ds} + \lambda^2 W = 0$$

Dividiendo por λ^2 :

$$\frac{d^2W}{ds^2} + \frac{1}{\lambda r} \frac{dW}{ds} + W = 0$$

$$\frac{d^2W}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dW}{ds} + W = 0$$

La cual es una *ecuación de Bessel* con parámetro, $\nu = 0$, siendo un número real no negativo. La forma estándar de dicha ecuación es [KREYSZING]:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

Si $\nu = n = 0$, cuando toma el valor del entero cero, la ecuación se reduce a:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$$

Que tiene como solución:

$$y(x) = c_1J_0(x) + c_2Y_0(x)$$

Donde

$J_0(x)$ es la función de Bessel de primera clase de orden cero y tiene un valor de:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!^2} x^{2k}$$

y $Y_0(x)$ es la función de Besse de segunda clase de orden cero, que está dada por [KREYSZING]:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[J_0(x) \left(\ln \frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}k!^2} x^{2k} \right]$$

donde γ es la llamada consten de Euler la cual se define como [KREYSZING]:

$$\gamma = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s} - \ln s \right) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\left(\sum_{k=1}^s \frac{1}{k} \right) - \ln s \right] \approx 0.57721566490 \dots$$

Aplicando al caso, la solución de

$$\frac{d^2W}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{dW}{ds} + W = 0$$

es:

$$W(s) = c_1J_0(s) + c_2Y_0(s)$$

Si

$$s = \lambda r$$

entonces:

$$W(r) = c_1J_0(\lambda r) + bY_0(\lambda r)$$

por tanto el perfil espacio-temporal de temperatura:

$$T(r, t) = W(r)G(t) + c$$

$$T(r, t) = [c_1J_0(\lambda r) + c_2Y_0(\lambda r)]c_0e^{-\alpha\lambda^2t} + c$$

$$T(r, t) = [c_0c_1J_0(\lambda r) + c_0c_2Y_0(\lambda r)]e^{-\alpha\lambda^2t} + c$$

Llamando las nuevas constantes como

$$c_0c_1 = A_1 \quad \text{y} \quad c_0c_2 = b$$

queda:

$$T(r, t) = [A_1J_0(\lambda r) + bY_0(\lambda r)]e^{-\alpha\lambda^2t} + c$$

aplicando las condiciones iniciales y de frontera para hallar las constantes A_1 , b y c :

- Espaciales (de frontera):

$$T(\infty, t) = T_\infty$$

$$T(\infty, t) = [A_1J_0(\lambda\infty) + bY_0(\lambda\infty)]e^{-\alpha\lambda^2t} + c = T_\infty$$

$$\begin{aligned}
[A_1 J_0(\infty) + b Y_0(\infty)] e^{-\alpha \lambda^2 t} + c &= T_\infty \\
[A_1 \cdot 0 + b \cdot 0] e^{-\alpha \lambda^2 t} + c &= T_\infty \\
0 \cdot e^{-\alpha \lambda^2 t} + c &= T_\infty \\
\mathbf{c} &= \mathbf{T}_\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(R, t) &= T_w \\
T(R, t) &= [A_1 J_0(\lambda R) + b Y_0(\lambda R)] e^{-\alpha \lambda^2 t} + T_\infty = T_w \\
[A_1 J_0(\lambda R) + b Y_0(\lambda R)] e^{-\alpha \lambda^2 t} &= T_w - T_\infty
\end{aligned}$$

$$-kA \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = hA(T_w - T_\infty) \quad \forall t, t > 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = -\frac{h(T_w - T_\infty)}{k}$$

A partir del perfil:

$$T(r, t) = [A_1 J_0(\lambda r) + b Y_0(\lambda r)] e^{-\alpha \lambda^2 t} + T_\infty$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \{ [A_1 J_0(\lambda r) + b Y_0(\lambda r)] e^{-\alpha \lambda^2 t} + T_\infty \} = [-A_1 \lambda J_1(\lambda r) - b \lambda Y_1(\lambda r)] e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

Para realizar la anterior derivada hay que tener en cuenta que $[ZIL1]: J_0'(x) = -J_1(x)$ y $Y_0'(x) = -Y_1(x)$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = [-A_1 \lambda J_1(\lambda R) - b \lambda Y_1(\lambda R)] e^{-\alpha \lambda^2 t} = -\frac{h(T_w - T_\infty)}{k}$$

$$k[A_1 \lambda J_1(\lambda R) + b \lambda Y_1(\lambda R)] e^{-\alpha \lambda^2 t} = h(T_w - T_\infty)$$

$$k[A_1 \lambda J_1(\lambda R) + b \lambda Y_1(\lambda R)] e^{-\alpha \lambda^2 t} = h[A_1 J_0(\lambda R) + b Y_0(\lambda R)] e^{-\alpha \lambda^2 t}$$

$$k[A_1 \lambda J_1(\lambda R) + b \lambda Y_1(\lambda R)] = h[A_1 J_0(\lambda R) + b Y_0(\lambda R)]$$

$$kA_1 \lambda J_1(\lambda R) + kb \lambda Y_1(\lambda R) = hA_1 J_0(\lambda R) + hb Y_0(\lambda R)$$

$$[hJ_0(\lambda R) - k\lambda J_1(\lambda R)] \mathbf{A}_1 + [hY_0(\lambda R) - k\lambda Y_1(\lambda R)] \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

- Temporales (iniciales):

$$T(R, 0) = T_{w0}$$

$$T(R, 0) = [A_1 J_0(\lambda R) + b Y_0(\lambda R)] e^{-\alpha \lambda^2 \cdot 0} + T_\infty = T_{w0}$$

$$A_1 J_0(\lambda R) + b Y_0(\lambda R) = T_{w0} - T_\infty$$

$$J_0(\lambda R) \mathbf{A}_1 + Y_0(\lambda R) \mathbf{b} = T_{w0} - T_\infty$$

Resolviendo el sistema para hallar \mathbf{A}_1 y \mathbf{b} :

$$\begin{cases}
[hJ_0(\lambda R) - k\lambda J_1(\lambda R)] \mathbf{A}_1 + [hY_0(\lambda R) - k\lambda Y_1(\lambda R)] \mathbf{b} = \mathbf{0} \\
J_0(\lambda R) \mathbf{A}_1 + Y_0(\lambda R) \mathbf{b} = T_{w0} - T_\infty
\end{cases}$$

Por regla de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} hJ_0(\lambda R) - k\lambda J_1(\lambda R) & hY_0(\lambda R) - k\lambda Y_1(\lambda R) \\ J_0(\lambda R) & Y_0(\lambda R) \end{vmatrix} = [hJ_0(\lambda R) - k\lambda J_1(\lambda R)] Y_0(\lambda R) - J_0(\lambda R) [hY_0(\lambda R) - k\lambda Y_1(\lambda R)]$$

$$\Delta = hJ_0(\lambda R)Y_0(\lambda R) - k\lambda J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R) - hJ_0(\lambda R)Y_0(\lambda R) + k\lambda J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) = -k\lambda J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R) + k\lambda J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R)$$

$$\Delta = -k\lambda [J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R) - J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R)]$$

$$\Delta A_1 = \left| \begin{array}{cc} 0 & hY_0(\lambda R) - k\lambda Y_1(\lambda R) \\ T_{w0} - T_\infty & Y_0(\lambda R) \end{array} \right| = -(T_{w0} - T_\infty)[hY_0(\lambda R) - k\lambda Y_1(\lambda R)]$$

$$\Delta b = \left| \begin{array}{cc} hJ_0(\lambda R) - k\lambda J_1(\lambda R) & 0 \\ J_0(\lambda R) & T_{w0} - T_\infty \end{array} \right| = [hJ_0(\lambda R) - k\lambda J_1(\lambda R)](T_{w0} - T_\infty)$$

así el valor de las constantes es

$$A_1 = \frac{\Delta A_1}{\Delta} = \frac{-(T_{w0} - T_\infty)[hY_0(\lambda R) - k\lambda Y_1(\lambda R)]}{-k\lambda [J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R) - J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R)]} = \frac{hY_0(\lambda R) - k\lambda Y_1(\lambda R)}{k\lambda [J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R) - J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R)]} (T_{w0} - T_\infty)$$

$$A_1 = \frac{\frac{h}{k\lambda} Y_0(\lambda R) - Y_1(\lambda R)}{J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R) - J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R)} (T_{w0} - T_\infty)$$

$$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{[hJ_0(\lambda R) - k\lambda J_1(\lambda R)](T_{w0} - T_\infty)}{-k\lambda [J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R) - J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R)]} = \frac{-hJ_0(\lambda R) + k\lambda J_1(\lambda R)}{k\lambda [J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R) + J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R)]} (T_{w0} - T_\infty)$$

$$b = \frac{-\frac{h}{k\lambda} J_0(\lambda R) + J_1(\lambda R)}{J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R) - J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R)} (T_{w0} - T_\infty)$$

Por tanto la solución queda:

$$T(r, t) = T_\infty + e^{-\alpha\lambda^2 t} [A_1 J_0(\lambda r) + b Y_0(\lambda r)]$$

Con

$$A_1 = \frac{Y_1(\lambda R) - \frac{h}{k\lambda} Y_0(\lambda R)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} (T_{w0} - T_\infty)$$

$$b = \frac{\frac{h}{k\lambda} J_0(\lambda R) - J_1(\lambda R)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} (T_{w0} - T_\infty)$$

Sustituyendo las constantes en la ecuación se obtiene:

$$T(r, t) = T_\infty + e^{-\alpha\lambda^2 t} [A_1 J_0(\lambda r) + b Y_0(\lambda r)]$$

$$T(r, t) = T_\infty + e^{-\alpha\lambda^2 t} \left[\frac{Y_1(\lambda R) - \frac{h}{k\lambda} Y_0(\lambda R)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} (T_{w0} - T_\infty) J_0(\lambda r) + \frac{\frac{h}{k\lambda} J_0(\lambda R) - J_1(\lambda R)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} (T_{w0} - T_\infty) Y_0(\lambda r) \right]$$

$$T(r, t) - T_\infty = (T_{w0} - T_\infty) e^{-\alpha\lambda^2 t} \left[\frac{Y_1(\lambda R) - \frac{h}{k\lambda} Y_0(\lambda R)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} J_0(\lambda r) + \frac{\frac{h}{k\lambda} J_0(\lambda R) - J_1(\lambda R)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} Y_0(\lambda r) \right]$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = \frac{e^{-\alpha\lambda^2 t}}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} \left\{ \left[Y_1(\lambda R) - \frac{h}{k\lambda} Y_0(\lambda R) \right] J_0(\lambda r) + \left[\frac{h}{k\lambda} J_0(\lambda R) - J_1(\lambda R) \right] Y_0(\lambda r) \right\}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = \frac{e^{-\alpha\lambda^2 t}}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} \left[J_0(\lambda r)Y_1(\lambda R) - \frac{h}{k\lambda} J_0(\lambda r)Y_0(\lambda R) + \frac{h}{k\lambda} J_0(\lambda R)Y_0(\lambda r) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda r) \right]$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = \frac{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) + \frac{h}{k\lambda} [J_0(\lambda R)Y_0(\lambda R) - J_0(\lambda R)Y_0(\lambda R)] - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

En $r = R$ (superficie del bulbo) la evolución en el tiempo es

$$\frac{T(R, t) - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = \frac{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) + \frac{h}{k\lambda} [J_0(\lambda R)Y_0(\lambda R) - J_0(\lambda R)Y_0(\lambda R)] - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{T(R, t) - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = \frac{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) + \frac{h}{k\lambda} [J_0(\lambda R)Y_0(\lambda R) - J_0(\lambda R)Y_0(\lambda R)] - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$\frac{T(R, t) - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = \frac{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

Si $T(R, t) = T_R = T_w$

$$\frac{T_w - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

o en su forma logarítmica:

$$\ln \frac{T_w - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = -\alpha\lambda^2 t$$

o despejando

$$T_w = (T_{w0} - T_\infty)e^{-\alpha\lambda^2 t} + T_\infty$$

La ecuación anterior, representa la evolución en el tiempo de la temperatura en la superficie del bulbo, obtenida a partir del perfil de temperatura del fluido que rodea al bulbo. Ecuación que tiene la misma forma exponencial de la evolución de temperatura que se obtiene más adelante (en *Fluido Termométrico*) dentro del bulbo:

$$\ln \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = -\frac{hA_b}{Mc_p} t$$

Despreciando la resistencia de pared $T_w \approx T$, y $T_{w0} \approx T_0$ y por comparación:

$$\ln \frac{T_w - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} \approx \ln \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

$$-\alpha\lambda^2 t = -\frac{hA_b}{Mc_p} t$$

$$\alpha\lambda^2 = \frac{hA_b}{\rho V c_p} \cdot \frac{k}{k}$$

$$\alpha\lambda^2 = \frac{k}{\rho c_p} \frac{h}{k} \frac{1}{L_c} \frac{L_c}{L_c}$$

$$\alpha\lambda^2 = \frac{k}{\rho c_p} \frac{h L_c}{k} \frac{1}{L_c^2}$$

$$\alpha\lambda^2 = \alpha' Bi \frac{1}{L_c^2}$$

Donde α' es la difusividad térmica del fluido termométrico. No olvidar que:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$$

Retomando:

$$\lambda^2 = \frac{\alpha' Bi}{\alpha L_c^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha' Bi}{L_c^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{Fo}{t} \cdot Bi = Bi Fo \frac{1}{\alpha t}$$

donde el número de Fourier, Fo , está dado por:

$$Fo = \frac{\alpha' t}{L_c^2}$$

despreciando la resistencia de pared la constante λ tiene el valor de:

$$\lambda = \sqrt{\frac{h}{\alpha \rho L_c c_p}} = \sqrt{\frac{\alpha' Bi}{\alpha L_c^2}} = \frac{1}{L_c} \sqrt{\frac{\alpha' Bi}{\alpha L_c^2}} = \sqrt{\frac{Bi Fo}{\alpha t}}$$

considerando la resistencia de la pared:

$$\dot{Q}_{conducción} = \dot{Q}_{convección}$$

$$\frac{T - T_w}{R_w} = hA(T_w - T_\infty) = \frac{T - T_\infty}{R_w + \frac{1}{hA}}$$

Los perfiles arrojados:

$$\ln \frac{T_w - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = -\alpha\lambda^2 t$$

$$\ln \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = -\frac{h^* A_b}{Mc_p} t$$

Donde h^* es un coeficiente global de transferencia de calor (en realidad U), ya que tiene incluida la resistencia de pared:

$$T_w - T_\infty = \frac{T - T_\infty}{R_w + \frac{1}{hA}}$$

Igualmente:

$$T_{w0} - T_\infty = \frac{T_0 - T_\infty}{R_{w0} + \frac{1}{h_0 A}}$$

Reemplazando:

$$\ln \frac{T_w - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = \ln \frac{\frac{T - T_\infty}{R_w + \frac{1}{hA}}}{\frac{T_0 - T_\infty}{R_{w0} + \frac{1}{h_0A}}} = \ln \frac{T_0 - T_\infty}{T - T_\infty} \frac{R_{w0} + \frac{1}{h_0A}}{R_w + \frac{1}{hA}} = \ln \frac{T_0 - T_\infty}{T - T_\infty} + \ln \frac{R_{w0} + \frac{1}{h_0A}}{R_w + \frac{1}{hA}}$$

Ahora si se considera que $R_w \approx R_{w0}$:

$$\ln \frac{T_w - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = \ln \frac{T_0 - T_\infty}{T - T_\infty} + \ln \frac{R_{w0} + \frac{1}{h_0A}}{R_w + \frac{1}{hA}}$$

$$-\alpha \lambda^2 t = -\frac{h^* A_b}{Mc_p} t + \ln \frac{R_{w0} + \frac{1}{h_0A}}{R_w + \frac{1}{hA}}$$

Despejando:

$$\lambda^2 = \frac{h^* A_b}{\alpha M c_p} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{R_{w0} + \frac{1}{h_0A}}{R_w + \frac{1}{hA}}$$

Dado que se tiene:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_T}$$

Por definición de Fourier del coeficiente global:

$$\dot{Q} = UA \Delta T$$

Este coeficiente U sería el coeficiente h^* ,

Igualando:

$$\frac{\Delta T}{R_T} = UA \Delta T$$

De donde

$$R_T = \frac{1}{UA} = \frac{1}{h^* A}$$

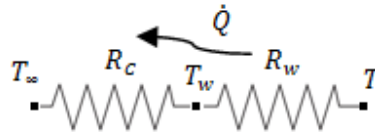
Despejando h^* :

$$h^* = \frac{1}{R_T A}$$

Ahora como:

$$\Delta T = T - T_\infty$$

Las resistencias presentes entre estas dos temperaturas:



$$R_T = R_w + R_C = R_w + \frac{1}{hA}$$

no olvidar que la resistencia de pared, R_w , es conductiva en un cilindro hueco:

$$R_w = \frac{1}{2\pi kL} \ln \frac{D_{ext}}{D_{int}}$$

luego el coeficiente global será:

$$h^* = \frac{1}{R_T A} = \frac{1}{A \left(R_w + \frac{1}{hA} \right)} = \frac{1}{AR_w + \frac{1}{h}}$$

también:

$$\frac{1}{h^* A} = R_T = R_w + \frac{1}{hA}$$

o también despejando h :

$$\frac{1}{hA} = \frac{1}{h^* A} - R_w$$

$$h = \frac{1}{\frac{1}{h^*} - AR_w}$$

así:

$$\dot{Q}_{conducción} = \dot{Q}_{convección}$$

$$\frac{1}{h^* A} = \frac{1}{hA} + R_w$$

se puede reescribir:

$$\lambda^2 = \frac{h^* A_b}{\alpha M c_p} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{R_{w0} + \frac{1}{h_0 A}}{R_w + \frac{1}{hA}}$$

$$\lambda^2 = \frac{h^* A_b}{\alpha M c_p} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{\frac{1}{h_0^* A}}{\frac{1}{h^* A}} = \frac{h^* A_b}{\alpha M c_p} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*}$$

$$\lambda^2 = \frac{h^* A_b}{\alpha M c_p} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*} = \frac{h^*}{\alpha \rho L c_p} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*} = \frac{\alpha' Bi}{\alpha L_c^2} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*} = \frac{BiFo}{\alpha t} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*} = \frac{1}{\alpha t} \left[BiFo - \ln \frac{h^*}{h_0^*} \right]$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^*}{\alpha \rho L c_p} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*}} = \sqrt{\frac{\alpha' Bi}{\alpha L_c^2} - \frac{1}{\alpha t} \ln \frac{h^*}{h_0^*}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha t} \left[BiFo - \ln \frac{h^*}{h_0^*} \right]}$$

Se observa que si $h^* = h_0^*$, se obtiene:

$$\lambda = \sqrt{\frac{BiFo}{\alpha t}}$$

Esto puede suceder si se desprecia R_w ante $\frac{1}{hA}$ y $\frac{1}{h_0A}$ y si además $h = h_0$.

La constante λ surge durante el proceso de solución de la ecuación de energía, y ésta depende de la velocidad del fluido, como se observara al sustituir el perfil de temperatura en la ecuación de cantidad de movimiento. El parámetro λ puede obtenerse de los datos experimentales de temperatura en el bulbo y por mínimos cuadrados por la ecuación de la evolución de la temperatura.

De los datos de temperatura del termómetro puede determinarse λ y conocido λ se tiene el perfil de temperaturas con el cual se resuelve la ecuación de cantidad de movimiento para determinar el perfil de velocidad:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + g\beta(T - T_\infty)$$

Condición inicial $t = 0 \quad v_z = v_i$

Condición en la superficie $r = R \quad v_z = 0$

Retomando el perfil de temperatura:

$$\frac{T - T_\infty}{T_{w0} - T_\infty} = \frac{J_0(\lambda r)Y_1(\lambda R) + \frac{h}{k\lambda} [J_0(\lambda R)Y_0(\lambda r) - J_0(\lambda r)Y_0(\lambda R)] - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda r)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$$T - T_\infty = \frac{J_0(\lambda r)Y_1(\lambda R) + \frac{h}{k\lambda} [J_0(\lambda R)Y_0(\lambda r) - J_0(\lambda r)Y_0(\lambda R)] - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda r)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} (T_{w0} - T_\infty) e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

El parámetro λ queda vinculado a la velocidad cuando la solución anterior se reemplaza en la ecuación de cantidad de movimiento $\lambda = f(\bar{v}_z)$.

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{J_0(\lambda r)Y_1(\lambda R) + \frac{h}{k\lambda} [J_0(\lambda R)Y_0(\lambda r) - J_0(\lambda r)Y_0(\lambda R)] - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda r)}{J_0(\lambda R)Y_1(\lambda R) - J_1(\lambda R)Y_0(\lambda R)} g\beta(T_{w0} - T_\infty) e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

La solución de esta ecuación permite relacionar la velocidad con el parámetro λ .

Aplicando la condición en $r = \delta$, $T = T_\infty$ al perfil de temperatura se obtiene:

$$[J_0(\lambda R)Y_0(\lambda\delta) - J_0(\lambda\delta)Y_0(\lambda R)] \frac{Nu}{\lambda D} = J_1(\lambda R)Y_0(\lambda\delta) - J_0(\lambda\delta)Y_1(\lambda R)$$

Finalmente el Nusselt para todo el sistema es:

$$Nu = \frac{\begin{vmatrix} J_1(\lambda R) & Y_1(\lambda R) \\ J_0(\lambda\delta) & Y_0(\lambda\delta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_0(\lambda R) & Y_0(\lambda R) \\ J_0(\lambda\delta) & Y_0(\lambda\delta) \end{vmatrix}} \lambda D$$

Obsérvese que así el perfil de temperatura varia en el tiempo, la solución produce un solo número de Nusselt para el sistema que no depende del tiempo, si el parámetro λ no depende del tiempo, lo que implica que la resistencia de pared es despreciable y que el coeficiente de transferencia de calor por convección es constante a través del tiempo, lo que en realidad no sucede, pero que es salvable en la medida de que se podría asumir el valor promedio como constante. Como no se conoce el espesor de la capa límite, δ , y dado que se obtuvo experimentalmente un valor de Nu y de λ tanto instantáneo como promedio, con estos resultados y a través de la ecuación anterior es posible encontrar dicho espesor tanto instantáneo como promedio.

II. TERMÓMETRO EN POSICIÓN VERTICAL CON FLUJO CUASISTACIONARIO

Durante los experimentos se observó que la temperatura en la escala del termómetro a partir de terminado instante varía muy lentamente. Definiendo una escala de tiempo adecuada puede considerarse en este intervalo de tiempo que la derivada de la temperatura y velocidad con respecto al tiempo no cambian apreciablemente y el problema puede tratarse como en estado estacionario $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$. Manteniendo las restricciones del modelo anterior más la consideración de Estado estacionario las ecuaciones de cantidad de movimiento y de energía se reducen a:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{g\beta(T - T_\infty)}{\nu}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

Las condiciones para la ecuación de energía son

$$\text{En } r = R \rightarrow T = T_R = T_w$$

$$\rightarrow \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = 0$$

Considerando que $T(r, z) = T(r)$, para que esta ecuación de energía sea diferencial ordinaria y multiplicando dicha ecuación por r^2 :

$$r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + r \frac{dT}{dr} = 0$$

Lo cual es una ecuación de Cauchy-Euler [ZILL] de la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 0$$

Cuya solución está dada de la forma

$$y = x^m$$

Aplicando a la ecuación de energía, la solución tendrá la forma:

$$T = r^m$$

Derivando

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dr} &= m r^{m-1} \\ \frac{d^2 T}{dr^2} &= m(m-1)r^{m-2} \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación de energía:

$$r^2[m(m-1)r^{m-2}] + r(mr^{m-1}) = 0$$

$$(m^2 - m)r^m + mr^m = 0$$

$$\begin{aligned}(m^2 - m + m)r^m &= 0 \\ m^2 &= 0 \\ m &= 0\end{aligned}$$

de orden de multiplicidad 2.

Luego la solución es de la forma:

$$\begin{aligned}T &= c_1 r^m + c_2 r^m \ln(r) \\ T &= c_1 r^0 + c_2 r^0 \ln(r) \\ T &= c_1 + c_2 \ln(r)\end{aligned}$$

Bajo las condiciones de frontera:

En $r = R \rightarrow T = T_R = T_w$:

$$T_w = c_1 + c_2 \ln(R)$$

En $r = R \rightarrow \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$

$$\begin{aligned}T &= c_1 + c_2 \ln(r) \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{c_2}{r} \\ \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R &= \frac{c_2}{R}\end{aligned}$$

Despejando c_2 :

$$c_2 = R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

Luego para c_1 :

$$c_1 = T_w - c_2 \ln(R) = T_w - R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \ln(R)$$

Reemplazando en el perfil:

$$\begin{aligned}T &= c_1 + c_2 \ln(r) \\ T &= T_w - R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \ln(R) + R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \ln(r) \\ T &= T_w - R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R [\ln(R) - \ln(r)] \\ T &= T_w - R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \ln \frac{R}{r}\end{aligned}$$

La solución de la ecuación de energía bajo estas condiciones es también de la forma:

$$T = T_w + R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \ln \frac{r}{R}$$

De la segunda condición se puede definir el número de Nusselt, definiendo como longitud característica el diámetro del bulbo del termómetro, aunque se está en libertad de elegir la longitud del cilindro como longitud característica.

$$Nu_D = - \frac{D}{T_w - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

Se procede a sustituir el perfil de temperatura obtenido en la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{g\beta(T - T_\infty)}{\nu}$$

Para obtener:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{g\beta}{\nu} \left(T_w + R \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \ln \frac{r}{R} - T_\infty \right)$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{g\beta}{\nu} \left(a + bR \ln \frac{r}{R} \right)$$

Donde a y b son:

$$a = T_w - T_\infty$$

$$b = \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

Condiciones límite:

$$\text{En } r = R \rightarrow v_z = 0$$

$$\text{En } r = \delta \rightarrow v_z = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$$

Solucionando la ecuación de c.mov junto con las condiciones límite

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{g\beta}{\nu} \left(a + bR \ln \frac{r}{R} \right)$$

Es también una ecuación no homogénea de Cauchy-Euler análoga a la de energía. Por lo tanto la solución de la homogénea:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$$

es la función complementaria:

$$v_{z_c} = c_1 + c_2 \ln(r)$$

Ahora se encuentra la particular por variación de parámetros [ZILL]:

$$v_{z_p} = u_1 v_{z_1} + u_2 v_{z_2}$$

Donde

$$v_{z_1} = 1$$

$$v_{z_2} = \ln(r)$$

Aplicando el Wronskiano W y los determinantes W_1 y W_2 para determinar los parámetros u_1 y u_2 . Se conoce que la función no complementaria es:

$$f(r) = -\frac{g\beta}{\nu} \left(a + bR \ln \frac{r}{R} \right)$$

Así

$$W = \begin{vmatrix} v_{z_1} & v_{z_2} \\ v_{z_1}' & v_{z_2}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \text{Ln}(r) \\ 0 & \frac{1}{r} \end{vmatrix} = \frac{1}{r}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & v_{z_2} \\ f(r) & v_{z_2}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \text{Ln}(r) \\ -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) & \frac{1}{r} \end{vmatrix} = -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) \text{Ln}(r)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} v_{z_1} & 0 \\ v_{z_1}' & f(r) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) \end{vmatrix} = -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right)$$

De esta manera:

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) \text{Ln}(r)}{\frac{1}{r}} = -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) r \text{Ln}(r)$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{-\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right)}{\frac{1}{r}} = -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) r$$

Encontrando

$$u_1 = \int -\frac{g\beta}{v} \left(a + bR \text{Ln} \frac{r}{R} \right) r \text{Ln}(r) dr = -\frac{g\beta}{v} \int \left(a + bR \text{Ln} r - bR \text{Ln} R \right) r \text{Ln} r dr$$

$$u_1 = -\frac{g\beta}{v} \int \left[\left(a - bR \text{Ln} R \right) r \text{Ln} r + bR r \text{Ln}^2 r \right] dr$$

$$u_1 = -\frac{g\beta(a - bR \text{Ln} R)}{v} \int r \text{Ln} r dr - \frac{g\beta b R}{v} \int r \text{Ln}^2 r dr$$

Integrando por partes:

$$\int r \text{Ln} r dr = \int (\text{Ln} r) r dr = \frac{1}{2} r^2 \text{Ln} r - \int \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2} r^2 \text{Ln} r - \frac{1}{2} \int r dr = \frac{1}{2} r^2 \text{Ln} r - \frac{1}{4} r^2 + c$$

$$u = \text{Ln} r \rightarrow du = \frac{1}{r} dr$$

$$dv = r dr \rightarrow v = \frac{1}{2} r^2$$

$$\int r \text{Ln}^2 r dr = \int (\text{Ln}^2 r) r dr = \frac{1}{2} r^2 \text{Ln}^2 r - \int \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{2}{r} \text{Ln} r dr = \frac{1}{2} r^2 \text{Ln}^2 r - \int r \text{Ln} r dr$$

$$u = \text{Ln}^2 r \rightarrow du = \frac{2}{r} \text{Ln} r dr$$

$$dv = r dr \rightarrow v = \frac{1}{2} r^2$$

$$\int r \text{Ln}^2 r dr = \frac{1}{2} r^2 \text{Ln}^2 r - \left(\frac{1}{2} r^2 \text{Ln} r - \frac{1}{4} r^2 \right) + c = \frac{1}{2} r^2 \text{Ln}^2 r - \frac{1}{2} r^2 \text{Ln} r + \frac{1}{4} r^2 + c$$

retomando:

$$u_1 = -\frac{g\beta(a - bR \text{Ln} R)}{v} \int r \text{Ln} r dr - \frac{g\beta b R}{v} \int r \text{Ln}^2 r dr$$

$$u_1 = -\frac{g\beta(a - bR \text{Ln} R)}{v} \left(\frac{1}{2} r^2 \text{Ln} r - \frac{1}{4} r^2 \right) - \frac{g\beta b R}{v} \left(\frac{1}{2} r^2 \text{Ln}^2 r - \frac{1}{2} r^2 \text{Ln} r + \frac{1}{4} r^2 \right)$$

$$u_1 = -\frac{g\beta b R}{v} \frac{1}{2} r^2 \text{Ln}^2 r - \left[\frac{g\beta(a - bR \text{Ln} R)}{v} - \frac{g\beta b R}{v} \right] \frac{1}{2} r^2 \text{Ln} r + \frac{g\beta}{v} [(a - bR \text{Ln} R) - bR] \frac{1}{4} r^2$$

$$u_1(r) = -\frac{1}{2} \frac{g\beta bR}{\nu} r^2 L n^2 r - \frac{1}{2} \frac{g\beta}{\nu} [a - bR(LnR + 1)] r^2 Lnr + \frac{1}{4} \frac{g\beta}{\nu} [[a - bR(LnR + 1)]] r^2$$

De la misma forma para u_2 :

$$\begin{aligned} u_2 &= \int -\frac{g\beta}{\nu} \left(a + bRLn\frac{r}{R} \right) r dr = -\frac{g\beta}{\nu} \int (a + bRLnr - bRLnR) r dr \\ u_2 &= -\frac{g\beta}{\nu} \int [(a - bRLnR)r + bRrLnr] dr = -\frac{g\beta(a - bRLnR)}{\nu} \int r dr - \frac{g\beta bR}{\nu} \int rLnr dr \\ u_2(r) &= -\frac{1}{2} \frac{g\beta(a - bRLnR)}{\nu} r^2 - \frac{g\beta bR}{\nu} \left(\frac{1}{2} r^2 Lnr - \frac{1}{4} r^2 \right) \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} v_{z_p} &= u_1 v_{z_1} + u_2 v_{z_2} \\ v_{z_p} &= u_1 + u_2 Ln(r) \\ v_{z_p} &= -\frac{1}{2} \frac{g\beta bR}{\nu} r^2 L n^2 r - \frac{1}{2} \frac{g\beta}{\nu} [a - bR(LnR + 1)] r^2 Lnr + \frac{1}{4} \frac{g\beta}{\nu} [[a - bR(LnR + 1)]] r^2 \\ &\quad - \left[\frac{1}{2} \frac{g\beta(a - bRLnR)}{\nu} r^2 + \frac{g\beta bR}{\nu} \left(\frac{1}{2} r^2 Lnr - \frac{1}{4} r^2 \right) \right] Ln(r) \\ v_{z_p} &= -\frac{1}{2} \frac{g\beta bR}{\nu} r^2 L n^2 r - \frac{1}{2} \frac{g\beta}{\nu} [a - bR(LnR + 1)] r^2 Lnr + \frac{1}{4} \frac{g\beta}{\nu} [[a - bR(LnR + 1)]] r^2 - \frac{1}{2} \frac{g\beta(a - bRLnR)}{\nu} r^2 Lnr \\ &\quad - \frac{g\beta bR}{\nu} \left(\frac{1}{2} r^2 L n^2 r - \frac{1}{4} r^2 Lnr \right) \\ v_{z_p} &= -\frac{1}{4} \frac{g\beta bR}{\nu} r^2 L n^2 r - \frac{1}{2} \frac{g\beta}{\nu} [a - bR(LnR + 1) - (a - bRLnR)] r^2 Lnr + \frac{1}{4} \frac{g\beta}{\nu} [[a - bR(LnR + 1)]] r^2 + \frac{1}{4} \frac{g\beta bR}{\nu} r^2 Lnr \\ v_{z_p} &= -\frac{1}{4} \frac{g\beta bR}{\nu} r^2 L n^2 r + \frac{3}{4} \frac{g\beta bR}{\nu} r^2 Lnr + \frac{1}{4} \frac{g\beta}{\nu} [[a - bR(LnR + 1)]] r^2 \end{aligned}$$

Por tanto el perfil general de velocidad esta dado por:

$$v_z = v_{z_c} + v_{z_p} = c_1 + c_2 Ln(r) - \frac{1}{4} \frac{g\beta bR}{\nu} r^2 L n^2 r + \frac{3}{4} \frac{g\beta bR}{\nu} r^2 Lnr + \frac{1}{4} \frac{g\beta}{\nu} [[a - bR(LnR + 1)]] r^2$$

Ajustando a las condiciones de frontera:

$$v_z = \frac{g\beta}{4\nu} \left\{ (a - bR)(R^2 - r^2) + \left[2\delta^2 \left(a + bRLn\frac{\delta}{R} \right) + \frac{1}{2} \delta^2 - bR(\delta^2 + r^2) \right] Ln\left(\frac{r}{R}\right) \right\}$$

Obsérvese que si se utiliza la ecuación del perfil de temperaturas conociendo b (el gradiente de temperatura en la superficie del bulbo) entonces quedaría determinado el número de Nusselt. Esta constante puede determinarse al aplicar la condición en $r = \delta \rightarrow v_z = 0$ en la ecuación del perfil de velocidad pues se obtiene el gradiente de temperatura en la superficie del bulbo, es decir b .

Realizando lo anterior se obtiene, b , al ajustar la condición de $r = \delta \rightarrow v_z = 0$ en el perfil de velocidad:

$$b = \frac{-\frac{1}{2}(T_w - T_\infty) \left[\delta^2 Ln\frac{\delta}{R} + \frac{1}{2}(R^2 - \delta^2) \right]}{R \left[\delta^2 Ln\frac{\delta}{R} \left(Ln\frac{\delta}{R} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4}(R^2 - \delta^2) \right]}$$

El recordar que $b = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R$ y sustituirlo en la ecuación del perfil de temperatura, permite obtener finalmente el número de Nusselt:

$$Nu = \left| 2 \frac{\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \left(1 - 2Ln \frac{\delta}{R}\right) - 1}{\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \left[1 - 2Ln \frac{\delta}{R} \left(1 - Ln \frac{\delta}{R}\right)\right] - 1} \right|$$

Nota: las dos barras indican valor absoluto.

Es decir que Nusselt depende solo del espesor de la capa límite térmica.

III. TERMÓMETRO EN POSICIÓN HORIZONTAL CON FLUJO CUASISTACIONARIO

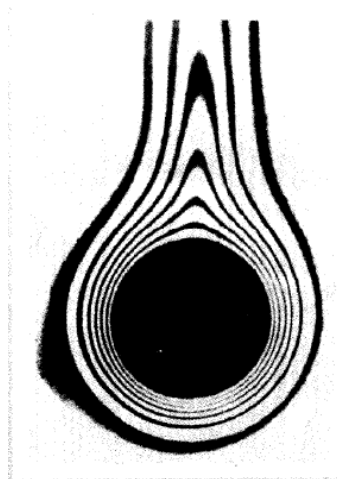
Para plantear el modelo correspondiente al cilindro horizontal, es necesario considerar que este problema es más complejo que el de convección en cilindro vertical, dado que en este caso, la fuerza de flotación al trabajar el problema en coordenadas cilíndricas no tiene una sola componente sino, tiene dos componentes (la angular y la radial). Pese a que en coordenadas rectangulares la fuerza de flotación tiene una componente, el problema se planteará en coordenadas cilíndricas pues al trabajarlo en coordenadas rectangulares el problema es más difícil de plantear, y sobre todo de resolver.

Inicialmente se asumen las siguientes restricciones:

En coordenadas cilíndricas se tiene el vector velocidad:

$$\vec{v} = v_r e_r + v_\theta e_\theta + v_z e_z$$

Al observar en el interferograma de la visualización de las líneas de corriente del fluido en convección libre alrededor de un cilindro horizontal se considera que cerca a la superficie del bulbo (dentro de la capa límite) el movimiento es principalmente angular pues el flujo tiende a seguir el contorno del cilindro; despreciando por ello las componentes radial y axial de velocidad ante la angular, y por ello $v_r = v_z = 0$, para que el vector velocidad se reduzca a: $\vec{v} = v_\theta e_\theta$



Interferograma de cilindro enfriándose por convección natural [HOLMAN]

la fuerza de flotación por metro cúbico es

$$\vec{F}_E = \rho g \beta (T - T_\infty) \cos \theta e_r + \rho g \beta (T - T_\infty) \sin \theta e_\theta + 0 e_z$$

Caso de gradiente angular de temperatura constante

Al aplicar la ecuación de cantidad de movimiento expuestas en el numeral 2.1.1 se obtiene:

Componente radial:

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} +$$

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + g\beta(T - T_\infty) \cos \theta$$

Componente angular:

$$\rho \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right]$$

$$\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right] + g\beta(T - T_\infty) \sin \theta$$

Considerando gradiente angular de temperatura constante e ignorando la generación de calor por fricción viscosa y propiedades constantes bajo el supuesto de flujo incompresible (que es válida si el Número de Mach es <0.3), la ecuación de energía expuesta anteriormente conduce a:

$$\rho C_v \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]$$

$$\frac{v_\theta}{r} \Lambda = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Donde Λ = Gradiente de temperatura angular

Combinando las componentes angular y radial de cantidad de movimiento y utilizando la ecuación de energía, se obtiene la ecuación:

$$2\nu \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - r v_\theta^2 - \nu v_\theta \cot \theta = 0$$

Condiciones en $r = R$ $v_\theta = 0$ y en $\theta = 0$ $v_\theta = 0$

Al Solucionar la ecuación anterior, en serie de potencias la distribución de velocidad angular tiene la forma:

$$v_\theta = v_{max} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right] \sqrt{\theta}$$

Combinando la ecuación de energía con el perfil anterior de velocidad, se obtiene

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{v_{max} \Lambda}{\alpha} \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{R^2} \right) \sqrt{\theta}$$

Bajo las condiciones límite en la superficie del bulbo

$$\text{En } r = R \quad T = T_w$$

$$\text{En } r = \delta \quad T = T_\infty$$

Solucionando y forzando condiciones límite se obtiene el perfil de temperatura

$$\frac{T - T_w}{T_w - T_\infty} \text{Ln} \frac{\delta}{R} + \text{Ln} \frac{r}{R} - \frac{v_{max} \Lambda}{\alpha(T_w - T_\infty)} \left\{ \left(\begin{array}{l} \phi(r) \quad \text{Ln} \frac{r}{R} \\ \varphi(r) \quad \text{Ln} \frac{\delta}{R} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{l} r \quad \text{Ln} \frac{r}{R} \\ \delta \quad \text{Ln} \frac{\delta}{R} \end{array} \right) + \frac{8}{9} R \right\} \sqrt{\theta} = 0$$

donde

$$\phi(r) = \frac{r^3}{9R^2}$$

$$\varphi(r) = \frac{\delta^3}{9R^2}$$

Al derivar el perfil de temperatura y evaluarlo en $r = R$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R = \frac{v_{max} \Lambda}{\alpha(T_w - T_\infty)} \left(\frac{\delta}{R} - \frac{2}{3} \text{Ln} \frac{\delta}{R} - 1 \right) \sqrt{\theta} - \frac{1}{R}$$

Al utilizar este resultado en la ecuación

$$Nu_D = - \frac{D}{T_w - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R$$

se obtiene

$$\frac{D}{T_w - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \text{Ln} \frac{\delta}{R} = 2 - \frac{Ra Re}{Gr} Nu_\theta \sqrt{\theta} \left(\frac{\delta}{R} - \frac{2}{3} \text{Ln} \frac{\delta}{R} - 1 \right)$$

Donde Nu_D : Numero de Nusselt basado en el gradiente radial de temperatura y

$$Nu_\theta = \frac{\Lambda}{T_w - T_\infty}$$

es el Numero de Nusselt basado en el gradiente angular de temperatura.

Como una aproximación podría considerarse $Nu_D \approx Nu_\theta$, lo cual conduce a:

$$\frac{D}{T_w - T_\infty} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_R \text{Ln} \frac{\delta}{R} = 2 - \frac{Ra Re}{Gr} Nu_\theta \sqrt{\theta} \left(\frac{\delta}{R} - \frac{2}{3} \text{Ln} \frac{\delta}{R} - 1 \right)$$

Pero $Ra = Gr Pr$

$$Nu_D = \frac{2}{\text{Ln} \frac{\delta}{R} + Pr Re \left(\frac{\delta}{R} - \frac{2}{3} \text{Ln} \frac{\delta}{R} - 1 \right) \sqrt{\theta}}$$

Caso sin gradiente angular de temperatura

El caso anterior consideró gradiente angular constante de temperatura $\frac{\partial T}{\partial \theta} = \Delta$. Si ahora se considera la temperatura angular constante, es decir el gradiente angular de temperatura igual a cero. Al repetir todo el procedimiento anterior, El número de Nusselt es

$$Nu_D = \frac{2}{\ln \frac{\delta}{R}}$$

APÉNDICE D DATOS Y CALCULOS EXPERIMENTALES

I. EXPERIMENTO V-1

| Constante de tiempo | | |
|-----------------------------|-----------|-------------------|
| $T_{\infty} =$ | 20.5 °C | $n =$ 1332 |
| $T_{\infty} - T_{\infty} =$ | 9.525 °C | |
| $T(\tau) =$ | 34.004 °C | |
| $\Delta t =$ | 0.25 s | $\tau =$ 333.00 s |

| i | t_i , s | T_i , °C | DERIVACION E INTEGRACION NUMÉRICA | | | | | | | REGRESION CON MINIMOS CUADRADOS | | | | | | | T_{wasa} | |
|------|-----------|------------|-------------------------------------|----------------------------|----------|----------------|---------------------------|----|---------|---|---|---------|-------------|------------|-----------|-----------|------------|---------|
| | | | dT/dt | ρ , kg/m ³ | M, kg | C_p , J/kg K | h , W/m ² °C | ci | hici | d^2h/dt^2 | $B = (T_i - T_{\infty}) / (T_i - T_{\infty})$ | $\ln B$ | $Z = \ln B$ | $Y = \tau$ | YZ | Y^2 | | Z^2 |
| 0 | 0.00 | 30.025 | -0.01000 | 13555.07 | 0.010769 | 139.05 | 1.4306 | 1 | 1.4306 | -1704.2 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 30.025 |
| 1 | 0.25 | 30.020 | -0.04000 | 13555.08 | 0.010769 | 139.05 | 5.7253 | 4 | 22.9013 | -855.9 | 0.9995 | 0.0008 | -0.0005 | -0.0008 | 0.0000004 | 0.000000 | 0.00000003 | 120.080 |
| 2 | 0.50 | 30.010 | -0.04167 | 13555.10 | 0.010769 | 139.05 | 5.9702 | 2 | 11.9404 | 185.4 | 0.9984 | 0.0015 | -0.0016 | -0.0015 | 0.0000024 | 0.000000 | 0.0000025 | 60.020 |
| 3 | 0.75 | 30.000 | -0.04000 | 13555.13 | 0.010769 | 139.06 | 5.7374 | 4 | 22.9497 | -214.4 | 0.9974 | 0.0023 | -0.0026 | -0.0023 | 0.0000059 | 0.000001 | 0.0000069 | 120.000 |
| 4 | 1.00 | 29.990 | -0.04000 | 13555.15 | 0.010769 | 139.06 | 5.7435 | 2 | 11.4870 | 122.3 | 0.9965 | 0.0030 | -0.0037 | -0.0030 | 0.0000111 | 0.000001 | 0.0000136 | 59.980 |
| 5 | 1.25 | 29.980 | -0.04000 | 13555.18 | 0.010769 | 139.06 | 5.7496 | 4 | 22.9983 | -10.2 | 0.9953 | 0.0038 | -0.0047 | -0.0038 | 0.0000178 | 0.000001 | 0.0000224 | 119.920 |
| 6 | 1.50 | 29.970 | -0.04000 | 13555.20 | 0.010769 | 139.06 | 5.7557 | 2 | 11.5113 | 0.0 | 0.9942 | 0.0045 | -0.0058 | -0.0045 | 0.0000261 | 0.000002 | 0.0000335 | 59.940 |
| 1317 | 329.25 | 24.038 | -0.00800 | 13569.61 | 0.010781 | 139.25 | 3.0887 | 4 | 12.3548 | 0.0 | 0.3714 | 0.9887 | -0.9904 | -0.9887 | 0.9792056 | 0.97760 | 0.9808096 | 96.152 |
| 1318 | 329.50 | 24.036 | -0.00800 | 13569.61 | 0.010781 | 139.25 | 3.0905 | 2 | 6.1809 | 0.0 | 0.3712 | 0.9895 | -0.9909 | -0.9895 | 0.9805087 | 0.97909 | 0.9819299 | 48.072 |
| 1319 | 329.75 | 24.034 | -0.00800 | 13569.62 | 0.010781 | 139.25 | 3.0922 | 4 | 12.3689 | 0.0 | 0.3710 | 0.9902 | -0.9915 | -0.9902 | 0.9818128 | 0.98058 | 0.9830515 | 96.136 |
| 1320 | 330.00 | 24.032 | -0.00800 | 13569.62 | 0.010781 | 139.25 | 3.0940 | 2 | 6.1879 | 0.0 | 0.3708 | 0.9910 | -0.9921 | -0.9910 | 0.9831182 | 0.98206 | 0.9841744 | 48.064 |
| 1321 | 330.25 | 24.030 | -0.00800 | 13569.63 | 0.010781 | 139.25 | 3.0957 | 4 | 12.3829 | 0.0 | 0.3706 | 0.9917 | -0.9926 | -0.9917 | 0.9844247 | 0.98355 | 0.9852985 | 96.120 |
| 1322 | 330.50 | 24.028 | -0.00800 | 13569.63 | 0.010781 | 139.25 | 3.0975 | 2 | 6.1950 | -5.5 | 0.3704 | 0.9925 | -0.9932 | -0.9925 | 0.9857324 | 0.98504 | 0.9864240 | 48.056 |
| 1323 | 330.75 | 24.026 | -0.00800 | 13569.64 | 0.010781 | 139.25 | 3.0992 | 4 | 12.3970 | 110.3 | 0.3702 | 0.9932 | -0.9938 | -0.9932 | 0.9870413 | 0.98653 | 0.9875507 | 96.104 |
| 1324 | 331.00 | 24.024 | -0.00800 | 13569.64 | 0.010781 | 139.25 | 3.1010 | 2 | 6.2020 | -72.84 | 0.3700 | 0.9940 | -0.9943 | -0.9940 | 0.9883513 | 0.98802 | 0.9886787 | 48.048 |
| 1325 | 331.25 | 24.022 | -0.00833 | 13569.65 | 0.010781 | 139.25 | 3.1320 | 4 | 12.9282 | 1671.4 | 0.3698 | 0.9947 | -0.9949 | -0.9947 | 0.9896625 | 0.98952 | 0.9898079 | 96.088 |
| 1326 | 331.50 | 24.020 | -0.00533 | 13569.65 | 0.010781 | 139.25 | 2.0697 | 2 | 4.1394 | -222.7 | 0.3696 | 0.9955 | -0.9955 | 0.9909749 | 0.99101 | 0.9909385 | 48.040 | |
| 1327 | 331.75 | 24.019 | -0.00700 | 13569.66 | 0.010781 | 139.25 | 2.7172 | 4 | 10.8689 | -4144.5 | 0.3694 | 0.9962 | -0.9957 | -0.9962 | 0.9920053 | 0.99251 | 0.9915042 | 96.076 |
| 1328 | 332.00 | 24.016 | -0.01767 | 13569.66 | 0.010781 | 139.25 | 6.8636 | 2 | 13.7273 | 5081.5 | 0.3691 | 0.9970 | -0.9966 | -0.9970 | 0.9936032 | 0.99400 | 0.9932035 | 48.032 |
| 1329 | 332.25 | 24.011 | -0.01433 | 13569.67 | 0.010781 | 139.25 | 5.5766 | 4 | 22.3062 | -30.7 | 0.3686 | 0.9977 | -0.9980 | -0.9977 | 0.9957712 | 0.99550 | 0.9960420 | 96.044 |
| 1330 | 332.50 | 24.009 | -0.00900 | 13569.68 | 0.010781 | 139.25 | 3.5036 | 2 | 7.0071 | 15867.5 | 0.3684 | 0.9985 | -0.9986 | -0.9985 | 0.9970894 | 0.99700 | 0.9971796 | 48.018 |
| 1331 | 332.75 | 24.006 | -0.01400 | 13569.69 | 0.010781 | 139.25 | 5.4547 | 4 | 21.8186 | -682.82 | 0.3681 | 0.9992 | -0.9994 | -0.9992 | 0.9986938 | 0.99850 | 0.9988886 | 96.024 |
| 1332 | 333.00 | 24.005 | -0.01200 | 13569.69 | 0.010781 | 139.25 | 4.6794 | 1 | 4.6794 | -8961.6 | 0.3678 | 1.0000 | -1.0003 | -1.0000 | 1.0003002 | 1.00000 | 1.0006004 | 24.003 |
| | | | Σ 16387.05 | | | | | | | 666.5 -705.2689 -666.5 463.8816205 444.50 484.58 105299.17 | | | | | | | | |

| CONDICIONES | |
|----------------|------------------------|
| $T_{\infty} =$ | 20.50 °C 293.7 K |
| $T_{wasa} =$ | 26.35 °C |
| $T_{h_{fc}} =$ | 23.43 °C 296.6 K |
| $P_{atm} =$ | 74680.52632 Pa |
| $g =$ | 9.803 m/s ² |

| DERIVACION E INTEGRACION NUMÉRICA | | | |
|-----------------------------------|----------------------------|----------|-----------|
| $\Sigma h_{fc} =$ | 16387.05 | m_{ax} | 15867.5 |
| $t_s =$ | 333.00 | m_{in} | -15197.21 |
| $h^*_{p_{atm}} =$ | 4.1009 W/m ² °C | | |
| $Nu^*_{L_{p_{atm}}} =$ | 7.6710 | | 72.26563 |
| Error max = | 0.34 | | |
| $h_{p_{atm}} =$ | 4.1276 | | |
| $Nu_{L_{p_{atm}}} =$ | 7.7210 | | |

| REGRESION | | | |
|---|----------------------------|----------------|----------|
| $n =$ | 1333 | $\Sigma YZ =$ | 463.8816 |
| $\Sigma Y =$ | -666.5000 | $\Sigma Y^2 =$ | 444.5001 |
| $\Sigma Z =$ | -705.2689 | $\Sigma Z^2 =$ | 484.5735 |
| | | $R^2 =$ | 0.988341 |
| $B = \Sigma YZ / \Sigma Y^2 = 1.043603$ Valor haciendo el intersección igual a cero $B = h_{fc} t_s / M c_p = 0.999973$ Valor con intersección diferente de cero | | | |
| $T_{wasa} =$ | 26.35 °C | | |
| ρ | 13563.99 kg/m ³ | | |
| C_p | 139.1704 J/kg K | | |
| $M =$ | 0.010776 kg | | |

| PROPIEDADES AIRE | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-------------------|-----------|
| M | 28.97 kg/kmol | | |
| R | 0.2897 kJ/kgK | | |
| a | b | c | d |
| 28.11 | 1.97E-03 | 4.80E-06 | -1.97E-09 |
| Cp | 1005.03 J/kg K | | |
| μ | 1.84111E-05 Pa.s | | |
| k | 0.02533979 W/mK | | |
| Pr | 0.730251 | | |
| ρ | 0.869 kg/m ³ | | |
| β | 0.003 1/°C | | |
| β | 0.003 1/°C @ T _a | | |
| v | 2.119E-05 m ² /s | | |
| PARAMETROS CONVECCION LIBRE | | | |
| L | 4.74E-02 m | Gr _L | 45883.09 |
| D | 7.38E-03 m | Re _L | 33504.99 |
| L/D | 6.42 | | |
| DGr ^{1/4} /L | 2.278721173 | Gr _D | 173.18 |
| | no se cumple para FP | Re _D | 126.46 |
| Gebhart | 6.51% | Gr _D * | 174.90 |
| | | Re _D * | 127.72 |

| | | | |
|------|-------------------|---------------------------|---|
| aire | T _{amb} | 23.43 °C | |
| | k, W/mK | 0.02534 | |
| | h* _{amb} | 4.2768 W/m ² C | Nu* _{amb} = 8.0000 Con intersección igual a cero |
| | h* _{amb} | 4.0980 W/m ² C | Nu* _{amb} = 7.6656 intersección distinto de cero |
| | h _{amb} | 4.3059 W/m ² C | Nu _{amb} = 8.0544 Con intersección igual a cero |
| | h _{amb} | 4.1247 W/m ² C | Nu _{amb} = 7.7155 intersección distinto de cero |

| VALORES ESPERADOS | MODELO TEÓRICO | JANNA |
|-------------------|---|---|
| | $\overline{Nu} = \frac{\overline{h}L}{k} = \frac{4}{3} \left[\frac{7Gr \cdot Pr^2}{5(20 + 21Pr)} \right]^{1/4} + \frac{4(272 + 315Pr)L}{35(64 + 63Pr)D}$ <p>Nu_{L,pp} = 7.4398 h_{L,pp} = 3.977283 Curvatura = 3.3499 31% Aumento = 45% Nu_L = 10.7897 h_{pp} = 5.7681 W/m²C</p> | $\overline{Nu}_D = C \left(Ra_D \frac{D}{L} \right)^n$ <p>Nu_D = 2.210471241 h_{pp} = 7.5898</p> |
| | <p>YANG</p> $\overline{Nu}_L = \left\{ 0.60 \left(\frac{L}{D} \right)^{0.5} + \frac{0.387 Ra_L^{1/6}}{[1 + (0.492/Pr)^{9/16}]^{1/4}} \right\}^2$ <p>Nu_L = 11.3330 h_{pp} = 6.0586 W/m²C</p> | <p>CEBECI</p> $\zeta = \frac{\sqrt{32} H}{Gr_L^{0.25} D} < 5$ <p>ζ = 2.482469 < 5</p> $\overline{Nu}_L = \overline{Nu}_{L,pp} \left[1 + \beta \left(32^{0.25} Gr_L^{-0.25} \frac{L}{D} \right)^{\zeta} \right]$ $\overline{Nu}_{L,pp} = 0.68 + 0.670 (Ra_L \psi)^{1/4}$ $\psi = \left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-16/9}$ <p>ψ = 0.351423 Nu_{L,pp} = 7.659264 W/m²C h_{L,pp} = 4.094602 β = 0.0571322 + 0.00305Pr^{-1.41} C = 0.9245 - 0.0043Pr^{0.13} + 0.013333Pr + 0.0004809/Pr B = 0.289575 C = 0.909 Nu_L = 12.5340 h_{pp} = 6.7006 W/m²C</p> |
| | <p>POPIEL</p> $\overline{Nu}_L = A Ra_L^n$ $n = 0.25 - 0.00253 \left(\frac{L}{D} \right) + 1.152 \times 10^{-5} \left(\frac{L}{D} \right)^2$ $A = 0.519 + 0.03454 \left(\frac{L}{D} \right) + 0.0008772 \left(\frac{L}{D} \right)^2 + 8.855 \times 10^{-6} \left(\frac{L}{D} \right)^3$ <p>no es aplicable dado que Ra < 10⁹</p> | |
| | <p>ELENBASS</p> $\overline{Nu}_D = 0.6 \left(\frac{D}{L} \right)^{1/4} Ra_D^{1/4} \exp \left(\frac{2}{Nu_D} \right)$ <p>Nu_{pp} = 2.630215 Nu_D = 2.703597 Dif = 0.073384 h_{pp} = 9.2830 W/m²C</p> | <p>CEBECI Pr=0.72</p> $\overline{Nu}_L = \overline{Nu}_{L,pp} \left[1 + 0.300 \left(32^{0.25} Gr_L^{-0.25} \frac{L}{D} \right)^{0.625} \right]$ |

$$Nu_D = 2 / \ln \left[1 + 2 / \left\{ \left(0.67(Ra_D D/L)^{1/4} \left[1 + (0.599/Pr)^{1/4} \right]^{-1/4} \right)^{1.1} + (0.1 Ra_D^{1/3})^{1.1} \right\} \right]^{1/1.1}$$

KUEHN

Nu_D = 1.911758
h_{pro} = 6.5642 W/m²°C

Nu_D = 12.70412
h_{pro} = 6.7916

II. EXPERIMENTO V-2

| Constante de tiempo | | |
|--------------------------|---|---------|
| T ₀ = 20.5 °C | T _∞ -T ₀ = 9.700 °C | n= 1362 |
| Δt= 0.25 s | T(t)= 24.068 °C | |
| | τ= 340.50 s | |

| i | t, s | T, °C | DIFERENCIACION E INTEGRACION NUMERICA | | | | | | | | REGRESION CON MINIMOS CUADRADOS | | | | | | | T _{pro} h _c |
|------------|--------|--------|---------------------------------------|----------------------|----------|------------|------------------------|----|---------|----------------------------------|---|--------------------|---------|------------|-----------|----------------|----------------|------------------------------------|
| | | | dT/dt | ρ, kg/m ³ | M, kg | Cp, J/kg K | h, W/m ² °C | ci | hici | d ³ h/dt ³ | B*(T _∞)/(T _c -T _∞) | τ=t/τ _m | Z=lnθ | Y=τ | YZ | Y ² | Z ² | |
| 0 | 0.00 | 30.200 | -0.04000 | 13554.64 | 0.010769 | 139.05 | 5.6187 | 1 | 5.6187 | 0.0 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000000 | 0.00000 | 0.0000000 | 30.200 |
| 1 | 0.25 | 30.190 | -0.04000 | 13554.67 | 0.010769 | 139.05 | 5.6245 | 4 | 22.4980 | 0.0 | 0.9990 | 0.0007 | -0.0010 | -0.0007 | 0.0000008 | 0.00000 | 0.0000011 | 120.760 |
| 2 | 0.50 | 30.180 | -0.04000 | 13554.69 | 0.010769 | 139.05 | 5.6303 | 2 | 11.2607 | 193.2 | 0.9979 | 0.0015 | -0.0021 | -0.0015 | 0.0000030 | 0.00000 | 0.0000043 | 60.360 |
| 3 | 0.75 | 30.170 | -0.04000 | 13554.71 | 0.010769 | 139.05 | 5.6362 | 4 | 22.5447 | 0.0 | 0.9969 | 0.0022 | -0.0031 | -0.0022 | 0.0000068 | 0.00000 | 0.0000096 | 120.680 |
| 4 | 1.00 | 30.160 | -0.04000 | 13554.74 | 0.010769 | 139.05 | 5.6420 | 2 | 11.2841 | 16.1 | 0.9959 | 0.0029 | -0.0041 | -0.0029 | 0.0000121 | 0.00001 | 0.0000171 | 60.320 |
| 1358 | 339.50 | 24.075 | -0.01267 | 13569.52 | 0.010781 | 139.25 | 4.8398 | 2 | 9.6795 | 1380.6 | 0.3686 | 0.9971 | -0.9982 | -0.9971 | 0.9952298 | 0.99413 | 0.9963248 | 48.150 |
| 1359 | 339.75 | 24.072 | -0.01000 | 13569.53 | 0.010781 | 139.25 | 3.8241 | 4 | 15.2963 | -519.6 | 0.3682 | 0.9978 | -0.9990 | -0.9978 | 0.9967998 | 0.99560 | 0.9980014 | 96.288 |
| 1360 | 340.00 | 24.070 | -0.00767 | 13569.53 | 0.010781 | 139.25 | 2.9334 | 2 | 5.8669 | 2353.2 | 0.3680 | 0.9985 | -0.9996 | -0.9985 | 0.9980925 | 0.99707 | 0.9991208 | 48.140 |
| 1361 | 340.25 | 24.068 | -0.00800 | 13569.54 | 0.010781 | 139.25 | 3.0627 | 4 | 12.2508 | -3060.7 | 0.3678 | 0.9993 | -1.0001 | -0.9993 | 0.9993864 | 0.99853 | 1.0002414 | 96.272 |
| 1362 | 340.50 | 24.066 | -0.00800 | 13569.54 | 0.010781 | 139.25 | 3.0644 | 1 | 3.0644 | -919.3 | 0.3676 | 1.0000 | -1.0007 | -1.0000 | 1.0006814 | 1.00000 | 1.0013632 | 24.066 |
| Σ 16385.35 | | | | | | | | | | | 681.5 | -722.3564 | -681.5 | 474.625914 | 454.50 | 496.18 | 108083.5 | |

| CONDICIONES | |
|-----------------------------------|---------|
| T ₀ = 20.50 °C | 293.7 K |
| T _{Wpro} = 26.45 °C | |
| T _∞ = 23.48 °C | 296.6 K |
| P _{atm} = 74660.52632 Pa | |
| g= 9.803 m/s ² | |

| DERIVACION E INTEGRACION NUMERICA | |
|---|---------------|
| Zhici= 16385.35 | max 9839.41 s |
| t _s = 340.50 | min -13291.88 |
| h _{pro} = 4.0101 W/m ² °C | |
| Nu _{pro} = 7.5002 | |
| Error max= 0.29 | |
| h _{pro} = 4.0357 | |
| Nu _{pro} = 7.547987 | |

| REGRESION | |
|--|--|
| n= 1363 | ΣYZ= 474.6259 |
| ΣY= -681.5000 | ΣY ² = 454.5001 |
| ΣZ= -722.3564 | ΣZ ² = 496.1782 |
| | R ² = 0.988226 |
| B= ΣYZ/ΣY ² = | 1.044281 Valor haciendo el intersección igual a cero |
| Bi=hAt _m /Mc _p = | 0.997341 Valor con intersección diferente de cero |
| T _{Wpro} = 26.45 °C | |
| ρ, kg/m ³ = 13563.75 | |
| Hg Cp, J/kg K= 139.1671 | |
| M= 0.010776 kg | |

| PROPIEDADES AIRE | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|--------------------------------|-----------|
| M= | 28.97 kg/kmol | | |
| R= | 0.2897 kJ/kgk | | |
| a | b | c | d |
| 28.11 | 1.97E-03 | 4.80E-06 | -1.97E-09 |
| Cp= | 1005.04 J/kg k | | |
| μ= | 1.84132E-05 Pa.s | | |
| k= | 0.025343325 W/mK | | |
| Pr= | 0.7302119 | | |
| ρ= | 0.869 kg/m ³ | | |
| β= | 0.003 1/°C | | |
| β= | 0.003 1/°C @ T _m | | |
| ν= | 2.119E-05 m ² /s | | |
| PARAMETROS CONVECCION LIBRE | | | |
| L= | 4.74E-02 m | Gr _L = | 46640.81 |
| D= | 7.38E-03 m | Re _L = | 34057.67 |
| L/D= | 6.42 | | |
| DGr ^{1/4} /L= | 2.288071211 | Gr _D = | 176.04 |
| | no se cumple | Re _D = | 128.54 |
| | para PP | | |
| Gebhart | 6.54% | Gr _D [*] = | 177.82 |
| | | Re _D [*] = | 129.85 |

| | | | |
|-----------------------------------|----------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| aire | T _{amb} = | 23.48 °C | |
| | k, W/mK= | 0.025343 | |
| h [*] _{airio} = | 4.1851 W/m ² °C | Nu [*] _{L,airio} = | 7.8275 Con intersección igual a cero |
| h [*] _{pro} = | 3.9970 W/m ² °C | Nu [*] _{L,pro} = | 7.4756 intersección distinto de cero |
| h _{pro} = | 4.2130 W/m ² °C | Nu _{pro} = | 7.8796 Con intersección igual a cero |
| h _{airio} = | 4.0224 W/m ² °C | Nu _{airio} = | 7.5231 intersección distinto de cero |

| VALORES ESPERADOS | MODELO TEÓRICO | JANNA |
|-------------------|---|--|
| | $\overline{Nu}_L = \frac{\overline{h}L}{k} = \frac{4}{3} \left[\frac{7Gr \cdot Pr^2}{5(20 + 21Pr)} \right]^{1/4} + \frac{4(272 + 315Pr)L}{35(64 + 63Pr)D}$ | $\overline{Nu}_D = C \left(Ra_D \frac{D}{L} \right)^n$ |
| | Nu _{L,pp} = 7.4703 h _{L,pp} = 3.994132 Curvatura pp Curvatura= 3.3489 31% 69% Aumento 45% Nu _L = 10.8201 h _{pro} = 5.7852 W/m ² °C | Nu _D = 2.21632571 h _{airio} = 7.6110 |
| | YANG $\overline{Nu}_L = \left\{ 0.60 \left(\frac{L}{D} \right)^{0.5} + \frac{0.387 Ra_L^{1/4}}{\left[1 + (0.492/Pr)^{9/16} \right]^{1/4}} \right\}^2$ Nu _L = 11.3670 h _{pro} = 6.0776 W/m ² °C | CEBECI $z = \frac{\sqrt{32} H}{Gr_L^{0.25} D} < 5$ ζ= 2.472324 <5 $\overline{Nu}_L = \overline{Nu}_{L,pp} \left[1 + \beta \left(32^{0.25} Gr_L^{-0.25} \frac{L}{D} \right)^c \right]$ $\overline{Nu}_{L,pp} = 0.68 + 0.670 (Ra_L \psi)^{1/4}$ $\psi = \left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-16/9}$ ψ= 0.35142 Nu _{L,pp} = 7.687855 W/m ² °C h _{L,pp} = 4.11046 $\beta = 0.0571322 + 0.20305Pr^{-1.4}$ |
| | POPIEL $\overline{Nu}_L = A Ra_L^n$ $n = 0.25 - 0.00253 \left(\frac{L}{D} \right) + 1.152 \times 10^{-5} \left(\frac{L}{D} \right)^2$ $A = 0.519 + 0.03454 \left(\frac{L}{D} \right) + 0.0008772 \left(\frac{L}{D} \right)^2 + 8.855 \times 10^{-6} \left(\frac{L}{D} \right)^3$ no es aplicable dado que Ra < 10 ⁹ | |

| | |
|---|---|
| ELENBASS $Nu_D = 0.6 \left(\frac{D}{L}\right)^{1/4} Re^{1/4} \exp\left(\frac{2}{Re}\right)$ $Nu_{D0} = 2.630213$ $Nu_D = 2.714678$ $Dif = 0.084465$ $h_{D0} = 9.3224 \text{ W/m}^2\text{C}$ | $C = 0.9165 - 0.0043Pr^{1/3} + 0.01333lnPr + 0.0004809/Pr$ $B = 0.289577$ $C = 0.909$ $Nu_L = 12.5613$ $h_{D0} = 6.7161 \text{ W/m}^2\text{C}$ |
| KUEHN $Nu_D = 2 / \ln \left[1 + 2 / \left\{ \left(0.67(Ra_D D/L)^{1/4} [1 + (0.599/Pr)^{3/4}]^{-1/4} \right)^{15} + (0.1Ra_D^{1/3})^{15} \right\}^{1/15} \right]$ $Nu_D = 1.916613$ $h_{D0} = 6.5818 \text{ W/m}^2\text{C}$ | CEBECI Pr=0.72 $\overline{Nu}_D = \overline{Nu}_{D,LP} \left[1 + 0.300 \left(32^{0.1} Gr_D^{-0.25} \frac{L}{D} \right)^{0.625} \right]$ $Nu_L = 12.75132$ $h_{D0} = 6.8070$ |

III. EXPERIMENTO H-1

| Constante de tiempo | | |
|--|--|-----------|
| $T_{\infty} = 20.5 \text{ }^{\circ}\text{C}$ | $T_{\infty} - T_c = 14.380 \text{ }^{\circ}\text{C}$ | $n = 784$ |
| $\Delta t = 0.25 \text{ s}$ | $T(t) = 25.790 \text{ }^{\circ}\text{C}$ | |
| | $\tau = 196.00 \text{ s}$ | |

| i | t, s | T, °C | DIFERENCIACION E INTEGRACION NUMERICA | | | | | | | REGRESION CON MINIMOS CUADRADOS | | | | | | | T _{aprox} h _{fc} | |
|----------|--------|--------|---------------------------------------|----------------------|----------|------------|-----------------------|----------------|-----------------|----------------------------------|---|------------------|---------|------------|-----------|----------------|---------------------------------------|----------------|
| | | | dT/dt | ρ, kg/m ³ | M, kg | Cp, J/kg K | h, W/m ² C | c _i | h _{fc} | d ² h/dt ² | θ=(T-T _∞)/(T _c -T _∞) | τ/t _m | Z=lnθ | Y=τ | YZ | Y ² | | Z ² |
| 0 | 0.00 | 34.880 | -0.08000 | 13543.27 | 0.01076 | 138.91 | 7.5662 | 1 | 7.5662 | 16545.0 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000000 | 0.00000 | 0.0000000 | 34.880 |
| 1 | 0.25 | 34.860 | -0.07600 | 13543.32 | 0.01076 | 138.91 | 7.1980 | 4 | 28.7920 | -16870.5 | 0.9986 | 0.0013 | -0.0014 | -0.0013 | 0.0000018 | 0.00000 | 0.0000019 | 139.440 |
| 2 | 0.50 | 34.840 | -0.08517 | 13543.37 | 0.01076 | 138.91 | 8.0775 | 2 | 16.1550 | -388.6 | 0.9972 | 0.0026 | -0.0028 | -0.0026 | 0.0000071 | 0.00001 | 0.0000078 | 69.680 |
| 3 | 0.75 | 34.818 | -0.07467 | 13543.42 | 0.01076 | 138.91 | 7.0926 | 4 | 28.3703 | -6481.6 | 0.9957 | 0.0038 | -0.0043 | -0.0038 | 0.0000165 | 0.00001 | 0.0000187 | 139.272 |
| 4 | 1.00 | 34.800 | -0.12135 | 13543.47 | 0.01076 | 138.91 | 11.5404 | 2 | 23.0809 | 2870.9 | 0.9944 | 0.0051 | -0.0056 | -0.0051 | 0.0000286 | 0.00005 | 0.0000315 | 69.599 |
| 5 | 1.25 | 34.780 | -0.12600 | 13543.56 | 0.01076 | 138.91 | 12.0177 | 4 | 48.0707 | 4706.9 | 0.9917 | 0.0064 | -0.0064 | -0.0064 | 0.0000534 | 0.00004 | 0.0000702 | 139.040 |
| 775 | 195.75 | 25.833 | -0.02767 | 13565.25 | 0.010777 | 139.19 | 7.0811 | 4 | 28.3246 | 3950.7 | 0.3709 | 0.9885 | -0.9919 | -0.9885 | 0.9805375 | 0.97717 | 0.9839141 | 103.332 |
| 776 | 194.00 | 25.827 | -0.02433 | 13565.26 | 0.010777 | 139.19 | 6.2350 | 2 | 12.4701 | -444.2 | 0.3704 | 0.9898 | -0.9931 | -0.9898 | 0.9829170 | 0.97970 | 0.9861485 | 51.654 |
| 777 | 194.25 | 25.821 | -0.01900 | 13565.28 | 0.010777 | 139.19 | 4.8739 | 4 | 19.4958 | -1613.0 | 0.3700 | 0.9911 | -0.9942 | -0.9911 | 0.9853005 | 0.98222 | 0.9883881 | 103.284 |
| 778 | 194.50 | 25.817 | -0.02200 | 13565.29 | 0.010777 | 139.19 | 5.6478 | 2 | 11.2955 | 109.3 | 0.3697 | 0.9923 | -0.9949 | -0.9923 | 0.9873149 | 0.98475 | 0.9898839 | 51.634 |
| 779 | 194.75 | 25.810 | -0.02500 | 13565.30 | 0.010777 | 139.19 | 6.4264 | 4 | 25.7056 | 1220.6 | 0.3698 | 0.9936 | -0.9962 | -0.9936 | 0.9898929 | 0.98729 | 0.9925071 | 103.240 |
| 780 | 195.00 | 25.805 | -0.02033 | 13565.32 | 0.010777 | 139.19 | 5.2317 | 2 | 10.4655 | -772.8 | 0.3689 | 0.9949 | -0.9972 | -0.9949 | 0.9921009 | 0.98982 | 0.9943851 | 51.610 |
| 781 | 195.25 | 25.800 | -0.01367 | 13565.33 | 0.010777 | 139.19 | 3.5197 | 4 | 14.0790 | 1378.1 | 0.3686 | 0.9962 | -0.9981 | -0.9962 | 0.9943122 | 0.99236 | 0.9962666 | 103.200 |
| 782 | 195.50 | 25.798 | -0.00667 | 13565.33 | 0.010777 | 139.19 | 1.4600 | 2 | 2.9199 | -2746.2 | 0.3684 | 0.9974 | -0.9985 | -0.9974 | 0.9959617 | 0.99490 | 0.9970201 | 51.596 |
| 783 | 195.75 | 25.795 | -0.01400 | 13565.34 | 0.010777 | 139.19 | 3.6090 | 4 | 14.4360 | 4027.9 | 0.3682 | 0.9987 | -0.9991 | -0.9987 | 0.9978010 | 0.99745 | 0.9981516 | 103.180 |
| 784 | 196.00 | 25.782 | -0.07200 | 13565.37 | 0.010777 | 139.19 | 18.6064 | 1 | 18.6064 | 889.5 | 0.3673 | 1.0000 | -1.0015 | -1.0000 | 1.0015335 | 1.00000 | 1.0030694 | 25.782 |
| Σ | | | | 16565.02 | | | | | | | 392.5 | -417.279 | -392.5 | 274.059097 | 261.83 | 287.16 | 68936.8774 | |

| CONDICIONES | | |
|---------------------|------------------------|---------|
| T _{op} = | 20.50 °C | 298.7 K |
| T _{Wpo} = | 29.31 °C | |
| T _{ppio} = | 24.90 °C | 298.1 K |
| P _{atm} = | 74660.52632 Pa | |
| g= | 9.803 m/s ² | |

| DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA | | |
|-----------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| Σhici= | 16863.02 | max 16545.04 min -17714.14 |
| t _s = | 196.00 | |
| h* _{ppio} = | 6.9571 W/m ² °C | |
| Nu* _{opio} = | 2.0179 | |
| Error max= | 0.38 | |
| h _{ppio} = | 7.0343 | |
| Nu _{ppio} = | 2.0404 | |

| REGRESIÓN | | |
|---|----------------------------|--|
| n= | 785 | ΣYZ= 274.0391 |
| ΣY= | -392.3000 | ΣY ² = 261.8335 |
| ΣZ= | -417.2790 | ΣZ ² = 287.1623 |
| | | R ² = 0.997933 |
| Bi=ΣYZ/ΣY ² = | 1.046616 | Valor haciendo el intersección igual a cero |
| Bi=hAt _{op} /Mc _p = | 0.997195 | Valor con intersección diferente de cero |
| T _{Wpo} = | 29.31 °C | |
| ρ _a kg/m ³ = | 13556.8 | |
| Hg Cp, J/kg K= | 139.0768 | |
| M= | 0.01077 kg | |
| aire T _{ppio} = | 24.90 °C | |
| k, W/mK= | 0.025448 | |
| h* _{ppio} = | 7.2783 W/m ² °C | Nu* _{opio} = 2.1111 Con intersección igual a cero |
| h* _{ppio} = | 6.9547 W/m ² °C | Nu* _{opio} = 2.0114 intersección distinto de cero |
| h _{ppio} = | 7.3630 W/m ² °C | Nu _{ppio} = 2.1357 Con intersección igual a cero |
| h _{ppio} = | 7.0114 W/m ² °C | Nu _{ppio} = 2.0337 intersección distinto de cero |

| PROPIEDADES AIRE | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-------------------|-----------|
| M= | 28.97 kg/kmol | | |
| R= | 0.2897 kJ/kgK | | |
| a | b | c | d |
| 28.11 | 1.97E-03 | 4.80E-06 | -1.97E-09 |
| Cp= | 1005.28 J/kgK | | |
| μ= | 1.84721E-05 Pa.s | | |
| k= | 0.025443346 W/mK | | |
| Pr= | 0.7298394 | | |
| ρ= | 0.865 kg/m ³ | | |
| β= | 0.003 1/°C | | |
| v= | 2.136E-05 m ² /s | | |
| PARAMETROS CONVECCION LIBRE | | | |
| L= | 4.74E-02 m | Gr _L = | 67612.84 |
| D= | 7.38E-03 m | Re _L = | 49346.51 |
| L/D= | 6.42 | Gr _D = | 255.19 |
| | | Re _D = | 186.25 |

| VALORES ESPERADOS | HERMANN | |
|-------------------|---|---|
| | $\overline{Nu}_D = 0.372 Gr_D^{1/4}$ | |
| | Nu _c = 1.486821 | |
| | h _{ppio} = 5.1260 | |
| | MERK AND PRINS | ECKERT |
| | $\overline{Nu}_D = C(Pr)(Gr_D Pr)^{1/4} = C(Pr)Ra_D^{1/4}$ C(Pr) 0.436 | $\overline{Nu}_D = 0.53(Gr_D Pr)^{1/4}$ |
| | Nu _c = 1.6107 | Nu _c = 1.9579 |
| | h _{ppio} = 5.5530 W/m ² °C | h _{ppio} = 6.7502 W/m ² °C |
| | MORGAN | CHURCHILL |
| | $\overline{Nu}_D = CRa_D^n$ | $\overline{Nu}_D = 0.36 + \frac{0.518 Ra_D^{1/4}}{[1 + (0.559/Pr)^{9/16}]^{1/4}}$ |
| | C= 0.85 n= 0.188 | |
| | Nu _c = 2.2709 | Nu _c = 1.8121 |
| | h _{ppio} = 7.8291 W/m ² °C | h _{ppio} = 6.2474 W/m ² °C |

| KUEHN | CHURCHILL LAMINAR |
|--|--|
| $Nu_D = 2 \left[\ln \left(1 + 2 \left(\left(0.518 Ra_D^{1/4} \left[1 + (0.599/Pr)^{1/4} \right]^{-4/3} \right)^{15} + (0.1 Ra_D^{1/3})^{15} \right)^{1/15} \right] \right.$ | $Nu^{1/2} = 0.36^{1/2} + \left[\frac{Ra_D}{300 \left[1 + (0.5/Pr)^{1/4} \right]^{16/3}} \right]^{1/4}$ |
| $Nu_c = 2.326831$ | $Nu_c = 1.890431$ |
| $h_{c10} = 8.0220 \text{ W/m}^2\text{°C}$ | $h_{c10} = 6.5175 \text{ W/m}^2\text{°C}$ |

IV. EXPERIMENTO H-2

| | | |
|-----------------------------|--|-----------|
| $T_c = 20.5^\circ\text{C}$ | $T_{w,c} - T_{c,c} = 14.330^\circ\text{C}$ | $n = 798$ |
| $\Delta t = 0.25 \text{ s}$ | $T(\tau) = 23.772^\circ\text{C}$ | |
| | $\tau = 199.50 \text{ s}$ | |

| | | | DERIVACION E INTEGRACION NUMERICA | | | | | | | REGRESION CON MINIMOS CUADRADOS | | | | | | | $T_{w,90}$ | |
|-----|---------------|---------------------|-----------------------------------|-----------------------|----------------|----------------------|----------------------------|-------|-----------|---------------------------------|--|---------------|------------------|-------------|-------------|----------|------------|-----------|
| i | t, s | $T, ^\circ\text{C}$ | dT/dt | $\rho, \text{kg/m}^3$ | M, kg | $C_p, \text{J/kg K}$ | $h, \text{W/m}^2\text{°C}$ | c_i | $h c_i$ | d^4h/dt^4 | $\Theta = (T - T_\infty)/(T_c - T_\infty)$ | τ/t_{90} | $Z = \ln \Theta$ | $Y = -\tau$ | YZ | Y^2 | Z^2 | $h_{c,i}$ |
| 0 | 0.00 | 34.83 | -0.02000 | 13543.39 | 0.01076 | 138.91 | 1.8982 | 1 | 1.8982 | -6331.9 | 1.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000000 | 0.000000 | 0.000000 | 34.830 |
| 1 | 0.25 | 34.820 | -0.08 | 13543.41874 | 0.01076 | 138.9122 | 7.598121 | 4 | 30.39248 | 13028 | 0.999302165 | 0.001253 | -0.000698 | 0.00 | 8.7479E-07 | 0.00 | 4.8732E-07 | 139.280 |
| 2 | 0.50 | 34.800 | -0.083333 | 13543.46732 | 0.01076 | 138.9127 | 7.92584 | 2 | 15.85168 | -18434.68 | 0.99790649 | 0.002306 | -0.002096 | 0.00 | 5.2524E-06 | 0.00 | 4.392E-06 | 69.600 |
| 3 | 0.75 | 34.780 | -0.08 | 13543.5159 | 0.01076 | 138.9133 | 7.619522 | 4 | 30.47809 | 2864.209 | 0.996510816 | 0.003759 | -0.003495 | 0.00 | 1.21217E-05 | 0.00 | 1.2217E-05 | 139.120 |
| 4 | 1.00 | 34.760 | -0.073333 | 13543.56448 | 0.01076 | 138.9139 | 6.994412 | 2 | 13.98882 | -6452.898 | 0.995115143 | 0.005013 | -0.004897 | -0.01 | 2.4545E-05 | 0.00 | 2.3979E-05 | 69.520 |
| 5 | 1.25 | 34.740 | -0.126667 | 13543.61307 | 0.01076 | 138.9144 | 12.09832 | 4 | 48.39827 | 3916.202 | 0.99371947 | 0.006266 | -0.0068 | -0.01 | 3.9476E-05 | 0.00 | 3.9694E-05 | 138.960 |
| 782 | 195.50 | 25.870 | -0.02 | 13565.15918 | 0.010777 | 139.1862 | 5.083553 | 2 | 10.16711 | -705.014 | 0.374738311 | 0.97995 | -0.981527 | -0.98 | 0.96184759 | 0.96 | 0.96339591 | 51.740 |
| 783 | 195.75 | 25.860 | -0.02 | 13565.18347 | 0.010777 | 139.1865 | 5.093059 | 4 | 20.37225 | 4948.032 | 0.374040475 | 0.981203 | -0.983391 | -0.98 | 0.96490647 | 0.96 | 0.96705838 | 103.440 |
| 784 | 196.00 | 25.860 | -0.016667 | 13565.18347 | 0.010777 | 139.1865 | 4.244215 | 2 | 8.488431 | -13760.39 | 0.374040475 | 0.982456 | -0.983391 | -0.98 | 0.96613879 | 0.97 | 0.96705838 | 51.720 |
| 785 | 196.25 | 25.850 | -0.046667 | 13565.20777 | 0.010777 | 139.1868 | 11.90607 | 4 | 47.62426 | 18358.34 | 0.373342688 | 0.983709 | -0.985258 | -0.98 | 0.9682081 | 0.97 | 0.97073467 | 103.400 |
| 786 | 196.50 | 25.840 | -0.016667 | 13565.23206 | 0.010777 | 139.1872 | 4.260147 | 2 | 8.520294 | -8829.555 | 0.372644801 | 0.984962 | -0.98713 | -0.98 | 0.97228553 | 0.97 | 0.97442483 | 51.680 |
| 787 | 196.75 | 25.840 | -0.016667 | 13565.23206 | 0.010777 | 139.1872 | 4.260147 | 4 | 17.04059 | -8874.391 | 0.372644801 | 0.986216 | -0.98713 | -0.99 | 0.97352254 | 0.97 | 0.97442483 | 103.360 |
| 788 | 197.00 | 25.830 | -0.046667 | 13565.25635 | 0.010777 | 139.1875 | 11.95084 | 2 | 23.90168 | 17737.41 | 0.371946964 | 0.987469 | -0.989004 | -0.99 | 0.97661047 | 0.98 | 0.97812892 | 51.660 |
| 789 | 197.25 | 25.820 | -0.016667 | 13565.28064 | 0.010777 | 139.1878 | 4.276198 | 4 | 17.10479 | -9558.049 | 0.371249128 | 0.988722 | -0.990882 | -0.99 | 0.97970658 | 0.98 | 0.98184702 | 103.280 |
| 790 | 197.50 | 25.820 | -0.016667 | 13565.28064 | 0.010777 | 139.1878 | 4.276198 | 2 | 8.552596 | -3966.213 | 0.371249128 | 0.989975 | -0.990882 | -0.99 | 0.98094828 | 0.98 | 0.98184702 | 51.640 |
| 791 | 197.75 | 25.810 | -0.043333 | 13565.30493 | 0.010777 | 139.1881 | 11.13911 | 4 | 44.5564 | 4590.099 | 0.370551291 | 0.991228 | -0.992763 | -0.99 | 0.98405496 | 0.98 | 0.98557918 | 103.240 |
| 792 | 198.00 | 25.800 | -0.043333 | 13565.32922 | 0.010777 | 139.1885 | 11.16016 | 2 | 22.32032 | 5365.672 | 0.369853454 | 0.992481 | -0.994648 | -0.99 | 0.98716986 | 0.99 | 0.98932548 | 51.600 |
| 793 | 198.25 | 25.790 | -0.016667 | 13565.35351 | 0.010777 | 139.1888 | 4.300502 | 4 | 17.20201 | -8199.667 | 0.369155618 | 0.993734 | -0.996537 | -0.99 | 0.99029303 | 0.99 | 0.99308598 | 103.160 |
| 794 | 198.50 | 25.790 | -0.02 | 13565.35351 | 0.010777 | 139.1888 | 5.160603 | 2 | 10.32121 | -506.7813 | 0.369155618 | 0.994987 | -0.996537 | -0.99 | 0.99154182 | 0.99 | 0.99308598 | 51.580 |
| 795 | 198.75 | 25.780 | -0.023333 | 13565.3778 | 0.010777 | 139.1891 | 6.082131 | 4 | 24.12852 | 9755.997 | 0.368457781 | 0.996241 | -0.998429 | -1.00 | 0.99467565 | 0.99 | 0.99686076 | 103.120 |
| 796 | 199.00 | 25.780 | 0.006667 | 13565.3778 | 0.010777 | 139.1891 | -1.723466 | 2 | -3.446932 | 10707.71 | 0.368457781 | 0.997484 | -0.998429 | -1.00 | 0.99592682 | 0.99 | 0.99686076 | 51.560 |
| 797 | 199.25 | 25.780 | 0 | 13565.3778 | 0.010777 | 139.1891 | 0 | 4 | 0 | 21016.23 | 0.368457781 | 0.998747 | -0.998429 | -1.00 | 0.99717798 | 1.00 | 0.99686076 | 103.120 |
| 798 | 199.50 | 25.770 | -0.06 | 13565.40209 | 0.010777 | 139.1895 | 15.54069 | 1 | 15.54069 | -24267.15 | 0.367759944 | 1 | -1.000325 | -1.00 | 1.00032488 | 1.00 | 1.00064986 | 25.770 |
| | | | Σ | 16349.15 | | | | | | | 399.5 | -414.2404 | -399.5 | 273.396222 | 266.50 | 280.62 | 70860.016 | |

| CONDICIONES | |
|------------------------------------|---------|
| $T_c = 20.50^\circ\text{C}$ | 293.7 K |
| $T_{w,90} = 29.39^\circ\text{C}$ | |
| $T_{amb} = 24.95^\circ\text{C}$ | 298.1 K |
| $P_{atm} = 74660.52632 \text{ Pa}$ | |
| $g = 9.805 \text{ m/s}^2$ | |

| DERIVACION E INTEGRACION NUMERICA | |
|--|---------------------|
| $\Sigma h c_i = 16349.15$ | $m_{av} = 21016.23$ |
| $t_s = 199.50$ | $min = -24267.15$ |
| $h_{c,10} = 6.8292 \text{ W/m}^2\text{°C}$ | |
| $Nu_{c,10} = 1.9806$ | |
| %Error max = 0.53 | |

| REGRESION | |
|---|-------------------------|
| $n = 799$ | $\Sigma YZ = 273.3962$ |
| $\Sigma Y = -399.5000$ | $\Sigma Y^2 = 266.5002$ |
| $\Sigma Z = -414.2404$ | $\Sigma Z^2 = 280.6190$ |
| | $R^2 = 0.999218$ |
| $B = \Sigma YZ / \Sigma Y^2 = 1.025876$ Valor haciendo el intersepto igual a cero | |
| $B = h \Delta t_{90} / M c_p = 0.992896$ Valor con intersepto diferente de cero | |
| $T_{w,90} = 29.39^\circ\text{C}$ | |

$h_{p10} = 6.9087$
 $Nu_{Dp10} = 2.0022$

$\rho, \text{kg/m}^3 = 13556.61$
 $C_p, \text{J/kg K} = 139.0738$
 $M = 0.01077 \text{ kg}$

aire $T_{p10} = 24.95 \text{ }^\circ\text{C}$
 $k, \text{W/mK} = 0.025446$

$h_{p10}^* = 7.0087 \text{ W/m}^2\text{C}$ $Nu_{Dp10}^* = 2.0327$ Con intersección igual a cero
 $h_{p10}^{**} = 6.7834 \text{ W/m}^2\text{C}$ $Nu_{Dp10}^{**} = 1.9674$ intersección distinta de cero
 $h_{p10} = 7.0872 \text{ W/m}^2\text{C}$ $Nu_{Dp10} = 2.0554$ Con intersección igual a cero
 $h_{p10} = 6.8569 \text{ W/m}^2\text{C}$ $Nu_{Dp10} = 1.9887$ intersección distinta de cero

| PROPIEDADES AIRE | | | |
|-----------------------------|-------------|-------------------|-----------|
| M= | 28.97 | kg/kmol | |
| R= | 0.2897 | kJ/kgK | |
| a | b | c | d |
| 28.11 | 1.97E-05 | 4.80E-06 | -1.97E-09 |
| Cp= | 1005.28 | J/kg K | |
| $\mu =$ | 1.84757E-05 | Pa.s | |
| k= | 0.025446155 | W/mK | |
| Pr= | 0.7298290 | | |
| $\rho =$ | 0.865 | kg/m ³ | |
| $\beta =$ | 0.003 | 1/°C | |
| $\nu =$ | 2.137E-05 | m ² /s | |
| PARAMETROS CONVECCION LIBRE | | | |
| L= | 4.74E-02 m | Gr _L = | 68188.99 |
| D= | 7.38E-03 m | Re _L = | 49766.30 |
| L/D= | 6.42 | Gr _D = | 257.36 |
| | | Re _D = | 187.83 |

| VALORES ESPERADOS | HERMANN | |
|-------------------|--|---|
| | $\overline{Nu}_D = 0.372 Gr_D^{1/4}$ $Nu_D = 1.4900$ $h_{p10} = 5.1374$ | |
| | MERK AND PRINS $\overline{Nu}_D = \frac{C(Pr)(Gr_D Pr)^{1/4}}{C(Pr)} = C(Pr) Ra_D^{1/4}$ $\frac{C(Pr)}{C(Pr)} = 0.436$ $Nu_D = 1.6141$ $h_{p10} = 5.5654 \text{ W/m}^2\text{C}$ | ECKERT $\overline{Nu}_D = 0.53(Gr_D Pr)^{1/4}$ $Nu_D = 1.9621$ $h_{p10} = 6.7653 \text{ W/m}^2\text{C}$ |
| | MORGAN $\overline{Nu}_D = C Ra_D^n$ $C = 0.85$ $n = 0.188$ $Nu_D = 2.2745$ $h_{p10} = 7.8425 \text{ W/m}^2\text{C}$ | CHURCHILL $\overline{Nu}_D = 0.36 + \frac{0.518 Ra_D^{1/4}}{[1 + (0.559/Pr)^{4/5}]^{1/4}}$ $Nu_D = 1.8152$ $h_{p10} = 6.2587 \text{ W/m}^2\text{C}$ |

| | |
|---|---|
| <p>MORGAN</p> $\overline{Nu}_D = CRa_D^n$ <p>C= 0.85 n= 0.188</p> <p>$Nu_D = 2.2745$</p> <p>$h_{pro} = 7.8425 \text{ W/m}^2\text{C}$</p> | <p>CHURCHILL</p> $\overline{Nu}_D = 0.36 + \frac{0.518Ra_D^{1/4}}{[1 + (0.559/Pr)^{9/16}]^{4/9}}$ <p>$Nu_D = 1.8152$</p> <p>$h_{pro} = 6.2587 \text{ W/m}^2\text{C}$</p> |
| <p>KUEHN</p> $Nu_D = 2 / \ln \left[1 + 2 / \left\{ \left(0.518Ra_D^{1/4} [1 + (0.599/Pr)^{9/16}]^{-5/12} \right)^{15} + (0.1Ra_D^{1/3})^{15} \right\}^{1/15} \right]$ <p>$Nu_D = 2.330137$</p> <p>$h_{pro} = 8.0343 \text{ W/m}^2\text{C}$</p> | <p>CHURCHILL</p> $Nu^{1/2} = 0.36^{1/2} + \left[\frac{Ra_D}{300[1 + (0.5/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \right]^{1/6}$ <p>$Nu_D = 1.893441$</p> <p>$h_{pro} = 6.5286$</p> |

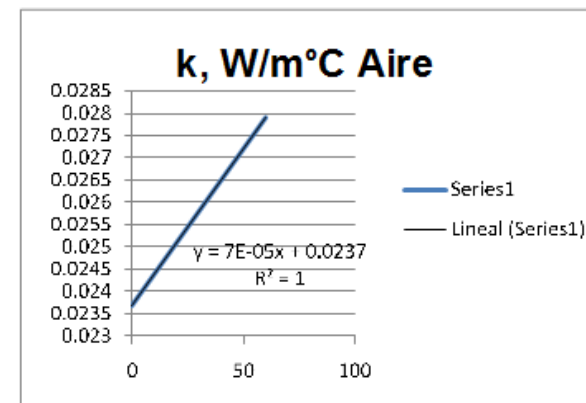
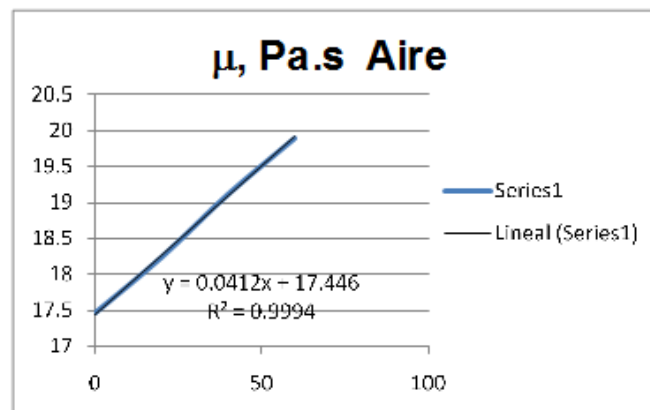
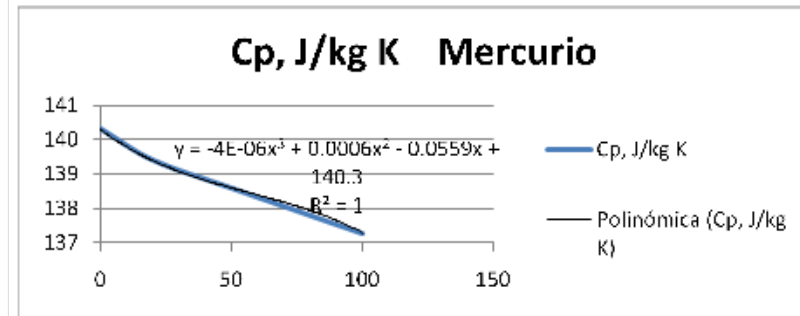
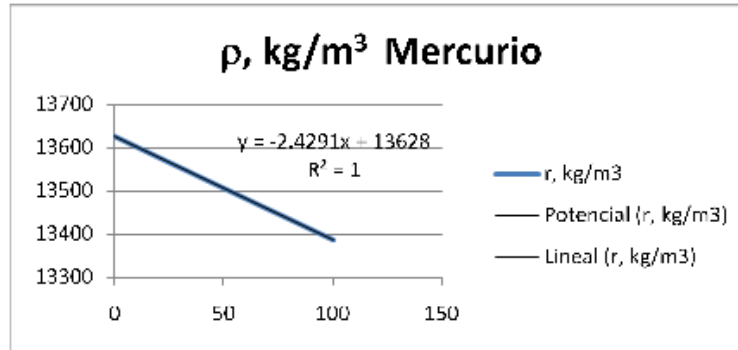
V. PARÁMETROS: ESPECIFICACIONES GEOMÉTRICAS Y PROPIEDADES

| ESPECIFICACIONES TERMÓMETRO | | |
|-----------------------------|-------------------------|------------|
| ASTM 56C - 86 | | |
| INTERVALO | 19 °C - 35 °C | |
| D= | 7.38 mm | 7.38E-03 m |
| R= | 3.69 mm | 3.69E-03 m |
| L= | 47.4 mm | 4.74E-02 m |
| A_L = | 1.10E-03 m ² | |
| A_T = | 4.28E-05 m ² | |
| A= | 1.14E-03 m ² | |
| V= | 2.03E-06 m ³ | |
| $L_c=V/A$ | 1.85E-03 m ³ | |
| L/D= | 6.4228 | |
| D/L= | 0.1557 | |

| ESPECIFICACIONES TERMÓMETRO | | |
|-----------------------------|-------------------------|------------|
| ASTM 56C - 86 | | |
| INTERVALO | 19 °C - 35 °C | |
| D_{int} = | 4.73 mm | 4.73E-03 m |
| R_{int} = | 2.36 mm | 2.36E-03 m |
| L^* = | 45.3 mm | 4.53E-02 m |
| k= | 1.09 W/mK | |
| A_L = | 6.72E-04 m ² | |
| A_T = | 1.75E-05 m ² | |
| A= | 6.90E-04 m ² | |
| V= | 7.94E-07 m ³ | |
| $L_c=V/A$ | 1.18E-03 m ³ | |
| L/D= | 9.5864 | |
| D/L= | 0.1043 | |
| Rw= | 1.44E+00 m K/W | |
| ARw= | 0.00157917 | |

| DATOS ESTEREOSCOPIO | | | | | | |
|---------------------|--------------|-----------|--------|--------|--------|--------|
| ZOOM | EQUIVALENCIA | | PARED | | PUNTA | |
| | | | lineas | mm | lineas | mm |
| 0.65 | 1 mm = | 13 lineas | - | - | 30 | 2.3077 |
| 1 | 1 mm = | 20 lineas | 29 | 1.4500 | - | - |
| 2 | 1 mm = | 40 lineas | 53 | 1.3250 | 84 | 2.1000 |
| 3 | 1 mm = | 55 lineas | 73 | 1.3273 | - | - |

| | | h, W/m ² ·C | | | |
|--|----|------------------------|-------------|-------------|-------------------|
| | | 4 | 5 | 7 | |
| Para la envoltura cilíndrica de vidrio | Bi | 0.004335279 | 0.005419099 | 0.007586739 | A _{Lint} |
| | | 0.006770642 | 0.001692661 | 0.011848624 | A _{Left} |



PROPIEDADES DEL AIRE

| T, °C | $\mu \times 10^6$, Pa.s | k, W/mC |
|-------|--------------------------|---------|
| 0 | 17.456 | 0.0237 |
| 20 | 18.24 | 0.0251 |
| 40 | 19.123 | 0.0265 |
| 60 | 19.907 | 0.0279 |

| a | b | c | d |
|-------|----------|----------|-----------|
| 28.11 | 1.97E-03 | 4.80E-06 | -1.97E-09 |

| M= | 28.97 | kJ/kmol | P, mm Hg | 560 | P, Pa | 74660.52632 |
|----|--------|---------|----------|-----|-------|-------------|
| R= | 0.2897 | kJ/kgK | | | | |

$$c_p = \frac{a + bT + cT^2 + dT^3}{M} \text{ kJ/kgK}$$

$$\rho = \frac{P}{RT} \text{ kg/m}^3$$

$$\beta = \frac{1}{T} \text{ K}^{-1}$$

$$\mu = 0.0412T + 17.446 \quad R^2 = 0.9994$$

$$k = 7E-05T + 0.0237 \quad R^2 = 1$$

PROPIEDADES DEL MERCURIO

| T, °C | ρ , kg/m ³ | Cp, J/kg K |
|-------|----------------------------|------------|
| 0 | 13628 | 140.3 |
| 20 | 13579 | 139.4 |
| 50 | 13506 | 138.6 |
| 100 | 13385 | 137.3 |

$$\rho = -2.4291T + 13628 \quad R^2 = 1$$

$$c_p = -4E-06T^3 + 0.0006T^2 - 0.0559T + 140.3 \quad R^2 = 1$$