

La correspondencia entre los puntos se hace usualmente por la búsqueda del vecino más cercano empleando una estructura en árbol k-d. La estructura k-d es un arreglo espacial de datos, originalmente propuesto para permitir una búsqueda eficiente en consultas de imágenes de rango y consultas de vecinos más cercanos. Greenspan y Godin [51] propusieron una mejora significativa en las consultas de vecinos más cercanos, usando correspondencias de iteraciones previas de ICP y buscando solamente en su pequeña vecindad para actualizar las correspondencias.

La desventaja de ICP es que requiere una buena pre-alineación de las vistas para que converja a una solución correcta. Se han propuesto muchas variantes de ICP para sobrellevar esta desventaja. Las principales diferencias entre estas variantes, son las funciones de evaluación que miden la calidad de las alineaciones en cada iteración y las reglas de rechazo, tales como, el descarte de puntos de frontera, que podrían conducir a coincidencias falsas. Chen y Medioni [26], desarrollaron un mecanismo que minimiza la suma de las distancias al cuadrado entre puntos en una vista, con respecto a un plano tangente en otra vista. Este acercamiento es relativamente más rápido que el ICP tradicional, y usualmente, los resultados que arroja son mejores si se provee una buena prealineación inicial. Sin embargo, este acercamiento presenta algunas dificultades numéricas en cuanto a las búsquedas, dado que algunas correspondencias pueden no encontrarse.

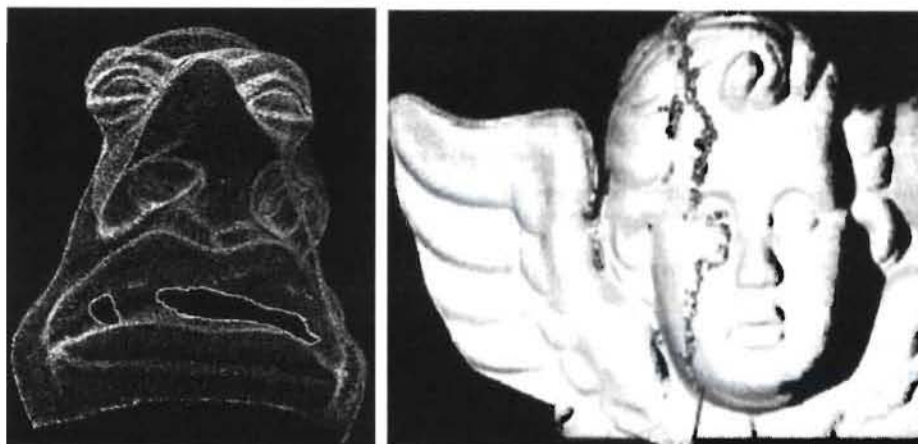
Limitaciones.

Pese a la satisfactoria convergencia del ICP, esta sólo se puede garantizar cuando una de las imágenes es un subconjunto de la otra; sin cumplir esto, se pueden alcanzar alineamientos erróneos. Aunque el ICP es eficiente, con un promedio de complejidad de $O(n \log n)$ donde n es el número de puntos en la imagen, el algoritmo converge monótonamente a un mínimo local.

En esta tesis se propone un método semiautomático para hallar la correspondencia de múltiples vistas de imágenes de rango con bajo solapamiento, mediante un enfoque basado en subdominios empleando algoritmos genéticos. El enfoque de subdominios reduce el espacio de búsqueda y mejora la eficiencia del método.

2.6 Integración.

La integración es una etapa del proceso de reconstrucción 3-D, que consiste en obtener una representación computacional suave y continua del objeto. Una vez se han registrado las



(a) Huevo generado por oclusión. (b) Anomalía causada por redundancia de datos.

Figura 2.7: Anomalía topológica sobre la superficie.

diferentes imágenes de rango utilizadas para el proceso de reconstrucción, se tiene un conjunto de datos en el espacio 3-D cuya conectividad y relación aún no está muy bien definida. debido a que los datos registrados en la etapa previa generan superficies parciales que poseen huecos, intersecciones poligonales, falsos bordes, entre otros. Además, el proceso busca eliminar toda la información redundante presente en aquellos casos en que se realiza un gran número de tomas del objeto en regiones con poca variación en su superficie, de tal manera, que se debe lograr llevar los datos a una representación única que defina de manera precisa la geometría del objeto.

Siguiendo la definición propuesta por Curless, el proceso de integración de imágenes de rango se describe así:

“Dado un conjunto p de imágenes alineadas y con ruido: $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_p$, encontrar la superficie que mejor aproxime los puntos contenidos en las imágenes de rango” [33]

En la Figura 2.7 se observa como la presencia de huecos y la redundancia de datos sobre la superficie, ocasionan distorsiones en la representación del objeto.

Turk y Levoy [106] presentaron un algoritmo llamado *Mesh Zipping*, como una forma de integrar imágenes de rango, el algoritmo consta de tres fases principales, en la primera fase se aplica el algoritmo de erosión que remueve los triángulos que pertenecen a los bordes de cada imagen. En la segunda fase, se corrigen los huecos que hayan surgido como consecuencia

de la etapa de erosión, teniendo en cuenta los datos coincidentes entre las imágenes. Por último, se optimiza el tamaño de los triángulos que se crearon en la fase de llenado (que generalmente son muy pequeños), con el fin de disminuir el número de elementos de superficie de la representación. Este método, además de requerir mucha información para hacer la reconstrucción, no hace buenas representaciones en esquinas y bordes, lo que incrementa el nivel de complejidad de la representación.

Hoppe [57] introdujo un algoritmo que utiliza una función de distancia con signo entre puntos cercanos a la superficie estimada y luego aplica la extracción de la iso-superficie resultante de los cruces por cero, mediante la ejecución de un algoritmo de tomas de contorno sobre una región de espacio cercano al valor de distancia igual a cero y que además contenga el conjunto de datos. La función de distancia se extrae por medio del uso de matrices de co-varianza locales, para luego pasar a una representación en grafos de Riemman. Para asegurar la corrección en la dirección de las normales a los planos consecutivos, se aplica un algoritmo de propagación llamado *Minimal Spanning Tree*, que es también utilizado en segmentación a bajo nivel, para este caso se debe destacar que el uso de matrices de co-varianza es altamente sensible al ruido.

Por otro lado Bajaj *et al.* [4] implementaron un mecanismo de integración basado en una reconstrucción polinomial implícita tricúbica o tricuatráctica local ajustada por mínimos cuadrados a una función de distancia con signo, obtenida de los datos desorganizados, los cuales son representados en una forma derivada de la malla de triángulos llamado *octrees*. A diferencia de Hoppe [57], los autores extraen la función de distancia con signo, obteniendo los planos de pendiente en cada punto por ajuste de mínimos cuadrados a un vecindario y verificando la correlación entre las normales de los planos adyacentes. El ajuste polinómico para la extracción de la iso-superficie se realiza de manera recursiva, dividiendo el conjunto de datos en subconjuntos cada vez más pequeños, hasta que el error sea menor que un umbral determinado.

Hilton [56] desarrolló un método en el cual utiliza una función de distancia con signo para realizar la extracción de la iso-superficie dada por esta función implícita, pero la aplica sobre muestras de una función continua para muestrear los datos estructurados, y además añade un término de ponderación a cada punto. El término de ponderación se toma de acuerdo con el producto punto entre la normal a la superficie en cada dato y la dirección de captura, teniendo un tratamiento especial para los puntos ubicados en los bordes de cada imagen de profundidad.

Curless *et al.* [36] presentaron un algoritmo volumétrico para la integración de imágenes de rango, el cual combina características de los anteriores. Esta aproximación introduce términos probabilísticos que definen la incertidumbre a lo largo de las líneas de captura, actualizacio-

nes incrementales en el algoritmo y reducción de espacio de almacenamiento. El carácter volumétrico de este método permite hacer una clasificación por medio de *vóxeles* y la reducción final de esta caracterización facilita la eliminación de huecos en el modelo integrado.

Pito [83] presenta un método de integración basado en co-medidas (triángulos), el método se encarga de mantener aquellos triángulos más confidencialmente adquiridos, la confidencialidad está relacionada con la orientación y posición del sensor, después de eliminar los triángulos redundantes se establecen nuevas relaciones entre los triángulos vecinos, cerrando los huecos entre mallas adjuntas. Se destaca como desventaja de este método la utilización de muchos recursos computacionales. Como ventajas tiene la facilidad de ser eficiente en superficies con grandes curvaturas.

Davis *et al.* [37] usan un acercamiento de difusión volumétrica que consiste en convertir una superficie en una representación basada en *vóxeles* con una función de distancia con signo asociada. El algoritmo de difusión consiste de pasos alternados de borrado y composición, después de los cuales, la superficie final se extrae empleando el algoritmo *Marching Cubes*.

Pulli [85] desarrolló una técnica mediante la cual se divide el espacio de trabajo en un conjunto de *vóxeles*, a los cuales se les realiza una clasificación dependiendo de la ocupación volumétrica del objeto en ellos, proyectando jerárquicamente el conjunto de cubos sobre cada una de las superficies de profundidad previamente registradas. Cada cubo es clasificado según las siguientes reglas: Si la información en todas las superficies dice que el cubo está fuera del volumen del objeto, el cubo es eliminado. Si la información en todas las superficies indica que el cubo pertenece al volumen del objeto, entonces se clasifica como perteneciente al objeto. En otro caso se dice que el cubo pertenece al borde del objeto. La reducción se realiza mediante el uso de la representación en *octrees*, lo cual agiliza el algoritmo y se realiza de manera recursiva incrementando la resolución de los cubos. La extracción de la superficie global integrada del objeto se obtiene descendiendo hasta los niveles de mayor resolución en el *octree* y realizando triangulación entre dichos elementos.

Limitaciones.

Los métodos descritos en la literatura realizan la corrección de anomalías topológicas, asociadas con ausencia de información, mediante técnicas manuales de post-procesamiento aplicadas después de la etapa final de la reconstrucción de superficies, o son corregidas de manera implícita durante la etapa de ajuste de superficies realizando una reconstrucción global del objeto, lo cual genera altos costos computacionales.

En esta tesis se propone un método automático para la detección y análisis de huecos de

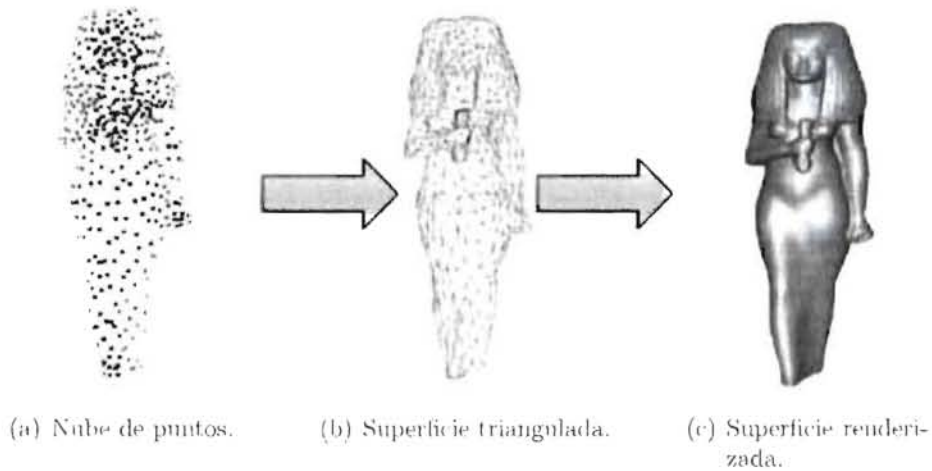


Figura 2.8: Ajuste de superficies.

modelos triangulares, a partir de la estimación de la variación de la torsión de la curva de contorno y un método automático para el llenado de huecos usando un interpolante de funciones de base radial local.

2.7 Ajuste de Superficies.

El objetivo de esta etapa es brindar la mejor estimación digital de una superficie real descrita por un conjunto conocido de puntos (ver Figura 2.8). Formalmente, el ajuste de superficies se puede definir como:

“Sea S una superficie bidimensional perteneciente a un objeto O , incluida en el espacio tridimensional Euclidiano \mathbb{R}^3 , y el conjunto de puntos $p_i \in P \subset \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n$, un conjunto de muestras discretas de la superficie S . El ajuste consiste entonces en encontrar una superficie S' que aproxime S usando los datos del conjunto P , siendo la superficie reconstruida S' topológicamente equivalente a la superficie S del objeto original O [60]”.

El ajuste de superficies se concentra en obtener una descripción digital precisa, concisa y aproximada a la superficie real. Para ajustar una representación de una superficie de manera

concisa y precisa, se necesita alguna clase de medida de la precisión y la concisión. La concisión puede ser medida por el número de bytes que se necesitan para almacenar la representación de la superficie ajustada, las representaciones concisas no sólo ahorran memoria, también permiten un procesamiento más rápido de la superficie. La precisión de la superficie ajustada determina la cercanía entre la superficie física y la superficie ajustada S' . Puesto que la superficie es conocida sólo por algunas muestras ruidosas, la precisión es medida usando algunas suposiciones sobre su ruido. Por ejemplo, se puede asumir que las muestras incluyen ruido gaussiano aditivo el cual no es correlacionado entre diferentes muestras.

Los métodos de ajuste de superficies se pueden clasificar, según Hrádek [60], como métodos de aproximación o interpolación si la superficie final reconstruida pasa cerca o toca todos los puntos. Es decir, los métodos de interpolación construyen superficies que pasan exactamente a través de los puntos, mientras los métodos de aproximación sólo requieren que la superficie se acerque a los puntos. Los métodos que pertenecen a la segunda clase normalmente son la elección más adecuada, dado que los datos con los que se trata suelen contener ruido. Se pueden clasificar también como globales o locales de acuerdo al grado de influencia de cada punto sobre la superficie. En los métodos globales, todos los puntos son utilizados para definir el interpolante, mientras que en los métodos locales, sólo puntos cercanos son utilizados para calcular un segmento de la superficie.

Muchos esfuerzos se han dirigido a encontrar un método general que permita obtener el modelo matemático de un objeto a partir de las muestras tomadas de la superficie de éste. Como resultado de estos esfuerzos, y del hecho de que se trata de una tarea no trivial, muchos métodos de representación de superficies han sido desarrollados, entre los que se pueden destacar: las mallas triangulares, las funciones de base radial y las superficies NURBS.

En 1962 el ingeniero francés Étienne Bézier presentó un notable avance en el ajuste de superficies [31]. Trabajando para la compañía Renault en el diseño de carrocerías de automóviles, Bézier desarrolló la teoría de curvas y superficies de Bézier. Las superficies de Bézier son combinaciones lineales de los polinomios de Bernstein, expresados como productos tensoriales de funciones paramétricas univariadas, las cuales pueden modelar una superficie a partir de un conjunto de puntos llamados puntos de control. Las superficies de Bézier presentan el inconveniente de la influencia global de los puntos de control; es decir, que el movimiento de un punto de control, influencia la totalidad de la superficie, característica no deseable en el diseño.

Cox [32] generalizó las curvas y superficies de Bézier para dar lugar a las curvas y superficies B-Spline. Las superficies B-Spline incorporaron importantes propiedades mediante la inclusión del vector de nodos (knots), como la propiedad de modificación local de la superficie y la reducción del orden de las funciones base B-Spline, entre otras. Gracias a la propiedad

de modificación local, las B-Spline poseen menor error de ajuste sobre los puntos de control en comparación con las superficies de Bézier. A pesar de las bondades de las superficies B-Spline, éstas presentan como inconveniente la imposibilidad de representar superficies cónicas y en general superficies arbitrariamente curvadas. Eck *et al.* [42] reconstruyen una superficie B-Spline de topología arbitraria sin asistencia del usuario, direccionado a una reconstrucción automática de la superficie. En este punto, el uso de knots libres ha sido un tema de investigación de autores como Schwetlick [98] y Schütze [96].

Versprille [108] extendió las superficies B-spline a B-Spline racionales no uniformes, más conocidas como NURBS. Muchas de las propiedades y algoritmos sobre las NURBS, son presentados por Piegl y Tiller [82]. Una extensión de las NURBS, son las NURBS dinámicas (D-NURBS), en las cuales las curvas o superficies varían con el tiempo, haciendo los pesos w_{ij} dependientes del tiempo. Las NURBS por sus propiedades de modificación local, representación de superficies cónicas y arbitrariamente curvadas, rápidamente ganaron aceptación, convirtiéndose a la fecha en un estándar de los sistemas CAD/CAM. Las NURBS incorporan factores de peso para dar mayor flexibilidad a la superficie; estos factores especifican qué tanto influye un punto dentro de su localidad y pueden ser empleados para mejorar el ajuste de la superficie sobre puntos de control. Aunque la manipulación de los pesos implica tratar con problemas no lineales durante el proceso de ajuste. Al igual que las superficies de Bézier y las superficies B-Spline, las NURBS requieren que los puntos de control posean topología rectangular; esto es, se requiere que los datos sean ordenados y que un recorrido por fila sobre éstos, reporte la misma cantidad de puntos en cada una de ellas.

En cuanto a la determinación de los parámetros de las NURBS, Laurent [66] usa una versión mejorada del algoritmo "Polak-Ribière" para minimizar algunos costos funcionales sin la reducción del número de parámetros. En este sentido, diferentes aproximaciones se han presentado para solucionar el problema de optimización de la superficie NURBS. Weinert [111] empleó una estrategia evolutiva para aproximar superficies NURBS a conjuntos de puntos 3-D. La estrategia consistía en dejar fijos los puntos ubicados en el borde de la superficie NURBS durante el proceso de optimización, lo que permitía reducir la dimensión del espacio de búsqueda, determinar la ubicación de los puntos de control y determinar los valores de los knots de la superficie NURBS, de manera que la distancia a la superficie original fuera la más cercana posible.

Randrianarivony [87] considera el problema de reconstruir una superficie desde muestras ruidosas por aproximación del conjunto de puntos con superficies NURBS. Este autor se enfoca en que la secuencia de knots debe ser parte de las variables desconocidas que incluyen los puntos de control y los pesos para encontrar la posición óptima, y demuestra como los knots libres contribuyen eficientemente a optimizaciones no lineales. Finalmente, realiza una aplicación de un clúster para la implementación de estas NURBS. Este método en realidad,

sólo es aplicado a curvas de superficies NURBS; no ha sido aplicado al trabajo con objetos reales y las pruebas fueron realizadas con datos sintéticos.

Métodos de Representación de Superficies.

La descripción de una superficie puede ser una función explícita $z = f(x, y)$, implícita $f(x, y, z) = 0$, parametrizada $x = f_1(u, v)$, $y = f_2(u, v)$, $z = f_3(u, v)$, o dada por un conjunto de parches conectados (planos o curvos), por ejemplo, una malla triangular. Todos tienen diferentes propiedades de suavidad y diferente capacidad para describir topologías arbitrarias.

Una discusión acerca de diferentes curvas y representación de superficies y sus ventajas y desventajas relativas para propósitos prácticos en aplicaciones basadas en CAD son dadas por Pratt [84]. A continuación se describen algunas de las representaciones y clasificaciones más comunes en reconstrucción de superficies.

Rejilla (Grid). Esta es una versión discreta de una superficie explícita. Dada una rejilla 2-D (con frecuencia rectangular) en el plano xy , se puede asociar un valor z_{ij} a cada punto (x_i, y_j) de la rejilla. Por supuesto, también es posible tener una rejilla en otro sistema de coordenadas, por ejemplo $\gamma_{i,j} = \gamma(\theta_i, \varphi_j)$ en coordenadas esféricas. Las rejillas son relativamente fáciles de calcular, pero debido a que son discretas, se debe usar alguna clase de técnica de interpolación para obtener los puntos en la superficie entre los puntos de la rejilla. Para modelar detalles pequeños se debe usar una rejilla densa o usar alguna clase de rejilla jerárquica. Las rejillas se utilizan con frecuencia como representación intermedia cuando se construyen representaciones más complejas.

Malla triangular. Una malla triangular plana consiste en las coordenadas 3-D de un conjunto de puntos en la superficie, y de una estructura que describe como estos puntos están conectados con triángulos. La malla representa una superficie continua pero no suave. La densidad de triángulos en diferentes áreas de la superficie, puede ser variada para lograr buenas aproximaciones de la superficie física en áreas con detalles finos o curvaturas elevadas sin pérdida de simplicidad. Las mallas triangulares son una representación común de superficies de las que no se requiere un conocimiento previo y complejo de su topología. La simplicidad de las mallas triangulares planas radica en el hecho de que tres puntos no colineales en el espacio 3-D están contenidos en un único plano.

Subdivisión de superficie. Una malla puede ir acompañada de reglas acerca de cómo subdividirla en mallas más finas. La aplicación de estas reglas, recursiva e indefinidamente, conduce a una superficie con un mayor grado de suavidad que la malla original. El grado de suavidad depende de las reglas de subdivisión. La representación consiste en una malla original

Ajuste de Superficies

y sus reglas. Esto es conveniente para representar superficies suaves (o segmentos de curva suave), cuya geometría y topología sea compleja. El inconveniente de esta representación es que los puntos en las superficies no están dados de forma explícita.

Superficies de funciones explícitas. Una superficie de función explícita es la gráfica de una función $z = f(x, y)$. El ajuste de tales superficies es relativamente simple. Desafortunadamente sólo unas pocas superficies físicas pueden ser modeladas como superficies de funciones. Esto, porque en muchas superficies existe al menos un punto (x_i, y_i) para el cual están asociados dos o más valores de z . Algunas veces, con un cambio de variable, es posible convertir una superficie de función en una superficie paramétrica. Por ejemplo, una esfera no puede ser representada por una superficie de función usando coordenadas cartesianas, pero usando coordenadas esféricas el radio puede ser tratado como una función del ángulo.

Superficies implícitas. Una superficie implícita es el conjunto de nivel de una función $f(x, y, z)$. Usualmente la función está definida de manera que la superficie buscada sea igual al conjunto cero de la función. Una elección común de representación de superficies implícitas para superficies de reconstrucción son las supercuadráticas, o su extensión en hipercuadráticas e híbridas hipercuadráticas. Una supercuadrática (en su forma canónica), se define por la ecuación:

$$\left(\left(\frac{x}{a_1} \right)^{\frac{2}{a_4}} + \left(\frac{y}{a_2} \right)^{\frac{2}{a_4}} \right)^{\frac{a_4}{a_5}} + \left(\frac{z}{a_3} \right)^{\frac{2}{a_5}} - 1 = 0 \quad (2.1)$$

donde los parámetros a_1, a_2, a_3 determinan el tamaño del objeto y a_4, a_5 determinan la redondez.

Las superficies implícitas se usan con frecuencia en métodos volumétricos para la construcción de triangulaciones. En estas aplicaciones la función $f(x, y, z)$ se escoge como una función de distancia [33,58]. La clase de superficies implícitas es mucho más grande que la clase de superficies paramétricas, puesto que todas las superficies paramétricas pueden ser transformadas a implícitas pero no al contrario.

Superficies paramétricas. Una superficie paramétrica es una colección de puntos que pueden ser escritos como:

$$x = f_1(u, v), y = f_2(u, v), z = f_3(u, v) \quad (2.2)$$

donde (u, v) son los parámetros de la superficie. Una parametrización trivial es $x = u, y = v, z = f(u, v)$, la cual es una superficie de función explícita. Escogiendo otras parametrizaciones, superficies más complejas pueden ser representadas. La aproximación paramétrica puede

ser utilizada cuando se ajusta a un B-Spline paramétrico, pero también son posibles otras alternativas paramétricas.

Las superficies paramétricas tienen un buen número de propiedades pero en problemas de ajuste, puede ser difícil encontrar una parametrización adecuada. Las superficies paramétricas son usadas en muchas formas por muchos de los sistemas modernos CAD/CAM.

Superficie B-Spline por producto tensorial. Las curvas Spline son segmentos polinomiales donde el cambio de polinomios ocurre en puntos de control. Sólo a las derivadas de orden superior se les permite ser discontinuas en los puntos de control. Todas las derivadas de orden inferior son continuas en todas partes excepto en puntos de control coincidentes. Una curva B-Spline de grado k , con secuencia de control $\Lambda = \{\lambda_{-k}, \dots, \lambda_{g+k+1}\}$, es una combinación lineal de funciones base B-Spline univariadas $N_{i,k}$ definida recursivamente como:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_i \leq u \leq \lambda_{i+k} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$N_{i,l+1}(u) = \frac{u - \lambda_i}{\lambda_{i+1} - \lambda_i} N_{i,l}(u) + \frac{\lambda_{i+l+1} - u}{\lambda_{i+l+1} - \lambda_{i+1}} N_{i+l,1}(u) \quad (2.4)$$

Una superficie B-spline paramétrica de producto tensorial $S(u, v) \in \mathbb{R}^3$ de grados (k, q) se define como:

$$S(u, v) = \sum_{i=k}^g \sum_{j=q}^h a_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,q}(v) \quad (2.5)$$

donde los coeficientes $a_{i,j} \in \mathbb{R}^3$ son llamados puntos de control, $N_{i,k}(u)$ y $M_{j,q}(v)$ son bases B-Spline univariadas de grado q , con q definido para la secuencia de control $\Lambda = \{\lambda_{-k}, \dots, \lambda_{g+k+1}\}$ y $\Gamma = \{\gamma_{-q}, \dots, \gamma_{h+q+1}\}$ respectivamente.

Las funciones base tienen soporte local, por ejemplo $N_{i,k}(u) = 0$, si u está fuera del intervalo $[U_i, U_{i+k+1})$. Esto significa que la determinación de puntos de control y puntos de evaluación sobre la superficie B-Spline llega a ser eficiente. También es posible variar la cantidad de detalles que pueden ser modelados cambiando el número de puntos de control en una cierta área. Las superficies B-Spline son adecuadas para propósitos de diseño. Esto, debido a que la superficie está completamente determinada por sus puntos de control $a_{i,j}$. Moviendo un punto de control, la superficie cambia de manera predecible. La propiedad de soporte local implica que el movimiento de un punto de control sólo afecta la superficie localmente.

La principal dificultad en aplicaciones de ajuste es encontrar una parametrización adecuada y escoger automáticamente el número de puntos de control y sus posiciones. En muchas aplicaciones los grados (k, q) se escogen menores o iguales a tres.

Si consideramos el intervalo $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ (esto no es una restricción puesto que fácilmente puede escalarse a un intervalo arbitrario) y hacemos $g = h = 0$, y la secuencia de control como $\Lambda = \{0, \dots, 1, 0, \dots, 1\}$, $\Gamma = \{0, \dots, 1, 0, \dots, 1\}$, entonces la superficie B-Spline se convierte en una superficie Bézier. Esto se deduce del hecho que el producto tensorial $N_{i,k}(u)M_{j,q}(v)$ se convierte en un producto tensorial de bases Bernstein $B_{i,k}(u)B_{j,q}(v)$ definido como:

$$B_{i,k}(u) = \frac{k!}{i!(k-i)!} u^i (1-u)^{k-i} \quad (2.6)$$

Así, la clase de superficies Bézier, la cual ha sido muy popular en sistemas CAD/CAM, está incluida en la clase de superficies B-Spline. La literatura sobre superficies Splines es amplia, Dieckx [80] considera los aspectos sobre como usar Splines en aplicaciones de ajuste, y Farin [45] usa Splines para propósitos de diseño.

En la literatura hay varias extensiones y modificaciones al concepto estándar de Spline. Uno es el concepto de Splines triangulares. También se encuentran los Splines de caja (box Splines), Splines trigonométricos, Splines beta, Splines bajo tensión y Splines esféricos. Aunque algunos de ellos son de interés en reconstrucción de superficies, hoy en día no se encuentran entre los principales métodos de reconstrucción de superficies. Por eso no son considerados más adelante en este trabajo.

Parches curvados. Comparado con las mallas triangulares planas, obtenemos una representación más general, permitiendo parches curvados con tres o más lados. Los más comunes son los cuadriláteros, los cuales son usados en el producto tensorial de superficies y triángulos curvados (Ej. parches Bézier triangulares) [45]. Incorporando restricciones a los diferentes parches, es posible representar superficies suaves de topología arbitraria.

Además, para las representaciones mencionadas anteriormente, hay varias extensiones y modificaciones. Muchas de ellas utilizan el mismo principio que el producto de tensores de superficies B-Spline; por ejemplo, expresar la superficie como una combinación lineal de productos de tensores de funciones base. La diferencia es la elección de las funciones base. Algunos ejemplos son funciones trigonométricas y polinomios de Chebyshev.

Las Representaciones y métodos basados en análisis multiresolución (MRA) y Wavelets, han sido muy exitosos en el área de análisis de imagen y procesamiento de señales. Las

propiedades básicas, tales como la posibilidad de representar eficientemente detalles locales y la disponibilidad de algoritmos eficientes, también son atractivos para la reconstrucción de superficies. Recientemente, MRA ha comenzado a ser más común en las aplicaciones de reconstrucción de superficies y muy prometedor en las aproximaciones existentes. Un método que aplica MRA a la subdivisión de mallas es presentado por Lounsbery [70], que también incluye referencias a otras aplicaciones de MRA para la reconstrucción de superficies. La conexión entre las B-Splines y las Wavelets es bien conocida, la traslación y dilatación de funciones B-Splines han sido usadas para formar un Spline Wavelet. También el concepto de Spline Jerárquico, se ve como una alternativa para incorporar MRA en el campo de la reconstrucción de superficies.

Los diferentes tipos de representación de superficies enunciados anteriormente, poseen diferente grado de suavidad. La suavidad está determinada por la continuidad de las derivadas. Un requerimiento de bajo orden es que la superficie misma sea continua pero no suave (incluyendo bordes o esquinas agudas). Si se quiere una superficie visible suave, una elección común es requerir que la superficie sea continua, geométrica y de primer orden. Esto significa que un plano tangente debería variar continuamente en la superficie.

Es claro que si la superficie a reconstruir es el borde de un objeto, entonces se requiere que la superficie sea cerrada. Las superficies implícitas tienen esta propiedad, pero las no paramétricas no cuentan con ella, a menos que usen funciones que sean periódicas con respecto a los parámetros. Superficies representadas por mallas, como las mallas triangulares, llegan a ser cerradas sólo si la condición de cierre es explícitamente considerada durante la construcción de la malla.

Superficie NURBS. Un inconveniente con las curvas y superficies B-Spline, es que las secciones cónicas no pueden ser representadas exactamente. Para tener una representación uniforme tanto de superficies de forma libre como de secciones cónicas, muchos de los sistemas CAD/CAM modernos han incorporado el uso de NURBS. Las superficies NURBS (Non Uniform Rational B-Spline), son productos tensoriales paramétricos definidos mediante la siguiente expresión matemática:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=-k}^g \sum_{j=-q}^h N_{i,k}(u) M_{j,q}(v) a_{i,j} w_{i,j}}{\sum_{i=-k}^g \sum_{j=-q}^h N_{i,k}(u) M_{j,q}(v) w_{i,j}} \quad (2.7)$$

donde $w_{i,j}$ son los pesos, $P_{i,j}$ los puntos de control de la superficie, y $N_{i,p}(u)$, $N_{j,q}(v)$, son las i -ésima y j -ésima funciones base B-Splines de orden p y q respectivamente, definidas sobre los soportes de nodos (knots) no periódicos $S_u = \{u_0, \dots, u_r\}$, $S_v = \{v_0, \dots, v_r\}$, las cuales pueden ser calculadas de manera recursiva conforme a la siguiente expresión [31]:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, N_{i,p}(u) = \frac{(u - u_i)N_{i,p-1}(u)}{u_{i+p} - u_i} + \frac{(u_{i+p+1} - u)N_{i+1,p-1}(u)}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} \quad (2.8)$$

Según Jung [64], las NURBS han llegado a ser un estándar en el modelamiento por computador, porque ellas tienen las siguientes propiedades:

- Las NURBS proporcionan un control local. El mover un punto de control, sólo afecta la forma de la superficie cerca al punto de control. Por esto, el diseño de superficies con control local, es mucho más intuitivo que el diseño sin control local, como las superficies de Bézier.
- Ellas son invariantes ante el escalado, traslación y rotación, a diferencia de representaciones como las superficies Bézier y B-splines que si son sensibles ante estos factores. Esto significa que estas transformaciones necesitan ser aplicadas solo a puntos específicos de control de la superficie y no a todos y cada uno de tales puntos. Esto es muy importante, porque ahorra mucho tiempo de renderización.
- Las superficies NURBS pueden ser usadas para definir con exactitud superficies cuádricas, tales como esferas y elipsoides, formas que son comunes en objetos de forma libre. Las B-Spline sólo pueden aproximar tales superficies y requieren el manejo de muchos puntos de control para ello.

Limitaciones.

En la actualidad existen técnicas que han mostrado ser aptas para ajustar o modelar suavemente objetos de forma libre, pero dichas técnicas aún presentan características no deseables que muestran claramente limitaciones como: la dificultad en el modelamiento de detalles finos de las superficies de los objetos 3-D, la presentación de pruebas con superficies suaves de baja curvatura y con datos sintéticos, la falta de una descripción explícita del método empleado para el cálculo del error y el alto costo computacional.

En esta tesis se propone un método de ajuste de superficies de objetos de forma libre empleando parches NURBS optimizados por estrategias evolutivas, a partir de una malla triangular cuadrilateralizada mediante análisis espectral de mallas y teoría de Morse, regularizada mediante B-Splines y curvas Geodésicas, garantizando continuidad C^1 entre la unión de los parches.

Capítulo 3

REGISTRO DE IMÁGENES DE RANGO PARCIALMENTE SOLAPADAS EMPLEANDO ALGORITMOS GENÉTICOS.

3.1 Introducción.

El proceso de correspondencia o registro (del término en inglés *Registration*) entre imágenes, consiste en encontrar la mejor transformación geométrica, que, al ser aplicada a una vista, la superponga con la otra en un sistema de coordenadas común. Este proceso es posible realizarlo con dos enfoques generales, el registro mediante procedimientos secuenciales y el registro simultáneo del conjunto de vistas que describen el objeto.

El registro secuencial o en parejas, consiste en colocar dos vistas a la vez. Las vistas restantes se registran secuencialmente con el modelo que resulta del registro anterior. El registro simultáneo o global es realizado usando una medida global del error entre todas las vistas.

Desde 1992, con la aparición del algoritmo ICP (*Iterative Closest Point*) [11], son numerosas las variantes que han surgido para mitigar las deficiencias de este método. Este algoritmo planteó un esquema básico para la obtención del alineamiento, minimizando una función de costo basada en la suma de los cuadrados de las distancias entre los puntos de las imágenes; el procedimiento básico involucra la identificación de las características, emparentamiento de las características correspondientes y el alineamiento de estas correspondencias por medio de

la evaluación de una métrica para el error [11, 26]. Este método, está también compuesto de dos procedimientos: el primero es encontrar los puntos correspondientes y el segundo, estimar las transformaciones iterativamente para estos puntos, hasta satisfacer un nivel de precisión.

Otro enfoque para el registro de imágenes de rango, consiste en determinar, a través de un proceso de búsqueda, un conjunto de correspondencias de puntos de las imágenes, en lugar del enfoque clásico basado en distancia. El enfoque basado en búsqueda presenta varias ventajas con respecto al método basado en distancia, tales como: no requiere un pre-alineamiento fino, el conjunto de datos de la imagen a registrar no debe ser un subconjunto de la imagen de referencia y además, porque lleva a cabo una exploración combinatoria, guiada por un dominio creado a partir de los vecinos que se encuentran alrededor del punto en la imagen de referencia más cercano al punto de muestreo en la imagen a registrar, lo que permite obtener una mejor correspondencia entre los datos. De manera general, el enfoque basado en búsqueda consiste en encontrar una solución cercana al mínimo global en un tiempo razonable y una forma de realizar esta búsqueda es mediante algoritmos genéticos (AG).

Los algoritmos genéticos son métodos computacionales basados en evolución natural, en los cuales, una población de individuos que representan una posible solución, es evolucionada a través de una sucesión de ciclos de selección, reproducción, mutación y reemplazo, hasta encontrar la solución deseada [20].

En este capítulo se presenta un procedimiento basado en AG para el problema de registro de múltiples imágenes de rango. Este procedimiento se enfoca, en el problema de la obtención de la mejor correspondencia entre puntos, a través de un método robusto de búsqueda sobre imágenes que están parcialmente solapadas. Este procedimiento de búsqueda se realiza con un enfoque basado en subdominios del espacio de búsqueda, lo que reduce la complejidad del método y mejora la eficiencia. El conjunto de correspondencias obtenido permitirá calcular una transformada que registre con precisión las imágenes.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: En la sección 3.2, se describe el algoritmo ICP y sus variantes. En la sección 3.3, se presenta el método propuesto para el registro de imágenes de rango parcialmente solapadas empleando algoritmos genéticos. En la sección 3.4, se presentan los resultados, y por último, en la sección 3.5, se presentan las conclusiones.

3.2 Algoritmo ICP (*Iterative Closest Point*).

Un conjunto de puntos se mueve de manera rígida, de forma que queden alineadas de la mejor manera posible con su correspondiente modelo CAD, a través del siguiente procedimiento iterativo [10]:

1. En el primer paso de cada iteración, por cada punto de la imagen a registrar $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, se calcula el punto más cercano en la imagen de referencia $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, donde cada punto a_i se corresponde con el punto b_i . Esta es la parte del algoritmo que consume más tiempo. Como resultado del primer paso, se obtiene una secuencia de los puntos más cercanos en la imagen de referencia correspondientes con los puntos muestreados en la imagen a registrar.
2. En el segundo paso de cada iteración, el movimiento rígido M se calcula tal que los puntos de datos transformados $M(a_i)$ sean los más cercanos a sus puntos correspondientes b_i , donde la función objetivo a minimizar es:

$$\sum_{i=1}^n \| b_i - M(a_i) \|^2 \quad (3.1)$$

Este problema de mínimos cuadrados se puede resolver explícitamente. La parte translacional de M trae el centro de masa de A al centro de masa de B . La parte rotacional de M se puede obtener como el vector propio unitario que corresponde al máximo valor propio de una matriz simétrica 4×4 . El vector propio solución no es más que el cuaternión unitario de la parte rotacional de M .

3. En el tercer paso, el conjunto de datos se actualiza vía $A_{nueva} = M(A_{vieja})$. Ahora los pasos 1 y 2 se repiten, usando los datos de los puntos actualizados, mientras el cambio en el error cuadrático medio se mantenga por encima de un umbral pre-seleccionado. El algoritmo ICP siempre converge monótonicamente a un mínimo local, ya que el valor de la función objetivo siempre se decrementa en los pasos 1 y 2. De manera general, el algoritmo clásico ICP, puede verse en el Algoritmo 3.1.

3.2.1 Taxonomía de las variantes del algoritmo ICP.

Las variantes introducidas desde la aparición del ICP, se pueden clasificar de acuerdo a la etapa del algoritmo original que modifican en [91]: