UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Procesos de Advección-Difusión en Grafos y su Comportamiento Asintótico

Natalia Cardona Tobón

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2015

Procesos de Advección-Difusión en Grafos y su Comportamiento Asintótico

Natalia Cardona Tobón

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ciencias-Matemáticas

Director:
Ph.D. Jorge Mario Ramírez Osorio

Línea de Investigación:
Procesos de Difusión

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2015

Índice general

Índice general iv

Introducción vi

1. Preliminares Matemáticos 1

1.1. Procesos de Markov 1

1.2. Tiempos de Parada 4

1.3. Semigrupos y Procesos de Feller 5

1.3.1. Generador Infinitesimal y Resolvente 7

1.3.2. Ecuaciones de Kolmogorov 9

1.4. Procesos de Difusión 10

2. Procesos de Difusión en Grafos 12

2.1. Motivación: Procesos de Difusión Unidimensionales 12

2.2. Redes: Definiciones y Notación 14

2.3. Existencia de Procesos de Difusión sobre Grafos 16

2.4. Derivación del Modelo sobre un Grafo 18

2.4.1. Ductos Heterogéneos 21

3. La Función de Green, la Solución Fundamental y su Comportamiento Asintótico 23

3.1. Construcción de la Función de Green 24

3.1.1. Función de Green sobre una arista 24

3.1.2. Función de Green sobre una red 27

3.2. La Transformada de Laplace y su Comportamiento Asintótico 29

3.2.1. Aplicación del Teorema Tauberiano 31

4. Tiempos de Parada 35

4.1. Tiempos de Llegada y Probabilidades de Colonización en Grafos 35

4.1.1. Tiempos de Llegada 36
4.1.2. Tiempos de Escape y Probabilidades de Colonización 39
4.2. Aplicación y Resultados 43
4.2.1. En una arista, $\Gamma = [0, l]$ 43
4.2.2. Ductos Heterogéneos, $\Gamma =$ −•− 45
4.2.3. Red de drenaje, $\Gamma = \mathsf{Y}$ 47

Conclusiones **50**

Bibliografía **53**

Introducción

La teoría de los procesos de difusión ocupa un lugar central en los procesos estocásticos debido en gran parte a sus múltiples aplicaciones en biología, hidrología, física, matemáticas financieras, etcétera. Por otro lado, los procesos de difusión permiten, en algunos casos, dar interpretación probabilística a situaciones físicas modeladas mediante ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden de tipo parabólico. La teoría de los procesos de difusión se remonta a cuando Einstein (1905) logró describir matemáticamente el fenómeno observado por el botánico inglés Brown (1828) sobre el movimiento impredecible de moléculas en solución, relacionándolo con el fenómeno físico de la difusión estudiado por Fick (1855). En su trabajo dedujo que el movimiento errático resulta de colisiones entre moléculas y encontró una expresión para el coeficiente de difusión en términos de cantidades físicas. Perrin (1909) confirma el trabajo de Einstein midiendo el número de Avogadro y el coeficiente de difusión a partir de observaciones de la trayectoria de cada partícula.

Wiener (1923) demostró la existencia y unicidad de un proceso estocástico $\{X_t : t \geqslant 0\}$ definido sobre un *espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y con *espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$, tal que para cada $\omega \in \Omega$ fijo, $t \mapsto X_t(\omega)$ sirve como modelo para la trayectoria aleatoria y errática de moléculas en difusión. Este proceso tiene trayectorias continuas, no diferenciables, incrementos independientes con distribución normal y se puede expresar siempre en términos del movimiento Browniano o proceso de Wiener (Karatzas, 1991; Revuz and Yor, 1999; Walsh, 2012). Feller (1952, 1954, 1955) aplicó la teoría de semigrupos desarrollada por Hille (1950, 1952); Yosida (1949) a las ecuaciones de Kolmogorov (1931) y logró incluir en la descripción probabilística fenómenos de difusión descritos en términos de operadores diferenciales más generales.

En su formulación unidimensional, los procesos difusión contemplan un conducto por el que se mueve un fluido a velocidad constante V y en el que se difunden partículas de algún soluto. Se supone que la distribución transversal de las partículas es constante,

entonces para $t \geqslant 0$ la concentración $c(t,y)$ de partículas de soluto solo varia a través de la distancia $y \in [0,l]$ a lo largo del conducto. La *Ley de Fick* ofrece un modelo matemático para el flujo del soluto; el flujo es proporcional al gradiente, entonces la concentración de partículas $c(t,y)$ satisface la *ecuación hacia adelante de Kolmogorov*:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + V\frac{\partial c}{\partial y} =: \mathcal{A}^*[c], \tag{1}$$

donde D es el coeficiente de difusión y el dominio del operador $\mathcal{A}^*$, $\mathrm{Dom}(\mathcal{A}^*)$, está dado por las funciones en $C^2([0,l])$ que satisfacen ciertas condiciones de frontera apropiadas. La *ecuación hacia atrás de Kolmogorov* está dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V\frac{\partial u}{\partial x} =: \mathcal{A}[u], \tag{2}$$

donde $(\mathcal{A}, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ es el adjunto formal del operador $(\mathcal{A}^*, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}^*))$.

La conexión entre el problema de evolución (2) y los procesos estocásticos se puede hacer naturalmente a través de *la solución fundamental* $P(t,x,y)$ de dicho problema. La teoría desarrollada por Feller (1955) y otros, garantiza la existencia de un *proceso de difusión unidimensional* $X := \{X_t : t \geqslant 0\}$, es decir, un proceso de Markov con trayectorias continuas, tal que $P(t,x,y)$ es precisamente la función de densidad de transición de X. Más aún, la solución de (2) junto con la condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$ sobre $[0,l]$ puede ser expresada como

$$u(t,x) := \mathbb{E}_x u_0(X_t) = T_t[u_0](x) = \int_0^l u_0(y)P(t,x,y)\,\mathrm{d}y, \tag{3}$$

donde $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ y $T := \{T_t : t \geqslant 0\}$ es un *semigrupo de Feller*, cuyo generador infinitesimal es el operador $(\mathcal{A}, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$. En particular, la probabilidad de que la partícula que inicia en x ocupe un conjunto medible no nulo A en un tiempo t es

$$P(t,x,A) := \mathbb{P}_x(X_t \in A) = \int_A P(t,x,y)\,\mathrm{d}y,\ t > 0. \tag{4}$$

En su texto, Itô and McKean Jr (1965) completan el estudio sobre la teoría de los procesos de difusión iniciado por Einstein.

Los *tiempos de parada*; son variables aleatorias que permiten conocer si un evento ocurre o no en el tiempo t con la información de la σ-álgebra $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s : s \leqslant t)$. Por ejemplo, si $y \in [0,l]$

$$\mathsf{H}_y := \text{ínf}\{t \geqslant 0 : X_t = y\}, \tag{5}$$

es el tiempo de parada que corresponde al primer tiempo en que el proceso X alcanza el punto y. Mandl (1968) estudia de manera general la densidad de algunos tiempos de parada de un proceso de difusión definido sobre $[0, l]$, a partir de la transformada de Laplace del semigrupo del proceso definido en (3). Estas densidades se obtienen como la solución a ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias. En Bhattacharya and Waymire (1990) se pueden encontrar otros resultados de tiempos de parada de un proceso de difusión definido sobre un intervalo.

Motivado por aplicaciones a fenómenos de transporte en canales y redes de drenaje, es de especial interés en este trabajo el comportamiento asintótico de la solución fundamental $P(t, x, y)$ del problema (2) para $t \to \infty$. Se probará que para $f \in C^2([0, l])$, la solución del problema:

$$g(\lambda, \cdot) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}), \quad (\lambda - \mathcal{A})[g](\lambda, x) = f, \tag{6}$$

se puede escribir de la siguiente forma:

$$g(\lambda, x) = \int_0^l f(y) G(\lambda, x, y) \, \mathrm{d}y, \tag{7}$$

donde $G(\lambda, x, y)$ es llamada *la función de Green* para el problema (6) y es precisamente la transformada de Laplace de $P(t, x, y)$ respecto a t. Finalmente, usando teoremas Tauberianos, se obtendrán resultados sobre el decaimiento de $P(t, x, y)$ para $t \to \infty$.

En este trabajo se quieren estudiar las extensiones de la teoría de difusiones a grafos. En general, un grafo $\Gamma = (N(\Gamma), E(\Gamma))$ es un objeto matemático compuesto por un conjunto de vértices $N(\Gamma)$ unidos por aristas $E(\Gamma)$. Entre las muchas aplicaciones que los grafos tienen en modelado matemático, está la representación de redes planas de diverso tipo, por ejemplo, redes neuronales, redes de drenaje, redes sociales, redes electrónicas, etcétera. Para dichas aplicaciones, un grafo es, entonces, un objeto geométrico compuesto por puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ y aristas que unen estos vértices. Los grafos tratados en este trabajo son árboles binarios y modelan redes de drenaje, es decir, redes naturales de transporte de agua formadas por ríos, lagos, etcétera. Cada arista representa un canal de la red de drenaje, los *vértices hojas* representan los nacimientos de los canales, y los *vértices internos* representan las intersecciones de los canales. En cada uno de los vértices se imponen condiciones adecuadas. La teoría de grafos necesaria para este trabajo se puede consultar en Gross and Yellen (2005).

La teoría de difusiones sobre un intervalo es extendida a grafos conexos en los trabajos

de Freidlin and Sheu (2000); Freidlin and Wentzell (1993). Allí, se formula que un proceso de difusión sobre un grafo está determinado por un operador diferencial de segundo orden de tipo parabólico en cada arista, restringido a funciones que satisfagan ciertas condiciones de pegado en los vértices internos y de frontera en los vértices externos. El proceso resultante se puede describir como una difusión unidimensional en cada arista hasta el primer tiempo que el proceso alcanza un vértice. El comportamiento del proceso en los vértices depende de las condiciones de pegado y de frontera impuestas.

Como modelo para la trayectoria de partículas en dispersión dentro de un red de drenaje, en este trabajo se consideran procesos de advección-difusión con coeficientes constantes sobre cada arista de un grafo Γ, y con condiciones en los vértices internos y externos que garantizan la conservación de la masa. La deducción física de este modelo es tomada de Ramirez (2012). La existencia del proceso de difusión resultante es derivada de los resultados de Freidlin and Sheu (2000); Freidlin and Wentzell (1993).

Esta monografía tiene dos enfoques, desde la teoría de los procesos estocásticos se estudiará la densidad de algunos tiempos de parada del proceso de difusión X definido sobre un árbol binario Γ. Se extenderán los resultados para procesos de difusión definidos sobre un intervalo dados en Bhattacharya and Waymire (1990); Mandl (1968) a procesos de difusión definidos sobre grafos. Estos resultados permitirán calcular, por ejemplo, la probabilidad de que las partículas que empiezan en un punto x alcancen un punto y en tiempo finito, la probabilidad de colonizar sectores aguas arriba de su punto de partida, el tiempo esperado para que las partículas abandonen la red de drenaje o cierto conjunto, entre otras. Los resultados se dan en términos de la velocidad del agua, las longitudes y áreas de las secciones transversales de los canales, los coeficientes de difusión, y los caudales asociados a cada canal.

Por otro lado, se estudiará el comportamiento asintótico de la solución fundamental $P(t, x, y)$ cuando $t \to \infty$ de la ecuación diferencial parcial de evolución definida sobre Γ asociado al proceso X. Para esto se presentará una fórmula para la función de Green $G(\lambda, x, y)$ seguida de los resultados presentados en Pokornyi and Pryadiev (2004); Ramirez (2011), y se usará un Teorema Tauberiano (Mimica, 2013; Nakagawa, 2005) para obtener el comportamiento asintótico de $P(t, x, y)$ cuando $t \to \infty$. Este comportamiento estará relacionado con los valores propios de un operador de Sturm-Liouville asociado al operador $(\mathcal{A}, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$. En Ramirez (2012), dentro del contexto de persistencia en redes de drenaje, el autor encuentra cotas para estos valores propios, estas permitirán encontrar cotas para el decaimiento de $P(t, x, y)$ cuando $t \to \infty$. Más

aún, estas serán las cotas para la tasa bajo la cual las partículas abandonan su medio.

La organización de esta monografía será como sigue, en el Capítulo 1 se definirán los objetos de interés para este trabajo, se estudiarán los procesos de Markov y los tiempos de parada. En la Sección 1.3 se introducirán los semigrupos de Feller y se definirán los procesos de Feller. En la Sección 1.4 se definirán los procesos de interés en este trabajo los cuales son una subclase de los procesos de Feller: los procesos de difusión. La mayor parte de esta teoría ha sido estudiada de Revuz and Yor (1999).

En el Capítulo 2 se introducirá la teoría y la notación de grafos, necesaria para el estudio de los procesos de difusión en grafos (Gross and Yellen, 2005). En la Sección 2.3 se enunciará un teorema importante en este trabajo tomado de Freidlin and Sheu (2000); Freidlin and Wentzell (1993) que garantiza la existencia de un proceso de difusión sobre un grafo conexo. Después se dará la derivación física del modelo seguida de Ramirez (2012).

En el Capítulo 3 se ilustrará el método clásico para obtener la función de Green del problema (6). Se presentará una fórmula para el operador de Green (Pokornyi and Pryadiev, 2004) que será útil en el momento de usar el Teorema Tauberiano (Mimica, 2013; Nakagawa, 2005), que permitirá obtener el comportamiento asintótico de $P(t, x, y)$ para $t \to \infty$ a través de la función de Green $G(\lambda, x, y)$ del problema (6) definido sobre un árbol binario Γ.

En el Capítulo 4 en la Sección 4.1 se revisarán los resultados propuestos en Bhattacharya and Waymire (1990); Mandl (1968) sobre algunos tiempos de parada de un proceso de difusión definido sobre un intervalo. Se darán las pruebas de estos resultados para un proceso definido sobre un grafo. Estos resultados permitirán en la Sección 4.2 realizar ciertos cálculos. Como una motivación y para fijar ideas, en la Sección 4.2.1 se estudiarán los procesos de difusión unidimensionales sobre $[0, l]$; se calculará, por ejemplo, la probabilidad para que las partículas viajen de un lugar a otro en un conducto y la probabilidad de que alcancen sectores aguas arriba de su punto de inicio. Estos cálculos se extenderán en las siguientes secciones para el caso de un proceso de difusión definido sobre un árbol binario.

Capítulo 1

Preliminares Matemáticos

En este capítulo se expone el marco teórico dentro del cual se desarrollará este trabajo. Los resultados presentados no se demostrarán ya que son clásicos en la teoría de la probabilidad y surgen como consecuencia de la revisión bibliográfica hecha a lo largo de esta monografía. En términos generales se dará una introducción a los procesos de Markov en tiempo continuo, más adelante se introducirán los procesos de difusión. Los resultados expuestos en este capítulo se usarán en los siguientes capítulos para procesos de difusión definidos sobre grafos.

1.1. Procesos de Markov

En esta sección se fijará la notación y las definiciones útiles para los siguientes capítulos. Se definirá una *familia de probabilidades de transición* que permitirá, a su vez, definir los procesos de Markov.

Se considera un espacio medible $(E, \mathcal{E})$, donde $E \subseteq \mathbb{R}^d$ y $\mathcal{E} := \mathcal{E}(E)$ es la σ-álgebra de Borel sobre E, entonces $B(E)$ denota el espacio de funciones $f : E \to \mathbb{R}$ Borel-medibles y acotadas, $C_0(E)$ será el espacio de funciones continuas sobre E que se anulan en el infinito ($f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$), también se define el espacio de funciones continuas y acotadas por $C_b(E)$, y por $C_c(E)$ el espacio de funciones continuas con soporte compacto. Se puede notar que $C_c(E) \subset C_0(E) \subset C_b(E) \subset B(E)$. Estos espacios son Banach con la norma

$$\| f \| := \sup\{|f(x)|, x \in E\}. \tag{1.1}$$

Un espacio de probabilidad es una tríada $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, donde Ω es un conjunto no vacío, $\mathcal{F}$

es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$. Una *filtración* sobre un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ es una familia creciente $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, a esta filtración se le asocia la σ-álgebra $\mathcal{F}_\infty := \bigcup_{t \geqslant 0} \mathcal{F}_t$. Se define $\mathcal{E}(E) \otimes \mathcal{F}_t$ como el producto usual entre σ-álgebras.

Los procesos estocásticos de interés en este trabajo son del siguiente tipo.

Definición 1.1.1 *Un* ***proceso estocástico*** *con respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ *es una familia* $X := \{X_t : t \geqslant 0\}$ *de variables aleatorias definida sobre el mismo espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *y con espacio de estados* $(E, \mathcal{E})$*, tal que para cada* t*, la función* $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ *de* $[0, t] \times \Omega$ *sobre* $(E, \mathcal{E})$ *es* $\mathcal{E}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$*-medible.*

Un proceso estocástico es *adaptado* a la filtración $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ si para cada t X_t es $\mathcal{F}_t$-medible. Cualquier proceso X es adaptado a su *filtración natural*

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s : s \leqslant t); \tag{1.2}$$

esta es la menor σ-álgebra que hace que cada una de las variables aleatorias X_s sea medible para $s \in [0, t]$, además es la menor filtración con la que X es adaptado. Para $\omega \in \Omega$ se definen las *trayectorias* del proceso a las funciones $t \mapsto X_t(\omega)$. La distribución inicial del proceso está dada por $\pi(A) = \mathbb{P}(X_0 \in A)$, $A \in \mathcal{E}$ y cuando $\pi = \delta_x$ para $x \in E$ ($\delta_x(A) = 1$ si $x \in A$, $\delta_x(A) = 0$ si $x \in A^c$, para $A \in \mathcal{E}$), se denotará $\mathbb{P}_x$ la medida de probabilidad correspondiente. Entonces por consiguiente $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$.

Los procesos estocásticos que se consideran en este trabajo tendrán una relación importante con las martingalas. Un desarrollo detallado de la teoría de martingalas se puede encontrar en Billingsley (2008); Revuz and Yor (1999).

Definición 1.1.2 *Un proceso estocástico* X *adaptado a la filtración* $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ *es una* $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$*-****martingala*** *si:*

1. $\mathbb{E}[X_t] < \infty$*, para cada* t*;*
2. $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$*,* $s < t$*.*

El principal elemento para la construcción de los procesos de Markov es la *familia de probabilidades de transición* definida a continuación.

Definición 1.1.3 *Sea* $(E, \mathcal{E})$ *un espacio medible. Una* ***familia de probabilidades de transición*** *del proceso* X *es una familia* $\{P(t, x, A) : t \geqslant 0\}$ *de funciones* $P(t, x, A) : [0, \infty) \times E \times \mathcal{E} \to [0, 1]$ *tales que:*

1. *Para cada* $t \geqslant 0$ *y* $x \in E$*, la función* $A \mapsto P(t, x, A)$ *es una medida positiva sobre* $\mathcal{E}$ *con* $P(t, x, E) \leqslant 1$*;*

2. *Para cada* $t \geqslant 0$ *y* $A \in \mathcal{E}$*, la función* $x \mapsto P(t, x, A)$ *es* $\mathcal{E}$*-medible;*

3. *Para cada* $s, t \geqslant 0$

$$P(s + t, x, A) = \int_E P(s, x, \mathrm{d}y) P(t, y, A). \tag{1.3}$$

En otras palabras, la familia $\{P(t, x, A) : t \geqslant 0\}$ forma un semigrupo. La relación (1.3) es conocida como la *ecuación de Chapman-Kolmogorov.*

En este trabajo las funciones $P(t, x, \cdot)$ son absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue, donde la función densidad de probabilidad se denota por

$$P(t, x, \mathrm{d}y) = P(t, x, y)\, \mathrm{d}y. \tag{1.4}$$

Intuitivamente se puede pensar en el valor de $P(t, x, A)$ como la probabilidad de que una partícula que inicia en x se encuentre en el conjunto A en el tiempo t,

$$P(t, x, A) := \mathbb{P}_x(X_t \in A) = \int_A P(t, x, y)\, \mathrm{d}y, \ t > 0. \tag{1.5}$$

Pensando en esta dirección, si $P(t, x, E) < 1$ entonces $1 - P(t, x, E)$ se podrá interpretar como la probabilidad de que la partícula desaparezca o muera en un tiempo finito. En el caso de redes de drenaje las partículas de soluto que se difundan en el medio podrán abandonar la red por alguna frontera, por esto es de interés en este trabajo que $P(t, x, E) < 1$ para algunos x y t.

De manera intuitiva, un proceso de Markov es un proceso estocástico donde dado el estado "presente", cualquier otra información sobre el "pasado" es irrelevante para predecir el "futuro". Un proceso de Markov es un proceso que cumple *la propiedad de Markov*,

$$\mathbb{P}_x[X_{t+s} \in A \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{P}_{X_t}[X_s \in A] = P(s, X_t, A), \ x \in E, \ A \in \mathcal{E}. \tag{1.6}$$

A continuación se definirá un proceso de Markov de manera precisa en términos de la familia de probabilidades de transición.

Definición 1.1.4 *Un proceso adaptado* X *es un* ***proceso de Markov*** *con respecto a la filtración* $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$*, con familia de probabilidades de transición* $\{P(t, x, A) :$

$t \geqslant 0\}$ *si para* $f \in B(E)$ *y para* $s < t$*:*

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s] = \int_E f(y)P(t, X_s, \mathrm{d}y). \tag{1.7}$$

La familia de probabilidades de transición y la distribución inicial son suficientes para construir un proceso de Markov a través de sus distribuciones finito-dimensionales:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\pi[X_0 \in A_0, X_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_n} \in A_n] = \int_{A_0} \pi(\,\mathrm{d}x) \int_{A_1} P(t_1, x, \,\mathrm{d}x_1) \\ \int_{A_2} P(t_2 - t_1, x_1, \,\mathrm{d}x_2) ... \int_{A_n} P(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, \,\mathrm{d}x_n),\end{aligned} \tag{1.8}$$

donde π es la distribución inicial del proceso, $0 < t_1 < t_2 < \cdots$, $A_i \in \mathcal{E}$. La existencia del proceso de Markov resulta del teorema de extensión de Kolmogorov (ver Ethier and Kurtz, 2009, pág. 167).

1.2. Tiempos de Parada

En esta sección se introduce una herramienta útil para el estudio de los procesos de Markov: los *tiempos de parada*; estas son variables aleatorias τ que permiten conocer si un evento ocurre o no en el tiempo t con la información de la σ-álgebra $\mathcal{F}_t$.

Definición 1.2.1 *Una variable aleatoria* τ *sobre el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *con valores en* $[0, \infty]$ *es un* ***tiempo de parada*** *relativo a la filtración* $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ *si* $[\tau \leqslant t] \in \mathcal{F}_t$*, para cada* $t \geqslant 0$*.*

Las siguientes variables aleatorias son tiempos de parada relativos a la filtración natural definida en (1.2) y son los tiempos de parada más importantes para este trabajo. Si $A \subseteq E$ es cerrado, se define el *tiempo de llegada* de X a A por

$$\mathsf{H}_A^X := \inf\{t \geqslant 0 : X_t \in A\}, \tag{1.9}$$

con la convención de que si $\{t \geqslant 0 : X_t \in A\}$ es un conjunto vacío entonces $\mathsf{H}_A^X = \infty$. Cuando no hay lugar a confusión, H_A^X se denota por H_A. Se puede notar que H_A es el primer tiempo en el que el proceso X entra al conjunto A. Si $C \subseteq E$ es conexo, se define el *tiempo de escape* del proceso X de C como el tiempo de llegada a la frontera:

$$\mathsf{E}_C = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \in \partial C\}. \tag{1.10}$$

En el caso de un proceso unidimensional (el espacio de estados es un subconjunto de $\mathbb{R}$), dado un intervalo (a, b) se tiene

$$\mathsf{E}_{(a,b)} = \text{mín}\{\mathsf{H}_a, \mathsf{H}_b\}. \tag{1.11}$$

La σ-álgebra $\mathcal{F}_\infty$, permite asociar una σ-álgebra al tiempo de parada τ

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap [\tau \leqslant t] \in \mathcal{F}_t \text{ para todo } t\}. \tag{1.12}$$

Se puede pensar en $\mathcal{F}_\tau$ como la información que permite decidir si un evento ocurre o no antes del tiempo aleatorio τ. Por otro lado, para el proceso X se define la siguiente variable aleatoria X_τ sobre el conjunto $\{\omega : \tau(\omega) < \infty\}$ por

$$X_\tau(\omega) = X_t(\omega) \text{ si } \tau(\omega) = t. \tag{1.13}$$

La variable aleatoria X_τ da la posición del proceso en el tiempo τ. Para cada t, la función $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ es $\mathcal{E}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-medible y τ es un tiempo de parada respecto a la misma filtración $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$, entonces X_τ es $\mathcal{F}_\tau$-medible sobre el conjunto $[\tau < \infty]$. Para ver prueba se puede consultar (Bhattacharya and Waymire, 2007, pág. 43).

Ahora, con esta notación es posible definir la *propiedad fuerte de Markov*,

$$\mathbb{P}_x(X_{\tau+s} \in A \cap [\tau < \infty] \big| \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{P}_{X_\tau}(X_s \in A), \tag{1.14}$$

donde A es un subconjunto del espacio de estados del proceso X.

1.3. Semigrupos y Procesos de Feller

En esta sección se definirán los semigrupos de Feller, su generador infinitesimal, el operador resolvente, la función de Green y se explicará cómo se relacionan estos conceptos. Más adelante se introducirá una clase particular de procesos de Markov, llamados *procesos de Feller*. También se verá que a un proceso de Feller se le puede asociar diversas martingalas. La norma que se considera para la definición de un semigrupo es la norma definida en (1.1).

Definición 1.3.1 *Un* ***semigrupo de Feller*** *sobre* $C_0(E)$ *es una familia* $T_t : C_0(E) \to C_0(E), t \geqslant 0$ *de operadores lineales positivos tal que*

1. $\| T_t \| \leqslant 1$ *para cada* t*; (Contractivo)*

2. $T_0 = Id$, $T_{t+s} = T_t T_s$ *para cada* $t, s \geqslant 0$*; (Semigrupo)*

3. $\lim_{t\to 0} \| T_t[f] - f \| = 0$ *para cada* $f \in C_0(E)$*. (Fuertemente continuo)*

La propiedad de semigrupo también implica la conmutatividad de los operadores:

$$T_t T_s = T_s T_t.$$

Lo interesante de los semigrupos de Feller es que estos permiten construir procesos de Markov como se ilustra a continuación

Proposición 1.3.1 *A un semigrupo de Feller* $\{T_t : t \geqslant 0\}$ *se le puede asociar una familia de probabiliadades de transición* $\{P(t, x, A) : t \geqslant 0\}$ *sobre* $(E, \mathcal{E})$ *tal que*

$$T_t[f](x) = \int_E f(y) P(t, x, \mathrm{d}y). \tag{1.15}$$

para cada $f \in C_0(E)$ *y cada* $x \in E$*.*

La existencia de las probabilidades de transición, está dada por el Teorema de Riesz; para cada $x \in E$, la función $f \mapsto T_t[f](x)$ es lineal y positiva sobre $C_0(E)$, entonces existe una medida $P(t, x, \cdot)$ sobre $\mathcal{E}$ tal que se cumple (1.15). Para ver detalles se puede consultar (Revuz and Yor, 1999, pág. 88). Los procesos tratados en esta monografía son una clase particular de procesos de Markov, los cuales son definidos así:

Definición 1.3.2 *Un proceso de Markov que tiene una familia de probabilidades de transición asociada a un semigrupo de Feller es llamado un* ***proceso de Feller****.*

El siguiente teorema caracteriza los procesos de Feller (Revuz and Yor, 1999, pág 91).

Teorema 1.3.2 *Si* X *es un proceso de Feller entonces este admite una versión càdlàg, esto es, existe un proceso* $\tilde{X}$ *con trayectorias continuas por derecha y límite finito por izquierda tal que* $X_t = \tilde{X}_t$ *con probabilidad uno para cada distribución inicial arbitraria.*

Por otro lado, se puede demostrar que todo proceso de Feller satisface la *propiedad fuerte de Markov* definida en (1.14). La prueba se puede consultar en (Revuz and Yor, 1999, pág 102).

1.3.1. Generador Infinitesimal y Resolvente

A continuación se define el *generador infinitesimal* de un proceso de Feller; este operador es importante en la teoría de difusiones, además permitirá introducir las célebres *Ecuaciones de Kolmogorov* y su relación con los fenómenos de advección-difusión.

Definición 1.3.3 *Sea X un proceso de Feller; una función $f \in C_0(E)$ se dice que pertenece al dominio* $\mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ *del generador infinitesimal de X si el límite*

$$\mathcal{A}[f] = \lim_{t \to 0} \frac{T_t[f] - f}{t}, \tag{1.16}$$

existe en $C_0(E)$. El operador $\mathcal{A} : \mathrm{Dom}(\mathcal{A}) \to C_0(E)$ es llamado el ***generador infinitesimal*** *del proceso X o del semigrupo $\{T_t : t \geqslant 0\}$.*

El generador infinitesimal permite construir una de las relaciones más importantes entre los procesos de Feller y las martingalas. Muchos resultados interesantes de los procesos de Feller se deducen de la siguiente propiedad.

Teorema 1.3.3 *Sea $X := \{X_t : t \geqslant 0\}$ un proceso de Feller con familia de probabilidades de transición $\{P(t, x, A) : t \geqslant 0\}$ y generador infinitesimal $(\mathcal{A}, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$. Si $f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$, entonces el proceso:*

$$M_t := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathcal{A}[f](X_s)\,\mathrm{d}s,\ t \geqslant 0,$$

es una $(\mathcal{F}_t^X, \mathbb{P}_\pi)$-martingala para cada π, donde $\{\mathcal{F}_t^X : t \geqslant 0\}$ está definida en (1.2).

La prueba de este resultado usa la propiedad de Markov (1.14), en ella se puede notar que la filtración natural $\{\mathcal{F}_t^X : t \geqslant 0\}$ puede ser reemplazada por cualquier filtración con respecto a la cual X sea un proceso de Markov. Para una prueba detallada se puede consultar (Revuz and Yor, 1999, pág 284). La siguiente proposición es el recíproco del teorema anterior.

Proposición 1.3.4 *Si $f \in C_0(E)$ y si existe alguna función $g \in C_0(E)$, tal que*

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t g(X_s)\,\mathrm{d}s,\ t \geqslant 0,$$

es una $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P}_x)$-martingala para cada x, entonces $f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}[f] = g$.

Surge además la pregunta, ¿cuándo un operador lineal es el generador infinitesimal de un semigrupo de Feller? La respuesta está dada en la siguiente versión del Teorema de

Hille-Yosida, para la prueba del resultado se puede consultar en Taira (2004) o para el caso $E = [a, b]$ puede ser encontrada en Mandl (1968).

Teorema 1.3.5 *1. Sea $\{T_t : t \geqslant 0\}$ un semigrupo de Feller sobre E y $\mathcal{A}$ su generador infinitesimal. Entonces:*

a) *El dominio* $\mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ *es denso en el espacio $C_0(E)$.*

b) *Para cada $\lambda > 0$, la ecuación $(\lambda - \mathcal{A})[u] = f$ tiene una única solución $u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ para cualquier $f \in C_0(E)$.*

c) *Para cada $\lambda > 0$, $\|(\lambda - \mathcal{A})^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$.*

*2. Recíprocamente, si $\mathcal{A} : C_0(E) \to C_0(E)$ es un operador lineal que satisface la condición (1*a*) y si existe una constante $\lambda_0 > 0$ tal que, para todo $\lambda > \lambda_0$ las condiciones (1*b*) y (1*c*) se satisfacen, entonces $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de algún semigrupo de Feller $\{T_t : t \geqslant 0\}$ sobre E.*

La parte $1b$ del teorema anterior permite definir un operador fundamental para esta monografía.

Definición 1.3.4 *Si para $\lambda \in \mathbb{C}$ el operador $(\lambda - \mathcal{A})$ tiene inversa continua, entonces λ está en el* ***conjunto resolvente*** *$\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$. Para $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, el operador*

$$R(\lambda)[f] := (\lambda - \mathcal{A})^{-1}[f] \tag{1.17}$$

es llamado el ***resolvente*** *del semigrupo $\{T_t : t \geqslant 0\}$ o del operador $\mathcal{A}$. El* ***espectro*** *de $\mathcal{A}$ es el complemento de $\rho(\mathcal{A})$, es decir, $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$. En particular, si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $(\lambda - \mathcal{A})$ no tiene inversa, entonces $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ es llamado un* ***valor propio*** *de $\mathcal{A}$.*

Como $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal del semigrupo $\{T_t : t \geqslant 0\}$ entonces se tiene el siguiente resultado, (ver Yosida, 2013, pág. 240).

Teorema 1.3.6 *Si $\lambda > 0$, entonces*

$$R(\lambda)[f] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t[f] \, \mathrm{d}t. \tag{1.18}$$

Según la definición (1.17), dada $f \in C_0(E)$, el resolvente $R(\lambda)[f]$ es igual a la solución $g(\lambda, x)$ del problema

$$g(\lambda, \cdot) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}), \quad (\lambda - \mathcal{A})[g](\lambda, x) = f. \tag{1.19}$$

Si la solución del problema (1.19) se puede escribir de la siguiente manera:

$$g(\lambda, x) = \int_E f(y) G(\lambda, x, y)\, \mathrm{d}y, \tag{1.20}$$

entonces $G(\lambda, x, y)$ es llamada la *función de Green* para el problema (1.19). Además, igualando a (1.18) y considerando que f es arbitraria, se tiene que la función $G(\lambda, x, y)$ es la transformada de Laplace de $P(t, x, y)$ respecto a t,

$$G(\lambda, x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t, x, y)\, \mathrm{d}t. \tag{1.21}$$

1.3.2. Ecuaciones de Kolmogorov

Se tienen algunos hechos notables acerca del generador infinitesimal $\mathcal{A}$ de un proceso de Feller X. Este es un operador cerrado (ver Revuz and Yor, 1999, pág 282), además si $f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ entonces

$$\left\| \frac{T_s(T_t[f]) - T_t[f]}{s} - T_t[\mathcal{A}[f]] \right\| \leqslant \left\| \frac{T_s[f] - f}{s} - \mathcal{A}[f] \right\| \to 0$$

cuando $s \to 0$, por tanto $T_t[f] \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ y

$$\mathcal{A}[T_t[f]] = T_t[\mathcal{A}[f]], \tag{1.22}$$

es decir, T_t y $\mathcal{A}$ conmutan sobre $\mathrm{Dom}(\mathcal{A})$.

Se obtiene entonces una ecuación diferencial asociada con el semigrupo a través del generador, usualmente llamada *la ecuación hacia atrás de Kolmogorov* para la función $(t, x) \mapsto T_t[f](x)$ con $t > 0$ y $x \in E$,

$$\frac{\partial}{\partial t} T_t[f](x) = \mathcal{A}[T_t[f]](x). \tag{1.23}$$

La situación física de interés en este trabajo estará modelada por cierta ecuación diferencial cuyo operador es precisamente el operador dual de $\mathcal{A}$.

Suponga que X_0 tiene distribución inicial π cuya densidad es h, es decir, h es una función positiva tal que $\int_E h(x)\, \mathrm{d}x = 1$, entonces se define el siguiente operador:

$$T_t^*[h](y) := \int_E h(x) P(t, x, y)\, \mathrm{d}x. \tag{1.24}$$

El operador T_t^* es el adjunto en $L^2(E)$ del operador T_t definido en (1.15),

$$\int_E f(y)T_t^*[h](y)\,\mathrm{d}y = \int_E h(x)T_t[f](x)\,\mathrm{d}x.$$

Si $f \in C^2(E)$, entonces por la ecuación hacia atrás de Kolmogorov (1.23) y la conmutatividad de T_t y $\mathcal{A}$ se tiene

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}T_t^*[h], f \right\rangle = \left\langle h, \frac{\partial}{\partial t}T_t[f] \right\rangle = \langle h, T_t[\mathcal{A}[f]]\rangle = \langle T_t^*[h], \mathcal{A}[f]\rangle.$$

Por lo tanto, se obtiene *la ecuación hacia adelante de Kolmogorov* para la función $(t, y) \mapsto T_t^*[h](y)$

$$\frac{\partial}{\partial t}T_t^*[h](y) = \mathcal{A}^*[T_t^*[h]](y). \tag{1.25}$$

En conclusión, las densidades $P(t, x, y)$ de la familia de las probabilidades de transición satisfacen, como función de la variable de adelante y

$$P(t, x, \cdot) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}^*), \quad \frac{\partial}{\partial t}P(t, x, y) = \mathcal{A}^*[P(t, x, y)],\ x \in E,\ t > 0 \tag{1.26}$$

y como función de la variable de atrás x,

$$P(t, \cdot, y) \in \mathrm{Dom}(\mathcal{A}), \quad \frac{\partial}{\partial t}P(t, x, y) = \mathcal{A}[P(t, x, y)],\ y \in E,\ t > 0. \tag{1.27}$$

1.4. Procesos de Difusión

Los procesos de interés en este trabajo son una subclase de los procesos de Feller. Hay diferentes formas de definir un *proceso de difusión*. En términos generales es un proceso de Markov con trayectorias continuas que se puede caracterizar en términos de su generador infinitesimal. Desde las ecuaciones diferenciales estocásticas, los procesos de difusión se construyen como la solución a cierta ecuación diferencial estocástica; este enfoque no se estudiará pues está por fuera de los objetivos de este trabajo (ver Bhattacharya and Waymire, 1990, pág 571). Para el estudio de esta monografía se define un *proceso de difusión* de la siguiente manera.

Definición 1.4.1 *Un* ***proceso de difusión*** X *en* $E \subseteq \mathbb{R}^d$ *es un proceso de Feller con trayectorias continuas tal que* $C_c^\infty(E) \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$.

En el caso particular cuando $E \subseteq \mathbb{R}$ se dirá que X es un *proceso de difusión unidimensional*. El siguiente es un resultado importante porque determina explícitamente el generador infinitesimal de un proceso de difusión sobre $C_c^2(E)$ para $E \subseteq \mathbb{R}^d$.

Teorema 1.4.1 *Si $\{T_t : t \geqslant 0\}$ es un semigrupo de Feller sobre $\mathbb{R}^d$ tal que el correspondiente proceso tiene trayectorias continuas y $C_c^\infty(E) \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$, entonces*

1. *$C_c^2(E) \subset \mathrm{Dom}(\mathcal{A})$;*
2. *Existen funciones a_{ij}, b_i, c tal que para $f \in C_c^2(E)$ y $x \in E$, el generador infinitesimal del semigrupo es*

$$\mathcal{A}[f](x) = c(x)f(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x), \tag{1.28}$$

donde $a(x)$ es una matriz simétrica definida positiva y $c \leqslant 0$.

El Teorema 1.4.1 permite una conexión entre las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden de tipo parabólico y los procesos de Markov, más precisamente con los procesos de difusión. La conexión entre estas dos teorías permite una interpretación probabilística de la situación física modelada por la ecuación diferencial parcial, por ejemplo, difusión de partículas en líquidos. El sentido de esta asociación es el siguiente, sea $\{P(t, x, A) : t \geqslant 0\}$ la familia de probabilidades de transición de un proceso de difusión $X := \{X_t : t \geqslant 0\}$, donde el generador del correspondiente semigrupo de Feller está dado por el operador $(\mathcal{A}, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ definido en (1.28), entonces la solución del problema de evolución (1.23) está dada por el semigrupo definido en (1.15).

Capítulo 2

Procesos de Difusión en Grafos

Es posible describir un proceso de Markov X con trayectorias continuas sobre un grafo Γ, de manera que en cada arista las trayectorias de X se comporten como uno de los procesos de difusión unidimensionales definidos en la Sección 1.4. En este capítulo se quiere extender esta definición y para esto es necesario describir el comportamiento del proceso después de que este alcance algún vértice. Además, se dará la derivación física del modelo que se estudiará en este trabajo, tomada de Ramirez (2012) y se usarán los resultados de Freidlin and Sheu (2000); Freidlin and Wentzell (1993) para garantizar la existencia de un proceso de difusión sobre un árbol binario.

2.1. Motivación: Procesos de Difusión Unidimensionales

Los procesos de difusión unidimensionales son de interés en esta monografía porque los grafos son localmente medios unidimensionales y además los procesos de difusión sobre grafos se comportan como dichos procesos en el interior de cada arista.

Feller (1952, 1954) caracterizó la relación entre los generadores infinitesimales de procesos de difusión unidimensionales y los problemas de evolución dados por operadores de la forma (1.28) junto a condiciones de frontera. En esta sección se estudia el caso particular de los proceso de difusión sobre intervalos cerrados, con un tipo específico de condiciones de frontera en los extremos.

La siguiente derivación sigue el argumento original de la ecuación de transporte difusivo

descrito por Fick (1855). Se considera un conducto por el que se mueve un fluido a velocidad constante V y en el que se difunden partículas de algún soluto. Se supone que la distribución transversal de las partículas es constante, entonces para $t \geqslant 0$ la concentración $c(t, y)$ de partículas de soluto solo varia a través de la distancia $y \in [0, l]$ a lo largo del conducto. Se supone que la velocidad del fluido es hacia cero.

Ahora, si $F(y)$ denota el flujo que pasa por el punto y, y si $y_1, y_2 \in [0, l]$ con $y_1 < y_2$, por conservación de la masa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} c(t, y)\, \mathrm{d}y = F(y_1) - F(y_2).$$

La concentración atraviesa el punto y debido a la advección a una tasa de $-Vc(t, y)$. Además, por la *ley de Fick* hay difusión en la dirección opuesta al gradiente: existe un número $D > 0$ tal que el flujo por difusión es $-D\frac{\partial c}{\partial y}(t, y)$. Se tiene entonces,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} c(t, y)\, \mathrm{d}y = D\left(\frac{\partial c}{\partial y}(t, y_2) - \frac{\partial c}{\partial x}(t, y_1)\right) + V(c(t, y_2) - c(t, y_1)).$$

Por lo tanto, la concentración de partículas $c(t, y)$ satisface la ecuación hacia adelante de Kolmogorov dada en (1.25), conocida en este contexto como la *ecuación de Fokker-Planck*, donde el *operador hacia adelante* $\mathcal{A}^*$ está dado en forma de ley de conservación por

$$\mathcal{A}^*[h](y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(D\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}(y)\right) + V\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}(y). \tag{2.1}$$

Ahora, es necesario describir el comportamiento de las partículas en la frontera del intervalo. Se supone flujo nulo en l y condición absorbente en 0, es decir,

$$c(t, 0) = 0,\ Vc(t, l) + D\frac{\partial c}{\partial y}(t, l) = 0.$$

Entonces el dominio del operador $\mathcal{A}^*$ está definido por

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}^*) := \left\{h \in C^2([0, l]) : Vh(l) + D\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y}(l) = 0,\ h(0) = 0\right\}.$$

Dada una concentración inicial $c_0(y)$, si $P(t, x, y)$ es la solución fundamental de la ecuación de Fokker-Planck, entonces el semigrupo $\{T_t^* : t \geqslant 0\}$ definido por $c(t, y) = T_t^*[c_0](y)$ en (1.24) da la evolución de la concentración. Sea $\mathcal{A}$ el adjunto formal de $\mathcal{A}^*$

$$\mathcal{A}[f](x) = D\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) - V\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x), \tag{2.2}$$

donde

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) := \left\{ f \in C^2([0,l]) : \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(l) = 0,\ f(0) = 0 \right\}. \tag{2.3}$$

El proceso de difusión X sobre $[0,l]$ asociado al operador $(\mathcal{A}, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$, que sirve como modelo para la trayectoria de las partículas de soluto que se difunden en el fluido, es una *difusión con frontera reflectiva en l y frontera absorbente en* 0. Esto significa que cuando las trayectorias del proceso lleguen a 0 se quedarán ahí para siempre y que cuando alcancen l instantáneamente se reflejan regresando al interior de $[0,l]$.

2.2. Redes: Definiciones y Notación

En esta sección se definirá una *red*, un concepto importante en este trabajo, dado que en la deducción del modelo el medio físico será modelado por una red. Luego se dará alguna notación necesaria para el estudio de operadores definidos sobre grafos. Se espera que el lector este relacionado con el concepto de árbol enraizado. Un estudio detallado de teoría de grafos se puede consultar en Gross and Yellen (2005).

Sea $\Gamma = (N(\Gamma), E(\Gamma))$ un grafo dirigido, donde $E(\Gamma)$ denota al conjunto de aristas de Γ y $N(\Gamma)$ al conjunto de vértices de Γ. A continuación se dan algunas definiciones necesarias para definir una red.

Definición 2.2.1 *Sea Γ un grafo de tipo árbol enraizado con raíz $\boldsymbol{\phi}$, la dirección de las aristas es hacia la raíz. Entonces:*

1. *Una arista $a \in E(\Gamma)$ se dice que es **incidente** al vértice $\boldsymbol{a}$ si el vértice $\boldsymbol{a}$ es un extremo de la arista a. Se usará la notación $a \sim \boldsymbol{a}$ cuando a es incidente a $\boldsymbol{a}$.*
2. *Γ es un **árbol binario** si cada vértice tiene una o tres aristas incidentes.*
3. *Un **vértice hoja** es un vértice diferente al vértice raíz que solo tiene una arista incidente. Las aristas que tienen un vértice hoja serán llamadas **aristas hojas**.*
4. *Un **vértice interno** es un vértice que no es una hoja ni es la raíz.*

Se entenderá como una *red* Γ a un árbol binario y finito embebido en $\mathbb{R}^2$. Se asume que existe un homeomorfismo de cada arista $a \in E(\Gamma)$ al intervalo de la recta real $[0, l_a]$, entonces un punto sobre Γ será denotado como una coordenada (a, x) donde $0 \leqslant x \leqslant l_a$. Para cada vértice existe un único camino que lo conecta con la raíz. Los puntos que se encuentran en el camino que une un vértice con la raíz, se dice que están *aguas abajo* del vértice o que están *aguas arriba* de la raíz.

La *arista raíz* es denotada por $e = [0, l_e]$ y el vértice raíz por $\boldsymbol{\phi} := (e, 0)$. Las *aristas hijas* de e serán denotadas por $e0$ y $e1$ y están conectadas en el vértice $\boldsymbol{e} := (e, l_e)$. Si $\boldsymbol{a}$ es un vértice en la red Γ entonces $\boldsymbol{a}$ puede considerarse como la raíz de una sub-red, denotada por $\Gamma_{\boldsymbol{a}}$, en particular $\Gamma = \Gamma_{\boldsymbol{\phi}}$. Se divide el conjunto de vértices $N(\Gamma)$ de Γ, en los siguientes subconjuntos:

- La **raíz** de Γ, $\{\boldsymbol{\phi}\}$.
- $U(\Gamma)$ el conjunto de los **vértices hojas**.
- $I(\Gamma)$ el conjunto de los **vértices internos**.
- $\partial(\Gamma) = U(\Gamma) \cup \{\boldsymbol{\phi}\}$ el conjunto de **vértices externos**.

Si Γ es una red con m aristas, entonces Γ tiene $m+1$ vértices distribuidos así: $\#I(\Gamma) = \frac{m-1}{2}$, $\#U(\Gamma) = \frac{m+1}{2}$ y el vértice raíz $\boldsymbol{\phi}$.

Se puede notar que una red es una colección de sub-redes, donde cada sub-red $\Gamma = \mathsf{Y}$ consta de tres aristas: $e, e0, e1 \in E(\Gamma)$, y cuatro vértices: el vértice raíz $\boldsymbol{\phi} = (e, 0)$, el vértice de intersección $\boldsymbol{e} = (e, l_e)$ y los vértices hojas: $\boldsymbol{e0}, \boldsymbol{e1} \in U(\Gamma)$. Ver Figura 2.1. Por esto gran parte de este trabajo es sobre grafos de tipo $\Gamma = \mathsf{Y}$.

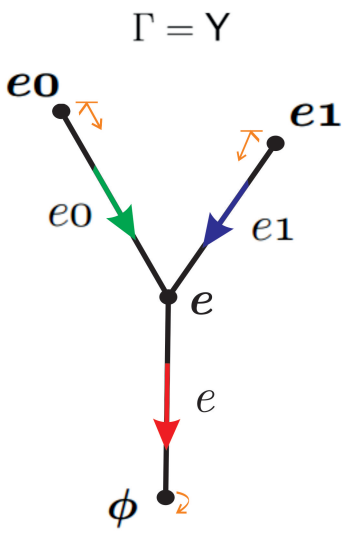

Figura 2.1 Red $\Gamma = \mathsf{Y}$

Los valores de una función $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ son denotados por $f_a(x) = f(a, x)$, esto es, f_a es la restricción de la función f a la arista $a = [0, l_a]$. Se define $C(\Gamma)$ como el conjunto de funciones continuas sobre Γ, es decir, f_a es continua sobre cada $(0, l_a)$ y para cada vértice existe el correspondiente límite $\lim_{x\to 0} f_a(x)$ y $\lim_{x\to l_a} f_a(x)$ y tiene el mismo valor para todas las aristas a incidentes a cada vértice. La derivada de la función f en

el interior de cada arista a se entenderá en el sentido usual y en los vértices $(a, 0)$ y (a, l_a) como las derivadas por derecha e izquierda, respectivamente. Se define $C^k(\Gamma^\circ)$, $k = 1, 2, ...$ como el conjunto de funciones con derivadas continuas hasta el orden k en el interior de cada arista.

2.3. Existencia de Procesos de Difusión sobre Grafos

Procesos físicos tales como la propagación de impulsos nerviosos, y el transporte de nutrientes, sedimentos o contaminantes en redes fluviales, pueden ser modelados por procesos de difusión en grafos. Ver por ejemplo Friedman and Huang (1994). Intuitivamente un proceso de difusión sobre un grafo se podría ver como una extensión de un proceso de difusión unidimensional. Freidlin (1996) se apoyó en la idea de Feller (1952, 1954) para describir una difusión sobre un grafo conexo Γ, pero además de las condiciones de frontera, fue necesario agregar ciertas *condiciones de pegado* en los vértices internos del grafo. A continuación se explicará esto con detalle, Γ denotará un grafo conexo dirigido.

El siguiente teorema muestra la existencia y unicidad de un proceso de Markov sobre Γ con trayectorias continuas. Este resultado es tomado de Freidlin and Sheu (2000); Freidlin and Wentzell (1993).

Teorema 2.3.1 *Sean b, k funciones en $C(\Gamma)$ con k estrictamente positiva y sea $\mathcal{K}$ el siguiente operador diferencial*

$$(\mathcal{K}[f])_a(x) = k_a(x)\frac{\mathrm{d}^2 f_a}{\mathrm{d}x^2}(x) + b_a(x)\frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}x}(x),\ x \in a, \tag{2.4}$$

donde el dominio $\mathrm{Dom}(\mathcal{K})$ *está dado por las funciones $f \in C^2(\Gamma^\circ) \bigcap C(\Gamma)$ que satisfacen las siguientes condiciones de pegado en los vértices $\boldsymbol{a} \in N(\Gamma)$*

$$\alpha_{\boldsymbol{a}}\mathcal{K}[f](\boldsymbol{a}) + \sum_{a' \sim \boldsymbol{a}} \beta_{\boldsymbol{a},a'}\frac{\mathrm{d}f_{a'}}{\mathrm{d}x}(\boldsymbol{a}) = 0,\ x \in a' \tag{2.5}$$

para cualquier conjunto de constantes $\alpha_{\boldsymbol{a}},\ \beta_{\boldsymbol{a},a'}$ con $\boldsymbol{a} \in N(\Gamma)$ y a' incidente a $\boldsymbol{a}$ tales que

$$\alpha_{\boldsymbol{a}} + \sum_{a' \sim \boldsymbol{a}} \beta_{\boldsymbol{a},a'} \neq 0. \tag{2.6}$$

Entonces existe un único proceso de Feller $X := \{X_t : t \geqslant 0\}$ *sobre* Γ *con trayectorias continuas (en el sentido de continuidad que se definió en la Sección 2.2) y con generador infinitesimal* $(\mathcal{K}, \mathrm{Dom}(\mathcal{K}))$*, es decir,* $u(t,x) = \mathbb{E}_x u_0(X_t)$ *es la solución del problema hacia atrás*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \mathcal{K}[u](t,x), \tag{2.7}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \ \ x \in \Gamma. \tag{2.8}$$

Más aún, algunas de las condiciones en (2.5) pueden ser reemplazadas por

$$u(t, \boldsymbol{a}) = \varphi(t, \boldsymbol{a}), \tag{2.9}$$

donde $\varphi(t, \boldsymbol{a})$ *son funciones continuas. Si* τ *es el primer tiempo de llegada del proceso* X *a alguno de los vértices que satisface la condición (2.9), entonces la solución del correspondiente problema está dada por*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{[\tau \leqslant t]}\varphi(t-\tau, X_\tau) + \mathbb{1}_{[\tau > t]}u_0(X_t)].$$

A dicho proceso X se le llamará un *proceso de difusión* sobre Γ. La diferencia es que las funciones $C_c^\infty(\Gamma)$ ya no están en $\mathrm{Dom}(\mathcal{K})$. Pero se llamarán así, porque localmente, se comportan como los procesos de difusión definidos en la Sección 1.4.

El proceso X generado por $(\mathcal{K}, \mathrm{Dom}(\mathcal{K}))$ es un proceso de difusión unidimensional dentro de cada arista a, y se puede denotar por $X_t = (x(t), a(t))$ donde $a(t)$ es la arista que el proceso ocupa en el tiempo t y $x(t) \in [0, l_{a(t)}]$, $t \geqslant 0$. A continuación, se trata de describir el comportamiento del proceso en una vecindad de uno de los vértices internos. Dado que esto es una propiedad local se supone que el grafo Γ consta de un solo vértice interno $\boldsymbol{a} \in I(\Gamma)$ que satisface la condición de pegado (2.5) y se asume que

$$\sum_{a' \sim \boldsymbol{a}} \beta_{\boldsymbol{a},a'} = 1, \quad \beta_{\boldsymbol{a},a'} > 0, \quad \alpha_{\boldsymbol{a}} = 0, \quad \text{si } a' \sim \boldsymbol{a}.$$

Los coeficientes $\beta_{\boldsymbol{a},a'}$ caracterizan el comportamiento del proceso en el vértice $\boldsymbol{a}$ (Freidlin, 1996). En términos generales, $\beta_{\boldsymbol{a},a'}$ describe como se distribuyen las partículas entre las aristas a' tales que $a' \sim \boldsymbol{a}$, inmediatamente después de que alcanzan el vértice $\boldsymbol{a}$, tal y como lo ilustra el siguiente resultado tomado de Freidlin and Sheu (2000)

Teorema 2.3.2 *Sea* H_δ*,* $\delta > 0$*, el tiempo de llegada definido por*

$$\mathsf{H}_\delta := \text{ínf}\{t > 0 : x(t) = \delta\}. \tag{2.10}$$

Entonces

$$\lim_{\delta \to 0} \mathbb{P}(a(\mathsf{H}_\delta) = a' \mid X_0 = \boldsymbol{a}) = \beta_{\boldsymbol{a},a'} \tag{2.11}$$

para cada arista a' *incidente al vértice* $\boldsymbol{a}$*.*

2.4. Derivación del Modelo sobre un Grafo

Diversos procesos naturales de interés biológico, ecológico e hidrológico se pueden modelar como procesos de advección y difusión. En este capítulo se considera un proceso de advección-difusión sobre una *red* Γ, la cual modela el medio de interés junto con ciertas condiciones de frontera adecuadas, seguidas de los trabajos de Pachepsky et al. (2005); Speirs and Gurney (2001). La derivación de este modelo es tomada de Ramirez (2012) y es objeto central de estudio en esta monografía.

En términos generales la idea es la siguiente, se parte de un fenómeno físico que mediante una ecuación de conservación dará una ecuación hacia adelante (1.25). Al operador de dicha ecuación se le encontrará el generador infinitesimal. A dicho operador se le aplicará el Teorema 2.3.1 (Freidlin and Sheu, 2000; Freidlin and Wentzell, 1993) para garantizar la existencia de un proceso de difusión sobre la *red* con ciertas condiciones de pegado en los vértices internos (2.3) y con condición de frontera Dirichlet en $\boldsymbol{\phi}$ y Neumann en $U(\Gamma)$.

Se considera una concentración de partículas de un soluto en un fluido que se mueve a lo largo de un medio que consiste, por simplicidad, solo de tres canales: dos canales que convergen para formar otro. Cada canal a es en realidad un dominio tridimensional con coordenadas $\boldsymbol{y} := (X, y, Z)$ donde y es la variable longitudinal entre $y = 0$ y la longitud del canal $y = l_a$, Z la altura del canal medida desde el suelo y X es una variable ortogonal a y y Z. Si $\boldsymbol{c}_a(t, \boldsymbol{y})$ es la concentración volumétrica de dicho soluto en el canal a, entonces como las partículas se mueven por un proceso de advección-difusión, la *Ley de Fick* ofrece un modelo matemático para el flujo del soluto; existe un tensor de difusión definido positivo $\mathbf{D}_a(t, \boldsymbol{y})$ y un vector $\mathbf{V}_a$ tal que:

$$\frac{\partial \boldsymbol{c}_a}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_a \nabla \boldsymbol{c}_a) - \nabla \cdot (\mathbf{V}_a \boldsymbol{c}_a).$$

Se asume que $\mathbf{V}_a = (-V_a, 0, 0)$ donde $V_a > 0$ es la velocidad del fluido y $\mathbf{D}_a = D_a I_{3\times 3}$.

A cada canal a se le asocian tres parámetros estrictamente positivos: A_a, V_a, D_a, donde A_a representa el área de la sección transversal del canal a, V_a la velocidad del fluido, y D_a denota el coeficiente de difusión del soluto. Se asume que hay conservación del flujo en el cruce de los canales:

$$A_{e0}V_{e0} + A_{e1}V_{e1} = A_e V_e. \tag{2.12}$$

El modelo matemático para esta red de drenaje es una red $\Gamma = \mathsf{Y}$ como se definió en la Sección 2.2. Ver Figura 2.1. Se supone que a lo largo de la sección transversal la concentración es constante, entonces la concentración volumétrica $\boldsymbol{c}$ de dicho soluto varía solo con el tiempo t y en la distancia y a lo largo de los canales. La concentración de soluto por unidad de longitud en la arista $a \in E(\Gamma)$ es:

$$c_a(t, y) := \int_{A_a} \boldsymbol{c}_a(t, X, y, Z)\, \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Z,\ \ y \in (0, l_a),\ \ t > 0. \tag{2.13}$$

Luego, para cada arista a, $c_a(t, y)$ satisface una ecuación de advección-difusión unidimensional:

$$\frac{\partial c_a}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 c_a}{\partial y^2} + V_a \frac{\partial c_a}{\partial y} =: (\mathcal{A}^*[c])_a,\ \ y \in (0, l_a),\ \ t > 0. \tag{2.14}$$

La restricción del operador $\mathcal{A}^*$ a la arista a corresponde al operador hacia adelante definido en (2.1). El adjunto del operador $\mathcal{A}^*$ es el que permitirá construir el generador infinitesimal del proceso de difusión definido sobre Γ.

Se supone que c es constante en el vértice interno $\boldsymbol{e}$

$$\frac{c_e(t, l_e)}{A_e} = \frac{c_{e0}(t, 0)}{A_{e0}} = \frac{c_{e1}(t, 0)}{A_{e1}}. \tag{2.15}$$

La cantidad de soluto que entra por unidad de tiempo en la intersección de los canales debe ser igual a la que sale, esto es,

$$\sum_{i=0,1} A_{ei} \left[D_{ei} \frac{\partial \boldsymbol{c}_{ei}}{\partial y}(t, \boldsymbol{y}) + V_{ei}\boldsymbol{c}_{ei}(t, \boldsymbol{y}) \right|_{y=0} = A_e \left[D_e \frac{\partial \boldsymbol{c}_e}{\partial y}(t, \boldsymbol{y}) + V_e \boldsymbol{c}_e(t, \boldsymbol{y}) \right|_{y=l_e} \tag{2.16}$$

Por lo tanto, por (2.15) y (2.12)

$$D_{e0} \frac{\partial c_{e0}}{\partial y}(t, 0) + D_{e1} \frac{\partial c_{e1}}{\partial y}(t, 0) = D_e \frac{\partial c_e}{\partial y}(t, l_e). \tag{2.17}$$

Es posible describir diferentes condiciones de frontera en $\partial(\Gamma)$. En particular, se siguen como en Pachepsky et al. (2005); Speirs and Gurney (2001):

- Absorbente en $\boldsymbol{\phi}$: las partículas que llegan a esta frontera salen del canal y no regresan, esta frontera representa escenarios como una cascada, un lago, disturbios humanos, etcétera. Matemáticamente esto se escribe como,

$$c_e(t,0) = 0,\ t > 0. \tag{2.18}$$

- Reflectivas en $U(\Gamma)$: las partículas que llegan a esta frontera no abandonan la red de drenaje, estas rebotan y regresan al interior del canal, entonces estas fronteras pueden representar los nacimientos de los canales. Matemáticamente esto se puede interpretar como que el flujo total es igual a cero,

$$A_{ei}\left[D_{ei}\frac{\partial c_{ei}}{\partial x}(t,l_{ei}) + V_{ei}c_{ei}(t,l_{ei})\right] = 0,\ t > 0,\ i = 0,1. \tag{2.19}$$

Para la red $\Gamma = \mathsf{Y}$, se denota por $(\mathcal{A}^*, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}^*))$ al *operador hacia adelante* definido en (2.14) y donde el dominio está dado por

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}^*) = \{h \in C^2(\Gamma^\circ) \cap C(\Gamma) :\ h \text{ satiscace (2,15), (2,17)}\} \cap \tilde{B}, \tag{2.20}$$

para

$$\tilde{B} = \{h \in C(\Gamma) : h(\boldsymbol{\phi}) = 0,\ h \text{ satisface (2,19) para todo } \boldsymbol{e} \in U(\Gamma)\}.$$

Por integración por partes se tiene el adjunto formal de $\mathcal{A}^*$; un operador diferencial de segundo orden llamado el *operador hacia atrás*

$$(\mathcal{A}[f])_a = D_a\frac{\mathrm{d}^2 f_a}{\mathrm{d}x^2} - V_a\frac{\mathrm{d}f_a}{\mathrm{d}x},\ x \in a,\ t > 0, \tag{2.21}$$

cuyo dominio está dado por

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) = \{f \in C^2(\Gamma^\circ) \cap C(\Gamma) : A_e D_e \frac{\mathrm{d}f_e}{\mathrm{d}x}(l_e) = \sum_{i=0,1} A_{ei}D_{ei}\frac{\mathrm{d}f_{ei}}{\mathrm{d}x}(0),\ \boldsymbol{e} \in I(\Gamma)\} \cap B, \tag{2.22}$$

donde B es el conjunto de funciones que satisfacen las condiciones de frontera

$$B = \{f \in C(\Gamma) : f(\boldsymbol{\phi}) = 0, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\boldsymbol{e}) = 0 \ \text{ para todo } \boldsymbol{e} \in U(\Gamma)\}.$$

Se quiere aplicar el Teorema 2.3.1 al operador $(\mathcal{A}, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$. Como los coeficientes de advección y difusión son constantes en cada arista, entonces las funciones k_a, b_a están definidas por $k_a(x) = D_a, b_a(x) = -V_a$ para todo $x \in a$. Se puede notar que para este caso, las constantes $\alpha_{\boldsymbol{a}}$, $\beta_{\boldsymbol{a},a}$ dadas en la condición de pegado (2.3) están dadas por $\alpha_{\boldsymbol{a}} = 0, \boldsymbol{a} \in I(\Gamma)$, $\beta_{\boldsymbol{e},e\mathrm{o}} = A_{e\mathrm{o}} D_{e\mathrm{o}}$, $\beta_{\boldsymbol{e},e\mathrm{1}} = A_{e\mathrm{1}} D_{e\mathrm{1}}$, $\beta_{\boldsymbol{e},e} = -A_e D_e$, $\beta_{\boldsymbol{e\mathrm{o}},e\mathrm{o}} = \beta_{\boldsymbol{e\mathrm{1}},e\mathrm{1}} = 1$, $\beta_{\boldsymbol{a},a} = 0$ para los $\boldsymbol{a}$ que no son incidentes a a. En este modelo el vértice raíz $\boldsymbol{\phi}$ de la red representa una frontera absorbente, por lo que la condición (2.9) es usada con la función $\varphi(\boldsymbol{\phi}, t) = 0$.

Por el Teorema 2.3.1, existe un proceso de difusión $X := \{X_t : t \geqslant 0\}$ sobre Γ con generador infinitesimal $(\mathcal{A}, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ definido en (2.21)-(2.22). La solución de la ecuación hacia atrás de Kolmogorov (1.23) junto con la condición inicial $u(t,x) = u_0(x), x \in \Gamma$ es

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x u_0(X_t), \text{ para } t < \mathsf{H}_{\boldsymbol{\phi}}, \; u(t,x) = 0, \text{ para } t \geqslant \mathsf{H}_{\boldsymbol{\phi}}. \tag{2.23}$$

Donde $\mathsf{H}_{\boldsymbol{\phi}}$ es el tiempo de llegada de X al vértice raíz $\boldsymbol{\phi}$, definido en (1.9).

Las trayectorias del proceso de difusión X sirven como modelo para la trayectoria aleatoria y errática de las partículas de soluto que se difunden en la red de drenaje. El dominio del operador $\mathcal{A}$ determina el comportamiento del proceso X en los vértices externos. Si los vértices hojas representan los nacimientos de los canales, las condiciones en estos vértices que aparecen en el dominio del operador $\mathcal{A}$ obligan a que las trayectorias del proceso se reflejen en esta frontera y regresen al interior de la arista. Si el vértice raíz representa un escenario donde las partículas de soluto pueden salir pero no regresar a la red de drenaje, entonces la condición en el vértice raíz en $\mathrm{Dom}(\mathcal{A})$ indica justamente que las trayectorias del proceso se quedarán ahí para siempre. Los coeficientes $\beta_{\boldsymbol{a},a'}$ para $a' \sim \boldsymbol{a}$, indican precisamente como las partículas se distribuyen localmente alrededor del vértice interno, ver Teorema 2.3.2.

2.4.1. Ductos Heterogéneos

En esta sección se considera un caso particular de $\Gamma = \mathsf{Y}$. Se considera un medio que consiste, por ejemplo, de un sistema de tubería con contracciones abruptas, o ríos con cambios drásticos en las condiciones hidráulicas.

Se supone, por simplicidad, que este medio consiste de dos ductos, a estos se les asocian de nuevo tres parámetros estrictamente positivos A_e, V_e, D_e y $A_{e\mathrm{o}}, V_{e\mathrm{o}}, D_{e\mathrm{o}}$. Se asume

la conservación de flujo en la intersección de los tubos:

$$A_e V_e = A_{eo} V_{eo}. \tag{2.24}$$

Este medio está modelado por un grafo $\Gamma =$ —•— de dos aristas $eo = [0, l_{eo}], e = [0, l_e]$ y tres vértices: el de intersección $\boldsymbol{e}$, el externo $\boldsymbol{eo}$ y la raíz $\boldsymbol{\phi}$. Ver Figura 2.2.

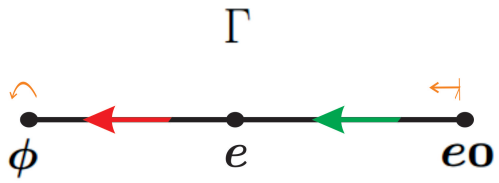

Figura 2.2 Grafo $\Gamma =$ —•—

La concentración por unidad de longitud $c(t, y)$ definida en (2.13) satisface la ecuación de advección-difusión unidimensional dada en (2.14) con las siguientes condiciones en el vértice interno $\boldsymbol{e}$:

$$\frac{c_{eo}(0,t)}{A_{eo}} = \frac{c_e(t, l_e)}{A_e}, \quad D_{eo}\frac{\partial c_{eo}}{\partial y}(t, 0) = D_e \frac{\partial c_e}{\partial y}(t, l_e), \tag{2.25}$$

y las siguientes condiciones en los vértices externos,

$$A_{eo} D_{eo} \frac{\partial c_{eo}}{\partial y}(t, l_{eo}) + A_{eo} V_{eo} c_{eo}(t, l_{eo}) = 0, \;\; c_e(t, 0) = 0, \;\; t > 0. \tag{2.26}$$

Se tiene que el operador hacia adelante está definido en (2,14) y el dominio está dado por las funciones en $C(\Gamma) \cap C^2(\Gamma^\circ)$ que satisfacen (2.25) y (2.26). Por integración por partes se tiene que el operador hacia atrás es el operador $\mathcal{A}$ definido en (2.21) con dominio:

$$\mathrm{Dom}(\mathcal{A}) = \{f \in C(\Gamma) \cap C^2(\Gamma^\circ) : A_{eo} D_{eo} \frac{\mathrm{d} f_{eo}}{\mathrm{d}x}(0) = A_e D_e \frac{\mathrm{d} f_e}{\mathrm{d}x}(l_e), \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d}x}(\boldsymbol{eo}) = f(\boldsymbol{\phi}) = 0\} \tag{2.27}$$

La existencia del proceso de difusión con generador infinitesimal $(\mathcal{A}, \mathrm{Dom}(\mathcal{A}))$ nuevamente la garantiza el Teorema 2.3.1.