



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Aplicación de perturbaciones cúbicas a sistemas lineales controlados por realimentación de estados

Application of cubic disturbances to linear systems controlled by state feedback

Diego Fernando Piarpuzán Estupiñán
Ingeniero Químico

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación
Manizales, Colombia
2011

Aplicación de perturbaciones cúbicas a sistemas lineales controlados por realimentación de estados

Diego Fernando Piarpuzán Estupiñán
Ingeniero Químico

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magíster en Ingeniería: Automatización Industrial

Directora:

Fabiola Angulo García
Ph.D, M.Sc, Ingeniera Eléctrica

Línea de Investigación:

Control no lineal, Análisis de sistemas dinámicos

Grupo de Investigación:

Percepción y Control Inteligente (PCI)

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales
Facultad de Ingeniería y Arquitectura
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación
Manizales, Colombia

2011

Dedicatoria

A Dios

A Rigoberto, Lilia, David

A Brenda

A mis compañeros y amigos

Prefacio

Esta tesis se presenta como parte de los requerimientos para optar al título de Magíster en Ingeniería - Automatización Industrial de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales. El trabajo fue desarrollado en el período de Febrero de 2009 a Abril de 2011 en el Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación bajo la dirección de la Ph.D. Fabiola Angulo García. El desarrollo del proyecto fue financiado por el programa de *"Jóvenes Investigadores e Innovadores 2009 - Virginia Gutiérrez de Pineda"* del Instituto para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología - Francisco José de Caldas - COLCIENCIAS, mediante convocatoria No. 496 de 2009 y se titula: **"Aplicación de perturbaciones cúbicas a sistemas lineales controlados por realimentación de estados"**.

Agradecimientos

Todos los logros académicos y personales, van acompañados de seres e instituciones que nos permiten día a día ser mejores profesionales y mejores seres humanos. Expreso mis más sinceros agradecimientos a todos aquellos que contribuyeron de una u otra forma en la ejecución de ésta tesis y de mi posgrado en general.

En primer lugar, a mi familia, por su apoyo constante, su sacrificio, por soportar mi ausencia, y ser mi más importante fuente de inspiración.

A la paciencia, asesoría académica, y extraordinaria calidad humana de la Profesora Fabiola Angulo García. Su dirección y apoyo, fueron siempre uno de los pilares fundamentales para el desarrollo de la tesis y la totalidad de la maestría.

A los Profesores Gerard Olivar Tost y Gustavo Osorio, por el apoyo académico brindado en los seminarios de investigación, cursos de posgrado, y sus constantes sugerencias en las exposiciones que llevé a cabo sobre este trabajo.

A mis Profesores del pregrado de Ingeniería Química y de la Maestría en Ingeniería - Automatización Industrial, por brindarme una excelente formación académica.

A todos los compañeros y amigos integrantes del grupo académico PCI, por su compañía en los espacios físicos, colaboración en el ámbito académico y gran calidad humana.

A las voces de aliento, colaboración y compañía constante provenientes de todos mis amigos.

A la Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, la DIMA y COLCIENCIAS, por brindarme la oportunidad de llevar a cabo mis estudios, proporcionando los espacios físicos y el financiamiento necesarios para el desarrollo de la maestría.

Resumen

En este trabajo se presenta la aplicación de perturbaciones cúbicas sobre sistemas dinámicos lineales SISO y MIMO, lineales, continuos e invariantes en el tiempo, controlados por realimentación de estados; diseñando finalmente una ley de control no lineal $u_{NL}(t)$.

El diseño de la ley de control no lineal $u_{NL}(t)$ se aplica inicialmente sobre un sistema lineal SISO, estableciendo algunas condiciones básicas sobre los parámetros de la ley de control, con el objetivo de disminuir el esfuerzo de control, preservando la estabilidad en lazo cerrado.

La técnica de control se aplica también sobre un sistema dinámico MIMO (reactor CSTR), utilizando la técnica LQR para el diseño de la ley de control lineal $u_L(t)$ por realimentación de estados.

La nueva ley de control no lineal $u_{NL}(t)$ aplicada sobre sistemas SISO y MIMO, permite demostrar que ante la elección adecuada sobre los parámetros de la ley de control, se reduce el gasto energético, preservando la estabilidad del sistema dinámico en lazo cerrado; comparado a los resultados obtenidos usando la ley de control lineal $u_L(t)$.

Palabras clave: Realimentación de estados, Esfuerzo de control, Control no lineal, Reactor CSTR, LQR, Lyapunov.

Abstract

In this work the cubic disturbances application on SISO and MIMO linear, continuous, time invariant and state feedback controlled dynamical systems is shown. Finally a nonlinear control law $u_{NL}(t)$ is designed.

The nonlinear control law $u_{NL}(t)$ design is applied initially on a SISO linear system, establishing some basic conditions in the control law parameters with the aim to decrease the control effort and preserving the closed loop stability.

The control technique is also applied on a MIMO dynamic system (CSTR reactor), using the LQR method to design the state feedback linear control law $u_L(t)$.

Finally, the new nonlinear control law $u_{NL}(t)$ applied on SISO and MIMO systems can show that the right choice on a law control parameters, the energetic effort is reduced, preserving the closed loop dynamical system stability, comparing this results with the linear control law $u_L(t)$ obtained.

Keywords: State Feedback, Control effort, Nonlinear Control, CSTR Reactor, LQR, Lyapunov.

Nomenclatura

Símbolos con letras latinas

Símbolo	Término	Unidad SI
A	Área de transferencia de calor	m^2
$A(s)$	Matriz de funciones de transferencia - Sistema lineal	
A_m	Matriz de ponderación del error en tiempo infinito	
A_r	Factor de frecuencia	h^{-1}
C_i	Concentración de salida de la especie i	$\frac{kgmoli}{m^3}$
C_{i_0}	Concentración de entrada de la especie i	$\frac{kgmoli}{m^3}$
C_A	Concentración de (A)	$\frac{kgmolA}{m^3}$
C_{A_1}	Concentración de entrada al reactor (A)	$\frac{kgmolA}{m^3}$
C_{A_4}	Concentración de salida del reactor (A)	$\frac{kgmolA}{m^3}$
C_{B_0}	Concentración inicial en el reactor (B)	$\frac{kgmolB}{m^3}$
C_{B_1}	Concentración de entrada al reactor (B)	$\frac{kgmolB}{m^3}$
C_{B_4}	Concentración de salida del reactor (B)	$\frac{kgmolB}{m^3}$
C_{C_4}	Concentración de salida del reactor (C)	$\frac{kgmolC}{m^3}$
C_E	Esfuerzo de control	
C_{EL}	Esfuerzo de control lineal	
C_{ENL}	Esfuerzo de control no lineal	
C_{M_1}	Concentración de entrada al reactor (M)	$\frac{kgmolM}{m^3}$
C_{M_4}	Concentración de salida del reactor (M)	$\frac{kgmolM}{m^3}$
\bar{C}_{A_1}	Concentración de entrada al reactor (A) - Variables de desviación	$\frac{kgmolA}{m^3}$
\bar{C}_{A_4}	Concentración de salida del reactor (A) - Variables de desviación	$\frac{kgmolA}{m^3}$

Símbolo	Término	Unidad SI
\bar{C}_{B_0}	Concentración inicial en el reactor (B) - Variables de desviación	$\frac{kgmolB}{m^3}$
\bar{C}_{B_1}	Concentración de entrada al reactor (B) - Variables de desviación	$\frac{kgmolB}{m^3}$
\bar{C}_{B_4}	Concentración de salida del reactor (B) - Variables de desviación	$\frac{kgmolB}{m^3}$
\bar{C}_{C_4}	Concentración de salida del reactor (C) - Variables de desviación	$\frac{kgmolC}{m^3}$
\bar{C}_{M_1}	Concentración de entrada al reactor (M) - Variables de desviación	$\frac{kgmolM}{m^3}$
\bar{C}_{M_4}	Concentración de salida del reactor (M) - Variables de desviación	$\frac{kgmolM}{m^3}$
C_{p_i}	Capacidad calorífica de la especie i	$\frac{kJ}{kgmol_iK}$
C_{p_A}	Capacidad calorífica de A	$\frac{kJ}{kgmolAK}$
C_{p_B}	Capacidad calorífica de B	$\frac{kJ}{kgmolBK}$
C_{p_C}	Capacidad calorífica de C	$\frac{kJ}{kgmolCK}$
C_{p_M}	Capacidad calorífica de M	$\frac{kJ}{kgmolMK}$
C_{p_E}	Capacidad calorífica del enfriante	$\frac{kJ}{kgmolEK}$
C_{p_s}	Capacidad calorífica de la solución	$\frac{kJ}{kgmolslnK}$
D	Matriz de transmisión directa ($p \times m$)	
\hat{E}	Energía total de un sistema cerrado	
E_i	Energía de la especie i	$\frac{kJ}{kgmol_iK}$
E_a	Energía de activación	$\frac{kJ}{kgmol}$
f	Función vectorial no lineal de dimensiones $n \times 1$	
F	Matriz de estados ($n \times n$)	
F_i	Flujo molar de salida de la especie i	$\frac{kgmoli}{h}$
F_{i_0}	Flujo molar de entrada de la especie i	$\frac{kgmoli}{h}$
F_{A_0}	Flujo de entrada del componente (A)	$\frac{kgmolA}{h}$
F_{A_1}	Flujo molar de entrada al reactor (A)	$\frac{kgmolA}{h}$
F_{A_4}	Flujo molar de salida del reactor (B)	$\frac{kgmolA}{h}$
F_{B_1}	Flujo molar de entrada de B	$\frac{kgmolB}{h}$
F_{B_4}	Flujo molar de salida de B	$\frac{kgmolB}{h}$
F_{C_4}	Flujo molar de salida de C	$\frac{kgmolC}{h}$
F_{M_1}	Flujo molar de entrada de M	$\frac{kgmolM}{h}$
F_{M_4}	Flujo molar de salida de M	$\frac{kgmolM}{h}$

Símbolo	Término	Unidad SI
g	Función vectorial no lineal de dimensiones $p \times 1$	
G	Matriz de control ($n \times m$)	
h	Función vectorial no lineal de dimensiones $p \times 1$	
H	Matriz de salida ($p \times n$)	
H_i	Entalpía de la especie i	$\frac{kJ}{kgmoli}$
H_{i_0}	Entalpía de entrada de la especie i	$\frac{kJ}{kgmoli}$
H_2SO_4	Ácido sulfúrico	
Im	Parte imaginaria	
j	Número complejo	
J_D	Índice de desempeño	
J_D^*	Índice de desempeño óptimo	
k_i	i - ésimo elemento de la matriz de ganancias K	
k	Ganancia de la realimentación - Unidimensional	
k_r	Constante específica de velocidad de reacción	h^{-1}
K	Matriz de ganancias de la realimentación ($m \times n$)	
K_c	Matriz positiva definida $K_c = K_{min} - K_{max}$	
K_f	Matriz de realimentación de ganancias - Ley de control óptimo	
K_{min}	Cota inferior de la no linealidad de sector	
K_{max}	Cota superior de la no linealidad de sector	
m	Número de entradas de control	
\dot{m}_{E_1}	Flujo molar de entrada del enfriante	$\frac{kgmolE}{h}$
\dot{m}_{E_2}	Flujo molar de salida del enfriante	$\frac{kgmolE}{h}$
\dot{m}_{E_3}	Flujo molar de salida del enfriante	$\frac{kgmolE}{h}$
M	Matriz de controlabilidad	
n	Número de variables de estado	
N	Matriz de observabilidad	
N_i	Moles de la especie i	molesi
N_{Cp}	Entalpía de la mezcla reaccionante	$\frac{kJ}{K}$
p	Número de salidas	
P	Presión barométrica	

Símbolo	Término	Unidad SI
$P(t)$	Matriz solución de la ecuación de Ricatti	
$P_L(t)$	Matriz de la función de Lyapunov	
q_1	Caudal volumétrico de entrada (Reactivos)	$\frac{m^3}{h}$
q_4	Caudal volumétrico de salida (Productos)	$\frac{m^3}{h}$
Q	Calor que entra al sistema	$\frac{m^3}{h}$
Q_d	Peso del esfuerzo de control	
r_i	Velocidad de consumo - Reactivo i	$\frac{kgmoli}{m^3h}$
r_j	Velocidad de consumo - Reactivo j	$\frac{kgmolj}{m^3h}$
r_A	Velocidad de reacción específica (A)	$\frac{kgmolA}{m^3h}$
r_B	Velocidad de reacción específica (B)	
R	Constante de gases ideales	$\frac{kJ}{kgmolK}$
R_d	Peso del error	
Re	Parte real	
t	Tiempo	
t_0	Tiempo inicial	
T_{i_0}	Temperatura de entrada de la especie i	K
T_{a_1}	Temperatura de entrada del fluido refrigerante	K
T_{a_2}	Temperatura de salida del fluido refrigerante	K
T	Temperatura de reacción	K
T_{ext}	Temperatura de extinción	K
T_{E_2}	Temperatura de entrada del refrigerante	K
T_{E_3}	Temperatura de salida del refrigerante	K
T_{ign}	Temperatura de ignición	K
T_0	Temperatura inicial en el reactor	K
T_1	Temperatura de entrada (Reactivos)	K
T_4	Temperatura de salida (Producto)	K
\bar{T}_4	Temperatura del reactor - Variables de desviación	K
T_R	Temperatura de referencia	K
T_{ss}	Temperatura en estado estable	K
$u(t)$	Entrada de control o señal de control	

Símbolo	Término	Unidad SI
u_m	m - ésima entrada de control	
$u_L(t)$	Entrada de control o señal de control lineal	
$u_{NL}(t)$	Entrada de control o señal de control no lineal	
u_{op}	Entrada de control o señal de control de referencia	
u_s	Entrada de control de operación	
\bar{u}	Entrada de control o señal de control en variables de desviación	
$\bar{u}_L(t)$	Entrada o señal de control lineal en variables de desviación	
$\bar{u}_{NL}(t)$	Entrada o señal de control no lineal en variables de desviación	
$u^*(t)$	Ley de control óptima	
U	Coefficiente de transferencia de calor	$\frac{kJ}{hm^2K}$
U_i	Energía interna de la especie i	$\frac{kJ}{kgmoli}$
UA	Coefficiente global de transferencia de calor	$\frac{kJ}{hK}$
V	Volumen de reacción	m^3
V_i	Volumen específico	$\frac{m^3}{kgmoli}$
$V(x)$	Función de Lyapunov	
$\dot{V}(x)$	Derivada temporal de una función de Lyapunov	
W_s	Trabajo de flecha	$\frac{kJ}{h}$
x_i	i - ésima variable de estado	
x_{op}	Variable de estado de operación o referencia	
x_s	Punto de referencia u operación	
x_{ss}	Variable de estado en estado estacionario	
x_0	Condición inicial	
\bar{x}_{i0}	Variable de estado en $t = 0$	
x^*	Punto de equilibrio	
\bar{x}	Variable de estado del sistema dinámico en variables de desviación	
X_{BE}	Conversión - Balance de energía	
X_{BM}	Conversión - Balance de materia	
y_{op}	Señal de salida de operación o referencia	
y_p	p - ésima variable de salida	
\bar{y}	Salida del sistema dinámico en variables de desviación	

Símbolo	Término	Unidad SI
$Z(s)$	Función de transferencia para el criterio de estabilidad de Popov	

Símbolos con letras griegas

Símbolo	Término	Unidad SI
α	Matriz de ponderación para la perturbación no lineal	
α_i	i - ésimo elemento de la matriz α	
α_s	Ponderación para la perturbación no lineal - Unidimensional	
β	Límite inferior de la condición de sector	
δ	Derivada parcial	
ΔH_{rxn}	Calor de reacción	$\frac{kJ}{kgmolA}$
ϵ	Aumento diferencial	
η	Límite superior de la condición de sector	
λ	Valores propios	
θ_{Cp}	Capacidad calorífica de la mezcla reaccionante	$\frac{kJ}{kgmolK}$
ρ_A	Densidad molar de A	$\frac{kgmolA}{m^3}$
ρ_B	Densidad molar de B	$\frac{kgmolB}{m^3}$
ρ_M	Densidad molar de M	$\frac{kgmolM}{m^3}$
τ	Tiempo de residencia del reactor	h
τ_c	Inversa de la pendiente de la línea de Popov	
ω	Frecuencia	
ω_n	Frecuencia natural no amortiguada	
Ω	Intervalo de estabilidad	
v_i	Coefficiente estequiométrico (Reactivo base)	
v_j	Coefficiente estequiométrico - Producto	
ψ	Función escalar de una variable de estado	
ζ	Factor de amortiguamiento relativo	

Abreviaturas

Abreviatura	Término
<i>A</i>	Óxido de propileno
<i>B</i>	Agua
<i>C</i>	Propilenglicol
<i>E</i>	Refrigerante
<i>M</i>	Metanol
<i>CSTR</i>	Reactor continuo en tanque agitado (Continuous Stirred Tank Reactor)
<i>FSMC</i>	Control difuso en modo deslizante (Fuzzy Sliding Model Control)
<i>HJE</i>	Ecuación de Hamilton - Jacobi (Hamilton - Jacobi Equation)
<i>IAE</i>	Integral del error absoluto (Integral of Absolute Error)
<i>I/O</i>	Entrada - Salida (Input - Output)
<i>IDP</i>	Programación iterativa dinámica (Iterative dynamic programation)
<i>IMPC</i>	Control predictivo interno basado en modelo (Internal Modelo Predictive Control)
<i>ISE</i>	Integral del error al cuadrado (Integral square error)
<i>ITAE</i>	Integral del tiempo multiplicado por el error absoluto (Integral of Time multiply by Absolute Error)
<i>LQG</i>	Gaussiano lineal cuadrático (Linear Quadratic Gaussian)
<i>LQR</i>	Regulador lineal cuadrático (Linear Quadratic Regulator)
<i>MIFO</i>	Múltiples entradas - Salidas de velocidad fija (Multiple Input - Fixed Output)
<i>MIMO</i>	Múltiples entradas - Múltiples salidas (Multiple Input - Multiple Output)
<i>MPC</i>	Modelo de control predictivo (Model Predictive Control)
<i>MPTC</i>	Controlador modificado en fase cero para rastreo (Modified phase zero tracking controller)
<i>PID</i>	Proporcional - Integral - Derivativo (Proportional - Integral - Derivative)
<i>QFT</i>	Teoría de Realimentación Cuantitativa (Quantitative Feedback Theory)
<i>SISO</i>	Única salida - Única entrada (Single Input - Single Output)
<i>T.O.S</i>	Términos de orden superior

Contenido

Resumen	VIII
Abstract	IX
Nomenclatura	X
Contenido	XIX
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Planteamiento del problema	2
1.2.1. Esfuerzo de control	3
1.2.2. Modelado y linealización	3
1.2.3. Ley de control lineal por realimentación de estados	6
1.2.4. Ley de control no lineal por realimentación de estados – Adición de una perturbación cúbica a la ley de control lineal	7
1.2.5. Análisis dinámico, estabilidad y síntesis de la ley de control	8
1.3. Estado del arte	9
1.4. Organización del documento	13
2. Diseño de leyes de control lineal y no lineal por realimentación de estados, para sistemas dinámicos de dimensión $n = 1$ y $n = 2$	16
2.1. Conceptos generales	17
2.1.1. Modelado de sistemas dinámicos en el espacio de estados	17
2.1.2. Controlabilidad y observabilidad	19
2.1.3. Control por realimentación de estados	20
2.2. Diseño de una ley de control no lineal por realimentación de estados - Sistema $n = 1$	21
2.2.1. Modelo dinámico en el espacio de estados - Sistema $n = 1$	22
2.2.2. Ley de control lineal por desplazamiento de polos y realimentación de estados - Sistema $n = 1$	22
2.2.3. Perturbación no lineal sobre la ley de realimentación de estados - Sistema $n = 1$	23

2.2.4.	Esfuerzo de control para sistemas dinámicos - Sistema $n = 1$	24
2.2.5.	Análisis dinámico cualitativo - Sistema $n = 1$	26
2.2.6.	Comportamiento dinámico en lazo cerrado bajo una ley de control no lineal - Sistema $n = 1$	30
2.3.	Diseño de una ley de control no lineal por realimentación de estados - Sistema $n = 2$	35
2.3.1.	Modelo dinámico en el espacio de estados para $n = 2$	35
2.3.2.	Ley de control no lineal por desplazamiento de polos y realimentación de estados. Sistema $n = 2$	36
2.3.3.	Perturbación no lineal sobre la ley de realimentación de estado - Sistema $n = 2$	36
2.3.4.	Análisis dinámico cualitativo - Sistema $n = 2$	37
2.3.5.	Comportamiento dinámico en lazo cerrado bajo una ley de control no lineal - Sistema $n = 2$	43
2.4.	Conclusiones	51
3.	Modelado, simulación y linealización de un sistema dinámico $n = 4$ - Modelo MIMO	54
3.1.	Modelado de un sistema dinámico MIMO continuo e invariante en el tiempo	55
3.1.1.	Justificación y breve revisión bibliográfica acerca del control automático de reactores	55
3.1.2.	Planteamiento del problema	57
3.1.3.	Suposiciones y consideraciones en el modelado	58
3.1.4.	Balances de materia y energía	59
3.2.	Especificaciones para el modelo dinámico de un reactor CSTR no isotérmico con intercambio de calor en estado no estacionario	63
3.2.1.	Especificaciones de corriente y parámetros del modelo	65
3.2.2.	Restricciones físicas y operativas del modelo	66
3.3.	Análisis dinámico y respuesta en el tiempo del modelo no lineal - Reactor CSTR .	67
3.3.1.	Cálculo y caracterización de puntos de equilibrio	68
3.3.2.	Respuesta del sistema dinámico no lineal ante perturbaciones	71
3.3.3.	Análisis de bifurcaciones	77
3.3.4.	Multiplicidad de estados estacionarios	79
3.4.	Linealización alrededor de un punto de equilibrio del modelo dinámico para el reactor CSTR	83
3.4.1.	Volumen de control, variables manipuladas, controladas y perturbaciones .	83
3.4.2.	Análisis comparativo de la dinámica lineal y no lineal para el reactor CSTR en lazo abierto	88
3.5.	Conclusiones	91

4. Control lineal óptimo por realimentación de estados y ley de control no lineal para un sistema MIMO, $n = 4$	93
4.1. Controlabilidad y observabilidad de estados para un modelo dinámico MIMO, $n = 4$	94
4.2. Ley de control lineal con realimentación de estados para un sistema MIMO - Fundamento teórico	96
4.2.1. Ventajas del control lineal óptimo	97
4.2.2. Diseño de controladores por el método LQR	97
4.2.3. Controlador lineal óptimo con tiempo de optimización infinito	99
4.3. Control lineal óptimo con realimentación de estados aplicado a un reactor CSTR no isotérmico con intercambio de calor	101
4.3.1. Selección de las ponderados para el esfuerzo de control y error de regulación (R_d y Q_d)	103
4.3.2. Esfuerzo de control e ISE en el espacio de estados - Sistema MIMO, $n = 4$	111
4.4. Ley de control no lineal por realimentación de estados para un sistema MIMO . . .	112
4.5. Conclusiones	115
5. Esfuerzo de control e ISE con una ley de control no lineal sobre el sistema lineal MIMO - Reactor CSTR - Análisis de estabilidad absoluta	117
5.1. Análisis de estabilidad absoluta para sistemas dinámicos realimentados	118
5.1.1. Criterio de estabilidad absoluta para sistemas dinámicos realimentados . .	118
5.1.2. Análisis dinámico cualitativo - Sistema MIMO, ($m = 4, n = 4, p = 4$) . .	124
5.1.3. Condiciones de estabilidad según el criterio de Popov - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$)	125
5.1.4. Consideraciones finales para la estabilidad y disminución del esfuerzo de control - Sistema MIMO, ($n = 4, m = 4, p = 4$)	126
5.2. Esfuerzo de control e ISE con una ley de control no lineal en el modelo lineal del reactor CSTR	127
5.3. Estabilidad absoluta de un sistema dinámico MIMO, $n = 4$ - Aplicación	137
5.4. Conclusiones	143
6. Trabajo Futuro	145
Bibliografía	154

Lista de Figuras

1-1. Diagrama de un sistema de control en lazo cerrado – Ley de control lineal	7
1-2. Diagrama de un sistema de control en lazo cerrado – Ley de control no lineal	8
1-3. Diagrama de flujo - Planteamiento del problema	10
2-1. Esfuerzo de control para las leyes lineal y no lineal de realimentación de estados - Sistema $n = 1$	26
2-2. Relación del esfuerzo control lineal - esfuerzo de control no lineal para valores óptimos de α_s . Sistema $n = 1$	26
2-3. Trayectorias del estado $x(t)$ para distintas condiciones iniciales x_0 , a) $k < 0$ y $\alpha_s > 0$, b) $k < 0$ y $\alpha_s < 0$	31
2-4. Trayectorias del estado $x(t)$ para distintas condiciones iniciales x_0 , a) $k > 0$ y $\alpha_s > 0$, b) $k > 0$ y $\alpha_s < 0$	31
2-5. Dinámica lineal y no lineal en lazo cerrado para $k > 0$. Sistema $n = 1$	32
2-6. Dinámica lineal y no lineal en lazo cerrado para $k < 0$. Sistema $n = 1$	33
2-7. Porcentaje de disminución en el esfuerzo de control para $\alpha_s < 0$ y $\alpha_s > 0$	34
2-8. Esfuerzo de control en función de α_s para $k < 0$ y $k > 0$	34
2-9. Retrato de fases de la dinámica lineal en lazo cerrado. $k_1 = 1, k_2 = 1$. Sistema $n = 2$ 44	44
2-10. Retrato de fases de la dinámica lineal en lazo cerrado. $k_1 = -0,5, k_2 = -0,5$. Sistema $n = 2$	44
2-11. Retrato de fases de la dinámica no lineal en lazo cerrado. $k_1 = 1, k_2 = 1, \alpha_1 = 0,5$ y $\alpha_2 = 0,5$. Sistema $n = 2$	45
2-12. Retrato de fases de la dinámica no lineal en lazo cerrado. $k_1 = -0,5, k_2 = -0,5,$ $\alpha_1 = -0,5$ y $\alpha_2 = -0,5$. Sistema $n = 2$	45
2-13. Esfuerzo de control y dinámica lineal y no lineal en lazo cerrado. $k_1 = 1, k_2 = 1,$ $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 1$	47
2-14. Esfuerzo de control y dinámica lineal y no lineal en lazo cerrado. $k_1 = 1, k_2 = 1,$ $\alpha_1 = 0,5, \alpha_2 = 0,5$	48
2-15. Esfuerzo de control y dinámica lineal y no lineal en lazo cerrado. $k_1 = -0,5,$ $k_2 = -0,5, \alpha_1 = -0,9, \alpha_2 = -0,9$	48
2-16. Esfuerzo de control y dinámica lineal y no lineal en lazo cerrado. $k_1 = -0,5,$ $k_2 = -0,5, \alpha_1 = -0,45, \alpha_2 = -0,45$	49

2-17. Porcentaje de disminución en el esfuerzo de control para $\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$ y $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$	50
3-1. Esquema del reactor CSTR - Producción de Propilenglicol (C)	57
3-2. Plano de fase en lazo abierto - Concentración C_{A_4} vs. Temperatura T_1	71
3-3. Perfiles de concentración para el modelo no lineal en ausencia de perturbaciones	72
3-4. Perfiles de temperatura para el modelo no lineal en ausencia de perturbaciones	72
3-5. Perfiles de concentración para el modelo no lineal con un cambio de -10% , -20% y -30% en $F_{A_1}, F_{B_1}, F_{M_1}$ y \dot{m}_{E_2}	73
3-6. Perfiles de temperatura para el modelo no lineal con un cambio de -10% , -20% y -30% en $F_{A_1}, F_{B_1}, F_{M_1}$ y \dot{m}_{E_2}	73
3-7. Perfiles de concentración para el modelo no lineal con un cambio de $+10\%$, $+20\%$ y $+30\%$ en $F_{A_1}, F_{B_1}, F_{M_1}$ y \dot{m}_{E_2}	74
3-8. Perfiles de temperatura para el modelo no lineal con un cambio de $+10\%$, $+20\%$ y $+30\%$ en $F_{A_1}, F_{B_1}, F_{M_1}$ y \dot{m}_{E_2}	75
3-9. Perfiles de concentración para el modelo no lineal con un cambio de -10% , -20% y -30% en T_1 y T_{E_2}	75
3-10. Perfiles de temperatura y calor transferido para el modelo no lineal con un cambio de -10% , -20% y -30% en T_1 y T_{E_2}	76
3-11. Perfiles de concentración para el modelo no lineal con un cambio de $+10\%$, $+20\%$ y $+30\%$ en T_1 y T_{E_2}	76
3-12. Perfiles de temperatura y calor transferido para el modelo no lineal con un cambio de $+10\%$, $+20\%$ y $+30\%$ en T_1 y T_{E_2}	77
3-13. Diagrama de bifurcaciones para C_{A_4} (Izquierda) y T_4 (Derecha) variando F_{A_1} - Flujo de alimentación de A	78
3-14. Diagrama de bifurcaciones para C_{A_4} (Izquierda) y T_4 (Derecha) variando T_1 - Temperatura de alimentación de reactivos	79
3-15. Estados estacionarios del reactor CSTR en función de la conversión del reactivo (A)	81
3-16. Curva de Ignición - Extinción para el reactor CSTR de (3.24) - (3.27)	82
3-17. Diagrama de caja negra para un reactor CSTR no isotérmico con intercambio de calor	83
3-18. Respuesta en el tiempo de los sistemas dinámicos no lineal y lineal	89
3-19. Respuesta de los sistemas dinámicos no lineal y lineal con perturbaciones en F_{A_1} y \dot{m}_{E_2}	90
3-20. Respuesta de los sistemas dinámicos no lineal y lineal con perturbaciones en T_1 y T_{E_2}	90
4-1. Dinámica del modelo lineal MIMO - Reactor CSTR	94
4-2. Esfuerzo de control e ISE para diferentes q_d y r_d	107
4-3. Dinámica en lazo cerrado (Concentración del reactivo (A) en variables de desviación) para diferentes leyes de control lineal	108

4-4. Dinámica en lazo cerrado (Temperatura del reactor en variables de desviación) para diferentes leyes de control lineal	108
4-5. Entradas de control $\bar{u}(t)$ (Variables de desviación) para diferentes leyes de control lineal	109
4-6. Dinámica de lazo cerrado con una ley de control lineal óptima - Modelo linealizado reactor CSTR	112
4-7. Entradas de control $\bar{u}(t)$ (Variables de desviación) ante una ley de control óptima - Modelo linealizado reactor CSTR	113
4-8. Esfuerzo de control e ISE para diferentes condiciones iniciales en las variables de estado - Modelo linealizado reactor CSTR	113
5-1. Esquema de conexión de un sistema lineal y un elemento no lineal	118
5-2. Esquema de una no linealidad de sector	120
5-3. Esfuerzo de control e ISE para una ley de control no lineal - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$)	128
5-4. Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de α_1 - Sistema $n = 4$. . .	128
5-5. Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de α_2 - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$)	129
5-6. Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de α_3 - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$)	130
5-7. Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de α_4 - Sistema $n = 4$. . .	130
5-8. Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de $\ \alpha\ $ proyectado sobre \bar{x}_{10} - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - $\alpha < 0$	131
5-9. Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de $\ \alpha\ $ proyectado en \bar{x}_{40} - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - $\alpha < 0$	132
5-10. Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de $\ \alpha\ $ proyectado sobre \bar{x}_{10} - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - $\alpha > 0$	133
5-11. Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de $\ \alpha\ $ proyectado sobre \bar{x}_{40} - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - $\alpha > 0$	133
5-12. Variables de estado $\bar{x}_i(t)$ para $\alpha < 0$ - Modelo linealizado reactor CSTR	134
5-13. Variables de estado $\bar{x}_i(t)$ para $\alpha > 0$ - Modelo linealizado reactor CSTR	135
5-14. Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - Matriz $\alpha < 0$	135
5-15. Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - Matriz $\alpha > 0$	136
5-16. Entradas de control $\bar{u}(t)$ (Variables de desviación) ante una ley de control no lineal $\alpha < 0$ - Modelo linealizado reactor CSTR	136
5-17. Entradas de control $\bar{u}(t)$ (Variables de desviación) ante una ley de control no lineal $\alpha > 0$ - Modelo linealizado reactor CSTR	137
5-18. Parte real λ_i de la matriz $Z(j\omega) + Z'(-j\omega)$	141

Lista de Tablas

2-1.	Caracterización de puntos de equilibrio - Dinámica lineal y no lineal en lazo cerrado $n = 2$	46
2-2.	Polos en lazo cerrado - Figuras 2-13 a 2-16	49
3-1.	Grados de libertad para el reactor CSTR no isotérmico en estado transitorio	66
3-2.	Especificaciones para las corrientes de proceso	66
3-3.	Propiedades físicas de los compuestos A, B, C, M y parámetros de diseño del reactor	67
3-4.	Punto de equilibrio de un reactor CSTR no isotérmico	70
3-5.	Puntos de bifurcación para el modelo dinámico no lineal del reactor CSTR	80
3-6.	Valores propios en los puntos de bifurcación para el modelo dinámico no lineal del reactor CSTR	80
3-7.	Constantes del modelo linealizado de un reactor CSTR	88
4-1.	Solución de la ecuación algebraica de Riccati (4.16) - (P)	105
4-2.	Ganancias de la realimentación en una ley de control óptimo - (K)	106
4-3.	Polos en lazo cerrado para el sistema dinámico (4.4a) y (4.4b) para diferentes parámetros de penalización	106
4-4.	Esfuerzo de control e ISE - Condición inicial (4.1)	107
5-1.	Parámetros α_i - Superficies de esfuerzo de control e ISE	132
5-2.	Esfuerzo de control e ISE para diferentes α y \bar{x}_0	134
5-3.	Coefficientes para los polinomios de la matriz de funciones de transferencia $AA(s)$	140

CAPÍTULO 1

Introducción

*La mayoría de las ideas fundamentales de la ciencia
son esencialmente sencillas y,
por regla general pueden ser expresadas
en un lenguaje comprensible para todos*

A. EINSTEIN

Este capítulo presenta las nociones generales correspondientes al desarrollo de la tesis. Dichos aspectos incluyen la motivación que dio lugar al desarrollo del trabajo, seguida de la revisión bibliográfica realizada en torno a los métodos y estrategias para el diseño de controladores no – lineales, enfocados a reducir el esfuerzo de control. El capítulo contiene también el planteamiento del problema, acompañado finalmente de la organización general por capítulos de la tesis.

1.1. Motivación

Entre las diversas estrategias de control para sistemas dinámicos no lineales, una de las más comunes aplica los métodos de control lineal al modelo linealizado alrededor de un punto de equilibrio. Esta metodología es válida únicamente si la ley de control utilizada, es lo bastante robusta como para evitar que el sistema evolucione lejos del punto de linealización.

El objetivo más importante en el diseño de una ley de control es asegurar que esta tenga la capacidad suficiente de brindar condiciones adecuadas de robustez, rapidez en la convergencia hacia una trayectoria o referencia deseadas, capacidad de rechazo a perturbaciones y por supuesto, proporcione estabilidad al sistema de control. Para garantizar un comportamiento dinámico de este tipo sin violar las restricciones físicas del proceso, en muchas ocasiones el gasto de energía por parte del sistema de control puede llegar a ser muy elevado.

Durante el diseño y análisis de una ley de control, con el posterior ajuste de sus parámetros y simulación, es posible plantear modificaciones para aumentar su desempeño. Algunas de estas

modificaciones podrían estar orientadas, por ejemplo, hacia la reducción del esfuerzo de control ante eventos de diversa índole que puedan afectar al sistema.

El objetivo de diseñar un controlador con el valor agregado de disminuir el esfuerzo de control, es mejorar la relación entre un buen desempeño dinámico y la convergencia al punto de referencia o trayectoria deseadas. Así mismo, como aspecto relevante, está el asegurar la robustez del sistema de control, entendiéndose como tal la capacidad de evitar que el sistema evolucione lejos de un punto o trayectoria dados, frente a la presencia de incertidumbres en el modelo del sistema, o perturbaciones al mismo.

Los beneficios de reducir el esfuerzo de control en una planta traen consigo la disminución en el desgaste de los elementos finales de control (EFCs), menores costos de implementación, menor desgaste en actuadores y principalmente menores costos de operación, menor desperdicio de materia prima y mejor desempeño del sistema de control.

Esta investigación se enfoca en diseñar una ley de control no lineal por realimentación de estados, que permita establecer una relación cuantitativa y cualitativa adecuada entre algunos factores de diseño tales como: rechazo de perturbaciones y la reducción del esfuerzo de control, de modo tal que el comportamiento dinámico estacionario y transitorio no se vean afectados en gran medida.

La motivación de este trabajo se basa en la idea de mejorar una ley de control lineal por realimentación de estados, a través de la introducción de características no lineales en dicho sistema de control. Esta no - linealidad tiene la forma de las variables de estado realimentadas, elevadas a la tercera potencia y multiplicadas por un factor de ponderación, escogido con base en algunos criterios de estabilidad y en las condiciones básicas para disminuir la magnitud de la señal de control, y por ende la energía que el sistema gasta para llevar la planta hacia un punto de referencia ó trayectoria requeridos, en presencia o no de perturbaciones.

Finalmente, se espera también realizar un aporte al campo de investigación del diseño de controladores usando no - linealidades con el objetivo de reducir el esfuerzo de control, línea de investigación que cuenta con limitadas contribuciones.

1.2. Planteamiento del problema

En esta tesis se diseña un controlador no lineal por realimentación de estados aplicable a sistemas lineales, de comportamiento robusto ante perturbaciones acotadas y capaz de disminuir el esfuerzo de control en comparación al producido por una ley de control lineal.

1.2.1. Esfuerzo de control

Se puede definir el esfuerzo de control como la energía gastada durante la acción de control para regular el comportamiento del sistema dinámico, hacia una referencia o trayectoria deseadas. El esfuerzo de control se calcula mediante algunas expresiones definidas en (Anderson & Moore, 1989) como:

$$C_E = \int_{t_0}^T u'(t) u(t) dt \quad (1.1)$$

$$C_E = \int_{t_0}^T [u'(t) u(t)]^{1/2} dt \quad (1.2)$$

$$C_E = \max_{t \in [t_0, T]} \|u(t)\| \quad (1.3)$$

$$C_E = \int_{t_0}^T u'(t) R_E(t) u(t) dt \quad (1.4)$$

Donde $R_E(t)$ sin pérdida de generalidad, es una matriz positiva definida simétrica para todo t . En este trabajo se calcula el esfuerzo de control utilizando únicamente la expresión (1.1), elegida debido a su amplio uso en la literatura y posterior aparición en algunas etapas de la tesis.

1.2.2. Modelado y linealización

Sea un sistema físico continuo en el tiempo modelado por ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, descrito de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde f_i es una función vectorial no lineal de dimensiones $n \times 1$. Utilizando la expansión en series de Taylor, el modelo que representa (1.5) puede ser linealizado alrededor de un punto de operación. Expandiendo el lado derecho de las expresiones (1.5) alrededor de un estado estacionario p_s denotado por:

$$p_s = [x_1^s, \dots, x_n^s, u_1^s, \dots, u_m^s]' \quad (1.6)$$

Tenemos,

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_1(p_s) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{p_s} (x_1 - x_1^s) + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_{p_s} (x_n - x_n^s) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)_{p_s} (u_1 - u_1^s) + \dots + \\
 &\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_m}\right)_{p_s} (u_m - u_m^s) + T.O.S \\
 &\vdots \\
 f_n &= f_n(p_s) + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_{p_s} (x_1 - x_1^s) + \dots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_{p_s} (x_n - x_n^s) + \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)_{p_s} (u_1 - u_1^s) + \dots + \\
 &\left(\frac{\partial f_n}{\partial u_m}\right)_{p_s} (u_m - u_m^s) + T.O.S
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

donde $T.O.S$ reúne los términos de orden superior de la expansión. Si además el sistema dinámico (1.5) tiene la señal de salida:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= h_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m) \\
 &\vdots \\
 y_p(t) &= h_p(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m)
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde h_j es una función vectorial no lineal de dimensiones $p \times 1$. De la misma forma que para (1.7), se puede aplicar la expansión en series de Taylor sobre (1.8) alrededor de un punto de operación, obteniendo:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= h_1(p_s) + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right)_{p_s} (x_1 - x_1^s) + \dots + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_n}\right)_{p_s} (x_n - x_n^s) + \left(\frac{\partial h_1}{\partial u_1}\right)_{p_s} (u_1 - u_1^s) + \dots + \\
 &\left(\frac{\partial h_1}{\partial u_m}\right)_{p_s} (u_m - u_m^s) + T.O.S \\
 &\vdots \\
 h_p &= h_p(p_s) + \left(\frac{\partial h_p}{\partial x_1}\right)_{p_s} (x_1 - x_1^s) + \dots + \left(\frac{\partial h_p}{\partial x_n}\right)_{p_s} (x_n - x_n^s) + \left(\frac{\partial h_p}{\partial u_1}\right)_{p_s} (u_1 - u_1^s) + \dots + \\
 &\left(\frac{\partial h_p}{\partial u_m}\right)_{p_s} (u_m - u_m^s) + T.O.S
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Así, despreciando los $T.O.S$ y agrupando las expresiones (1.7) y (1.9), es posible aproximar las ecuaciones (1.5) y (1.8) mediante un sistema lineal e invariante en el tiempo de dimensión finita con variables de estado $x_i(t)$, como:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \tag{1.10a}$$

$$y(t) = Hx(t) + Du(t) \tag{1.10b}$$

Donde:

- F, G son las matrices de estado y de control con entradas continuas, de dimensiones $n \times n, n \times m$, respectivamente y están dadas por:

$$F = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\Big|_{p_s} & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}\right)\Big|_{p_s} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)\Big|_{p_s} \\ \vdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\Big|_{p_s} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)\Big|_{p_s} & \cdots & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)\Big|_{p_s} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$$G = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)\Big|_{p_s} & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_{m-1}}\right)\Big|_{p_s} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_m}\right)\Big|_{p_s} \\ \vdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\right)\Big|_{p_s} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_1}\right)\Big|_{p_s} & \cdots & \cdots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial u_m}\right)\Big|_{p_s} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

- H, D son las matrices de salida y de transmisión directa con entradas continuas, de dimensiones $p \times n, p \times m$, respectivamente y están dadas por:

$$H = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right)\Big|_{p_s} & \cdots & \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_{n-1}}\right)\Big|_{p_s} & \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_n}\right)\Big|_{p_s} \\ \vdots & \left(\frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right)\Big|_{p_s} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial h_p}{\partial x_1}\right)\Big|_{p_s} & \cdots & \cdots & \left(\frac{\partial h_p}{\partial x_n}\right)\Big|_{p_s} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

$$D = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial h_1}{\partial u_1}\right)\Big|_{p_s} & \cdots & \left(\frac{\partial h_1}{\partial u_{m-1}}\right)\Big|_{p_s} & \left(\frac{\partial h_1}{\partial u_m}\right)\Big|_{p_s} \\ \vdots & \left(\frac{\partial h_2}{\partial u_2}\right)\Big|_{p_s} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial h_p}{\partial u_1}\right)\Big|_{p_s} & \cdots & \cdots & \left(\frac{\partial h_p}{\partial u_m}\right)\Big|_{p_s} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

- $x(t)$ es un n - vector y denota los estados del sistema en el tiempo t .
- $u(t)$ es un m - vector que representa la entrada al sistema o control del sistema en el tiempo t .
- $y(t)$ es un p - vector que denota es la salida del sistema en el tiempo t .
- $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p$.

Se asume que (F, G) es controlable y (F, H) es observable, con el objetivo de garantizar que el problema de control tenga solución. La condición de observabilidad del sistema hace parte de la necesidad de estimar las variables de estado a partir de las variables de salida, ya que las primeras son requeridas en el componente de la realimentación.

Inicialmente, se diseña un control lineal por realimentación de estados y luego se introduce en éste una no - linealidad ¹, con el objetivo final de disminuir el esfuerzo de control. Tanto la ley de control lineal como la no lineal (ley de control lineal con una perturbación cúbica), trabajan con el modelo de la expresión (1.10a) que representa un sistema dinámico linealizado alrededor de un punto de equilibrio, o un sistema lineal.

1.2.3. Ley de control lineal por realimentación de estados

Dada la condición de controlabilidad del sistema, los polos en lazo cerrado de éste se pueden ubicar en una posición deseada a través de la realimentación de estados, por medio de una matriz de ganancias (K) de orden $m \times n$. Así entonces, aplicando la técnica de desplazamiento de polos de igual forma que en (Kalman, 1963), (Retallack, 1970), (Mufti, 1965), (Luenberger, 1967), (Retallack & MacFarlane, 1970), etc., y en vista de la observabilidad del sistema, la cual permite que las variables de estado estén disponibles para la realimentación, la señal de control $u(t)$ en (1.10a) es reemplazada por:

$$u_L(t) = -Kx(t) \quad (1.15)$$

En la Figura **1-1** se muestra el sistema de control en lazo cerrado donde (**r**) indica la referencia del sistema de control.

Reemplazando la ecuación (1.15) en la ecuación (1.1), obtenemos el esfuerzo de control con una ley de control lineal por realimentación de estados para un sistema n - dimensional.

$$C_{EL} = \int_{t_0}^T [x'(t) \cdot (-K)'] \cdot [(-K) \cdot x(t)] dt \quad (1.16)$$

¹Variables de estado realimentadas, elevadas a la tercera potencia y multiplicadas por un factor de ponderación. De ahora en adelante dicha no - linealidad se denomina perturbación cúbica, dejando de un lado la definición convencional del término perturbación en sistemas dinámicos y control automático.

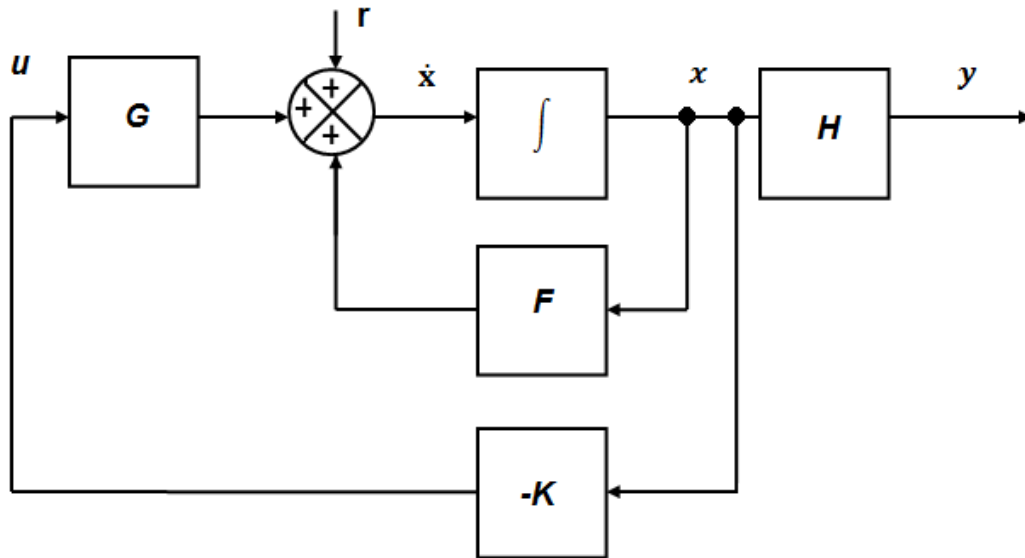


Figura 1-1: Diagrama de un sistema de control en lazo cerrado – Ley de control lineal

1.2.4. Ley de control no lineal por realimentación de estados – Adición de una perturbación cúbica a la ley de control lineal

Induciendo una perturbación en la ley de control lineal $u_L(t)$ por realimentación de estados, la ecuación (1.15) toma la forma de una no – linealidad:

$$u_{NL}(t) = \psi(t, x(t)) \quad (1.17)$$

Donde $\psi : [0, \infty] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función sin memoria, no – lineal, variante en el tiempo y continua en t . La expresión de la ley de control no lineal con la perturbación cúbica tiene la forma:

$$u_{NL}(t) = -K \cdot x(t) + \alpha \cdot x^3(t) \quad (1.18)$$

La matriz α es de orden $m \times n$ y la matriz K está conformada por las ganancias obtenidas en la ley de realimentación lineal. El término $x^3(t)$ es un n – vector compuesto de cada estado $x_i(t)$ elevado a la tercera potencia. El sistema de control en lazo cerrado para la ley no lineal de realimentación de estados se muestra en la Figura 1-2.

El operador $(\bullet)^3$ eleva a la tercera potencia la señal realimentada. Reemplazando la ecuación (1.18) en (1.1), obtenemos la expresión del esfuerzo de control con la ley de control no lineal por reali-

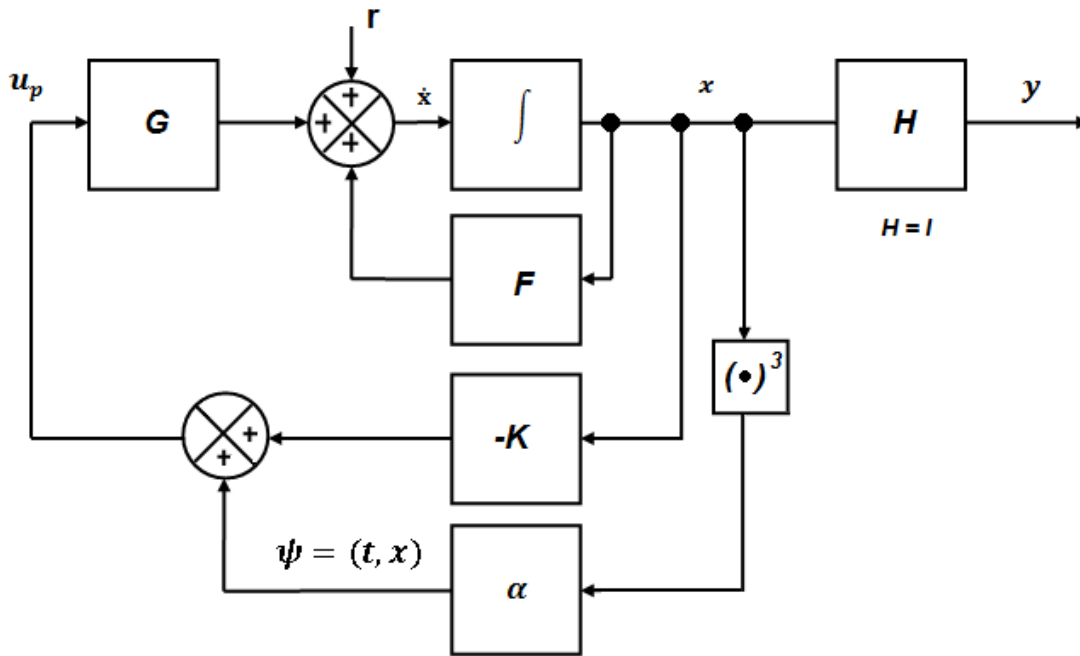


Figura 1-2: Diagrama de un sistema de control en lazo cerrado – Ley de control no lineal

mentación de estados, para un sistema n – dimensional:

$$C_{E_{NL}} = \int_{t_0}^T [-K \cdot x(t) + \alpha \cdot x^3(t)]' \cdot [-K \cdot x(t) + \alpha \cdot x^3(t)] dt \quad (1.19)$$

Finalmente, el sistema en lazo cerrado para un modelo n – dimensional bajo la ley de control no lineal de la ecuación (1.18), se calcula a través de:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{i=1}^n F_{1,i} x_i(t) + \sum_{j=1}^m G_{1,j} \left(\sum_{i=1}^n -K_{j,i} x_i(t) + \alpha_{j,i} x_i^3(t) \right) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \sum_{i=1}^n F_{n,i} x_i(t) + \sum_{j=1}^m G_{n,j} \left(\sum_{i=1}^n -K_{j,i} x_i(t) + \alpha_{j,i} x_i^3(t) \right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

1.2.5. Análisis dinámico, estabilidad y síntesis de la ley de control

Con el planteamiento algebraico del problema definido, el objetivo es encontrar condiciones para la matriz α tal que se disminuya el esfuerzo de control, en comparación al obtenido con una ley de control lineal por realimentación de estados, conservando las demás características del controlador y preservando la estabilidad del sistema dinámico.

El desarrollo del problema se completa con un análisis de estabilidad sobre el sistema dinámico en lazo cerrado, bajo la ley de control no lineal por realimentación de estados. De esta forma, basados también en el estudio de las expresiones (1.16) y (1.19) son determinadas las condiciones básicas sobre la matriz α para generar menor esfuerzo de control, conservando la estabilidad del sistema (1.20). Para finalizar, se corroboran numéricamente los resultados obtenidos y se sintetiza la ley de control no lineal. El esquema de la Figura 1-3 resume el planteamiento del problema.

1.3. Estado del arte

El uso de distintas metodologías para representar sistemas no lineales ha permitido el desarrollo de un área conocida como la teoría de control no lineal, llevando al surgimiento de variadas técnicas de control que fueron desarrolladas de manera independiente pero que en ciertos casos, trabajan de forma complementaria.

Así mismo, debido a que muchos de los sistemas reales son no lineales, algunos campos de investigación en control de procesos químicos, control y diseño aeronáutico, robótica, ingeniería biomédica, instrumentación eléctrica y electrónica, etc., han incentivado recientemente el desarrollo y aplicación de metodologías de control no lineal, motivados principalmente por el mejoramiento de los sistemas de control existentes. Es así como el control no lineal es un tema de investigación activo en diversas publicaciones e importantes textos como (Khalil, 1996), (Vidyasagar, 1993), (Slotine, 1991), (Aström & Wittenmark, 1995), entre otros.

La segunda mitad del siglo XX trajo consigo el desarrollo de la teoría de control moderna, introduciendo los sistemas representados por modelos de variables de estado y conceptos de trascendental importancia como la controlabilidad y observabilidad, propuestos por (Kalman, 1959), (Kalman et al., 1963). El control de sistemas por realimentación de variables de estado es puesto en práctica por autores como (Kuo, 1997) y (Ogata, 1997).

Un aspecto clave en el diseño y simulación de controladores es minimizar el esfuerzo de control y tener sistemas realizables. El esfuerzo de control se define por algunos autores como un porcentaje del valor límite de la variable manipulada, (Visioli, 2004). Algunas de las técnicas para reducción del esfuerzo de control, manejan métodos como la determinación de la señal retroalimentada asumiendo un modelo de proceso de primer orden con tiempo muerto, (Visioli, 2004); ó el control predictivo interno basado en modelo (IMPC, de sus siglas en inglés), que se han aplicado a sistemas lineales MIMO (Múltiples entradas - Múltiples salidas, de sus siglas en inglés), reduciendo el esfuerzo de control por medio de la implementación de un sistema de realimentación de estados, el cual compensa la saturación del esfuerzo de control. Esta técnica fue implementada en sistemas SISO (Única entrada - Única salida, de sus siglas en inglés) por (Coulibaly et al., 1995). (Morari, 1989) sugirió la elección adecuada de filtros en el diseño del control robusto. Para sistemas no lineales de fase mínima, el diseño de control robusto, usando un modelo de controlador de descen-

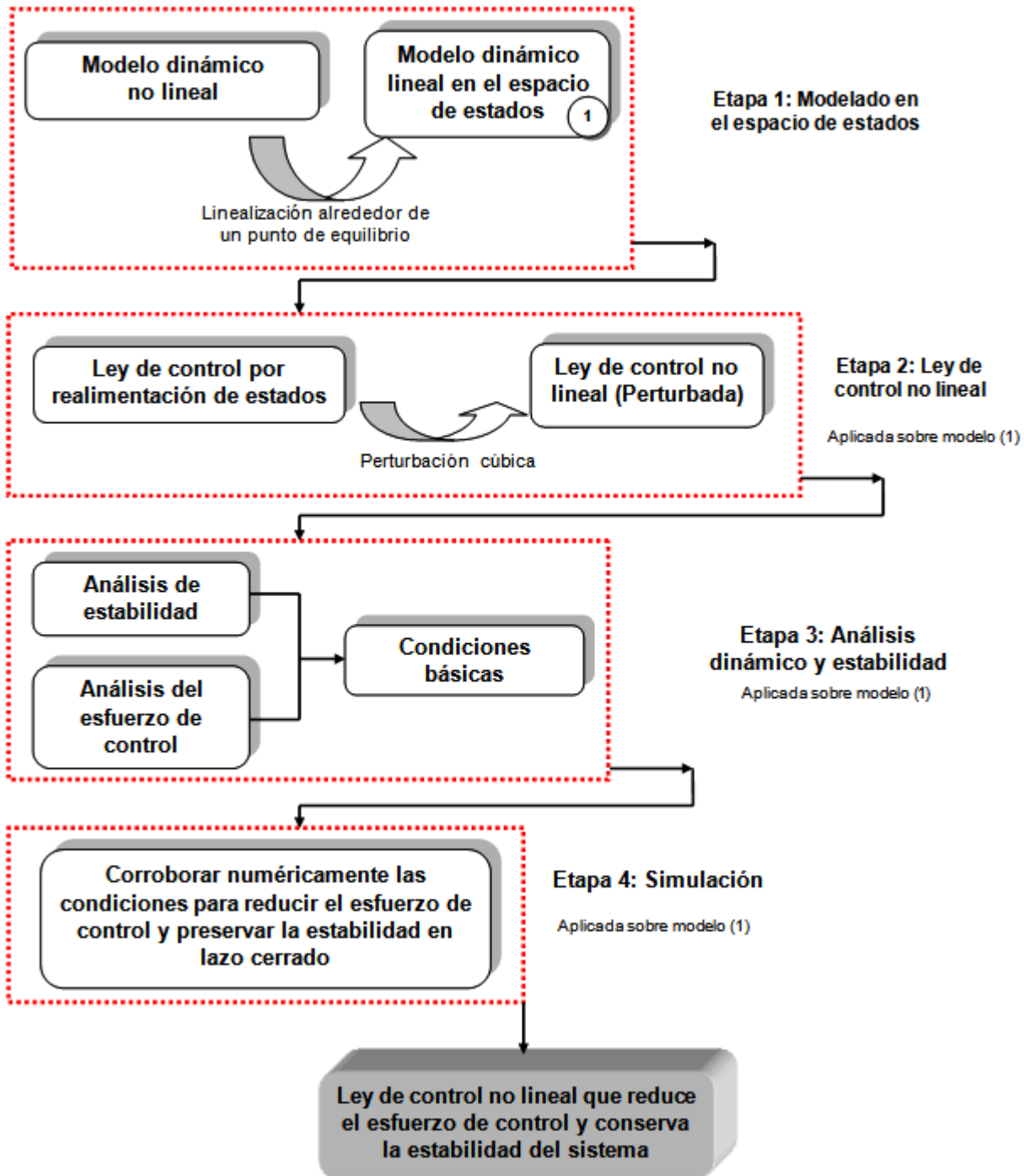


Figura 1-3: Diagrama de flujo - Planteamiento del problema

so continuo por realimentación de estados fue propuesto por (Freidovich & Khalil, 2005), con el objetivo final de reducir el esfuerzo de control.

En (Huber & Kermodé, 1968) diseñaron controladores digitales para un sistema de control con regulador lineal, acoplando programación lineal y el método de la transformada Z , usando también restricciones en forma de desigualdades para la variable manipulada, con el fin de evitar la saturación del esfuerzo de control.

(Kolavennu et al., 2001) plantearon la utilización de una ley de control de retroalimentación de estados para sistemas dinámicos no lineales y no - cuadrados (sistemas donde el número de entradas es diferente al número de salidas), usando todas las entradas para realizar una linealización I/O (Entrada - Salida) del sistema, optimizando así el esfuerzo de control. (Dacic & Kokotovic, 2006) redujeron el esfuerzo de control por medio de la estabilización de la dinámica cero para sistemas lineales, a través de la combinación de técnicas de control lineal y no lineal, obteniendo un algoritmo para el seguimiento de trayectorias que se constituye en el re - diseño de las leyes control por realimentación de salidas.

En el diseño de control robusto, (Chen & Perng, 1995) mostraron algunos problemas de optimización sobre plantas mal condicionadas, donde se minimiza el cociente realimentación - esfuerzo de control, con el uso de técnicas de diseño de controladores como la μ -síntesis y la parametrización Q . La redistribución del esfuerzo de control en un conjunto de actuadores para optimizar el diseño del controlador se muestra en (Härkegard & Glad, 2005). La obtención de expresiones analíticas para la covarianza de los controladores, que minimizan el esfuerzo de control requerido y la asignación de matriz de covarianza de estados para el sistema en lazo cerrado fueron propuestas en (Grigoriadis & Skelton, 1997).

(Brusher et al., 1997) propusieron reducir el esfuerzo de control para sistemas dinámicos con condiciones pobres de desempeño, a través del diseño de sistemas de control modelados por medio de la minimización de funciones con restricciones y el cálculo simultáneo de los parámetros del modelo y el controlador, así como la optimización de estos. Se obtiene así, un controlador con igual desempeño dinámico y menor esfuerzo de control. (Dacic et al., 2006) propusieron una ley de control para el seguimiento de trayectorias que gastó menos energía en esfuerzo de control comparada con las leyes de seguimiento convencionales, ocasionando como efecto adverso una menor velocidad de convergencia. La reducción del esfuerzo de control fue estudiada por (Na & Xie, 2008) para sistemas estocásticos no lineales con estados no medibles acotados, a través del re - diseño de la ganancia del observador. La realimentación de salidas fue utilizada en (Na et al., 2008) para el diseño de un controlador, con el objetivo de reducir el esfuerzo de control garantizando la estabilidad global asintótica del lazo de control por medio de un observador de orden reducido, y la elección de los parámetros de diseño y una función de Lyapunov adecuados.

La teoría de realimentación cuantitativa (QFT, de sus siglas en inglés) fue utilizada en (Zahedzadeh & Alizadeh, 2003). En este artículo, se planteó una metodología de minimización para llevar el esfuerzo de control a su menor valor. Técnicas como la realimentación de salidas, enfocadas en la

reducción del esfuerzo de control fueron expuestas en (Na & Xie, 2010), garantizando la estabilidad global asintótica del sistema en lazo cerrado con dicho controlador.

(King et al., 2006) mostraron el diseño de un tipo de control adaptativo para el control de vibraciones en estructuras no lineales con perturbaciones acotadas, obteniendo menor esfuerzo de control que el generado con algoritmos de control LQG (Gaussiano lineal cuadrático, de sus siglas en inglés) y redes neuronales. El control adaptativo fue usado también por (French et al., 2002), con el fin de generalizar los diseños de controladores adaptativos ante la presencia de incertidumbres no paramétricas, minimizando también el esfuerzo de control del sistema.

El esfuerzo de control y el error fueron tomados como restricciones de la ley de control en (Ingram et al., 2005) y (Demetriou & Kazantzis, 2005) para el diseño de controladores robustos SISO y controladores por realimentación de salidas, respectivamente. De forma análoga, en (Samyudia & Lee, 2004) el esfuerzo de control se estableció como parámetro de penalización en el diseño iterativo de controladores robustos de modelo genérico aplicados a procesos industriales. (Li & Krstic, 1997) incorporaron el esfuerzo de control en las cotas de desempeño para el diseño de controladores adaptativos aplicados en el seguimiento de trayectorias sobre sistemas dinámicos no lineales.

De igual forma que los anteriores autores, (Farivar et al., 2009) usaron el esfuerzo de control sumado a la superficie de deslizamiento del sistema como parámetros de penalización en el diseño de una ley de control combinado, reuniendo el control por LQR (Regulador lineal cuadrático), modo deslizante y control por redes neuronales. (Escobar et al., 1998) propusieron la modificación de controladores a través de la adición de algoritmos basados en conceptos de pasividad y la minimización de una función de Lyapunov, junto con el concepto de ORS (subespacios de salida regulada, de sus siglas en inglés), con el fin de mejorar el comportamiento transitorio y reducir el esfuerzo de control.

Trabajos relacionados con el desplazamiento de polos para minimizar el esfuerzo de control son puestos en consideración en (Patel et al., 1992) y (Franzé & Muraca, 2000), en los cuales se estudiaron sistemas tipo MIFO (Múltiples entradas - Salidas de velocidad fija) disminuyendo la sensibilidad del sistema ante los efectos del muestreo y la realimentación de salidas para sistemas multivariados, seguido de un algoritmo de optimización de la matriz K para el componente de realimentación. (Weinmann, 1999) asignó una matriz de mínimos cuadrados al controlador a través del método de desplazamiento de polos. Se acotó así en este estudio el esfuerzo de control por medio de la norma L_2 de la matriz de realimentación. La minimización de una matriz funcional asociada a la matriz de ganancias de la realimentación de estados y la aplicación de conceptos de no - controlabilidad y no - observabilidad, combinado con el desplazamiento de polos, asignación de polos y posterior análisis vectorial con el objetivo final de reducir el esfuerzo de control, fue tema de la investigación propuesta en (Kouvaritakis & Cameron, 1980).

Otra técnica propuesta por (Hwang et al., 1997), incluyó el diseño de un controlador modificado en fase cero para seguimiento (MPTC, de sus siglas en inglés), mejorando el desempeño de un control difuso en modo deslizante y obteniendo un desempeño dinámico más alto, así como la reducción del esfuerzo de control con respecto a controladores del tipo FSMC (Control difuso en modo deslizante, de sus siglas en inglés). Autores como (Luo & Tsiotras, 2000), disminuyeron el esfuerzo de control y modelaron la velocidad de convergencia como una función exponencial, a través del diseño de controladores acotados para sistemas no – holonómicos.

La aplicación de control predictivo hace parte también de las técnicas para minimizar el esfuerzo de control como lo plantearon (Chen et al., 2003), donde se limitó el esfuerzo de control a través de la formulación de una ley de control no lineal en la que el esfuerzo de control es constante durante todo el intervalo de predicción. (Jiang & Chen, 2006) usaron el control predictivo para diseñar controladores predictivos óptimos no lineales aplicados al tiristor, dando robustez al controlador y generando menor esfuerzo de control comparado con el LQR y los controladores linealizados por realimentación.

La selección de matrices de ponderación dependientes de los estados del sistema, es también una estrategia para disminuir el esfuerzo de control en el diseño de controladores no lineales por realimentación de estados, a través del método de la ecuación de Riccati (Cimen, 2010).

Diversas técnicas se han propuesto con el fin de diseñar controladores y reducir el esfuerzo de control, bajo la premisa de alcanzar un buen desempeño dinámico. Algunas de estas formulaciones son: Uso de técnicas iterativas en el diseño de controladores por (Grigoriadis & Skelton, 1998); estudio de problemas de regulación y seguimiento, minimizando, junto al esfuerzo de control, las funciones objetivo de error en seguimiento y las respuestas reguladas definidas por una medida integral cuadrada realizado por (Chen & Dai, 2001). Los controladores H_1 óptimos fueron estudiados por (Schömig et al., 1993), considerando el problema de diseño de un controlador por realimentación de estados de ganancia mínima, tal que la función de transferencia de lazo cerrado satisfizo ciertas restricciones H_1 ; ilustrando finalmente como aplicar esta teoría al problema de control H_2/H_1 , con esfuerzo de control mínimo. La norma L_1 y L_∞ fueron usadas en la minimización del esfuerzo de control por (Frost & Bodson, 2010), concluyendo que el algoritmo L_∞ normalizado es menos sensible a las perturbaciones que su contraparte L_1 .

Dentro del grupo de investigación de Percepción y Control Inteligente de la Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales, se ha investigado la mejora en el desempeño de controladores lineales a través de perturbaciones no lineales. En particular, en (Angulo et al., 2010) se demostró la eficiencia de la técnica para un sistema SISO de primer orden. Sin embargo, su robustez a perturbaciones, no ha sido probada aún. Así mismo, la aplicación de esta ley de control a sistemas dinámicos de MIMO y su generalización, quedan propuestas como temas de futuras investigaciones.

1.4. Organización del documento

El documento está organizado por capítulos cuyo contenido se ordena de la siguiente forma:

Capítulo 2 - Diseño de leyes de control lineal y no lineal por realimentación de estados, para sistemas dinámicos de dimensión $n = 1$ y $n = 2$

La primera parte de este capítulo comprende la revisión de algunos conceptos importantes sobre teoría de control que serán de utilidad en lo que resta de la investigación. Se dan definiciones básicas de: Modelado de sistemas dinámicos en el espacio de estados, controlabilidad y observabilidad, y control por realimentación de estados. La segunda parte del capítulo está dirigida a desarrollar la metodología para el diseño de una ley de control no lineal por realimentación de estados (ley de control con perturbación cúbica). La nueva técnica, es aplicada en dos modelos dinámicos lineales en el espacio de estados de dimensiones $n = 1$ y $n = 2$. A través del análisis dinámico, y de estabilidad sobre los sistemas controlados por la ley no lineal, se determinan analíticamente las condiciones básicas para que el esfuerzo de control no lineal, sea menor al generado usando una ley de control lineal por realimentación de estados, preservando además la estabilidad del sistema en lazo cerrado.

En la última parte del capítulo, son corroborados de forma numérica los resultados analíticos obtenidos, demostrando la eficiencia de la nueva técnica de control no lineal.

Capítulo 3 - Modelado, simulación y linealización de un sistema dinámico $n = 4$ - Modelo MIMO

La descripción, modelado y análisis dinámico de un sistema no lineal MIMO (Reactor CSTR no isotérmico con intercambio de calor) descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias, es llevado a cabo en la primera parte de este capítulo. El análisis dinámico del modelo no lineal comprende: Cálculo y caracterización de puntos de equilibrio, respuesta del sistema dinámico no lineal ante perturbaciones, análisis de bifurcaciones de codimensión 1 y la búsqueda y caracterización de la multiplicidad de estados estacionarios. El capítulo finaliza con el método de linealización alrededor de un punto de operación usando la expansión en series de Taylor, aplicado sobre el modelo no lineal propuesto. De esta manera, se obtiene una representación dinámica en el espacio de estados que reproduce el comportamiento del sistema dinámico no lineal con el mayor grado de precisión posible sobre un punto de operación fijado con anterioridad. Se muestra también la selección de las variables manipuladas y controladas, útiles para el desarrollo de la estrategia de control en lo que resta de la tesis. La dinámica en lazo abierto para los modelos lineal y no lineal es comparada alrededor de un punto de operación, verificando finalmente la validez del modelo linealizado.

Capítulo 4 - Control lineal óptimo por realimentación de estados y ley de control no lineal para un sistema MIMO, $n = 4$

La primera parte del capítulo verifica la controlabilidad y observabilidad del modelo dinámico lineal MIMO ($n = 4$) en el espacio de estados, obtenido en el Capítulo 3. Luego se calcula una ley de control lineal por realimentación de estados que proporciona estabilidad en lazo cerrado, usando la técnica LQR. En base a ésta ley de control, se muestra el comportamiento dinámico en lazo cerrado, el esfuerzo de control y el error de regulación ante cambios en algunos parámetros de la planta. En la parte final del capítulo, la ley de control lineal por realimentación de estados obtenida, es modificada con una perturbación cúbica en su estructura, a fin de establecer la formulación general de una ley de control no lineal.

Capítulo 5 - Esfuerzo de control e ISE con una ley de control no lineal sobre el sistema lineal MIMO - Reactor CSTR - Análisis de estabilidad absoluta

La primera sección del capítulo presenta los conceptos necesarios para evaluar la estabilidad de sistemas dinámicos MIMO continuos e invariantes en el tiempo. Luego, se compara el desempeño de la ley de control lineal $u_L(t)$ y la ley de control no lineal $u_{NL}(t)$, en torno a la reducción del esfuerzo de control y el desempeño dinámico en lazo cerrado.

Utilizando el criterio de estabilidad de Popov y el concepto de no linealidad de sector, se establecen condiciones básicas sobre la matriz α , para formular finalmente una ley de control no lineal $u_{NL}(t)$ de la forma (4.28), que reduzca el esfuerzo de control comparado al producido con una ley de control lineal $u_L(t)$, y preserve la estabilidad de la dinámica en lazo cerrado. Finalmente, se muestra la aplicación del criterio de estabilidad de Popov para el sistema dinámico MIMO. Un procedimiento general para caracterizar la estabilidad de un sistema dinámico MIMO en lazo cerrado del tipo (4.29) es presentado en la parte final del capítulo.

Capítulo 6 - Trabajo futuro

El capítulo final de la tesis plantea algunos tópicos de importancia que pueden ser objeto de estudio futuro en el mejoramiento de la técnica de control no lineal. Se propone también la posible aplicación de la técnica de control sobre diferentes clases de sistemas dinámicos (p.ej. uso de realimentación de salidas, sistemas con parámetros variantes en el tiempo), entre otros.

CAPÍTULO 2

Diseño de leyes de control lineal y no lineal por realimentación de estados, para sistemas dinámicos de dimensión $n = 1$ y $n = 2$

En la práctica, casi la totalidad de los sistemas físicos presentan algún tipo de no linealidad inherente en su comportamiento dinámico. Aún así, el control de estos sistemas, tanto lineales como no lineales, se lleva a cabo con gran frecuencia utilizando técnicas de control lineal, debido a la simplicidad en el diseño de los controladores y a que es posible alcanzar un desempeño aceptable en cercanías a un punto de operación fijo.

El mejoramiento de las técnicas de control, ha dado como resultado el surgimiento y aplicación de metodologías más eficientes, susceptibles a posteriores optimizaciones. Ejemplos de esto son el desarrollo de la linealización por realimentación, la linealización entrada - estado, la linealización entrada - salida como se muestra en (Slotine, 1991), el control deslizante y control adaptativo aplicado en (Aström & Wittenmark, 1995) y (Edwards & Spurgeon, 1998), respectivamente; citando algunas metodologías.

En este capítulo se muestra el diseño de una ley de control no lineal por realimentación de estados, tomando como punto de partida el procedimiento básico para el diseño de controladores lineales por desplazamiento de polos. Una vez se diseña el controlador lineal, se introduce en este una no linealidad, con el objetivo de reducir la energía que el sistema gasta en esfuerzo de control y conservar el desempeño dinámico del sistema. El estudio previo del método aplicado en sistemas de dimensión $n = 1$ y $n = 2$, fue realizado en (Angulo et al., 2010).

El capítulo se desarrolla con base en la investigación preliminar citada, retomando algunos aspectos importantes a tener en cuenta durante el diseño de la ley de control no lineal. Se incluyen además, ciertos conceptos teóricos de gran relevancia para este capítulo y lo que resta de la tesis.

La estrategia de diseño se aplica inicialmente a un sistema unidimensional continuo, lineal, de primer orden e invariante en el tiempo t , controlado por una ley lineal con realimentación de estados. El desarrollo de la metodología comprende en primer lugar, el cálculo de las expresiones que optimizan el esfuerzo de control para el sistema dinámico $n = 1$, ante una entrada de control no lineal que usa una perturbación cúbica en la señal de realimentación. El resultado del esfuerzo de control hallado mediante dichas expresiones, se compara con el obtenido usando una ley de control lineal. Luego, se presentan las condiciones analíticas básicas para reducir el esfuerzo de control y preservar la estabilidad del sistema dinámico en lazo cerrado, bajo la ley de control no lineal. En seguida, se verifica numéricamente el desempeño dinámico del sistema, para mostrar la incidencia del uso de una ley de control no lineal sobre el estado transitorio y el estado estacionario. Para finalizar, la técnica se aplica a un sistema 2 - dimensional, extrapolando los resultados obtenidos en el modelo $n = 1$.

El capítulo comienza con la revisión de algunos conceptos muy importantes en la teoría de control moderna, como se muestra a continuación.

2.1. Conceptos generales

En esta sección se hace una breve introducción de los conceptos teóricos utilizados en el desarrollo del presente capítulo. Ellos incluyen: Modelamiento de sistemas dinámicos en el espacio de estados, controlabilidad y observabilidad de sistemas dinámicos y control por realimentación de estados.

2.1.1. Modelado de sistemas dinámicos en el espacio de estados

Por medio de la representación en el espacio de estados, se dispone de una herramienta para el diseño de controladores que provee un modo compacto y sencillo de modelar y analizar sistemas tanto SISO (Única entrada - única salida, de sus siglas en inglés) como MIMO (Múltiples entradas - múltiples salidas, de sus siglas en inglés). El modelado en el espacio de estados es muy importante en el diseño de los sistemas de control, ya que se constituye como uno de los pilares fundamentales de la teoría de control moderna.

Definición 2.1.

La representación del modelo matemático de un sistema físico en el espacio de estados, hace referencia a reproducir dicho modelo como un conjunto de variables de estado, salidas y entradas del sistema que se relacionan entre sí a través de ecuaciones diferenciales de primer orden.

2.1.1.1. Ecuaciones en el espacio de estados

Sea un sistema dinámico no lineal y autónomo, modelado por un número finito de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde f_i es una función vectorial no lineal, $x_i(t)$ son las variables de estado y $u_j(t)$ son las entradas de control. Desde el punto de vista geométrico, el espacio de estados se define como el espacio n - dimensional cuyos ejes coordenados están formados por las variables de estado. Así pues, el estado del sistema puede ser representado como un vector dentro de este espacio (Chen, 1999).

Con el objetivo de obtener una representación lineal, se hace una expansión en series de Taylor de la expresión (2.1) alrededor de un punto de equilibrio. Omitiendo los términos de orden superior, la ecuación (2.1) se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Las salidas del sistema dinámico linealizado están representadas a partir de:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{p-1}(t) \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ h_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ h_{p-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ h_p(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

El sistema dinámico (2.1) linealizado y representado en el espacio de estados, se expresa en forma compacta por las ecuaciones (2.4a) y (2.4b):

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \quad (2.4a)$$

$$y(t) = Hx(t) + Du(t) \quad (2.4b)$$

donde F , G , H y D son matrices de dimensión $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ y $p \times m$, respectivamente. Los vectores $x(t)$, $y(t)$ y $u(t)$ tienen dimensiones n , p y m , en su orden.

2.1.2. Controlabilidad y observabilidad

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad fueron introducidos en la teoría de control moderno por (Kalman, 1959), desempeñando actualmente un papel fundamental en el diseño de controladores a través del espacio de estados. Básicamente, la controlabilidad y la observabilidad de un sistema dinámico representado en el espacio de estados, garantiza la existencia de una solución completa en el diseño de un sistema de control. Por esta razón, aunque la mayor parte de los sistemas físicos son controlables y observables, es muy importante conocer bajo qué circunstancias un sistema dinámico cumple estas dos propiedades.

- *Controlabilidad de estados y salidas para sistemas dinámicos*

La condición de controlabilidad de un sistema dinámico está estrechamente vinculada con la posibilidad de aplicar el control por realimentación de estados y con el propósito de ubicar los polos del sistema en forma arbitraria (Kuo, 1997). Es decir, la controlabilidad del estado determina que tan viable es que $x(t)$ en la ecuación (2.4a) pueda ser controlado a través de una entrada de control $u(t)$.

Definición 2.2. *Controlabilidad de estados $x(t)$*

La ecuación de estado (2.4a) o el par (F, G) se dice controlable, si para cualquier estado inicial $x(t_0) = x_0$ y cualquier estado final $x(t_1) = x_1$ existe un entrada de control $u(t)$ no necesariamente acotada que transfiera x_0 a x_1 en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

La demostración propuesta en (Chen, 1999) se omite en este documento. Para que un sistema tenga controlabilidad completa de estados, se requiere que la matriz de controlabilidad de estados de dimensión $n \times (n \times m)$ notada como M :

$$M = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

sea de rango n , ó que contenga n vectores - columna linealmente independientes.

En aplicaciones prácticas es muy común que se controle la salida $y(t)$ en lugar del estado del sistema. Sin embargo, la controlabilidad del estado $x(t)$ no es suficiente ni necesaria para garantizar la controlabilidad de la salida $y(t)$, salvo si ésta es una función estática¹ del estado $x(t)$ controlable; por esta razón es conveniente y útil definir por separado la controlabilidad de la salida $y(t)$.

Definición 2.3. *Controlabilidad de salidas $y(t)$*

Un sistema dinámico representado en el espacio de estados dado por (2.4a) y (2.4b) es controlable en su salida si para cualquier salida inicial $y(t_0)$ y para cualquier salida final $y(t_1)$,

¹Función sin memoria (Khalil, 1996)

existe una entrada de control $u(t)$ no acotada que transfiera $y(t_0)$ a $y(t_1)$ en un intervalo de tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_1$.

Omitiendo la demostración presentada por (Moreno & Garrido, 2004), para que un sistema tenga controlabilidad completa en las salidas, se requiere que la matriz de controlabilidad de salidas de dimensión $(p \times (n + 1)) \times m$ notada como M_o :

$$M_o = \begin{bmatrix} HG & HFG & HF^2G & \dots & HF^{n-1}G & D \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

sea de rango p , ó que contenga p vectores - columna linealmente independientes.

- **Observabilidad completa de sistemas dinámicos**

El concepto de observabilidad de un sistema dinámico abre la la posibilidad de estimar las variables de estado $x(t)$ no medibles, a partir de la salida $y(t)$, para formar la señal de control $u(t)$.

Definición 2.4. La ecuación de estado se dice que es observable si el estado $x(t)$ se puede determinar a partir de la medición de la salida $y(t)$ en un intervalo de tiempo finito $t_o \leq t \leq t_1$. Es decir, un sistema es observable si todas las transiciones de estado afectan eventualmente a todos los elementos de la salida $y(t)$ del sistema .

La demostración propuesta en (Chen, 1999) se omite en este documento. Para que un sistema sea completamente observable, se requiere que la matriz de observabilidad de dimensiones $(n \times p) \times n$ notada como N :

$$N = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

tenga rango n .

2.1.3. Control por realimentación de estados

Básicamente, el control por realimentación de estados consiste en construir una ley $u(t)$ con las variables de estado $x(t)$ del sistema dinámico y una matriz de ganancias K . Por lo general, la matriz K se calcula a través de la colocación de los polos del sistema en lazo cerrado, sobre una ubicación establecida por el diseñador, con el objetivo de alcanzar una respuesta dinámica

satisfactoria y garantizar la estabilidad del lazo. El desplazamiento de polos, como es conocido este procedimiento, se aplica en sistemas de estado completamente controlables, asumiendo que todas las variables de estado se encuentran disponibles para la realimentación.

Algunos factores que definen la ubicación de los polos del lazo cerrado son el comportamiento de la respuesta deseada en estado estable, los requerimientos de la respuesta en frecuencia como el ancho de banda, el máximo sobreimpulso, el margen de fase, el margen de ganancia, entre otros. En plantas SISO, el desplazamiento de polos se aplica en el diseño de controladores, tal que todos los polos dominantes del lazo cerrado tengan algunos parámetros como el factor de amortiguamiento relativo (ζ) y la frecuencia natural no amortiguada (ω_n) en valores específicos (Ogata, 1997). Para el caso SISO, el desplazamiento de polos es muy sensible a los parámetros del sistema y por ende, debe ser llevado a cabo en forma cuidadosa. Un procedimiento completo de la técnica se puede encontrar en (Franklin et al., 1997), (Anderson & Moore, 1989) y (Ogata, 1995) entre otros textos y diversas fuentes en la literatura.

El uso de la realimentación como parte de una ley de control, aumenta la posibilidad de alcanzar para el sistema en lazo cerrado, un comportamiento dinámico más exacto y aceptable, reduciendo de esta forma el error entre el punto de referencia y la salida del sistema. Los sistemas de control en lazo abierto carecen de la señal realimentada y por lo tanto, no son capaces de intervenir en forma autónoma ante una desviación entre el punto de referencia y la salida del sistema.

La realimentación de estados puede atenuar los efectos del ruido y las perturbaciones en el desempeño del sistema, si es bien implementada, y puede estabilizar un sistema antes inestable, ocurriendo el efecto inverso si la realimentación es mal diseñada o implementada en el sistema de control. Esta técnica afecta en la mayor parte de los casos factores como el ancho de banda, la estabilidad, la sensibilidad y la ganancia global, impedancia, la respuesta transitoria del sistema dinámico, entre otros. El control por realimentación de estados, es una importante herramienta de la teoría de sistemas de control y en la actualidad, constituye una técnica de bastante popular en el diseño de controladores como lo muestra (Kuo, 1997).

2.2. Diseño de una ley de control no lineal por realimentación de estados - Sistema $n = 1$

Como parte inicial del diseño, esta sección muestra la técnica de control aplicada a un modelo dinámico lineal de dimensión $n = 1$. En primer lugar, se diseña una ley de control lineal por realimentación de estados. Luego, una perturbación cúbica es introducida en el control lineal y a partir de esta nueva ley de control, se determinan las expresiones para el cálculo del esfuerzo de control. Finalmente, se lleva a cabo un análisis dinámico cualitativo con el objetivo de encontrar las condiciones básicas sobre la matriz α , tal que se reduzca el esfuerzo de control comparado al

obtenido con la ley lineal, y se brinda estabilidad al sistema dinámico en lazo cerrado.

2.2.1. Modelo dinámico en el espacio de estados - Sistema $n = 1$

Para este caso en particular se plantea un sistema lineal continuo en el tiempo representado por:

$$\frac{dz}{d\tau} = -az + bu \quad (2.8)$$

Realizando los siguientes cambios de variable al sistema (2.8):

$$\begin{cases} z = bx/a \\ t = a\tau \end{cases}$$

con $a \neq 0$. Así, la expresión (2.8) se transforma en el siguiente sistema dinámico lineal:

$$\dot{x} = -x(t) + u(t) \quad (2.9)$$

El modelo representado por la ecuación (2.9), describe un sistema dinámico lineal SISO en el espacio de estados con $F = -1$ y $G = 1$.

2.2.2. Ley de control lineal por desplazamiento de polos y realimentación de estados - Sistema $n = 1$

En la Sección 2.2.1 se formuló un modelo dinámico unidimensional SISO. Continuando con el diseño de la ley de control, se aplica la técnica de desplazamiento de polos al sistema dinámico (2.9), es decir, la entrada de control $u(t)$ es reemplazada por una ley de control con realimentación de estados de la forma:

$$u_L(t) = -Kx(t) \quad (2.10)$$

donde K es una matriz con dimensiones $m \times n$ y corresponde a la matriz de ganancias de la realimentación. Para el caso unidimensional se nota como $k_{1 \times 1}$ o simplemente k . Así, se obtiene un sistema dinámico en el espacio de estados de primer orden de la forma:

$$\dot{x} = -(1 + k)x(t) \quad (2.11)$$

La ganancia de la realimentación k se calcula bajo ciertos criterios de optimización o colocación deseada de los polos del sistema, como se propone en (Anderson & Moore, 1989), (Ait Rami et al., 2009), (Halpern, 2000), (Henrion et al., 2005) y (Wu & Lee, 2005).

La solución analítica de la ecuación diferencial (2.11) está dada por la siguiente expresión, tomando como límites de integración $t_0 = 0, x(t_0) = x_0$ y $t_f = t, x(t_f) = x$:

$$x(t) = e^{-(1+k)t} x_0 \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) describe el comportamiento dinámico de un sistema lineal en lazo cerrado, utilizando una ley de control lineal por realimentación de estados.

2.2.3. Perturbación no lineal sobre la ley de realimentación de estados - Sistema $n = 1$

El objetivo ahora es proponer una ley de control no lineal, añadiendo una perturbación a la entrada de control lineal $u_L(t)$ dada en (2.10), con el fin de disminuir el esfuerzo de control sin cambiar significativamente en el comportamiento estacionario y transitorio del sistema.

La perturbación inducida tiene la forma de un n - vector con sus elementos elevados a la tercera potencia y multiplicado por una matriz α de dimensiones $m \times n$. La ley de control no lineal $u_{NL}(t)$ con la matriz α , para el caso unidimensional notada como α_s , es:

$$\begin{aligned} u_{NL}(t) &= u_L(t) + \text{No Linealidad} \\ u_{NL}(t) &= -kx(t) + \alpha_s x^3(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Debido a que se busca reducir el esfuerzo de control calculado con (1.1) y la ley de control (2.13), el segundo término del lado derecho de (2.13), correspondiente a la perturbación cúbica, debe disminuir la magnitud de la señal de control producida por (2.10) en (2.13), sin afectar de forma drástica la acción de control necesaria para que el sistema se comporte como en el diseño original.

Así, la meta de cumplir con la reducción del esfuerzo de control requiere como condición necesaria que k y α_s sean de signos iguales, quedando el diseño final confinado a la elección adecuada de α con una ganancia k , propuesta por el diseñador según el desempeño dinámico deseado. Es importante tener en cuenta que, el signo de los estados del sistema $x_i(t)$ no modifica directamente el diseño de la ley de control y la selección de α_s , dado que las potencias impares de $x_i(t)$ permiten que tanto el componente lineal y no lineal de (2.13), conserven su signo independientemente del signo de $x_i(t)$.

Utilizando la ley de control (2.13) que reemplaza $u(t)$ en (2.9), se obtiene la dinámica de lazo cerrado en el espacio de estados:

$$\dot{x} = -(1+k)x(t) + \alpha_s x^3(t) \quad (2.14)$$

La solución analítica de la ecuación diferencial (2.14) se calcula tomando como límites de integración $t_0 = 0, x(t_0) = x_0$ y $t_f = t$. Resolviendo la integral de (2.14) por partes y reemplazando los límites de integración, el resultado final para la dinámica en lazo cerrado bajo una ley de control no lineal con realimentación de estados como se muestra en (Angulo et al., 2010) es:

$$x(t) = \left(\left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{\alpha}{1+k} \right) e^{2(1+k)t} + \frac{\alpha}{1+k} \right)^{-1/2} \quad (2.15)$$

2.2.4. Esfuerzo de control para sistemas dinámicos - Sistema $n = 1$

A continuación se demuestra que introduciendo un término no lineal en la entrada de control $u(t)$, es posible reducir significativamente el esfuerzo de control, el cual se define como:

$$C_E = \int_0^{\infty} u^2(t) dt \quad (2.16)$$

El sistema lineal de (2.11) es un caso particular del sistema perturbado en (2.14), con $\alpha_s = 0$. Integrando la expresión (2.16), con la entrada de control $u(t) = u_L(t)$ dada por (2.10), y sustituyendo la solución para $x(t)$ de (2.12), se obtiene la expresión del esfuerzo de control con una ley de control lineal para el sistema 1 - dimensional. Evaluando la integral impropia de primer orden, se obtiene:

$$C_{EL} = \lim_{t_f \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} k^2 x_0^2 \frac{(\exp(-2(1+k)t_f) - 1)}{1+k} \right]$$

Así, la expresión para el esfuerzo de control en el caso 1 - dimensional bajo una ley de control lineal es:

$$C_{EL} = \frac{k^2 x_0^2}{2(1+k)} \quad (2.17)$$

De forma similar, integrando la ecuación (2.16) con la entrada de control $u(t) = u_{NL}(t)$ dada por (2.13), se encuentra la expresión del esfuerzo de control con una ley de control no lineal para el sistema 1 - dimensional, sustituyendo la solución para $x(t)$ de (2.15).

$$C_{ENL} = \frac{1}{2\alpha_s} \ln \left(\frac{1+k}{1+k-\alpha_s x_0^2} \right) + \frac{x_0^2}{4} (2k - 2 - \alpha_s x_0^2) \quad (2.18)$$

La ecuación (2.18) es función de la ganancia de la realimentación k , el factor α_s y la condición inicial x_0 . El objetivo es obtener el menor esfuerzo de control con (2.18) que el calculado con

(2.17), hallando el parámetro α_s con una ganancia k dada, que haga esto posible. Minimizando el esfuerzo de control de la expresión (2.18) en torno a k como función de α y x_0 , se obtiene:

$$\frac{dC_{ENL}}{dk} = \frac{1}{2} \frac{(2k + k^2 - \alpha_s x_0^2 - \alpha_s x_0^2 k) x_0^2}{(1 + k - \alpha_s x_0^2)(1 + k)} = 0 \quad (2.19)$$

Las posibles soluciones de k en (2.19) son:

$$\begin{cases} k_1^* = -1 + \frac{1}{2} \alpha_s x_0^2 + \frac{1}{2} \sqrt{4 + \alpha_s^2 x_0^4} \\ k_2^* = -1 + \frac{1}{2} \alpha_s x_0^2 - \frac{1}{2} \sqrt{4 + \alpha_s^2 x_0^4} \end{cases}$$

Es necesario verificar si la derivada corresponde a un máximo o mínimo local. Tomando la segunda derivada de (2.18) para corroborar la condición de k_1^* , el resultado obtenido es:

$$\frac{d^2 C_{ENL}}{dk^2} = \frac{1}{2} x_0^2 \frac{(\alpha_s^2 x_0^4 + \alpha_s x_0^2 \sqrt{\alpha_s^2 x_0^4 + 4} + 4)}{\alpha_s x_0^2 + \sqrt{\alpha_s^2 x_0^4 + 4}} \quad (2.20)$$

si $\alpha_s > 0$, la expresión (2.20) es positiva y así k_1^* corresponde a un mínimo relativo. Entonces:

$$k_{\min} = -1 + \frac{1}{2} \alpha_s x_0^2 + \frac{1}{2} \sqrt{4 + \alpha_s^2 x_0^4} \quad (2.21)$$

De igual manera, tomando α_s como parámetro en función de k y x_0 , tenemos:

$$\alpha_{s \min} = \frac{k(2 + k)}{x_0^2(1 + k)} \quad (2.22)$$

La expresión (2.22) tiene la ganancia de realimentación k como variable independiente. Dado un comportamiento asintótico deseado a través del desplazamiento de polos, es posible calcular el valor de α_s óptimo con una condición inicial de x_0 conocida. Se puede obtener el esfuerzo de control mínimo para una ley de control no lineal reemplazando (2.22) en (2.18):

$$C_{ENL} |_{\alpha = \alpha_{\min}} = \frac{(4(k + 1)^2 \ln(1 + k) + k^4 - 6k^2 - 4k) x_0^2}{4k(2 + k)(1 + k)} \quad (2.23)$$

La Figura 2-1 representa el esfuerzo de control para las leyes de control lineal y no lineal en función de la ganancia de la realimentación k , obtenidos a partir de las expresiones (2.17) y (2.18),

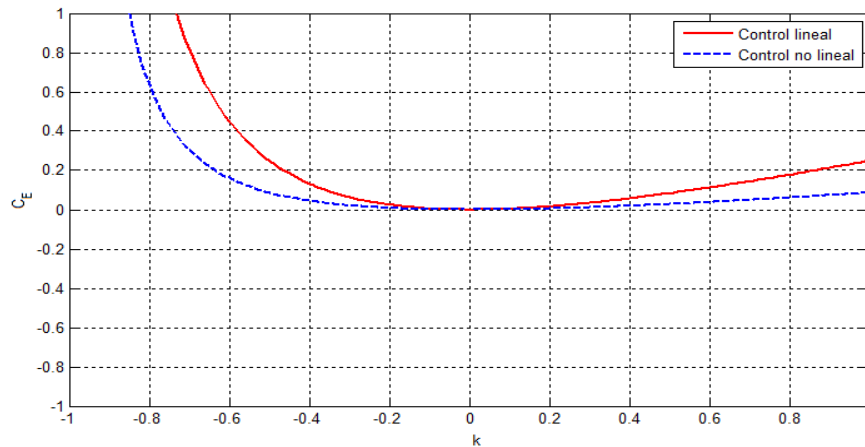


Figura 2-1: Esfuerzo de control para las leyes lineal (-) y no lineal (- -) de realimentación de estados. Sistema $n = 1$.

respectivamente; con el parámetro α_s óptimo calculado con (2.22). Según la expresión (2.11), es necesario que $1 + k > 0$ para proporcionar estabilidad al sistema en lazo cerrado, por esto, se debe cumplir que $k > -1$. Usando las expresiones (2.21) o (2.22) es posible encontrar los valores de k o α_s , con los cuales el sistema gasta menos energía en esfuerzo de control.

En la Figura 2-2 se muestra el cociente entre el esfuerzo de control no lineal con α_s óptimo y el lineal obtenido a partir de las expresiones (2.18) y (2.17), respectivamente. El resultado indica que el cociente mínimo es 0,33. Es decir, es posible lograr un ahorro máximo de energía gastada en esfuerzo de control del 67 %, siempre que éste se calcule con el valor óptimo de α_s a través de (2.22). Aún así, el resultado es un poco restrictivo debido a que la condición inicial x_0 fue asignada arbitrariamente.

2.2.5. Análisis dinámico cualitativo - Sistema $n = 1$

En la sección anterior se determinaron las expresiones para el esfuerzo de control lineal y no lineal de un sistema 1 - dimensional. Ahora, por medio de un análisis dinámico cualitativo se establecerán bajo qué condiciones de k y α_s , el sistema tiene menor gasto de energía en esfuerzo de control y es estable en lazo cerrado. El análisis de estabilidad se realiza a través del método de directo de Lyapunov.

Tomando como punto de partida el sistema lineal, en la expresión (2.11) es evidente que la estabilidad del lazo cerrado está directamente relacionada con el signo de la constante asociada al término $x(t)$. Así, para que el sistema lineal en lazo cerrado sea estable es necesario y suficiente que $1 + k > 0$.

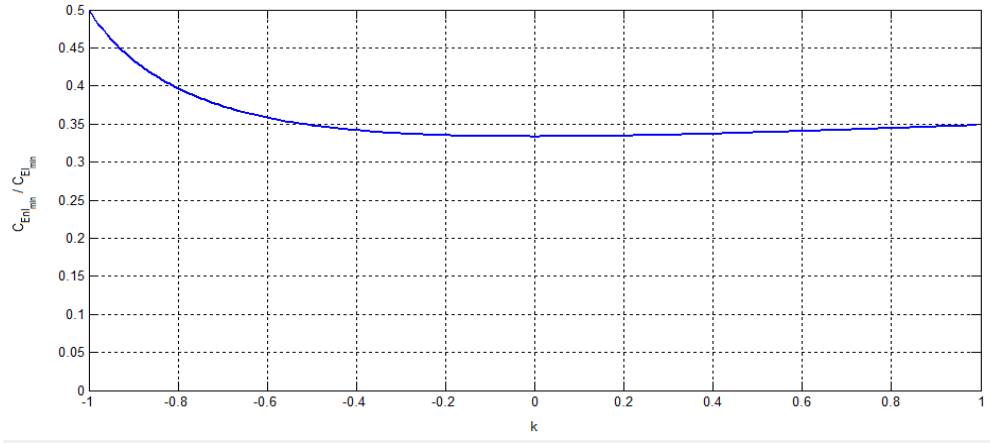


Figura 2-2: Relación del esfuerzo control lineal - esfuerzo de control no lineal para valores óptimos de α_s . Sistema $n = 1$. $x_0 = 1$

Los puntos en el espacio de estados notados por x^* , en los cuales el estado permanece constante para $t > 0$ cuando la trayectoria o solución del sistema comienza en x^* , se denominan puntos de equilibrio del sistema dinámico. Con respecto al parámetro α_s para el sistema dinámico no lineal en lazo cerrado, el número de puntos de equilibrio dados por las raíces reales de la ecuación (2.14) se determinan a partir del signo de α_s . Si $\alpha_s > 0$, el sistema tiene tres puntos de equilibrio:

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_{2,3}^* = \pm \sqrt{\frac{1+k}{\alpha_s}} \end{cases} \quad (2.24)$$

Cabe anotar que teóricamente, el sistema dinámico de (2.15) exhibe escape de tiempo finito para ciertas condiciones iniciales x_0 (Angulo et al., 2010).

2.2.5.1. Condiciones de estabilidad por el método directo de Lyapunov - Sistema $n = 1$

Por medio de este método se determina la estabilidad del sistema dinámico (2.14) con el uso de una función escalar o función de Lyapunov. Dicha función ha de caracterizarse por ser positiva definida con derivada temporal semidefinida negativa, lo cual garantiza la estabilidad del sistema no lineal en una región de atracción específica o en todo el espacio de estados. A continuación se analiza la estabilidad para los dos casos posibles respecto a α_s .

a) Caso 1: $\alpha_s < 0$

Para este caso existe solamente un punto de equilibrio. Se toma una candidata a función

de Lyapunov positiva definida en todo el espacio de estados:

$$V(x) = \frac{x^2}{2} \quad (2.25)$$

cuya derivada temporal está dada por:

$$\dot{V}(x) = x^2(\alpha_s x^2 - (1 + k)) \quad (2.26)$$

Anteriormente se estableció que $1 + k > 0$. La derivada de (2.25) es una función negativa semidefinida en todo el espacio de estados. Evaluando el punto de equilibrio $x_1^* = 0$ en (2.26), se tiene que el punto de equilibrio único es globalmente asintóticamente estable y la expresión (2.25) es una función de Lyapunov para el sistema dinámico 1 - dimensional con $\alpha_s < 0$.

$$\dot{V}(x) = x^2(\alpha_s x^2 - (1 + k)) \leq 0 \quad (2.27)$$

b) Caso 2: $\alpha_s > 0$

Existen tres puntos de equilibrio para este caso. Usando la candidata a función de Lyapunov (2.25) positiva definida en $\Omega \subset \mathbb{R}$ con centro en el origen y radio R , se procede a comprobar la estabilidad del sistema no lineal alrededor del punto de equilibrio x_1^* . La derivada está dada por:

$$\dot{V}(x) = x^2(\alpha_s x^2 - (1 + k)) \leq 0 \quad (2.28)$$

si $x^2 < \frac{1+k}{\alpha_s}$. Así, el sistema es estable en la región Ω acotada:

$$\Omega = \left\{ x / \left(-\sqrt{\frac{1+k}{\alpha_s}} < x < \sqrt{\frac{1+k}{\alpha_s}} \right) \right\} \quad (2.29)$$

La región $\Omega \subset \mathbb{R}$ determina el rango de estado dentro de la cual el sistema es estable. El punto de equilibrio x_1^* está confinado dentro de esta región y $\dot{V}(x_1^*) < 0, \forall x \in \mathbb{R} - (0)$, por lo cual se concluye que el punto de equilibrio es localmente estable. Usando estas condiciones y los valores óptimos de k ó α_s , se puede probar que dicho valor óptimo pertenece a la región de estabilidad de (2.29).

2.2.5.2. Consideraciones finales para la estabilidad y disminución del esfuerzo de control - Sistema $n = 1$

Esta sección reúne las condiciones analíticas determinadas hasta el momento para la selección conveniente de α_s ante una ganancias k dada, con el objetivo de mantener la estabilidad del sistema dinámico en lazo cerrado. Ahora se sintetiza el diseño de la ley de control, teniendo en cuenta las condiciones básicas que combinen la reducción del esfuerzo de control y los requerimientos de estabilidad.

De acuerdo a las características de cada problema, el procedimiento propuesto puede presentar variaciones. Para el caso de estudio, la parte final del problema con el modelo 1 - dimensional se divide en dos secciones alrededor del requerimiento de estabilidad $1 + k > 0$, sin olvidar que k y α_s deben tener el mismo signo, siguiendo la meta de reducir el esfuerzo de control.

a) $k > 0$ y $\alpha_s > 0$

Con la técnica de desplazamiento de polos se mueve el polo hacia la izquierda de la ubicación original. De la condición de estabilidad, para que (2.26) sea semidefinida negativa es necesario que $\alpha < 1 + k$. Si $x_{NL}(t)$ y $x_L(t)$ son el estado del sistema dinámico en lazo cerrado con una ley de control no lineal y lineal, respectivamente; utilizando la expresión para calcular el esfuerzo de control (2.16), la ley de control lineal (2.10) y la ley de control no lineal (2.13), podemos establecer la siguiente aproximación:

$$\int_0^{\infty} u_{NL}^2 dt < \int_0^{\infty} u_L^2 dt \quad (2.30)$$

$$\int_0^{\infty} (\alpha_s^2 x_{NL}^6(t) - 2k\alpha_s x_{NL}^4(t) + k^2 x_{NL}^2(t)) dt < \int_0^{\infty} (k^2 x_L^2(t)) dt$$

Asumiendo que el comportamiento dinámico en lazo cerrado bajo las leyes de control lineal y no lineal es similar, es decir, $x_{NL}(t) \approx x_L(t)$, la expresión (2.30) puede expresarse de forma simplificada con $x_{NL}(t) = x(t)$ y $x_L(t) = x(t)$.

$$\alpha_s < \frac{2k}{x^2(t)}$$

Ahora, acotando el estado $|x(t)| \leq 1$, finalmente se obtiene:

$$|\alpha_s| < 2|k| \quad (2.31)$$

Para una perturbación de estado desde $x(t) = 0$ hasta $|x(t)| \leq 1 = x_0$, las condiciones básicas sobre α_s para brindar estabilidad y menor esfuerzo de control son:

$$|\alpha_s| < \min(2|k|, |1 + k|) \quad (2.32)$$

b) $k < 0$ y $\alpha_s < 0$

El desplazamiento de polos mueve el polo hacia la derecha de la ubicación original, conservando la estabilidad del sistema. El análisis realizado demostró en (2.24) que si $\alpha_s < 0$, existe solamente un punto de equilibrio caracterizado como globalmente asintóticamente estable.

Como resultado de esto, la elección de α_s ha de satisfacer únicamente los requerimientos para reducir el esfuerzo de control. Al igual que en **a)**, la restricción para disminuir el esfuerzo de control dada por (2.31), es una condición suficiente en este caso. Acotando la variable de estado a $|x(t)| \leq 1 = x_0$, se obtiene:

$$|\alpha_s| < 2|k| \quad (2.33)$$

En síntesis, las pautas más importantes para el diseño de una ley de control no lineal por realimentación de estados, que conserve la estabilidad del sistema y reduzca el esfuerzo de control en relación al producido por el control lineal, están dadas por (2.32) y (2.33) según sea el caso de estudio.

2.2.6. Comportamiento dinámico en lazo cerrado bajo una ley de control no lineal - Sistema $n = 1$

A continuación se muestra los cambios en la topología del sistema dinámico (2.14) ante diferentes valores de k y α_s , escogidos según las condiciones (2.32) y (2.33). Seguido de esto, el esfuerzo de control es calculado como función de α_s para los casos examinados en 2.2.5.2, y comparado con el esfuerzo de control lineal. Finalmente, se indica cómo se modifica el estado transitorio y estacionario del sistema en lazo cerrado con la selección de k y α_s .

2.2.6.1. Trayectorias de estado - Sistema $n = 1$

Considerando los casos posibles estudiados en la Sección 2.2.5.2, las Figuras **2-3** y **2-4** representan las trayectorias del sistema dinámico (2.14) con diferentes condiciones iniciales x_0 . El punto de equilibrio $x_1^* = 0$ es común en los dos casos expuestos en la Figura **2-3**, y la presencia de otros puntos de equilibrio en el sistema está determinada por el signo de α_s . Como se indicó en la Sección 2.2.5, existe escape de tiempo finito en el sistema no lineal y esto se corrobora mediante la experimentación numérica. A pesar de haber acotado la condición inicial a $|x_0| \leq 1$, por propósitos ilustrativos, las simulaciones fueron realizadas con $|x_0| \leq 2$ para indicar la presencia de los dos puntos de equilibrio inestables $x_{2,3}^*$ y el escape de tiempo finito con $\alpha_s > 0$.

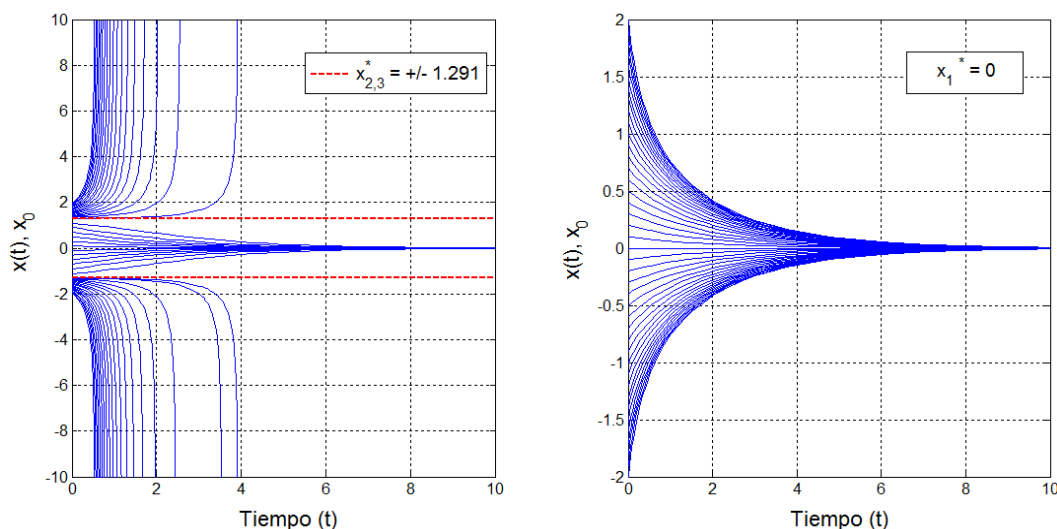


Figura 2-3: Trayectorias del estado $x(t)$ para distintas condiciones iniciales x_0 . Izquierda: $k = -0,5$ y $\alpha_s = 0,3$. Derecha: $k = -0,5$ y $\alpha_s = -0,3$

La Figura 2-4 indica como evolucionan las trayectorias en el tiempo con la ganancia $k > 0$ (desplazamiento de polos hacia la izquierda) para distintos α_s , escogida según los criterios (2.32) y (2.33).

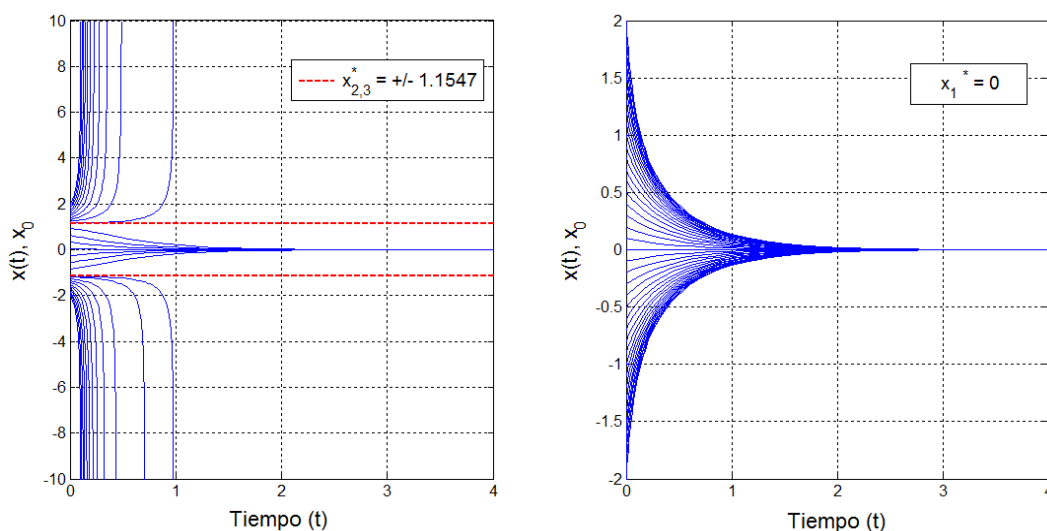


Figura 2-4: Trayectorias del estado $x(t)$ para distintas condiciones iniciales x_0 . Izquierda: $k = 1$ y $\alpha_s = 1,5$. Derecha: $k = 1$ y $\alpha_s = -1,5$

El punto de equilibrio $x_1^* = 0$ es un punto común en $\alpha_s < 0$ y $\alpha_s > 0$. Se corrobora el escape de tiempo finito y la existencia de dos puntos de equilibrio inestables ($x_{2,3}^*$) con $\alpha_s > 0$. Cabe anotar que para $\alpha_s > 0$, el escape de tiempo finito se presenta para las condiciones iniciales x_0 :

$$\sqrt{\frac{1+k}{\alpha_s}} \leq x_0 \leq -\sqrt{\frac{1+k}{\alpha_s}} \tag{2.34}$$

2.2.6.2. Influencia de α_s en la dinámica no lineal en lazo cerrado - Sistema $n = 1$

El comportamiento dinámico del sistema no lineal con pares diferentes de k y α_s se presenta en las Figuras 2-5 y 2-6. La parte superior derecha de cada esquema especifica el esfuerzo de control lineal y no lineal, obtenidos con (2.17) y (2.18), respectivamente. Las simulaciones fueron realizadas usando el algoritmo de integración *ode45* de *Matlab 7.10*®, y el parámetro α_s fue seleccionado siguiendo las condiciones (2.32) y (2.33) para una ganancia k dada.

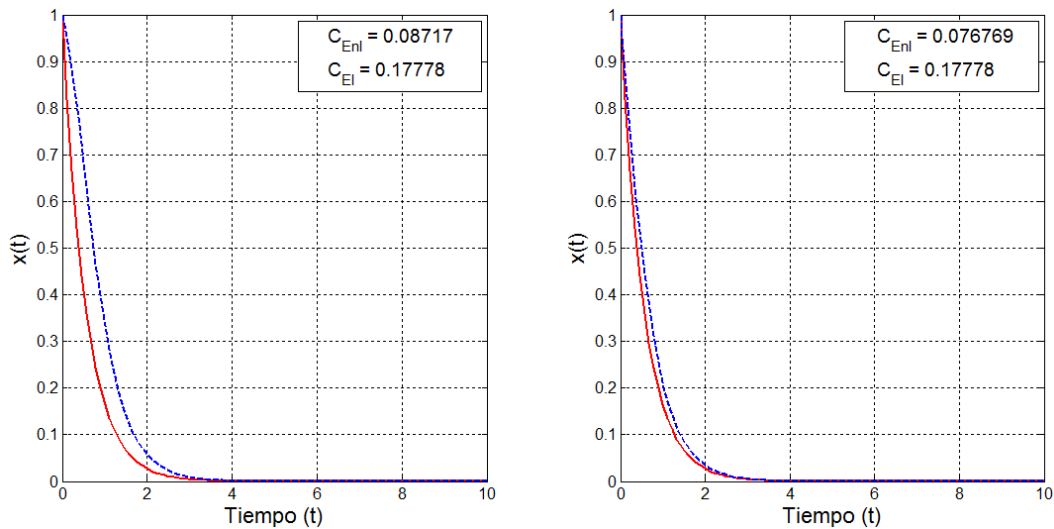


Figura 2-5: Dinámica lineal (-) y no lineal (- -) en lazo cerrado. Izquierda: $k = 0,8$, $\alpha_s = 1,4$. Derecha: $k = 0,8$, $\alpha_s = 0,7$. Condición inicial $x_0 = 1$ para ambos casos

La ley de control no lineal cambia levemente la dinámica en lazo cerrado, respecto a la obtenida con la ley de control lineal. El ahorro de energía en esfuerzo de control para el caso $k = 0,8$ y $\alpha_s = 1,4$ es del 51 %, en tanto que para $k = 0,8$ y $\alpha_s = 0,7$ es del 57 %. Así pues, cabe resaltar que siguiendo la restricción (2.32), la magnitud de α_s no influye significativamente en el ahorro de energía, para el ejemplo propuesto. En la Figura 2-5, el lado izquierdo representa la simulación de la dinámica con $\alpha_s = 1,4$, mientras que el lado derecho lo hace con $\alpha_s = 0,7$; o sea en relación de 1:2 para α_s entre los dos ejemplos, con solo una diferencia de 6 % en la energía ahorrada en esfuerzo de control. El resultado práctico indica que la magnitud de α_s cambia el estado transitorio de la dinámica no lineal, tornándolo más lento como se evidencia en la Figura 2-5 - Izquierda, en comparación a los resultados del lado derecho. A pesar de esto, tanto la dinámica lineal y no lineal en ambos casos de α_s , alcanza el estado estacionario en aproximadamente 4 (unidades de tiempo).

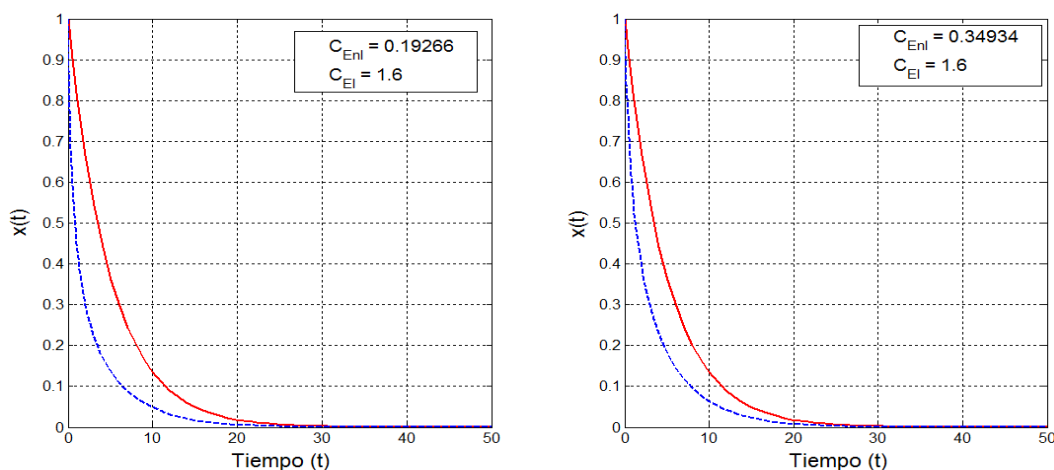


Figura 2-6: Dinámica lineal (-) y no lineal (- -) en lazo cerrado. Izquierda ($k = -0,8$, $\alpha_s = -1,4$) Derecha ($k = -0,8$, $\alpha_s = -0,7$). Condición inicial $x_0 = 1$ para ambos casos

Al contrario del caso anterior, el estado transitorio de la dinámica lineal y no lineal cambia significativamente con la elección del parámetro $\alpha_s < 0$ cuando $k < 0$. La parte izquierda de la Figura 2-6, presenta el primer ejemplo con una reducción de energía en esfuerzo de control del 88 % mientras que el lado derecho muestra un ahorro de energía del 78,1 %. El esfuerzo de control lineal y no lineal fueron calculados con las expresiones (2.17) y (2.18), respectivamente. El estado transitorio se torna notablemente más lento que para el caso $k > 0$, con aproximadamente 35 (unidades de tiempo) necesarias para alcanzar el estado estable de la dinámica lineal y no lineal. Los resultados obtenidos en este ejemplo muestran que la magnitud de α_s no influyen en la reducción del esfuerzo de control con un umbral de 10 % para una relación de 1 : 2 sobre $\alpha_s < 0$, entre el lado izquierdo y derecho de la Figura 2-6.

Comparando finalmente los resultados obtenidos entre $k < 0$, $\alpha_s < 0$ y $k > 0$, $\alpha_s > 0$, cabe anotar que el caso $\alpha_s < 0$ y la ganancia k asociada, generan una disminución más efectiva del esfuerzo de control. A pesar de esto, el estado transitorio se altera totalmente, requiriendo en este caso mayor tiempo para alcanzar el estado estacionario, en comparación al caso $k > 0$ y $\alpha_s > 0$. El coste de alcanzar una mayor reducción del esfuerzo de control es alterar el estado transitorio de la dinámica en lazo cerrado, hecho que vuelve inadecuada la elección del parámetro $\alpha_s < 0$. La Figura 2-7 indica el porcentaje en que se reduce el esfuerzo de control no lineal con respecto al lineal para los casos $k < 0$, $\alpha_s < 0$ y $k > 0$, $\alpha_s > 0$, puestos en consideración anteriormente.

Para los ejemplos mostrados con $k > 0$ (Figura 2-5), la mayor reducción de energía en esfuerzo de control fue del 57 %. Sin embargo, evaluando otros valores del parámetro α_s restringidos por (2.32), es posible llegar hasta un 70 % en la disminución del esfuerzo de control no lineal con respecto al lineal, como lo indica la Figura 2-7 - Derecha. De igual manera, siguiendo la condición (2.33) para $k < 0$, la máxima reducción en el esfuerzo de control no lineal es del 90 % (Figura 2-7

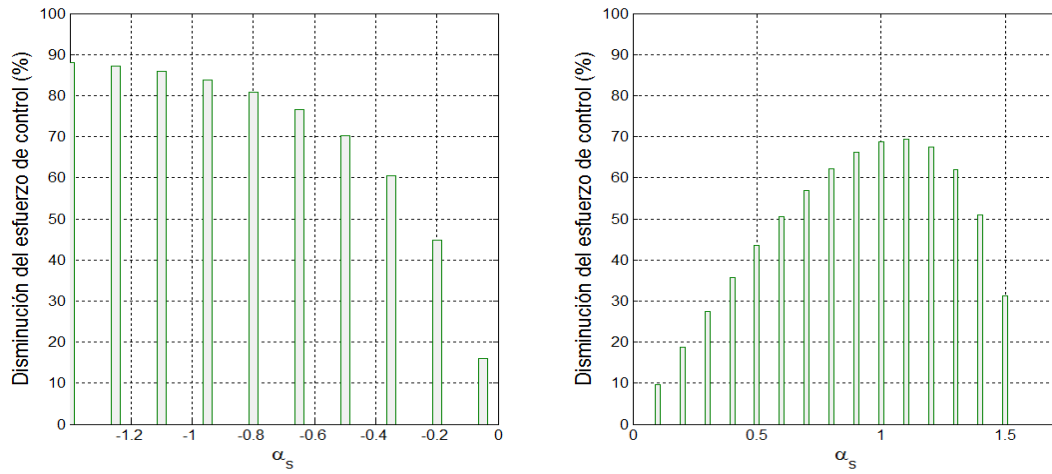


Figura 2-7: Porcentaje de disminución en el esfuerzo de control. Izquierda ($\alpha_s < 0$) con $k = -0,8$. Derecha ($\alpha_s > 0$) con $k = 0,8$. Condición inicial $x_0 = 1$ para ambos casos.

- Izquierda).

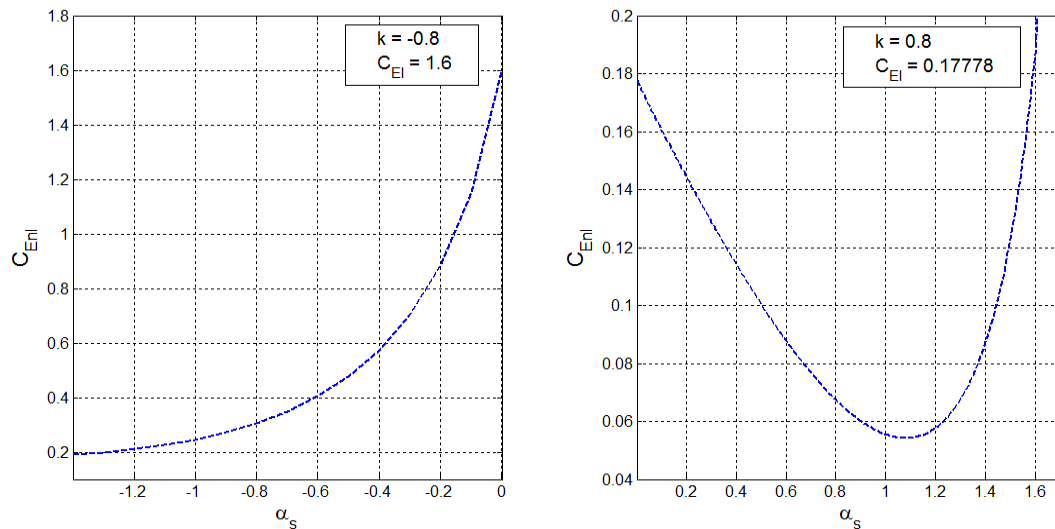


Figura 2-8: Esfuerzo de control en función de α_s . Izquierda: $\alpha_s < 0$. Derecha: $\alpha_s > 0$. Condición inicial para ambos casos $x_0 = 1$

Como parte final de los resultados, en la Figura 2-8 se corroboran los resultados obtenidos a lo largo de esta parte de la investigación. Es decir, reuniendo las condiciones (2.32) y (2.33) con las expresiones analíticas (2.17) y (2.18) se demuestra que si bien existe mayor reducción de energía en esfuerzo de control con α_s y la ganancia $k < 0$ asociada, el costo de perjudicar el desempeño dinámico no justifica de ninguna forma el uso de $\alpha_s < 0$. Según la Figura 2-8, para $k > 0$ y $\alpha_s > 0$, la magnitud del esfuerzo de control no lineal es menor que el caso $k < 0$ y $\alpha_s < 0$.

El análisis llevado a cabo en esta sección permite concluir que el mejor desempeño dinámico en lazo cerrado y la más alta reducción del esfuerzo de control, son factibles con la elección de $\alpha_s > 0$ si $k > 0$, siguiendo la restricción (2.32) y las ecuaciones (2.17) y (2.18), para todos los cálculos necesarios en el modelo 1 - dimensional. Si el diseño del controlador lineal requiere que $k < 0$, el parámetro α_s usado será negativo. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que en este último caso, la energía ahorrada es menor y la diferencia entre la dinámica en lazo cerrado bajo la ley de control lineal y la ley de control no lineal, es más fuerte que para el caso $\alpha_s > 0$ con una ganancia $k > 0$ dada.

2.3. Diseño de una ley de control no lineal por realimentación de estados - Sistema $n = 2$

En este aparte del trabajo, se aplican los principios básicos de la técnica de control propuestos en la Sección 2.2 a un modelo 2 - dimensional continuo en todo t , lineal e invariante en el tiempo. Siguiendo la metodología propuesta anteriormente, el desarrollo comienza con una ley de control lineal por realimentación de estados, luego una perturbación cúbica es introducida en el modelo lineal y a partir de esta nueva ley de control, se calcula el esfuerzo de control con (2.16) para todo t . Finalmente, se lleva a cabo un análisis dinámico cualitativo con el objetivo de encontrar las condiciones básicas que minimicen el esfuerzo de control y brinden estabilidad al sistema dinámico en lazo cerrado.

El procedimiento de diseño se aplica de la misma forma que para el sistema $n = 1$, sin más observación que para modelos de orden $n > 1$, deberán estar presentes las diferencias entre el manejo algebraico de escalares y matrices.

2.3.1. Modelo dinámico en el espacio de estados para $n = 2$

Sea un sistema planar, lineal e invariante en el tiempo, modelado por dos ecuaciones diferenciales de primer orden, expresado en la forma canónica controlable para el espacio de estados donde con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, con una señal de salida única $y(t)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (2.35a)$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.35b)$$

2.3.2. Ley de control no lineal por desplazamiento de polos y realimentación de estados. Sistema $n = 2$

Continuando con el diseño de la ley de control, la técnica de desplazamiento de polos se aplica al sistema dinámico SISO (2.35). Es decir, la entrada de control $u(t)$ se reemplaza por una ley con realimentación de estados como producto de la matriz K con dimensiones $m \times n$ y el n - vector $x(t)$, según:

$$u_L(t) = -K \cdot x(t) \quad (2.36)$$

donde K es la matriz de ganancias de la realimentación de estados, de dimensiones 1×2 para este caso. Así, se obtiene un sistema dinámico en el espacio de estados que aún conserva su condición de linealidad:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(- (k_1 \ k_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \quad (2.37a)$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.37b)$$

2.3.3. Perturbación no lineal sobre la ley de realimentación de estado - Sistema $n = 2$

Al igual que para el caso 1 - dimensional, la ley de control no lineal resulta de añadir una perturbación a la entrada de control lineal $u_L(t)$ en (2.36), para intentar disminuir el esfuerzo de control sin generar cambios significativos en el comportamiento estacionario y transitorio del sistema dinámico. La perturbación cúbica es un n - vector de los estados del sistema, elevados a la tercera potencia, multiplicado por una matriz α de dimensión $m \times n$, para este caso 1×2 . La siguiente expresión muestra la ley de control no lineal, notada como $u_{NL}(t)$:

$$u_{NL}(t) = -K \cdot x(t) + \alpha \cdot x^3(t) \quad (2.38)$$

Puesto que el objetivo es reducir el esfuerzo de control calculado a partir de (1.1) y la ley de control (2.38), es claro que el segundo término del lado derecho de (2.38), correspondiente a la perturbación cúbica, debe disminuir la magnitud de la señal de control producida por (2.36) en (2.38).

Con las dimensiones de K (1×2) y α (1×2), la entrada de control perturbada $u_{NL}(t)$ se expresa como:

$$u_{NL}(t) = - \sum_{i=1}^n k_i x_i(t) + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^3(t) \quad (2.39)$$

Así, aplicando la expresión (2.39) para $n = 2$ el resultado es:

$$u_{NL}(t) = -k_1 x_1(t) + \alpha_1 x_1^3(t) - k_2 x_2(t) + \alpha_2 x_2^3(t) \quad (2.40)$$

Reemplazando (2.40) en (2.35), se obtiene la dinámica en lazo cerrado de un sistema 2 - dimensional con una ley de control no lineal:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= -(a_1 + k_1)x_1(t) + \alpha_1 x_1^3(t) - (a_2 + k_2)x_2(t) + \alpha_2 x_2^3(t) \\ y_1 &= x_1(t) \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde $k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2, a_1$ y $a_2 \in \mathbb{R}$.

2.3.4. Análisis dinámico cualitativo - Sistema $n = 2$

Con un tratamiento cualitativo similar al realizado en la Sección 2.2.5, se establecen las condiciones sobre α ante una matriz de ganancias K propuesta en el diseño de la ley de control lineal, tal que el sistema dinámico gaste menos energía en esfuerzo de control y conserve su estabilidad en lazo cerrado. El análisis de estabilidad del sistema dinámico en lazo cerrado, se realiza a través del método de directo de Lyapunov.

Con respecto a la matriz α que multiplica el término cúbico, para el sistema dinámico no lineal en lazo cerrado el número de puntos de equilibrio en el plano real para $x_i(t)$ está regido por el signo de α_i . Para $\alpha_1 < 0$, el sistema tiene un solo punto de equilibrio $(x_1^{1*}, x_2^{1*}) = (0, 0)$. Si $\alpha_1 > 0$, el sistema (2.41) tiene tres puntos de equilibrio dados por:

$$\begin{cases} (x_1^{1*}, x_2^{1*}) = (0, 0) \\ (x_1^{2*}, x_2^{2*}) = \left(\sqrt{\frac{a_1 + k_1}{\alpha_1}}, 0 \right) \\ (x_1^{3*}, x_2^{3*}) = \left(-\sqrt{\frac{a_1 + k_1}{\alpha_1}}, 0 \right) \end{cases} \quad (2.42)$$

Por regla general, los signos de k_i y α_i , elementos de las matrices K y α , respectivamente, deben ser iguales de acuerdo al análisis realizado en la Sección 2.2.3. En consecuencia, para el tratamiento analítico subsiguiente se consideran los casos $k_1 > 0, k_2 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ y $k_1 < 0, k_2 < 0, \alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$.

Simplificando la expresión (2.41) con $\gamma_1 = a_1 + k_1$ y $\gamma_2 = a_2 + k_2$, la ecuación característica mediante la cual se calculan los polos en lazo cerrado del sistema, está expresada por:

$$s^2 + \gamma_2 s + \gamma_1 = 0 \tag{2.43}$$

Para garantizar la estabilidad local del sistema dinámico, los polos de este deben estar ubicados en el semiplano complejo izquierdo con parte real negativa, de modo que para la ecuación (2.43) habrá de cumplirse que:

$$\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$$

2.3.4.1. Condiciones de estabilidad por el método directo de Lyapunov - Sistema $n = 2$

Del mismo modo que para el caso 1 - dimensional, se determina por medio de este método, la estabilidad del sistema representado en (2.41) con el uso de una función escalar o función de Lyapunov. Dicha función debe caracterizarse por ser positiva definida con derivada temporal semidefinida o definida negativa, lo cual garantizará la estabilidad del sistema no lineal en una región de atracción específica o en todo el espacio de estados.

Tomando la candidata a función de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2}\gamma_1 x_1^2 - \frac{1}{4}\alpha_1 x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 \tag{2.44}$$

cuya derivada temporal está dada por:

$$\dot{V}(x) = \gamma_1 x_1 \dot{x}_1 - \alpha_1 x_1^3 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 \tag{2.45}$$

Reemplazando \dot{x}_1 y \dot{x}_2 en (2.45) y simplificando se obtiene:

$$\dot{V}(x) = -\gamma_2 x_2^2 + \alpha_2 x_2^4 \tag{2.46}$$

A continuación se examinan los casos posibles sobre los signos de α_1 y α_2 , para establecer las condiciones que proporcionen estabilidad al sistema dinámico (2.41).

1. Caso 1 ($\alpha_1 < 0$)

Para este caso existe un solo punto de equilibrio dado por $x_1^{1*}, x_2^{1*} = (0, 0)$. Si $\alpha_1 < 0$ la función (2.44) es positiva definida. Analizando la derivada temporal (2.46) con respecto a α_2 , tenemos:

a) $\alpha_2 < 0$

La expresión (2.46) es globalmente negativa semidefinida.

b) $\alpha_2 > 0$

Para que (2.46) sea localmente negativa semidefinida, es decir:

$$x_2^2(-\gamma_2 + \alpha_2 x_2^2) < 0$$

se debe cumplir que $\alpha_2 < \gamma_2/x_2^2$. Acotando el estado a $|x_2| < 1$, finalmente se obtiene:

$$\alpha_2 < \gamma_2 \tag{2.47}$$

Se verifica ahora la estabilidad del punto de equilibrio en torno a α_2 , tomando las siguientes posibilidades:

- $\alpha_2 < 0$

La derivada temporal (2.46) se expresa como:

$$\dot{V}(x) = -\gamma_2 x_2^2 - \alpha_2 x_2^4 \tag{2.48}$$

La condición de $\dot{V}(x) = 0$ en (2.48) se cumple sólo con $x_2 = 0$, lo que implica que $\dot{x}_1 = 0$ y $\dot{x}_2 = 0$. Reemplazando ésto en (2.41), el resultado es:

$$\dot{x}_1 = 0 \tag{2.49a}$$

$$0 = -\gamma_1 x_1 + \alpha_1 x_1^3 \tag{2.49b}$$

Así, las expresiones (2.49a) - (2.49b) se satisfacen únicamente en la solución trivial y por lo tanto el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable con $\alpha_1 < 0$ y $\alpha_2 < 0$.

- $\alpha_2 > 0$

En este caso, la condición $\dot{V}(x) = 0$ en (2.46) se satisface con $x_2 = 0$. Cabe anotar que ahora, la derivada de (2.44) es localmente negativa semidefinida. Por lo tanto, teniendo en cuenta la expresión (2.47), el punto de equilibrio será localmente estable con $\alpha_1 < 0$ y $\gamma_2 > \alpha_2 > 0$.

2. Caso 2: ($\alpha_1 > 0$)

La candidata a función de Lyapunov es la misma que la del **Caso 1**. El signo positivo de α_1 permite encontrar tres puntos de equilibrio dados por (2.42). Para que (2.44) sea localmente positiva definida se requiere:

$$\gamma_1 > \frac{1}{2}\alpha_1 x_1^2 \quad \therefore \quad \alpha_1 < \frac{2\gamma_1}{x_1^2}$$

Acotando el estado $|x_1| < 1$, tenemos finalmente:

$$\alpha_1 < 2\gamma_1 \tag{2.50}$$

El análisis de la derivada temporal (2.46) con respecto a α_2 , se realiza en dos secciones, como se muestra a continuación.

- a) $\alpha_2 < 0$

La derivada temporal (2.46) bajo esta condición se da en (2.48), la cual es globalmente negativa semidefinida.

- b) $\alpha_2 > 0$

Tomando la derivada (2.46), es posible determinar que ésta es localmente negativa semidefinida con $\alpha_2 < \gamma_2$, según la restricción (2.47).

Se verifica ahora la estabilidad del punto de equilibrio en torno a α_2 , tomando las siguientes posibilidades:

- $\alpha_2 < 0$

La derivada temporal (2.46) está dada por (2.48). La condición de $\dot{V}(x) = 0$ en dicha expresión se cumple únicamente para $x_2 = 0$, lo que implica que $\dot{x}_1 = 0$ y $\dot{x}_2 = 0$. Reemplazando ésto en (2.41), el resultado está expresado por (2.49a) - (2.49b). Examinando más cuidadosamente la ecuación (2.49b), se puede verificar que esta se satisface para:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ -\gamma_1 + \alpha_1 x_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

Restringiendo el estado $|x_1| < 1$, tenemos finalmente:

$$\alpha_1 < \gamma_1 \tag{2.51}$$

Así pues, las expresiones (2.49a) - (2.49b) se satisfacen únicamente en la solución trivial y por lo tanto el punto de equilibrio es localmente asintóticamente estable con $0 < \alpha_1 < \gamma_1$ y $\alpha_2 < 0$.

- $\alpha_2 > 0$

La condición $\dot{V}(x) = 0$ en (2.46) se satisface con:

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ -\gamma_2 + \alpha_2 x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Restringiendo el estado $|x_2| < 1$, obtenemos:

$$\alpha_2 < \gamma_2 \tag{2.52}$$

En este caso, las expresiones (2.49a) - (2.49b) se satisfacen únicamente en la solución trivial y por lo tanto el punto de equilibrio es localmente asintóticamente estable con $\alpha_1 > 0$ y $0 < \alpha_2 < \gamma_2$.

Por lo tanto, la expresión (2.44) es una función de Lyapunov válida para el sistema dinámico $n = 2$ no lineal en lazo cerrado.

2.3.4.2. Consideraciones finales para la estabilidad y disminución del esfuerzo de control - Sistema $n = 2$

A continuación se reúnen las condiciones analíticas determinadas a lo largo de esta parte del trabajo para la selección adecuada de α ante una matriz de K dada, con el objetivo de mantener la estabilidad del sistema dinámico en lazo cerrado. Así pues, se sintetiza el diseño de la ley de control teniendo en cuenta las condiciones analíticas básicas para reducir el gasto de energía en esfuerzo de control y preservar la estabilidad del sistema dinámico. El análisis se lleva a cabo de forma similar al realizado en el sistema 1 - dimensional.

Para satisfacer los requerimientos del esfuerzo de control, α_1 y k_1 deben tener el mismo signo al igual que α_2 y k_2 . Acotando las variables de estado a $|x_i| \leq 1$, con el fin de obtener menor esfuerzo de control se requiere según (2.31) que:

$$|\alpha_i| < 2 |k_i| \quad \forall i \tag{2.53}$$

A su vez, reuniendo las condiciones de (2.47), (2.50), (2.51) y (2.52), para brindar estabilidad al sistema en lazo cerrado con una ganancias k_i dada se requiere:

Caso 1: $k_1 < 0$

a) $k_2 < 0$

$$(\alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0) \quad \forall \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \tag{2.54}$$

b) $k_2 > 0$

$$(\alpha_1 < 0, 0 < \alpha_2 < \gamma_2) \quad \forall \quad \{x_1, |x_2| < 1\} \in \mathbb{R} \tag{2.55}$$

Caso 2: $k_1 > 0$

a) $k_2 < 0$

$$(0 < \alpha_1 < \gamma_1, \alpha_2 < 0) \quad \forall \quad \{|x_1| < 1, x_2\} \in \mathbb{R} \tag{2.56}$$

b) $k_2 > 0$

$$(0 < \alpha_1 < \gamma_1, 0 < \alpha_2 < \gamma_2) \quad \forall \quad \{|x_1| < 1, |x_2| < 1\} \in \mathbb{R} \tag{2.57}$$

Teniendo en cuenta (2.53) y (2.54) - (2.57), las restricciones para α_1 y α_2 son:

Caso 1: $k_1 < 0$

a) $k_2 < 0$

$$|\alpha_1| < 2 |k_1| \quad (2.58a)$$

$$|\alpha_2| < 2 |k_2| \quad (2.58b)$$

b) $k_2 > 0$

$$|\alpha_1| < \min(2 |k_1|, \gamma_1) \quad (2.58c)$$

$$|\alpha_2| < \min(2 |k_2|, \gamma_2) \quad (2.58d)$$

Caso 2: $k_1 > 0$

a) $k_2 < 0$

$$|\alpha_1| < \min(2 |k_1|, \gamma_1) \quad (2.58e)$$

$$|\alpha_2| < 2 |k_2| \quad (2.58f)$$

b) $k_2 > 0$

$$|\alpha_1| < \min(2 |k_1|, \gamma_1) \quad (2.58g)$$

$$|\alpha_2| < \min(2 |k_2|, \gamma_2) \quad (2.58h)$$

Finalmente, las condiciones básicas de diseño de una ley de control no lineal que conserve la estabilidad del sistema y reduzca la energía gastada en esfuerzo de control en comparación al producido por una ley de control por realimentación de estados están dadas por (2.58).

2.3.5. Comportamiento dinámico en lazo cerrado bajo una ley de control no lineal - Sistema $n = 2$

Se muestra ahora cómo cambia el comportamiento cualitativo del sistema dinámico según el parámetro α_i , escogido a partir de las restricciones (2.58) ante una ganancia k_i fija. Posteriormente, el esfuerzo de control se calcula en función de k_i y α_i en los dos casos examinados en 2.3.4.1, y comparado con el esfuerzo de control lineal. Para finalizar, se representa gráficamente la influencia de α_i en el estado transitorio y estacionario del sistema en lazo cerrado, así como el porcentaje de reducción del gasto energético, con la ganancia k_i ya establecida en el diseño de la ley de control lineal.

2.3.5.1. Retratos de fase - Sistema $n = 2$

Las Figuras 2-9 y 2-10 muestran los retratos de fase del sistema dinámico lineal (2.37), como es lógico, advirtiendo la presencia de un solo punto de equilibrio dado por $(x_1^{1*}, x_2^{1*}) = (0, 0)$ y caracterizado como un nodo estable. Tomando algunas de las posibilidades estudiadas en la Sección 2.3.4.2, las Figuras 2-11 y 2-12 muestran los retratos de fase del sistema dinámico no

lineal (2.41). Todos los cálculos se llevan a cabo usando un método de integración de ecuaciones diferenciales *ode45* de *Matlab 7.10*®.

En el sistema dinámico no lineal, el punto de equilibrio $(x_1^{1*}, x_2^{1*}) = (0, 0)$ es común en los dos casos considerados; la presencia de otros puntos de equilibrio en el sistema está regida por el signo de α_i . A pesar de haber acotado los estados a $|x_i| \leq 1$, por propósitos ilustrativos las simulaciones fueron realizadas con $|x_i(t)| \leq 5$, para demostrar la presencia de dos puntos de equilibrio inestables $x_{1,2}^{2,3*}$ con $\alpha_1 > 0$ en el sistema dinámico no lineal.

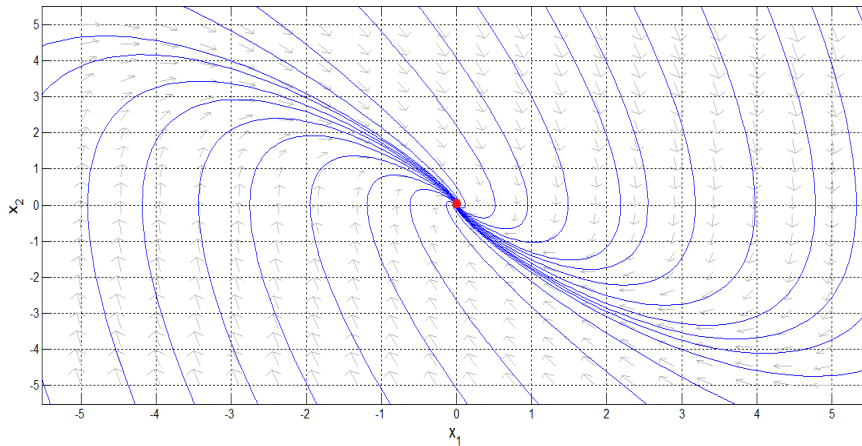


Figura 2-9: Retrato de fases de la dinámica lineal en lazo cerrado. Puntos de equilibrio (●) - Trayectorias (- -). $k_1 = 1, k_2 = 1, a_1 = 2$ y $a_2 = 1$

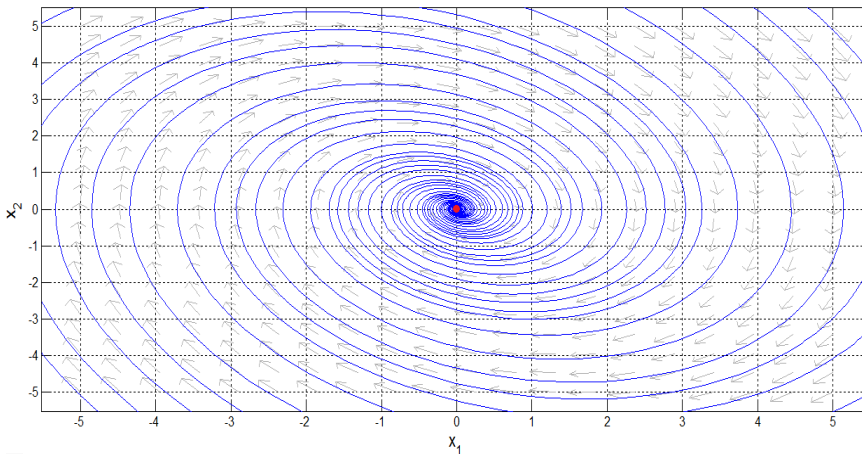


Figura 2-10: Retrato de fases de la dinámica lineal en lazo cerrado. Puntos de equilibrio (●) - Trayectorias (- -). $k_1 = -0,5, k_2 = -0,5, a_1 = 2$ y $a_2 = 1$

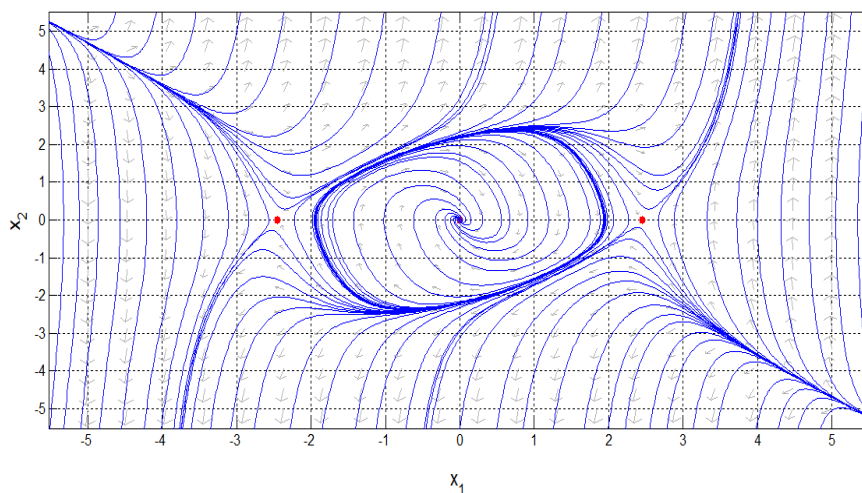


Figura 2-11: Retrato de fases de la dinámica no lineal en lazo cerrado. Puntos de equilibrio (●) - Trayectorias (- -). $k_1 = 1, k_2 = 1, \alpha_1 = 0,5, \alpha_2 = 0,5, a_1 = 2$ y $a_2 = 1$

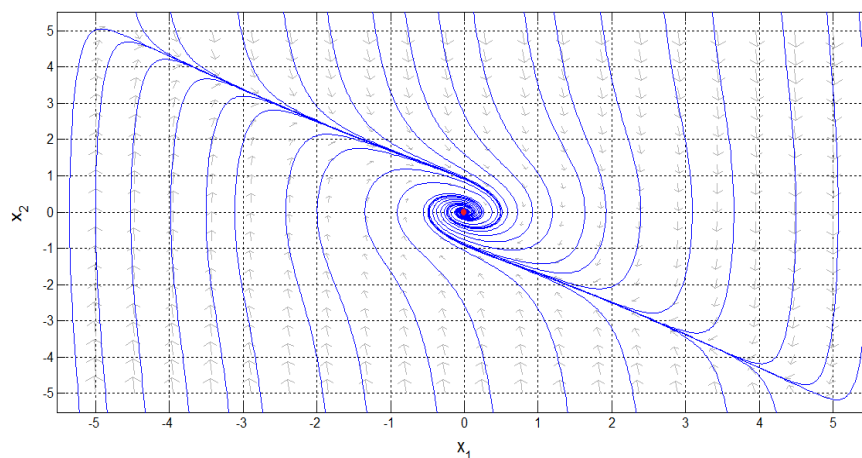


Figura 2-12: Retrato de fases de la dinámica no lineal en lazo cerrado. Puntos de equilibrio (●) - Trayectorias (- -). $k_1 = -0,5, k_2 = -0,5, \alpha_1 = -0,5, \alpha_2 = -0,5, a_1 = 2$ y $a_2 = 1$

En la Figura 2-11 se aprecia la existencia de tres puntos de equilibrio para $\alpha_i > 0$ si $k_i > 0$. Los puntos de equilibrio se ubican en las coordenadas dadas en (2.42) y corresponden a un foco estable y dos puntos silla. Para $\alpha_i < 0$ existe un único punto de equilibrio (foco estable) $(x_1^{1*}, x_2^{1*}) = (0, 0)$ como se ve en la Figura 2-12. La Tabla 2-1 resume la caracterización de los puntos de equilibrio tanto para la dinámica lineal de (2.37) y la dinámica no lineal de (2.41).

2.3.5.2. Influencia de α_i en la dinámica no lineal en lazo cerrado - Sistema $n = 2$

La Figuras 2-13 - 2-16 representan el comportamiento de la dinámica lineal y no lineal ante diferentes valores de α_i con una ganancia k_i dada. Las simulaciones fueron realizadas usando el algo-

Tabla 2-1: Caracterización de puntos de equilibrio - Dinámica lineal y no lineal en lazo cerrado $n = 2$

Sistema dinámico lineal				
$k_1 = 1, k_2 = 1$				
Coordenadas (x_1, x_2)		λ_1	λ_2	Tipo
0	0	$-1 + 1.4142 i$	$-1 - 1.4142 i$	Nodo estable
$k_1 = -0,5, k_2 = -0,5$				
Coordenadas (x_1, x_2)		λ_1	λ_2	Tipo
0	0	$-0.25 + 1.199 i$	$-0.25 - 1.199 i$	Nodo estable
Sistema dinámico no lineal				
$\alpha_1 > 0$				
Coordenadas (x_1, x_2)		λ_1	λ_2	Tipo
0	0	$-1 + 1.4142 i$	$-1 - 1.4142 i$	Nodo estable
-2.4495	0	1.6458	-3.6458	Punto silla
2.4495	0	1.6458	-3.6458	Punto silla
$\alpha_1 < 0$				
Coordenadas (x_1, x_2)		λ_1	λ_2	Tipo
0	0	$-0.25 + 1.199 i$	$-0.25 - 1.199 i$	Nodo estable

ritmo de integración *ode45* de *Matlab 7.10*[®]. El parámetro α_i se escogió siguiendo las condiciones (2.58), para una ganancia k_i dada. Acompañando el comportamiento dinámico de las variables de estado $x_1(t)$ y $x_2(t)$ del sistema (2.35) con $a_1 = 2$ y $a_2 = 1$, se indica el esfuerzo de control lineal y no lineal calculados a través de la integración numérica de (1.1) en cada t . Las condiciones iniciales para todas las simulaciones son $x_{10} = 0,8$ y $x_{20} = -0,7$.

Los resultados de la Figura 2-13 corresponden al desplazamiento de polos hacia la izquierda para $k_i > 0$. La reducción del esfuerzo de control con la ley no lineal es del 20% para $\alpha_1 = 1$. La dinámica en lazo cerrado bajo la ley de control no lineal muestra un estado transitorio más lento que el exhibido por la dinámica lineal, como se puede apreciar en la Figura 2-13. En general, el comportamiento dinámico no presenta grandes diferencias a pesar de las leyes de control utilizadas. El tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario en las dos variables de estado, es aproximadamente 5 (unidades de tiempo) para la dinámica lineal (2.41) y la dinámica no lineal (2.35).

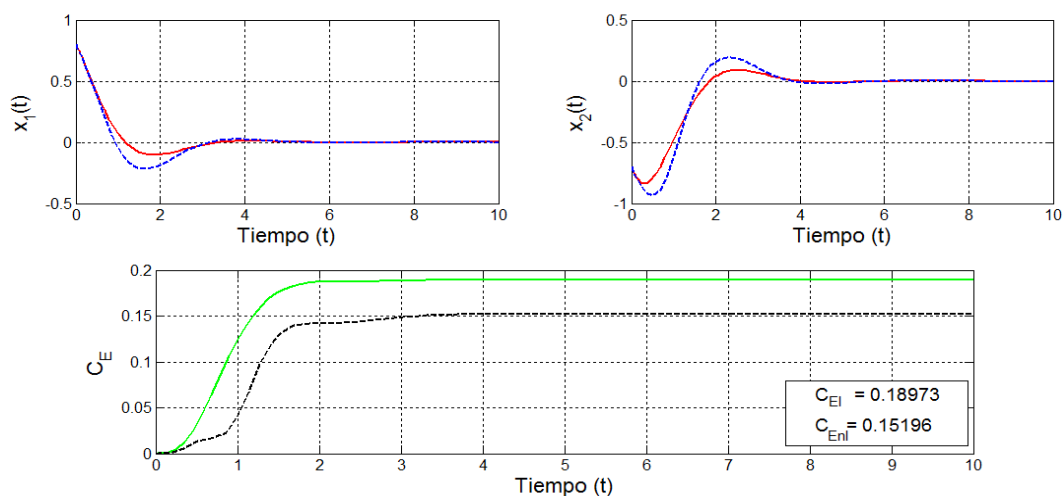


Figura 2-13: Dinámica lineal (—) y no lineal (- -) en lazo cerrado. Esfuerzo de control lineal (—), no lineal (- -). $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 1$.

Un comportamiento muy similar al presentado en el esquema 2-13 se muestra en la Figura 2-14 con $\alpha_1 = 0,5$, en la cual se evidencia que aunque los polos del sistema sean iguales a los del caso anterior, la elección de la magnitud α_i afecta ligeramente el estado transitorio. Las diferencias en el curso de las trayectorias no son muy marcadas con respecto a los resultados obtenidos con $\alpha_1 = 1$, sin embargo la dinámica lineal y no lineal muestran unas curvas más ajustadas entre sí y un tiempo aproximado a 4 (unidades de tiempo), para alcanzar el estado estacionario con $\alpha_1 = 0,5$. En cuanto al esfuerzo de control, la reducción del gasto de energía es del 25%. La simulación indica claramente que la magnitud de α_1 no ejerce mayor influencia en la reducción del esfuerzo de control, con solo una diferencia de 5% a pesar de que en el primer ejemplo (Figura 2-13) se utiliza un parámetro α_1 dos veces mayor al del segundo ejemplo (Figura 2-14).

Las Figuras 2-15 y 2-16 serán útiles para analizar el segundo caso estudiado, es decir, $k_1 < 0$ (desplazamiento de polos hacia la derecha) y $\alpha_1 < 0$. La reducción del esfuerzo de control con la ley no lineal para $k_1 = -0,5$ (Figura 2-15) fue del 72,7%; la dinámica no lineal y lineal se altera ampliamente con la elección de $\alpha_1 < 0$ y $\alpha_2 < 0$, comparada a la obtenida con $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$. El estado estacionario se alcanza luego de de casi 20 (unidades de tiempo).

El esquema de la Figura 2-16 muestra la dinámica y el esfuerzo de control en lazo cerrado para $\alpha_1 = -0,45$. Si bien α_1 en el primer ejemplo (Figura 2-15) duplica α_1 del segundo (Figura 2-16), la reducción del esfuerzo de control no varía significativamente. El efecto de los nuevos α_1 y α_2 en el desempeño dinámico es apenas notorio y aunque las trayectorias muestran curvas más ajustadas entre sí, aún persiste el comportamiento oscilante en el estado transitorio y una dinámica más lenta, como es lógico, a causa de que $k_1 < 0$ y $k_2 < 0$. La disminución del esfuerzo de control en este ejemplo (Figura 2-16) es del 64%, apenas un 8,7% menor al caso anterior.

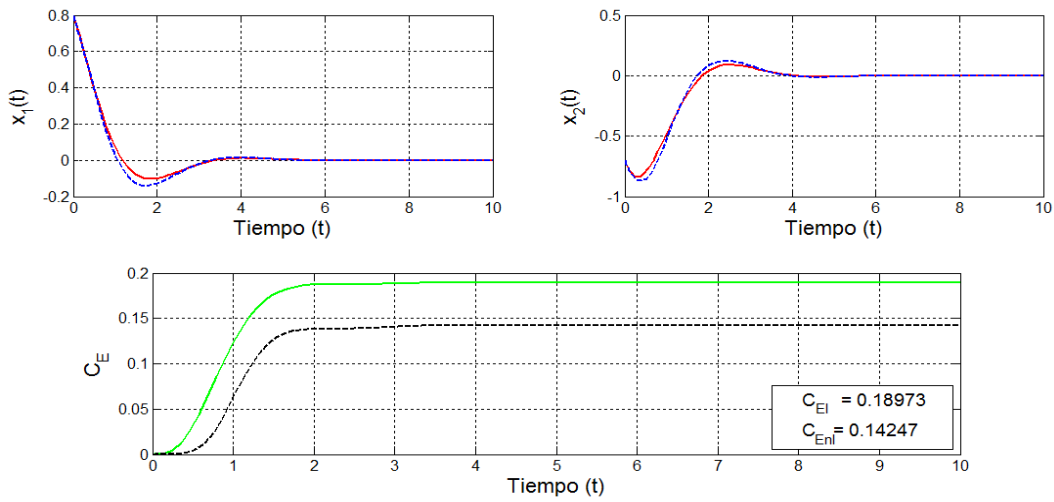


Figura 2-14: Dinámica lineal (—) y no lineal (- -) en lazo cerrado. Esfuerzo de control lineal (—), no lineal (- -). $k_1 = 1, k_2 = 1, \alpha_1 = 0,5, \alpha_2 = 0,5$.

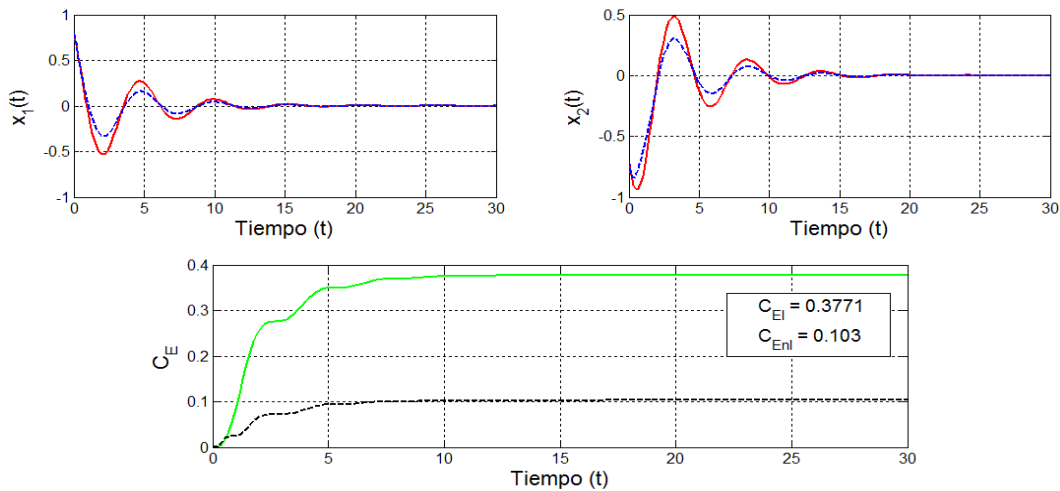


Figura 2-15: Dinámica lineal (—) y no lineal (- -) en lazo cerrado. Esfuerzo de control lineal (—), no lineal (- -). $k_1 = -0,5, k_2 = -0,5, \alpha_1 = -0,9, \alpha_2 = -0,9$

En la Tabla 2-2 están indicados los polos en lazo cerrado para las ganancias k_1 y k_2 elegidas en el ejemplo propuesto.

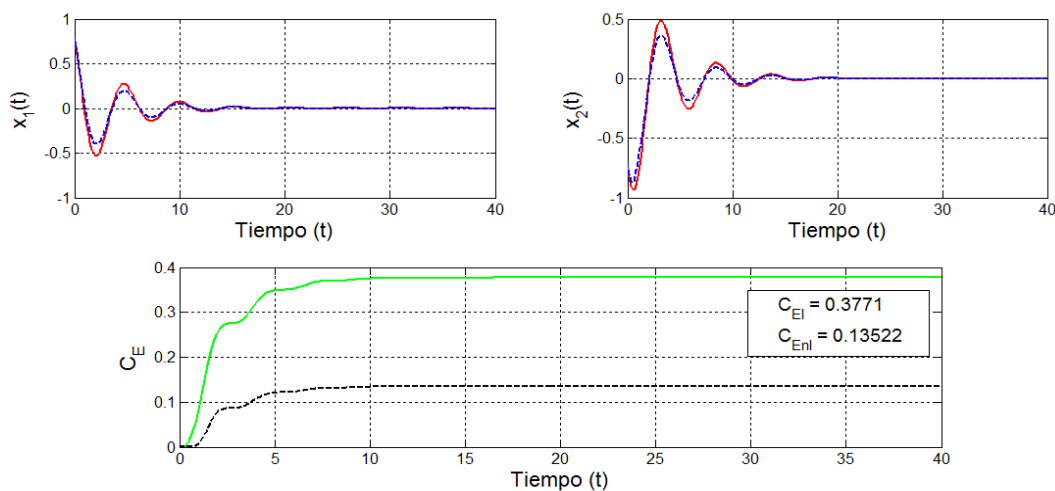


Figura 2-16: Dinámica lineal (—) y no lineal (- -) en lazo cerrado. Esfuerzo de control lineal (—), no lineal (- -). $k_1 = -0,5$, $k_2 = -0,5$, $\alpha_1 = -0,45$, $\alpha_2 = -0,45$

Tabla 2-2: Polos en lazo cerrado - Figuras 2-13 a 2-16

	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_1 = 0,5$	$\alpha_1 = -0,9$	$\alpha_1 = -0,45$
α_2	1	0.5	-0.9	-0.45
k_1	1	1	-0.5	-0.5
k_2	1	1	-0.5	-0.5
s_1	$-1 + 1.4142 i$	$-1 + 1.4142 i$	$-0.25 + 1.199 i$	$-0.25 + 1.199 i$
s_2	$-1 - 1.4142 i$	$-1 - 1.4142 i$	$-0.25 - 1.199 i$	$-0.25 - 1.199 i$

Para finalizar esta parte del trabajo, se resaltan algunos aspectos en la elección del parámetro α_i para una ganancia de realimentación k_i , dada en el diseño del controlador. En primer lugar, comparando los resultados obtenidos entre $k_1 < 0, k_2 < 0, \alpha_1 < 0, \alpha_2 < 0$ y $k_1 > 0, k_2 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ se demostró una mayor disminución en la energía gastada en esfuerzo de control con $k_i < 0, \alpha_i < 0$. La relación costo beneficio de alcanzar una reducción del esfuerzo de control más elevada es muy alta, produciendo efectos importantes en el estado transitorio y estacionario de la dinámica en lazo cerrado. La Figura 2-17 indica en forma porcentual la reducción del esfuerzo de control no lineal con respecto al lineal para los casos $k_i < 0, \alpha_i < 0$ y $k_i > 0, \alpha_i > 0$; examinados sobre el sistema dinámico (2.41) con $a_1 = 2$ y $a_2 = 1$.

Los ejemplos presentados anteriormente dieron como resultado una reducción del esfuerzo de control del 25 % para $\alpha_i > 0$ (Figura 2-14) y de 72,7 % para $\alpha_i < 0$ (Figura 2-15). Sin embargo, evaluando otros valores de los parámetros α_1 y α_2 escogidos según las restricciones (2.58) es

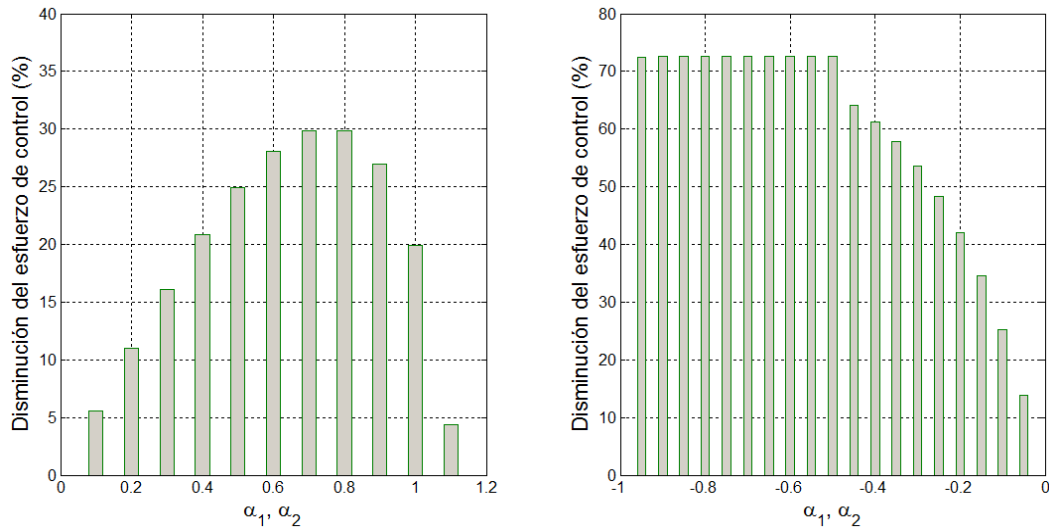


Figura 2-17: Porcentaje de disminución en el esfuerzo de control. Izquierda ($k_1 = 1, k_2 = 1$). Derecha ($k_1 = -0,5, k_2 = -0,5$). Condición inicial $x_{1_0} = 0,8, x_{2_0} = -0,7$ para ambos casos.

concluyente que se puede llegar hasta un 30 % en la disminución del esfuerzo de control no lineal con respecto al lineal, como se puede observar en la Figura 2-17 - Izquierda para $\alpha_i > 0$ y $k_1 = 1, k_2 = 1$. De igual manera, tomando las condiciones (2.58) con $\alpha_i < 0$ y $k_1 < 0, k_2 < 0$, el porcentaje de reducción del esfuerzo de control no lineal tiene un valor máximo del 72,7 %, proporcionando mejores condiciones para el ahorro de energía con $\alpha_i < 0$.

Se concluye que en el ejemplo propuesto, un buen desempeño dinámico en lazo cerrado y una aceptable reducción del esfuerzo de control no lineal con respecto al lineal, se logran con $\alpha_i > 0$ en el caso de $k_i > 0$, tomando las restricciones (2.58) para la elección adecuada de α_i .

2.4. Conclusiones

- A través del tratamiento y solución de una ecuación diferencial no lineal de primer orden fueron determinadas las expresiones necesarias para el cálculo de la dinámica en lazo cerrado y el esfuerzo de control lineal y no lineal de un sistema 1 - dimensional, con la entrada de control $u(t)$ en forma de una ley por realimentación de estados perturbada (2.15), (2.17) y (2.18). El procedimiento hizo posible calcular los parámetros k_{min} y $\alpha_{s_{min}}$ con los cuales se obtiene una disminución óptima del esfuerzo de control, preservando la estabilidad del sistema. El ahorro máximo de energía fue de 67 % como se concluye de la Figura 2-2, bajo las condiciones óptimas de la ley de control.
- Con el uso del método directo de Lyapunov y algunas observaciones básicas en las ecuaciones que describen la dinámica del sistema 1 - dimensional en lazo cerrado, se establecieron las condiciones básicas sobre k y α_s para conservar la estabilidad del sistema. Para que esto ocurra en el sistema lineal en lazo cerrado es necesario y suficiente que $1 + k > 0$ en la expresión (2.11). El signo de α_s delimitó la presencia de múltiples puntos de equilibrio para el sistema $n = 1$. Con $\alpha_s < 0$ fue demostrada la existencia de un solo punto de equilibrio caracterizado como globalmente asintóticamente estable, mientras que con $\alpha_s > 0$ se calcularon tres puntos de equilibrio dados en (2.24) y fue determinada la región $\Omega \subset \mathbb{R}$ para la cual el sistema es estable. Las condiciones para disminuir el esfuerzo de control preservando la estabilidad del sistema para $n = 1$ fueron resumidas en (2.32) y (2.33). La condición dada por $|\alpha| < |1 + k|$ es necesaria y suficiente para conservar la estabilidad del sistema dinámico no lineal. La condición $|\alpha| < |2k|$ es solamente una condición necesaria para el ahorro de energía en esfuerzo de control.
- El análisis dinámico y las simulaciones realizadas condujeron a corroborar la presencia de 2 puntos de equilibrio inestables, y escape de tiempo finito con $\alpha_s > 0$ para el sistema $n = 1$ en la zona región acotada por (2.34).
- El estudio de la influencia de α_s ante una ganancia k dada para la dinámica unidimensional de lazo cerrado, arrojó los siguientes resultados: En primer lugar, tomando un ejemplo en particular (Figuras 2-5 y 2-6), la magnitud de $|\alpha_s|$ no aumentó o disminuyó notablemente el ahorro de energía en esfuerzo de control. En segundo lugar, la reducción de energía fue hasta del 70 % tomando $\alpha_s > 0$ para el caso $k > 0$ y hasta del 88 % con $\alpha_s < 0$ en el caso $k < 0$, tal y como mostró la Figura 2-7 con diferentes magnitudes para α_s . Finalmente se demostró que el diseño de la ley de control con $\alpha_s < 0$ arroja un esfuerzo de control no lineal, con magnitud siempre mayor al obtenido en el diseño para $\alpha_s > 0$ (Figura 2-8).
- Se establecieron las condiciones básicas sobre α_i para reducir el esfuerzo de control y brindar estabilidad a un sistema $n = 2$, con una dinámica no lineal en lazo cerrado descrita por (2.41). De igual forma que para el sistema $n = 1$, el análisis de estabilidad fue realizado usando el método directo de Lyapunov. La estabilidad del sistema no lineal se sustentó en

que $\gamma_1 > 0$ y $\gamma_2 > 0$ en la ecuación (2.43). La presencia de múltiples puntos de equilibrio dados por (2.42) fue determinada estudiando el signo de α_1 . Con $\alpha_1 < 0$ y $\alpha_2 < 0$ la existencia de un único punto de equilibrio caracterizado como globalmente asintóticamente estable se comprobó, en tanto que el caso $\alpha_1 < 0$ y $\alpha_2 > 0$ mostró la presencia de un punto de equilibrio caracterizado como localmente asintóticamente estable. Con $\alpha_1 > 0$ se calcularon tres puntos de equilibrio (dos puntos silla y un nodo estable), y obtenidas algunas restricciones sobre las variables de estado $x_i(t)$ dadas en (2.54) - (2.57), para asegurar el cumplimiento del teorema de Lyapunov. El análisis de la dinámica no lineal de (2.41) para los casos $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 < 0$, usando el método directo de Lyapunov, permitió caracterizar el punto de equilibrio estable (nodo estable) como un punto localmente asintóticamente estable.

- Las condiciones básicas para disminuir el esfuerzo de control preservando la estabilidad del sistema fueron mostradas en (2.58). Para obtener menor esfuerzo de control, la expresión (2.53) es una condición necesaria pero no suficiente. La estabilidad del sistema dinámico en lazo cerrado se satisface por las condiciones (2.54) - (2.57), según sea el caso.
- Respecto a la dinámica lineal dada en (2.37) con $a_1 = 2$ y $a_2 = 1$, las simulaciones realizadas indicaron, como se esperaba, la presencia de un solo punto de equilibrio (nodo estable), caracterizado en la Tabla **2-1**, para diferentes valores de las ganancias k_i . Los retratos de fase del sistema dinámico lineal (2.37) se mostraron en las Figuras **2-9** y **2-10**.
- Las simulaciones realizadas condujeron a corroborar la presencia de puntos de equilibrio inestables (puntos silla) con $\alpha_1 > 0$ para el sistema $n = 2$, caracterizados en la Tabla **2-1**. Los retratos de fase del sistema no lineal (2.41) con $a_1 = 2$ y $a_2 = 1$ se mostraron en las Figuras **2-11** y **2-12**.
- El análisis de la influencia de α_i ante una ganancia k_i dada en la dinámica de lazo cerrado para el sistema 2 - dimensional, condujo a los siguientes resultados: Para los ejemplos mostrados, la magnitud de $|\alpha_s|$ no aumentó ni disminuyó notablemente el ahorro de energía en esfuerzo de control. Finalmente, se obtuvo una reducción de energía del 25% tomando $\alpha_i > 0$ para una $k_i > 0$ dada, y del 72,7% con $\alpha_i < 0$ para una ganancia $k_i < 0$. En la Figura **2-17** para diferentes valores de α_1 y α_2 , se mostró un máximo del 30% en energía ahorrada para el diseño $k_i > 0$ y $\alpha_i > 0$. Así pues, la aplicación de la técnica al modelo 2 - dimensional basa su efectividad en la elección correcta del parámetro α_i , condicionada siempre a la ganancia k_i propuesta, reduciendo el esfuerzo de control sin comprometer el desempeño dinámico. Con $\alpha_i > 0$ se obtuvo una reducción del esfuerzo de control aceptable sin mayor afectación del desempeño dinámico, siguiendo las restricciones (2.58), resultado acorde al encontrado en el modelo 1 - dimensional.
- El análisis de estabilidad debe ser llevado a cabo de forma cuidadosa. Por esta razón, hay que evaluar el compromiso entre la reducción del esfuerzo de control para poder seleccionar

el parámetro α_i adecuado siguiendo las directrices de la técnica de control, sin afectar de forma importante el desempeño dinámico, manteniendo estabilidad del sistema.

- A través del análisis de sistemas dinámicos 1 y 2 dimensionales, fue presentada y validada de forma numérica una nueva técnica de control no lineal que demostró la posibilidad de disminuir la energía gastada en esfuerzo de control, sin producir mayor impacto en el desempeño dinámico simultáneamente. La técnica mostrada puede aplicarse a sistemas que tengan como prioridad la reducción de gastos energéticos (menor desgaste de actuadores, ahorro de energía eléctrica, materia prima, etc) por encima del estado transitorio del sistema, debido a que éste cambia ante la presencia de la no linealidad inducida en la ley de control lineal por realimentación de estados.
- Para demostrar la aplicabilidad de la técnica, en los capítulos siguientes esta se implementará a un modelo de alto orden con múltiples entradas de control, teniendo en cuenta algunos de los criterios de estabilidad propuestos en (Khalil, 1996) y (Vidyasagar, 1993), con el fin de brindar robustez a la nueva ley de control no lineal.

CAPÍTULO 3

Modelado, simulación y linealización de un sistema dinámico $n = 4$ - Modelo MIMO

En este capítulo se da continuidad a la estrategia de control propuesta en el capítulo anterior; ahora se introducen nuevos elementos que permiten ampliar esta técnica a sistemas continuos e invariantes en el tiempo de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO). La primera parte del capítulo está dirigida al modelado y análisis dinámico de un sistema no lineal descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias.

Una vez concluida la primera parte, este capítulo finaliza con el método de linealización alrededor de un punto de operación usando la expansión en series de Taylor aplicado sobre el modelo no lineal propuesto. Así, se espera obtener una representación dinámica en el espacio de estados que reproduzca el comportamiento del sistema dinámico no lineal cerca a un punto de operación fijo.

De esta forma, la primera etapa de diseño de la ley de control queda completa según el esquema **1-3** y se afianzan las bases para continuar en capítulos posteriores con el diseño de una ley de control lineal, el análisis de estabilidad del sistema dinámico en el espacio de estados y el cálculo del esfuerzo de control, usando una ley de control no lineal por realimentación de estados $u(t)$ que integra una perturbación cúbica en su formulación; entrada de control diseñada a partir de la ley de control lineal.

Para comenzar la etapa de modelado, se plantea el problema real que da lugar al sistema dinámico estudiado en este capítulo.

3.1. Modelado de un sistema dinámico MIMO continuo e invariante en el tiempo

A diferencia del Capítulo (2) donde se usaron modelos dinámicos con una sola entrada de control, esta sección presenta la deducción del modelo dinámico de un sistema MIMO gobernado por ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que describen la operación de un reactor químico industrial. A lo largo del modelado, se aplican algunas especificaciones y suposiciones que hacen posible la manipulación sencilla de las ecuaciones sin perder la descripción real del proceso.

3.1.1. Justificación y breve revisión bibliográfica acerca del control automático de reactores

En la actualidad, la teoría de control y sus aplicaciones juegan un rol muy importante para el desarrollo de la industria y la tecnología. Un ejemplo típico son los procesos químicos donde los sistemas de control aportan elementos para cubrir principalmente tres necesidades muy importantes: Brindar seguridad al proceso, operabilidad dentro de rangos permisibles y asegurar la calidad del producto final. Estos beneficios ligados a requerimientos económicos y ambientales junto al avance en el estudio de sistemas no lineales, han suscitado la implementación de distintos tipos de controladores en la mayor parte de las unidades de proceso dentro de una planta química (Bequette, 1991).

Las estrategias de control usadas en los procesos químicos, la elección de los lazos de control y las variables manipuladas y controladas, así como otros temas relacionados han sido objeto específico de estudio en (Buckley, 1964), (Fisher et al., 1988), (Shinsky, 1996), (Luyben et al., 1998), (Douglas, 1988), entre otros.

El reactor es quizás la unidad de proceso con mayor importancia dentro de una planta química y su control requiere de gran atención y estudio. Es importante tener en cuenta que existen diferentes clases de reacciones químicas, entre las cuales se encuentran las exotérmicas (desprendimiento de energía en forma de calor), endotérmicas (requieren energía), entre otras. Estos dos tipos de reacciones necesitan que la energía sea removida o adicionada al reactor para garantizar una temperatura constante y la operación segura del proceso. Desde el punto de vista del control de reactores, las reacciones exotérmicas son estudiadas con mayor interés. Los procesos reactivos de tipo exotérmico, endotérmico, entre otros, presentan fenómenos propios como los saltos súbitos de temperatura o la multiplicidad de estados estacionarios (Luyben, 2002). Estos comportamientos sumados a la cinética de reacción hacen que el modelado de reactores presente en algunos casos un grado de complejidad mayor, obligando en ciertas ocasiones al diseñador del control a realizar suposiciones y simplificaciones en virtud de obtener un modelo dinámico que describa con la mayor fidelidad posible al proceso real.

Uno de los reactores más utilizados a escala industrial es el CSTR (Reactor continuo en tanque agitado, de sus siglas en inglés) y al igual que procesos como la destilación, absorción, adsorción, entre otros, está descrito por un modelo dinámico altamente no lineal. Generalmente, las estrategias de control para los procesos no lineales se basan en la linealización de estos modelos alrededor de un punto de equilibrio, sin embargo, el diseño de las técnicas de control y la elección de una metodología en particular depende de las necesidades de operación y de las variables necesarias y disponibles durante el diseño.

El control de reactores CSTR ha sido un tema de amplia investigación por distintos autores que han propuesto la aplicación de diversas técnicas como la realimentación lineal estudiada en (Quin & Badgwell, 2000), (Nikolaou, 1997), (Kayihan, 1997) y (Edgar et al., 1999) caracterizada como una metodología simple, efectiva, económica y rápida, llevándola a convertirse en una de las más populares a nivel industrial. (Nikolaou & Misra, 2003) proponen con un enfoque más analítico, el examen cuidadoso de la conveniencia en el uso de control lineal por realimentación a través del estudio de la relación costo - beneficio en el proceso a controlar, robustez, estabilidad y desempeño dinámico. El control no lineal por realimentación de estados usando observadores para reactores CSTR y dinámicas con retraso se investiga en (Antoniades & Christofides, 1999). (Knapp et al., 2001) muestran el control adaptativo con redes neuronales aplicado a un reactor CSTR.

En (Palanki et al., 2003) proponen el diseño de controladores robustos por medio de linealización I/O (Entrada - Salida) para reactores CSTR con modelos dinámicos no cuadrados, multivariados y con la presencia de incertidumbres, al igual que (Henson & Seborg, 1990) quienes trabajaron con linealización I/O y representaciones dinámicas por medio de geometría diferencial; el control MPC (Control Predictivo Basado en Modelo, de sus siglas en inglés) es usado también en este tipo de reactores en (Chen & Dai, 2001) para dinámicas que presentan retrasos. (Daoutidis & Christofides, 1995) colocan en práctica el control por realimentación de salidas y observadores de estado para reactores con modelos SISO (Única entrada - Única salida, de sus siglas en inglés) de fase no mínima. El control en cascada con algunas variaciones se investiga en los trabajos de (Mc Avoy et al., 1996), (Wolff & Skogestad, 1996), (Lee et al., 1998), (Lee et al., 2002), entre otros.

El control PID (Proporcional - Integral - Derivativo, de sus siglas en inglés) usando modelos lineales locales en el espacio de estados para reactores CSTR es puesto en consideración en (Prakash & Srinivasan, 2009), mientras que (Hahn et al., 2004) estudian la robustez de los sistemas de control por realimentación usando el análisis de bifurcaciones del sistema. Algunas técnicas de estimación de parámetros y control no lineal se ponen en práctica en (Othman et al., 2002) para reactores CSTR usados en procesos de polimerización. En (Vieira et al., 2002) usan el control predictivo desarrollado junto a un algoritmo de programación iterativa dinámica (IDP), y autores como (Alvarez-Ramirez et al., 1998) controlan reactores usando modelos dinámicos de primer orden y algoritmos de control PI (Proporcional - Integral).

De esta manera, la breve revisión bibliográfica de las estrategias implementadas en el control de reactores CSTR da cuenta de un campo ampliamente estudiado en el control de procesos químicos, y constituye también un antecedente importante para formular y aplicar la ley de control no lineal planteada en esta tesis como una alternativa práctica de reducir el esfuerzo de control, conservando el desempeño dinámico de un sistema linealizado alrededor de un punto de operación.

3.1.2. Planteamiento del problema

En el campo industrial el reactor químico generalmente es la parte más importante de la planta debido a que convierte las materias primas en productos. En ciertas ocasiones, el modelado y control de reactores químicos no es sencillo por la presencia de fenómenos propios de sistemas no lineales como los múltiples estados estables, bifurcaciones, interacciones no lineales de las variables, entre otros. Esta sección de la tesis muestra de forma resumida las etapas necesarias para obtener el modelo dinámico de un reactor CSTR. El problema se toma de uno de los más importantes textos en el análisis y diseño de reactores (Fogler, 2001), formulado así:

- La producción de propilenglicol (C) se lleva a cabo por la reacción de óxido de propileno (A) y agua (B), catalizada por H_2SO_4 (Ácido sulfúrico) en un reactor tipo CSTR equipado con una chaqueta de enfriamiento y se encarga de proporcionar un medio para el intercambio de calor. En $t = 0$ la unidad contiene el reactivo (B) a temperatura T_0 y concentración inicial C_{B0} . La corriente de alimentación 1 suministra al reactor flujos molares de los reactivos F_{A_1} , F_{B_1} y del diluyente F_{M_1} de concentraciones C_{A_1} , C_{B_1} y C_{M_1} , respectivamente, a temperatura T_1 con un caudal volumétrico q_1 como se muestra en la Figura (3-1). El refrigerante (E) para la unidad de intercambio de calor en la corriente 2, entra a la chaqueta de enfriamiento con un flujo molar de \dot{m}_{E_2} y temperatura T_{E_2} .

La reacción química es irreversible, exotérmica y se lleva a cabo en fase líquida bajo condiciones normales de operación. La estequiometría de la reacción está dada por (3.1).



La ley de velocidad de reacción elemental ($-r_A$) es de primer orden respecto a la concentración de óxido de propileno y de orden cero aparente respecto al agua en exceso, según (Furusawa et al., 1969), con T en (K) y C_A en ($kgmolA/m^3$):

$$-r_A = A_r \exp\left(\frac{-E_a}{\frac{R}{1.8} (T^{\frac{9}{5}} + 0,33)}\right) C_A \quad (3.2)$$

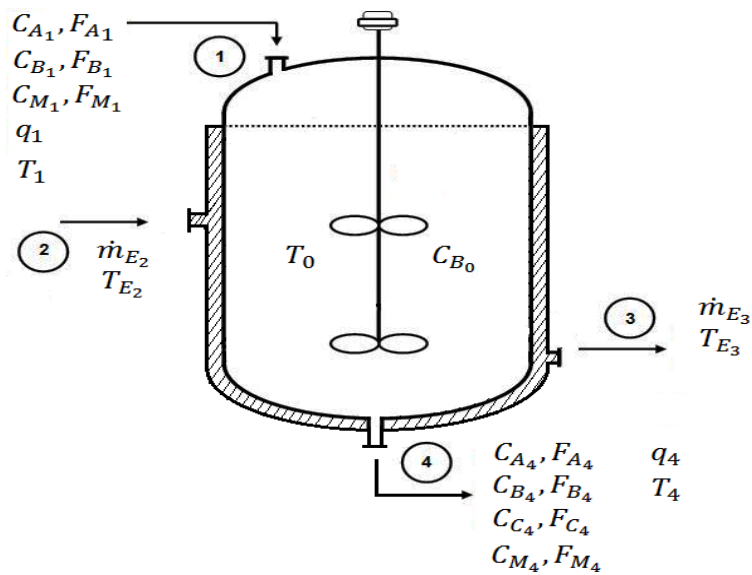


Figura 3-1: Esquema del reactor CSTR - Producción de Propilenglicol (C)

3.1.3. Suposiciones y consideraciones en el modelado

Como parte integral del modelado sin dejar de lado la necesidad de representar con la mayor fidelidad posible el proceso real, es necesario plantear algunas suposiciones y consideraciones que permitan obtener un modelo dinámico de fácil manejo y análisis.

Durante el modelado del reactor se realizarán las siguientes suposiciones:

- Efecto despreciable de los gradientes espaciales en el volumen del reactor.
- Variación insignificante en la presión total y volumen del fluido reaccionante.
- Ausencia de cambios de fase (reacción fase líquida) a las condiciones de operación dadas.
- Trabajo de flecha o trabajo realizado por el agitador despreciable.
- Fase de reacción homogénea, mezcla perfecta.
- Dinámica de la transferencia de calor en la pared con contribuciones insignificantes a la dinámica global.
- Calor de reacción constante.
- Caudal volumétrico constante en la chaqueta de enfriamiento.
- Acumulación nula de fluido refrigerante en la chaqueta de enfriamiento.
- Cambios de volumen de mezcla y calor de solución despreciables en la mezcla de reactivos.

- Se omite la presencia de dinámicas con tiempo muerto y retardos distancia - velocidad.

3.1.4. Balances de materia y energía

La mayor parte de los sistemas físicos reales son modelados a través de ecuaciones diferenciales. No hay que olvidar que la construcción del modelo dinámico de un proceso real es algo complejo y por lo tanto el objetivo de obtener una descripción exacta de la planta es muchas veces algo imposible de alcanzar. Sin embargo, si se logran representar las características esenciales del problema existe la certeza que el modelo se ajuste a la planta real. Para el caso estudiado, las ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan el sistema dinámico corresponden directamente a los balances de materia y energía.

3.1.4.1. Balances de materia

El balance de materia fundamental para un sistema abierto se determina a partir de la ecuación de continuidad:

$$(Entrada) + (Generación \text{ ó } Consumo) = (Salida) + (Acumulación) \quad (3.3)$$

Aplicando la ecuación de balance (3.3) sobre el reactivo base i en un CSTR como se muestra en (Fogler, 2001), el resultado es:

$$F_{i_0} + (-r_i V) = F_i + \frac{dN_i}{dt} \quad (3.4)$$

donde $-r_i$ es la velocidad de consumo del reactivo i . La ecuación de balance (3.4) puede ser utilizada sobre los productos de reacción si se incluye una equivalencia estequiométrica entre la velocidad de consumo $-r_i$ del reactivo i y la velocidad de producción r_j del producto j como se muestra a continuación:

$$\frac{r_j}{|v_j|} = -\frac{r_i}{|v_i|} \quad (3.5)$$

donde v_i es el coeficiente estequiométrico del reactivo base i y v_j corresponde al coeficiente estequiométrico del producto j . De igual manera que en el reactivo base i y el producto j , si la reacción química tiene más de un reactivo y/o producto es necesario incluir únicamente los coeficientes estequiométricos según (3.5), con el objetivo de aplicar el balance (3.4) de forma adecuada.

Reemplazando ahora F_{i_0} y N_i por las equivalencias $C_{i_0} \cdot q$ y $C_i \cdot V$, la ecuación (3.4) se expresa como:

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{(C_{i_0} - C_i)q}{V} + (-r_i) \quad (3.6)$$

Finalmente, sustituyendo V/q por el equivalente tiempo de residencia (τ), la expresión (3.6) representa el balance de materia para el i - ésimo componente en un reactor CSTR en estado no estacionario.

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{(C_{i0} - C_i)}{\tau} + (-r_i) \quad (3.7)$$

3.1.4.2. Balances de energía

El balance de energía de la unidad de reacción que se muestra en la Figura 3-1 se divide en dos etapas. El primer balance se deduce tomando como sistema únicamente la masa reactiva en el interior del reactor, es decir sin tener en cuenta la chaqueta de enfriamiento. La segunda parte del balance de energía se efectúa en la chaqueta, completando así junto al balance de materia las ecuaciones necesarias para describir el proceso. Cada uno de los procedimientos se indica a continuación y está explicado con más detalle en (Fogler, 2001).

En primer lugar, para obtener el balance de energía en el reactor, se aplica la primera ley de la termodinámica a un sistema cerrado (sin flujo másico entre sus fronteras) y posteriormente a un sistema abierto. Así, el balance de energía para un sistema cerrado se representa a continuación e indica que el cambio de energía en el sistema está asociado al flujo de calor hacia el sistema menos el trabajo efectuado por el sistema sobre el entorno.

$$d\hat{E} = \delta Q - \delta W \quad (3.8)$$

En la ecuación (3.8), los términos δQ y δW no son diferenciales exactos de una función de estado. El balance de energía aplicado a sistemas abiertos (flujo de masa a través de las fronteras) donde parte del intercambio energético se debe al flujo de masa a través de las fronteras del sistema, da como resultado:

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = Q - W + F_{entra} E_{entra} - F_{sale} E_{sale} \quad (3.9)$$

El balance en estado no estacionario para un sistema abierto con n especies, cada una con flujo molar F_i (moles del i - ésimo componente por unidad de tiempo) y la energía E_i asociada al flujo es:

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = Q - W + \sum_{i=1}^n F_i E_i \Big|_{entra} - \sum_{i=1}^n F_i E_i \Big|_{sale} \quad (3.10)$$

El término W se divide en trabajo de flujo y el trabajo de flecha, notado por W_s . El trabajo de flujo está definido como el necesario para introducir o retirar masa del sistema. En ausencia de esfuerzo cortante, ésta clase de trabajo se define así:

$$W = \sum_{i=1}^n F_i P V_i \Big|_{entra} + \sum_{i=1}^n F_i P V_i \Big|_{sale} + W_s \quad (3.11)$$

donde P es la presión y V_i es el volumen específico del i -ésimo componente. El término W_s es conocido como trabajo de flecha y para este caso específico es producido por el agitador dentro del reactor. Resumiendo un poco la deducción del modelo, el término de trabajo (ecuación 3.11) puede ser combinado con la ecuación del balance de energía (3.10). Luego, los términos asociados a la energía E_i se simplifican como la energía interna del sistema U_i en ausencia de cualquier otra clase de energía; cinética, potencial, entre otras. Finalmente, introduciendo el concepto de entalpía H_i vinculado a la energía interna U_i se tiene que la entalpía que entra o sale del sistema se expresa como la suma de la energía interna U_i que sale o entra del sistema, multiplicada por los flujos de masa más el trabajo de flujo.

$$F_i H_i = F_i (U_i + P V_i) \quad (3.12)$$

Combinando las ecuaciones (3.11) y (3.12) con las simplificaciones respecto a la energía interna U_i mencionadas anteriormente, el balance de energía en el sistema abierto se expresa de la forma:

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = Q - W_s + \sum_{i=1}^n F_i H_i \Big|_{entra} - \sum_{i=1}^n F_i H_i \Big|_{sale} \quad (3.13)$$

La energía del sistema \hat{E} es la suma de los productos de las energías específicas E_i de cada especie i cuyo flujo másico entra o sale del sistema por el número de moles de dicha especie. Por lo tanto, simplificando este término en (3.13) y diferenciando el resultado con respecto al tiempo, se obtiene el balance de energía en estado transitorio para el sistema abierto dado por (3.14). En este caso se han despreciado las variaciones espaciales y de presión y volumen en el sistema.

$$Q - W_s - \sum F_{i_0} H_{i_0} - \sum F_i H_i = \sum N_i \frac{dH_i}{dt} + \sum H_i \frac{dN_i}{dt} \quad (3.14)$$

Aunque se omite la demostración, la entalpía del i -ésimo componente se puede definir como:

$$\frac{dH_i}{dt} = C p_i \frac{dT}{dt} \quad (3.15)$$

Sustituyendo la ecuación (3.15) en la expresión (3.14):

$$Q - W_s - \sum F_{i_0} H_{i_0} - \sum F_i H_i = \sum N_i C_{p_i} \frac{dT}{dt} + \sum H_i \frac{dN_i}{dt} \quad (3.16)$$

Usando el balance molar de la ecuación (3.4) y suponiendo que no hay cambio de fase durante la reacción química del proceso, la expresión (3.16) reorganizada para el diferencial de temperatura se expresa como:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q - W_s - \sum F_{i_0} C_{p_i} (T - T_{i_0}) + (-\Delta H_{rxn}(T))(-r_A V)}{\sum N_i C_{p_i}} \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17) generaliza el balance de energía para un reactor CSTR sin cambio de fase. Para las reacciones en fase líquida, el término ΔC_p es pequeño y se puede despreciar, realizando la siguiente aproximación:

$$\sum F_{i_0} C_{p_i} = F_{A_0} C_{p_s}$$

Con esta aproximación y suponiendo que cada especie entra al reactor a una temperatura T_0 , tenemos finalmente:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{Q - W_s - F_{A_0} C_{p_s} (T - T_0) + [-H_{rxn}(T)](-r_A V)}{\sum N_i C_{p_i}} \quad (3.18)$$

Con el objeto de que los balances de energía necesarios para describir el proceso queden completos, a continuación se realiza el balance de energía tomando como un sistema abierto a la chaqueta de enfriamiento. Dicho balance se expresa de forma general a través de:

$$\begin{pmatrix} \text{Acumulación} \\ \text{de energía} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Entrada de} \\ \text{energía por} \\ \text{flujo} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Salida de} \\ \text{energía por} \\ \text{flujo} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Rapidez de} \\ \text{transferencia} \\ \text{de calor a la} \\ \text{chaqueta} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Aplicando (3.19) podemos formular una ecuación diferencial que describa el cambio de temperatura en la unidad de intercambio de calor. Despreciando la dinámica de la transferencia de calor en la pared del reactor ésta ecuación se da en términos del coeficiente de transferencia de calor (U),

el área (A) del intercambio de calor, la diferencia temperatura de entrada del fluido refrigerante (T_{a1}) - temperatura de reacción (T), una temperatura de referencia (T_R) y la diferencia media logarítmica de temperatura en el reactor; según:

$$\frac{dT_E}{dt} = \dot{m}_E C_{pE}(T_{a1} - T_R) - \dot{m}_E C_{pE}(T_{a2} - T_R) - \frac{UA(T_{a1} - T_{a2})}{\ln\left(\frac{T - T_{a1}}{T - T_{a2}}\right)} \quad (3.20)$$

donde T_{a2} es la temperatura de salida del refrigerante. Suponiendo un estado cuasi - estacionario para el flujo de refrigerante, y despreciando el término de acumulación, es decir $dT_E/dt = 0$, la expresión (3.20) permite encontrar el flujo de calor (Q) desde la chaqueta hacia el reactor, a partir de:

$$Q = \dot{m}_E C_{pE}(T_{a1} - T_{a2}) = \frac{UA(T_{a1} - T_{a2})}{\ln\left(\frac{T - T_{a1}}{T - T_{a2}}\right)} \quad (3.21)$$

La ecuación (3.21) resuelta para la temperatura de salida del refrigerante T_{a2} da como resultado:

$$T_{a2} = T - (T - T_{a1}) \exp\left(\frac{-UA}{\dot{m}_E C_{pE}}\right) \quad (3.22)$$

De la igualdad (3.21) es fácil de verificar que el calor transferido desde o hacia el medio refrigerante es:

$$Q = \dot{m}_E C_{pE}(T_{a1} - T_{a2}) \quad (3.23)$$

3.2. Especificaciones para el modelo dinámico de un reactor CSTR no isotérmico con intercambio de calor en estado no estacionario

Aplicando los balances de materia y energía de las EDO (3.7) y (3.18), respectivamente, y las ecuaciones (3.22) y (3.23) al problema propuesto en la Sección 3.1.2, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones que modela un reactor CSTR no isotérmico equipado con una chaqueta de enfriamiento en estado no estacionario. Es preciso aclarar que debido a la numeración de las corrientes de flujo en el reactor, fueron realizados los siguientes cambios de notación en las ecuaciones generales de

balance, aplicando también las suposiciones de la Sección 3.1.3.

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T_4 \\ T_{a_1} = T_{E_2} \\ T_{a_2} = T_{E_3} \\ T_i = T_1 \\ \dot{m}_E = \dot{m}_{E_2} \\ C_i = C_{i_4} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} C_{i_0} = C_{i_1} \\ Cp_s = \theta_{Cp} \\ \sum N_i Cp_i = NCp \\ q_1 = q_4 = q \\ W_s = 0 \end{array} \right\}$$

Las ecuaciones del modelo se agrupan de la siguiente forma:

- *Balances de materia - Ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\frac{dC_{A_4}}{dt} = \left(\frac{1}{\tau} \right) (C_{A_1} - C_{A_4}) + r_A \quad (3.24)$$

$$\frac{dC_{B_4}}{dt} = \left(\frac{1}{\tau} \right) (C_{B_1} - C_{B_4}) + r_B \quad (3.25)$$

$$\frac{dC_{M_4}}{dt} = \left(\frac{1}{\tau} \right) (C_{M_1} - C_{M_4}) \quad (3.26)$$

- *Balance de energía - Ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\frac{dT_4}{dt} = \frac{Q - F_{A_1} \theta_{Cp} (T_4 - T_1) + V \Delta H_{rxn} (r_A)}{NCp} \quad (3.27)$$

- *Balances de materia - Ecuaciones complementarias*

Este grupo de ecuaciones está conformado por la cinética de reacción dada en (3.29) y (3.28), las equivalencias en el balance de materia para el caudal volumétrico (q) y las concentraciones (C_{i_4}) de (3.30) - (3.34), y relaciones estequiométricas entre el producto (C_{C_4}) y la velocidad de reacción del (r_B) con (r_A) en (3.35) y (3.36), respectivamente.

$$k_r = A_r \exp \left(\frac{-E_a}{RT_4} \right) \quad (3.28)$$

$$r_A = -k_r C_{A_4} \quad (3.29)$$

$$q = \frac{F_{A_1}}{\rho_A} + \frac{F_{B_1}}{\rho_B} + \frac{F_{M_1}}{\rho_M} \quad (3.30)$$

$$\tau = \frac{V}{q} \quad (3.31)$$

$$\theta_{Cp} = Cp_A + Cp_B \frac{F_{B_1}}{F_{A_1}} + Cp_M \frac{F_{M_1}}{F_{A_1}} \quad (3.32)$$

$$NCp = Cp_A C_{A_4} V + Cp_B C_{B_4} V + Cp_C C_{C_4} V + Cp_M C_{M_4} V \quad (3.33)$$

$$C_{A_1} = \frac{F_{A_1}}{q}, \quad C_{B_1} = \frac{F_{B_1}}{q}, \quad C_{M_1} = \frac{F_{M_1}}{q} \quad (3.34)$$

$$C_{C_4} = -r_A \tau \quad (3.35)$$

$$r_B = r_A \quad (3.36)$$

- *Balance de energía - Ecuaciones complementarias*

$$Q = \dot{n}_{E_2} Cp_E (T_{E_2} - T_{E_3}) \quad (3.37)$$

$$T_{E_3} = T_4 - (T_4 - T_{E_2}) \exp\left(\frac{-UA}{\dot{n}_{E_2} Cp_E}\right) \quad (3.38)$$

Tomando las ecuaciones diferenciales que modelan el reactor con cada uno de sus parámetros, se analizan los grados de libertad del modelo para demostrar su solubilidad. La Tabla 3-1 muestra el resumen de este análisis.

Es evidente que el problema está correctamente especificado y su solución es viable con el uso de las ecuaciones y parámetros del modelo.

3.2.1. Especificaciones de corriente y parámetros del modelo

Para completar el modelo dinámico del reactor CSTR, en las Tablas 3-2 y 3-3 se encuentra consignada la información del proceso según (Fogler, 2001) para las condiciones de las corrientes de entrada y las propiedades físicas de los reactivos (*A*) y (*B*), del producto (*C*) y del diluyente (*M*), así como la información de la cinética de reacción y los parámetros de diseño del reactor.

Tabla 3-1: Grados de libertad para el reactor CSTR no isotérmico en estado transitorio

1 - Incógnitas	17	$q, \tau, r_A, r_B, C_{A_4}, C_{B_4}, C_{M_4}, C_{C_4}$ $T_4, Q, \theta_{Cp}, NCp, k_r, T_{E_3}, C_{A_1}$ C_{B_1}, C_{M_1}
2- EDO's	4	Ecuaciones (3.24), (3.25), (3.26) y (3.27)
3- Ecuaciones complementarias	13	Ecuaciones (3.28) a (3.38)
Grados de libertad		Incógnitas - (EDO's + Ec. Complementarias) = 0

Tabla 3-2: Especificaciones para las corrientes de proceso

Parámetro	Corriente			
	1	Valor	2	Valor
Flujo molar ($kgmol/h$)	F_{A_1}	36.29	\dot{n}_{E_2}	453.6
	F_{B_1}	453.6		
	F_{M_1}	45.36		
Temperatura (K)	$T_1 = T_0$	297.038	T_{E_2}	288.705
Caudal (m^3/h)	q_1	12.477		

3.2.2. Restricciones físicas y operativas del modelo

A continuación se introducen algunas restricciones en las variables del modelo dinámico que permitirán acotar el sistema. La reacción tiene un límite de operación sobre la temperatura del reactor, es decir, una restricción en T_1 la cual si se excede, puede ocasionar pérdidas significativas de (A) por evaporación a través del sistema de respiraderos, generando condiciones de operación inseguras ante posibles explosiones o intoxicación de los operarios.

Las restricciones físicas del modelo vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 C_{i_1} &> 0, C_{i_4} > 0 \\
 T_1 &> 273, 15 \text{ K} \\
 T_{E_2} &> 273, 15 \text{ K} \\
 T_4 &< 355, 37 \text{ K}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Tabla 3-3: Propiedades físicas de los compuestos A , B , C , M y parámetros de diseño del reactor

Diseño del reactor		
	Parámetro	Valor
V	Volumen del reactor (m^3)	1.8918
UA	Coficiente global de transferencia de calor (kJ/hK)	30385.61
C_{B_0}	Concentración inicial de B en el reactor ($kgmolB/m^3$)	55.2646
Propiedades fisicoquímicas		
	Parámetro	Valor
ρ_A	Densidad molar de A ($kgmolA/m^3$)	14.9294
ρ_B	Densidad molar de B ($kgmolB/m^3$)	55.2646
ρ_M	Densidad molar de M ($kgmolM/m^3$)	24.6688
C_{pA}	Capacidad calorífica de A ($kJ/kgmolA.K$)	146.535
C_{pB}	Capacidad calorífica de B ($kJ/kgmolB.K$)	75.3611
C_{pC}	Capacidad calorífica de C ($kJ/kgmolC.K$)	192.589
C_{pM}	Capacidad calorífica de M ($kJ/kgmolM.K$)	81.6412
C_{pE}	Capacidad calorífica de refrigerante ($kJ/kgmole.K$)	75.3611
Cinética de reacción		
	Parámetro	Valor
A_r	Factor de frecuencia (h) ⁻¹	16.96*10 ¹²
E_a	Energía de activación ($kJ/kgmol$)	75361.13
R	Constante de gases ideales ($kJ/kgmol.K$)	8.3190
ΔH_{rxn}	Calor de reacción ($kJ/kgmolA$)	-83734.59

3.3. Análisis dinámico y respuesta en el tiempo del modelo no lineal - Reactor CSTR

Una etapa importante en el diseño de leyes de control es el análisis dinámico del modelo matemático. El estudio de la estabilidad y la presencia de bifurcaciones permiten conocer cómo se comporta el sistema dinámico ante la variación en los parámetros o condiciones de operación del modelo. Esta sección propone un corto análisis del modelo dinámico (3.24) - (3.27). En primer lugar, se calculan los puntos de equilibrio del sistema y su estabilidad es examinada usando el método in-

directo de Lyapunov. Luego, la respuesta del sistema dinámico no lineal ante perturbaciones en tiempo $t = t_1$ sobre los flujos y las temperaturas de alimentación es obtenida. Después se realiza la búsqueda y análisis de bifurcaciones de codimensión - 1 variando algunos de los parámetros de mayor relevancia en el modelo como el flujo de alimentación (F_{A_1}), temperatura de alimentación de reactivos (T_1), flujo y temperatura de alimentación del refrigerante, (\dot{m}_{E_2}) y (T_{E_2}) respectivamente. Para finalizar, se determina la presencia de múltiples estados estacionarios a través de la curva de ignición - extinción, cuyo uso habitual la ha convertido en una valiosa herramienta guía en el control de reactores ante diferentes condiciones de operación.

3.3.1. Cálculo y caracterización de puntos de equilibrio

La estabilidad es tal vez la propiedad cualitativa más importante de los sistemas dinámicos. Desde el punto de vista práctico, los sistemas estables son objeto primordial de estudio y todas las estrategias de control y modelado se enfocan en conservar dicha propiedad. Para el análisis y síntesis de sistemas realimentados por ejemplo, el estudio de la estabilidad ocupa un lugar primordial, considerando como ineludible la estabilidad del sistema realimentado antes de continuar con el diseño del controlador.

Haciendo un pequeño paréntesis en el desarrollo de esta sección, se expone de forma breve el fundamento teórico utilizado en la caracterización de los puntos de equilibrio tomado de (Khalil, 1996).

Definición 3.1. Método de linealización de Lyapunov

Esta metodología permite determinar la estabilidad de un punto de equilibrio para un sistema no lineal autónomo descrito de la forma (1.5). La linealización de Lyapunov es llevada a cabo calculando el jacobiano de (1.5) linealizado alrededor de un punto operación, donde se asume sin pérdida de generalidad que el origen es un punto de equilibrio del sistema (en caso contrario, se puede realizar una traslación de coordenadas para lograrlo), obteniendo:

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} + T.O.S \quad (3.40)$$

Haciendo:

$$A = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} \quad (3.41)$$

La matriz A corresponde al jacobiano de f con respecto a x evaluado en el punto de equilibrio, en este caso $x = 0$. Omitiendo los términos de orden superior, el sistema (3.40) se simplifica a $\dot{x} = Ax$, el cual es una aproximación del sistema no lineal. Así pues, la estabilidad de un sistema en un punto de equilibrio $x = x^$ se establece bajo los siguientes criterios (Angulo, 1999):*

1. Si A es una matriz Hurwitz (valores propios en el semiplano complejo izquierdo abierto), excluyendo el eje imaginario, $Re(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$, el punto de equilibrio se comportará como un equilibrio asintóticamente estable en la vecindad del mismo.
2. Si A tiene al menos un valor propio en el semiplano complejo derecho abierto, $Re(\lambda_i) > 0$ para algún i , el punto de equilibrio del sistema no lineal es inestable.
3. Si A no posee valores propios en el semiplano complejo derecho abierto, pero tiene al menos uno en el eje $j\omega$, ($Re(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i$) no es posible concluir algo acerca de la estabilidad del equilibrio para el sistema no lineal. En este caso, el comportamiento del sistema dinámico está ligado a los términos de orden superior omitidos durante la linealización.

Es decir, si se cumple la condición 1 ó 2, se puede asumir que el sistema linealizado se comporta como el sistema dinámico no lineal en una vecindad al punto de equilibrio.

Como ya se mencionó, el comportamiento del sistema (3.40) se determina según el tipo de punto o puntos de equilibrio a través de los valores propios de la matriz A . Los puntos de equilibrio del sistema dinámico no lineal se calculan igualando a cero las expresiones (3.24) - (3.27) como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \left(\frac{1}{\tau}\right) (C_{A_1} - C_{A_4}) + r_A = 0 \\
 f_2 &= \left(\frac{1}{\tau}\right) (C_{B_1} - C_{B_4}) + r_B = 0 \\
 f_3 &= \left(\frac{1}{\tau}\right) (C_{M_1} - C_{M_4}) = 0 \\
 f_4 &= \frac{Q - F_{A_1} \theta_{Cp} (T_4 - T_1) + V \Delta H_{rxn} r_A}{NCp} = 0
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

Para encontrar la solución de las ecuaciones homogéneas (3.42) se puede usar un método iterativo como Newton - Rhapsom, Secante, Müller, entre otros. Con los estimados iniciales adecuados, aplicando el primer método de la lista, el resultado para el único punto de equilibrio del sistema se muestra en la Tabla 3-4. La concentración del producto (C) en el equilibrio o C_{C_4} , se calcula a través de la expresión (3.35) y está incluida dentro de estos resultados.

Usando el método de linealización de Lyapunov, es decir, hallando el jacobiano del sistema de ecuaciones (3.42) se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial C_{A_4}} & \frac{\partial f_1}{\partial C_{B_4}} & \frac{\partial f_1}{\partial C_{M_4}} & \frac{\partial f_1}{\partial T_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial C_{A_4}} & \frac{\partial f_2}{\partial C_{B_4}} & \frac{\partial f_2}{\partial C_{M_4}} & \frac{\partial f_2}{\partial T_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial C_{A_4}} & \frac{\partial f_3}{\partial C_{B_4}} & \frac{\partial f_3}{\partial C_{M_4}} & \frac{\partial f_3}{\partial T_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial C_{A_4}} & \frac{\partial f_4}{\partial C_{B_4}} & \frac{\partial f_4}{\partial C_{M_4}} & \frac{\partial f_4}{\partial T_4} \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

Tabla 3-4: Punto de equilibrio de un reactor CSTR no isotérmico

Coordenada	Valor
C_{A4}	0.6056
C_{B4}	34.051
C_{C4}	2.3027
C_{M4}	3.6354
T_4	332.375

Se omite el desarrollo analítico de las derivadas parciales. Tras el cálculo de los puntos de equilibrio, se procede a verificar el cumplimiento de los requerimientos necesarios para garantizar la estabilidad del punto de equilibrio obtenido. A continuación se muestra el resultado numérico del jacobiano evaluado en el punto de equilibrio de la Tabla 3-4.

$$A^* = \begin{bmatrix} -31,674 & 0 & 0 & -1,244 \\ -25,079 & -6,595 & 0 & -1,244 \\ 0 & 0 & -6,595 & 0 \\ 618,505 & 3,5518 * 10^{-9} & 3,8478 * 10^9 & 20,812 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

El polinomio característico de (3.44) se calcula a partir de:

$$\det(A^* - \lambda I) = 0$$

El resultado es un polinomio de cuarto grado como se espera dada la dimensión de A^* :

$$\lambda^4 + 24,0447912 * \lambda^3 + 296,6454047 * \lambda^2 + 1922,7610692 * \lambda + 4783,6587330 \quad (3.45)$$

Las raíces de (3.45) son los valores propios del sistema linealizado y se muestran a continuación.

$$\lambda^* = \begin{bmatrix} -5,427090270 + 8,973336893 i \\ -5,427090270 - 8,973336893 i \\ -6,595305540 \\ -6,595305540 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Como consecuencia de la parte real negativa de los valores propios, se puede decir que la matriz A es Hurwitz. Se concluye que el punto de equilibrio del sistema no lineal tiene un comportamiento asintóticamente estable. Un análisis completo acerca de la estabilidad de reactores y sus fenómenos dinámicos puede ser encontrado en (Perlmutter, 1972). La Figura 3-2 muestra el plano de fase en lazo abierto para C_{A_4} en función de T_1 , cuyas trayectorias convergen al punto de equilibrio del sistema. Se resalta además el límite práctico de estabilidad impuesto por las restricciones operativas de seguridad del proceso en (3.39).

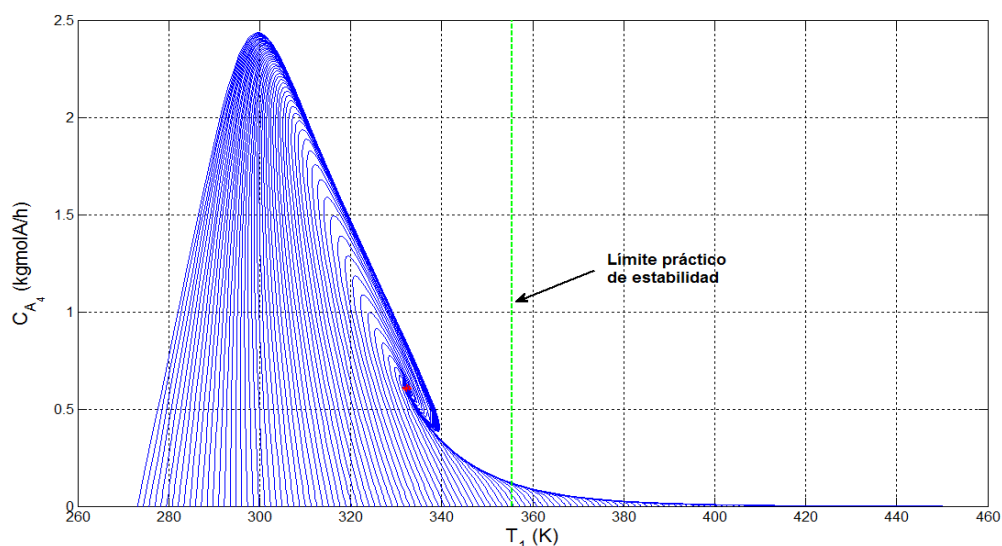


Figura 3-2: Plano de fase en lazo abierto - Concentración C_{A_4} vs. Temperatura T_1 . Punto de equilibrio (●)

3.3.2. Respuesta del sistema dinámico no lineal ante perturbaciones

Una vez calculados los puntos de equilibrio del sistema, se procede a verificar de forma cualitativa cómo es afectado el comportamiento dinámico del modelo no lineal que describe el reactor CSTR. Esto se lleva a cabo perturbando algunos de los parámetros del modelo y verificando la respuesta dinámica obtenida ante los citados cambios. En concreto, la respuesta del sistema está reflejada en los perfiles de concentración, la temperatura dentro del reactor y la transferencia de calor hacia el medio refrigerante, modelados por las ecuaciones (3.24) - (3.27) y (3.37), respectivamente. Se realizan perturbaciones independientes en un tiempo $t = t_1$, en primera instancia sobre los flujos de alimentación F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{m}_{E_2} y finalmente sobre las temperaturas de alimentación T_1 , y T_{E_2} .

En las Figuras 3-3 y 3-4 se presenta las trayectorias de concentración, temperatura y calor transferido al medio refrigerante función del tiempo cuando el sistema no afronta ningún tipo de per-

turbación en sus entradas. Es claro que el sistema dinámico converge hacia el punto de equilibrio calculado en la Sección 3.3.1 en aproximadamente $t = 2 h$. El calor tiene signo negativo debido a que éste sale del reactor hacia el refrigerante por la naturaleza exotérmica de la reacción química.

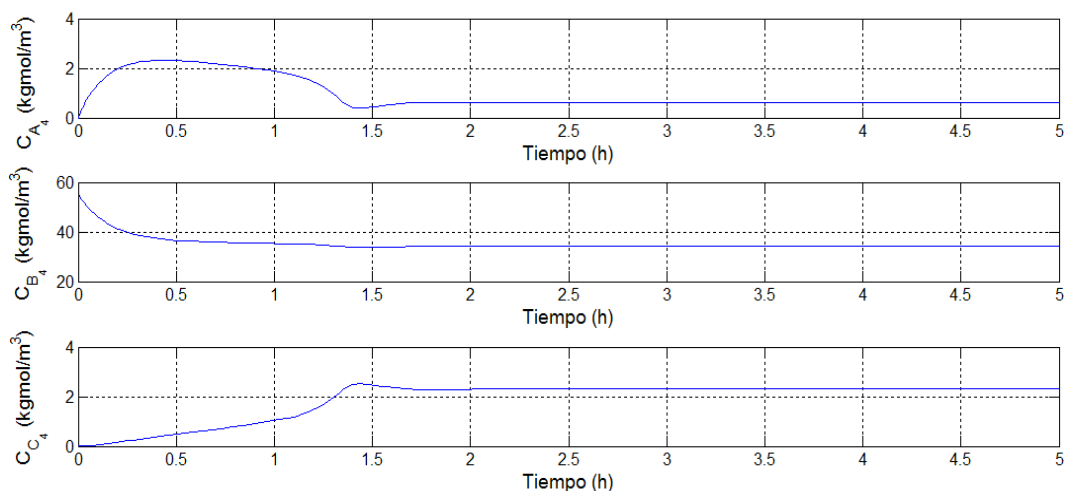


Figura 3-3: Perfiles de concentración para el modelo no lineal en ausencia de perturbaciones

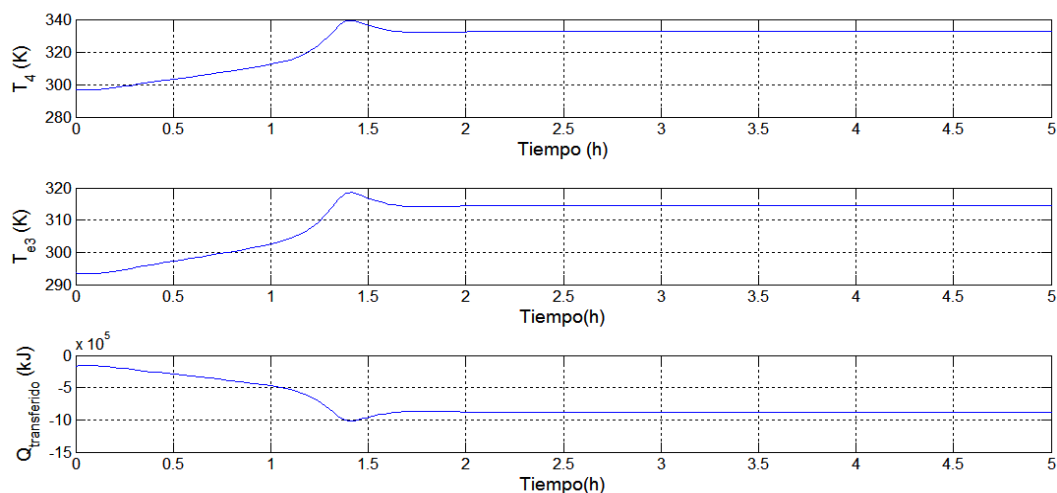


Figura 3-4: Perfiles de temperatura para el modelo no lineal en ausencia de perturbaciones

3.3.2.1. Perturbación sobre los flujos de entrada (F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{m}_{E_2})

Los esquemas de las Figuras 3-5 y 3-6 muestran las trayectorias en el tiempo de las concentraciones (C_{A_4} , C_{B_4} y C_{C_4}) y las temperaturas (T_4 , y T_{E_2}) cuando se perturban simultáneamente los flujos de entrada (F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{m}_{E_2}) en $t = 3 h$ sobre -10% , -20% , -30% de los valores de diseño $F_{A_1} = 36,29 \text{ kgmolA/h}$, $F_{B_1} = 453,6 \text{ kgmolB/h}$, $F_{M_1} = 45,36 \text{ kgmolM/h}$ y $\dot{m}_{E_2} = 453,6$

kgmole/h . Aunque el sistema alcanza el estado estacionario en aproximadamente $t = 4 \text{ h}$, el punto de convergencia de las trayectorias es diferente al punto de equilibrio calculado en la Sección 3.3.1, no obstante la cercanía al mismo. Esto da a entender que si bien no se presentan oscilaciones prolongadas en la dinámica del sistema, la sensibilidad del mismo ante cambios en los flujos de alimentación no arroja efectos importantes en la dinámica no lineal. Sin embargo, debido a la pequeña divergencia en las trayectorias de la dinámica perturbada y no perturbada, se corrobora el comportamiento local del punto de equilibrio inicial.

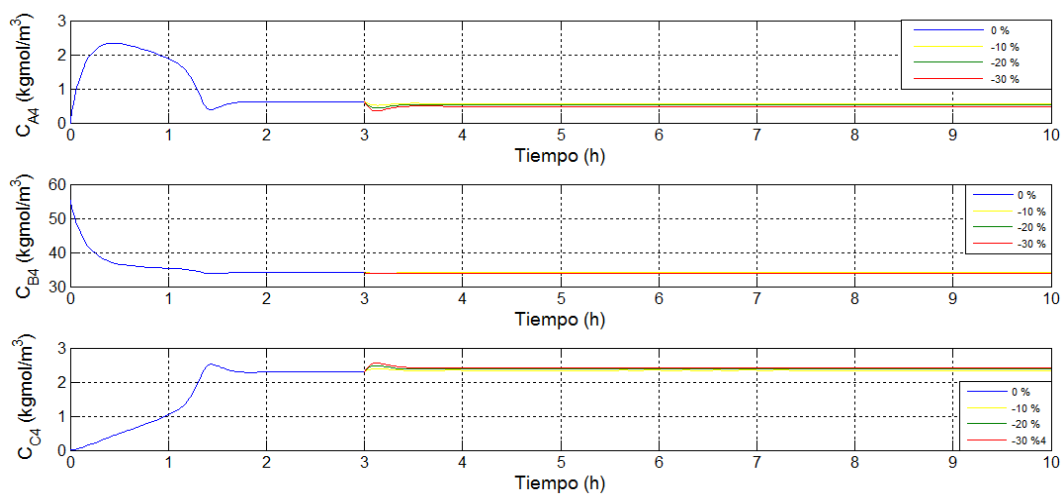


Figura 3-5: Perfiles de concentración para el modelo no lineal con un cambio de -10% , -20% y -30% en F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{m}_{E_2}

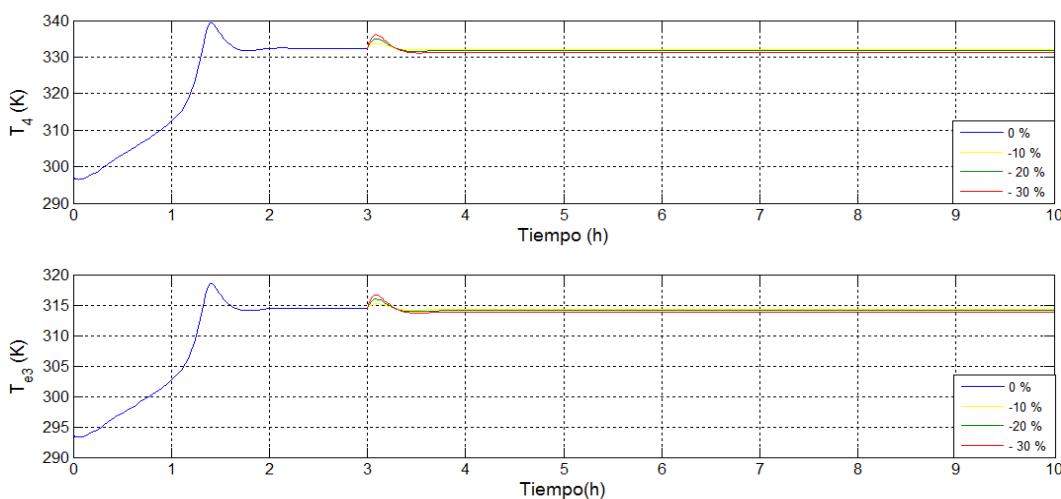


Figura 3-6: Perfiles de temperatura para el modelo no lineal con un cambio de -10% , -20% y -30% en F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{m}_{E_2}

Siguiendo la misma tendencia, las Figuras 3-7 y 3-8 indican las trayectorias en el tiempo de las concentraciones (C_{A_4} , C_{B_4} y C_{C_4}) y las temperaturas (T_4 , y T_{E_2}), esta vez ante una perturbación simultánea en $t = 3 h$ de los flujos de entrada (F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{m}_{E_2}) sobre +10 %, +20 %, +30 % de los valores de diseño del reactor. La convergencia de las trayectorias hacia el estado estacionario se da en aproximadamente a $t = 4,5 h$. El estado final alcanzado muestra una diferencia poco notable con respecto al punto de equilibrio calculado anteriormente. De igual forma que en la perturbación negativa de los flujos de alimentación no se hace visible una dinámica transitoria oscilante, conservando la tendencia de localidad del punto de equilibrio inicial y una baja sensibilidad del modelo ante perturbaciones por debajo y sobre los valores de diseño sobre los flujos de alimentación.

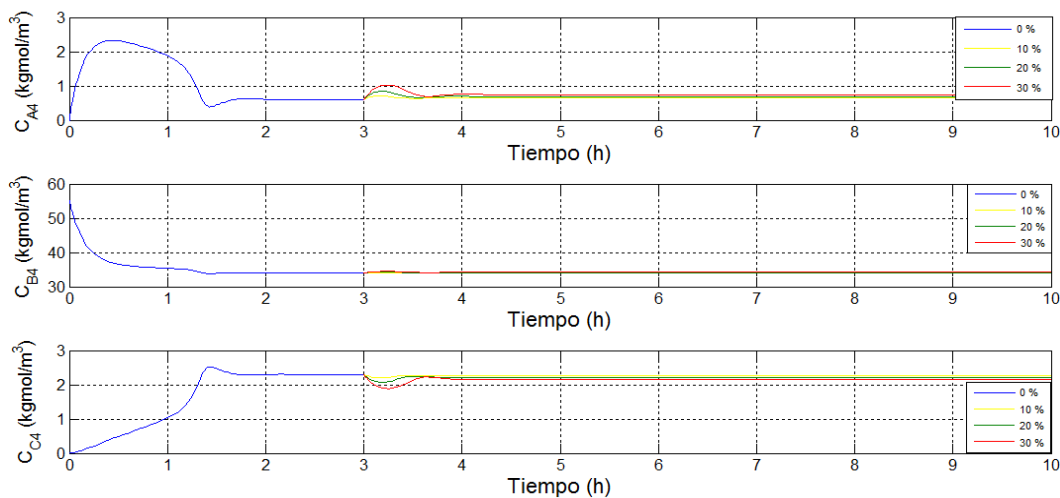


Figura 3-7: Perfiles de concentración para el modelo no lineal con un cambio de +10 %, +20 % y +30 % en F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{m}_{E_2}

3.3.2.2. Perturbación sobre las temperaturas de entrada (T_1 y T_{E_2})

A diferencia de los dos ejemplos anteriores, ahora se perturban las temperaturas de entrada T_1 y T_{E_2} en -10% , -20% , -30% respecto los valores de diseño del reactor, que corresponden a $T_1 = 297,034K$ y $T_{E_2} = 288,705K$. Los resultados obtenidos se muestran en las Figuras 3-9 y 3-10, donde están representadas como función del tiempo las trayectorias de las concentraciones (C_{A_4} , C_{B_4} y C_{C_4}), las temperaturas (T_4 , y T_{E_2}) y el calor transferido al medio refrigerante con una perturbación en $t = 3 h$. El sistema se estabiliza en un tiempo cercano a $t = 4 h$. Como se puede observar, el estado alcanzado diverge notablemente del punto de equilibrio referido en 3.3.1. El reactor prácticamente no procesa la materia prima, hecho demostrado en la baja concentración de salida del producto (C). Así mismo, se exceden los límites inferiores de la temperatura T_4 impuestos en (3.39) y el calor transferido al reactor Q es positivo, es decir, entra al sistema al contrario de lo que debería suceder en una operación normal. Esto indica una alta sensibilidad del

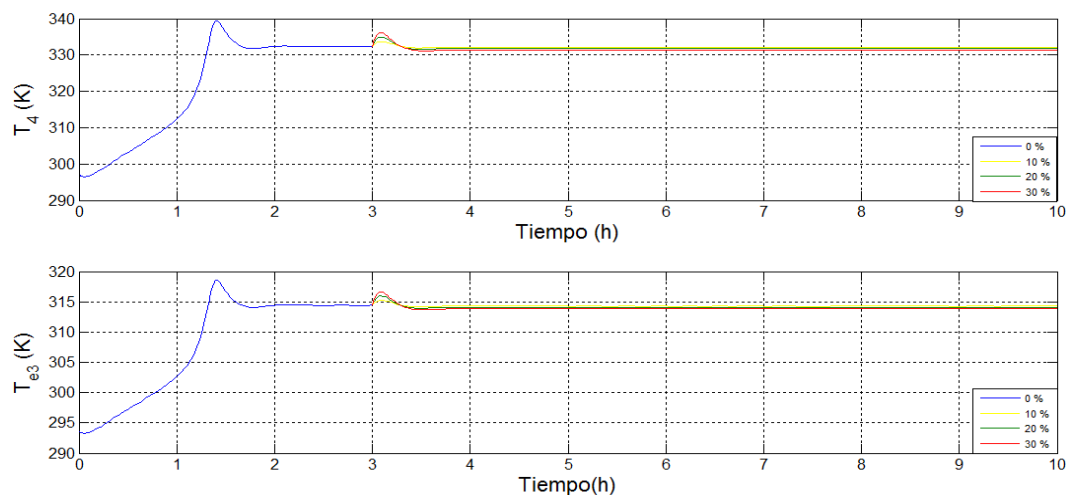


Figura 3-8: Perfiles de temperatura para el modelo no lineal con un cambio de +10 %, +20 % y +30 % en F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{m}_{E_2}

modelo a cambios en la temperatura de entrada de reactivos y refrigerante, alterando notablemente la estabilidad del punto de equilibrio inicial ante variaciones de estas magnitudes. El resultado encontrado sugiere que la disminución en la temperaturas de alimentación no debe sobrepasar el 10 % (-) de su valor de diseño para evitar la deficiente operación del reactor.

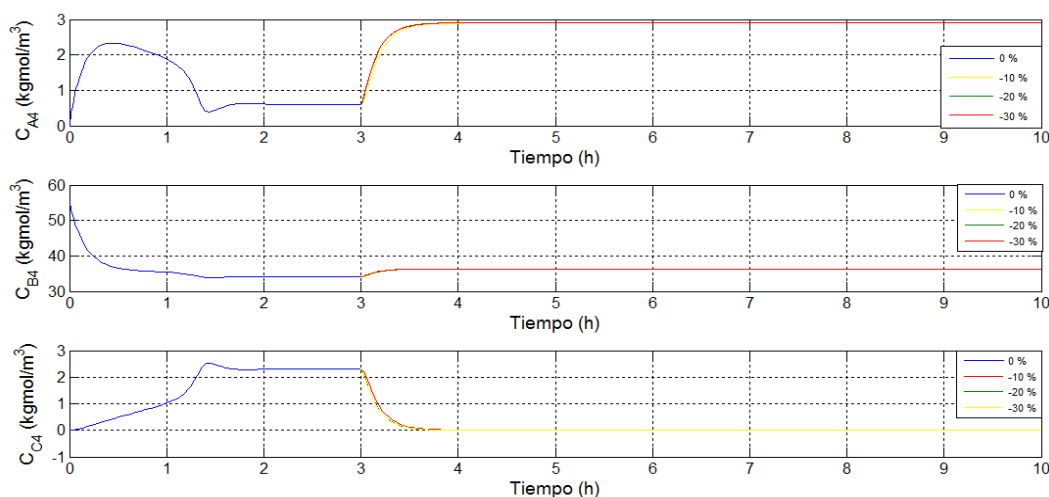


Figura 3-9: Perfiles de concentración para el modelo no lineal con un cambio de -10 %, -20 % y -30 % en T_1 y T_{E_2}

Para finalizar este análisis, las Figuras 3-11 y 3-12 presentan las trayectorias en el tiempo de la concentraciones (C_{A_4} , C_{B_4} y C_{C_4}), las temperaturas (T_4 , y T_{E_2}) y el calor transferido al medio refrigerante Q ante una perturbación simultánea $t = 3 h$ de las temperaturas de entrada (T_1 y T_{E_2}) sobre +10 %, +20 %, +30 % de los valores de diseño. El estado estable se logra cerca a

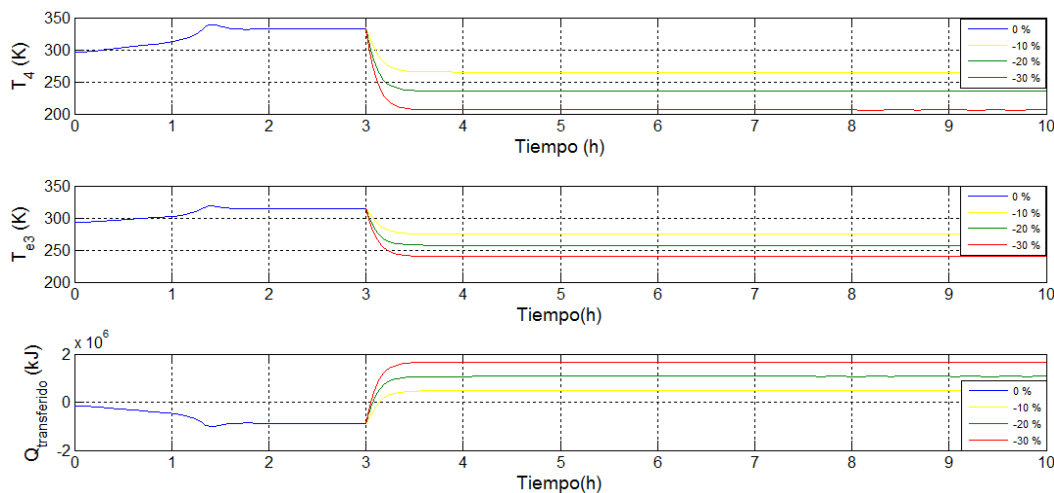


Figura 3-10: Perfiles de temperatura y calor transferido para el modelo no lineal con un cambio de -10% , -20% y -30% en T_1 y T_{E_2}

$t = 3,8 \text{ h}$. A diferencia de la reducción de las temperaturas de entrada, el efecto de aumentar estos parámetros sobre los valores nominales es totalmente adverso, pues tanto T_4 como T_{E_2} sobrepasan notablemente el punto de equilibrio de la Sección 3.3.1, extralimitando la restricción operativa para (T_4) impuesta en (3.39). Se confirma así la alta sensibilidad del sistema a cambios en la temperatura de entrada de reactivos y refrigerante, poniendo en riesgo la seguridad del proceso cuando se incrementa (T_4) y (T_{E_2}) en estas magnitudes. De igual manera, el resultado encontrado en la simulación permite inferir que el aumento en los parámetros analizados no debe exceder el 10% , para operar el reactor de manera segura.

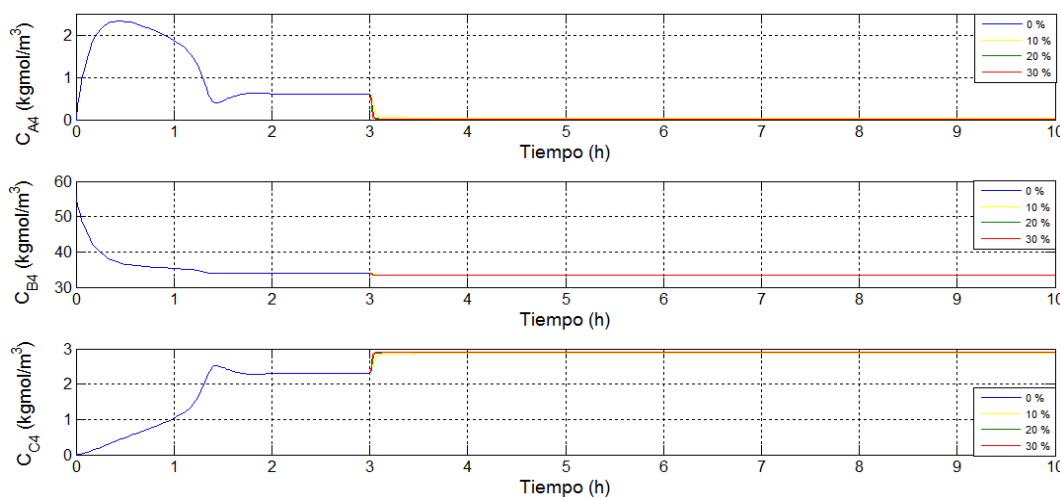


Figura 3-11: Perfiles de concentración para el modelo no lineal con un cambio de $+10\%$, $+20\%$ y $+30\%$ en T_1 y T_{E_2}

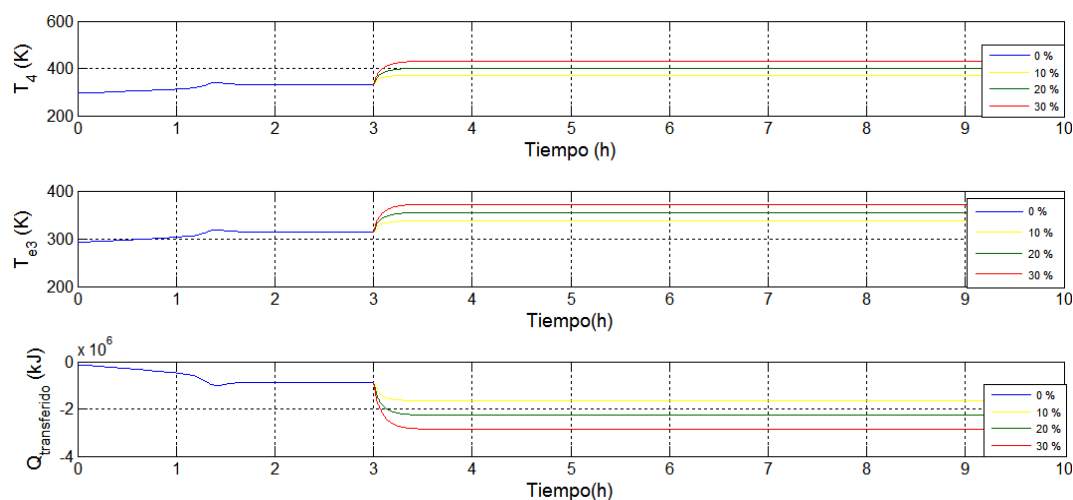


Figura 3-12: Perfiles de temperatura y calor transferido para el modelo no lineal con un cambio de +10 %, +20 % y +30 % en T_1 y T_{E_2}

3.3.3. Análisis de bifurcaciones

Los cambios en el comportamiento dinámico del sistema y su topología ante la variación de los parámetros del modelo no lineal se analizan desde un punto de vista cuantitativo por medio de la búsqueda de bifurcaciones, (Kuznetsov, 2004). El objetivo primordial de esta sección de la tesis, aparte de verificar las posibles modificaciones topológicas, es establecer los puntos de operación o regiones donde el modelo dinámico muestre un mejor desempeño. El análisis de bifurcaciones de codimensión 1 se realiza con base en los parámetros F_{A_1} , T_1 , \dot{n}_{E_2} y T_{E_2} , utilizando MATCONT de *Matlab 7.10*®. A continuación se muestran los resultados en dos etapas.

3.3.3.1. Bifurcaciones en función del flujo de alimentación F_{A_1}

El diagrama de bifurcaciones en función del parámetro F_{A_1} se muestra en la Figura (3-13). Existen dos bifurcaciones Fold¹ respecto a la variación del flujo de entrada F_{A_1} evaluado en el intervalo $F_{A_1} \in [10 \quad 70]$ $kgmol/h$. Estas bifurcaciones fueron caracterizadas calculando el jacobiano del sistema no lineal en el punto crítico. Los valores propios obtenidos con el método de caracterización mencionado, se indican en la Tabla 3-6. Las variables de estado analizadas son C_{A_4} y T_4 recordando que corresponden a la concentración de A y temperatura dentro del reactor, respectivamente. La presencia de estos dos puntos de bifurcación no genera riesgo alguno en la operación del equipo, ocasionando un aumento muy bajo en la concentración de salida $C_{A_4} = 1,3184 \text{ kgmol}/m^3$ en el punto 1 a $C_{A_4} = 1,6104 \text{ kgmol}/m^3$ en el punto 2 como está consignado en la Tabla 3-5. Sin embargo, en cuestión a la temperatura, el pequeño aumento de flujo desde el punto 1 a 2, ocasiona una caída de temperatura de reacción de aproximadamente 5 K, convirtiéndose en un efecto

¹Bifurcación asociada con la aparición de un valor propio $\lambda = 0$. Se conoce también como bifurcación tangente, punto límite, silla - nodo ó de punto de retorno.

indeseable para la operación del reactor dado que el carácter exotérmico del proceso requiere una temperatura de operación alta, para obtener mayor conversión de materia prima.

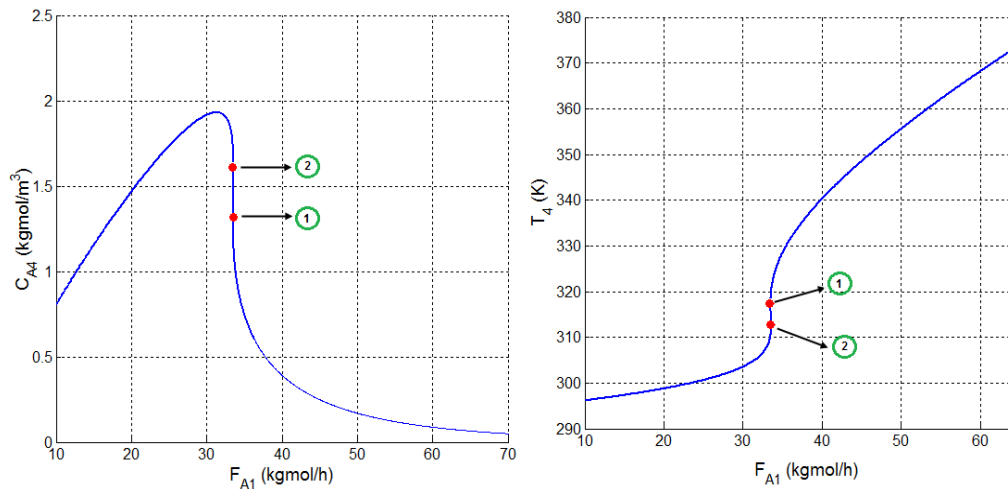


Figura 3-13: Diagrama de bifurcaciones para C_{A4} (Izquierda) y T_4 (Derecha) variando F_{A1} - Flujo de alimentación de A

3.3.3.2. Bifurcaciones en función de la temperatura de alimentación T_1

La Figura 3-14 presenta dos puntos de bifurcación Fold respecto a la variación en la temperatura de alimentación de reactivos (T_1), evaluada en el intervalo $T_1 \in [275 \text{ } 400] \text{ K}$. Del mismo modo que el caso anterior, las variables C_{A4} y T_4 son la concentración de (A) y la temperatura dentro del reactor. En cuanto a la concentración (C_{A4}), la aparición de estos dos valores críticos no ocasionan condiciones adversas en la operación del reactor, dando pie a un aumento de concentración de $C_{A4} = 1,1418 \text{ kgmol/m}^3$ en el punto 1 a $C_{A4} = 1,9582 \text{ kgmol/m}^3$ en el punto 2 como se indica en la Tabla 3-5. Analizando la temperatura del reactor, el pequeño incremento de la temperatura de entrada T_1 desde el punto 1 al 2, ocasiona una caída de temperatura en el reactor mayor a 10 K que reduce la conversión de A y afecta desfavorablemente el rendimiento del proceso.

Con respecto al flujo molar de refrigerante \dot{m}_{E2} y su temperatura de entrada T_{E2} , aunque no se muestran los resultados gráficamente, en la Tabla 3-5 están incluidos los puntos de bifurcación Fold encontrados al variar los parámetros mencionados en intervalos de $\dot{m}_{E2} \in [200 \text{ } 1300] \text{ kgmole/h}$ y $T_{E2} \in [273,15 \text{ } 320] \text{ K}$, respectivamente.

Finalmente, en la Tabla 3-6 se presentan los valores propios en los puntos de bifurcación de las Figuras 3-13 y 3-14, indicando además la caracterización de dichos puntos.

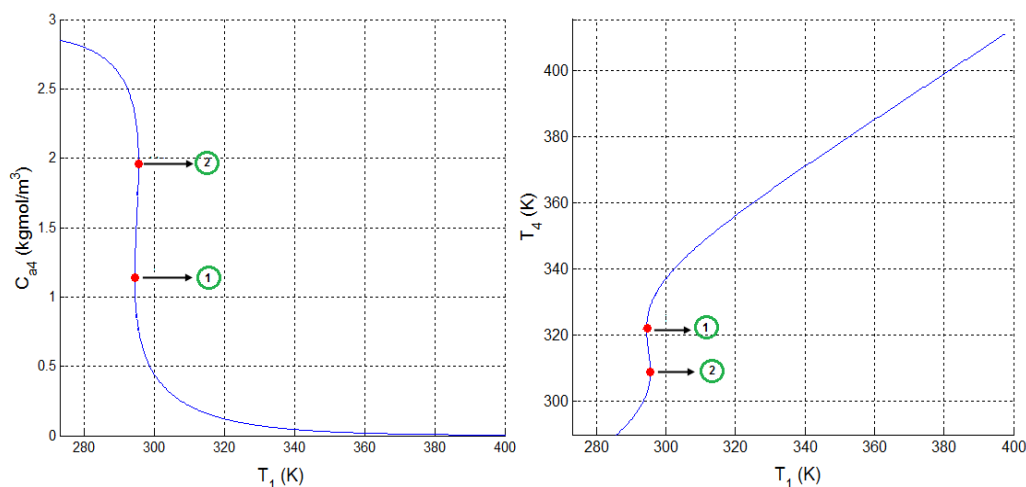


Figura 3-14: Diagrama de bifurcaciones para C_{A4} (Izquierda) y T_4 (Derecha) variando T_1 - Temperatura de alimentación de reactivos

Cumpliendo con el objetivo de esta sección, se reúnen en seguida algunas condiciones de operación para el reactor que optimizan su funcionamiento. En atención a producir la mayor cantidad del producto (C) con el menor desperdicio del reactivo (A), el reactor debe operar con un flujo de alimentación de (F_{A1}) superior a $33,5018$ ($kgmolA/h$), temperatura de alimentación (T_1) mayor a $295,4903$ K , flujo de alimentación de refrigerante (\dot{m}_{E2}) inferior a $719,8646$ ($kgmole/h$) y una temperatura de alimentación de refrigerante mayor a $T_{E2} = 285,3820$ K . Así pues, estas restricciones adicionales conducen una reacción química más efectiva en virtud de la temperatura de reacción y el intercambio de calor necesarios para alcanzar estos objetivos. Aunque la deducción de las condiciones impuestas en esta sección no es muy obvia, a continuación se explican con mayor detalle los razonamientos que llevaron a tales conclusiones.

3.3.4. Multiplicidad de estados estacionarios

La multiplicidad de estados estacionarios es un fenómeno muy común en el comportamiento dinámico de reactores CSTR. En la práctica, el diseño de reactores de flujo continuo y otros equipos dentro de la ingeniería química se realiza tomando como base el análisis de éste comportamiento. La multiplicidad de estados estacionarios se presenta cuando los balances de materia y energía, para el caso del reactor CSTR, no garantizan un conjunto único de condiciones bajo las cuales el reactor sea estable, o existan también múltiples puntos de equilibrio.

Retomando la Figura 3-14 - (Derecha), se realizará un estudio más riguroso del cambio en el comportamiento dinámico del reactor ante modificaciones en la temperatura de entrada (T_1). A continuación será considerada la posible presencia de estados estacionarios múltiples bajo diferentes condiciones de temperatura (T_1). Para comenzar, se calcula la conversión del reactivo (A) a partir

Tabla 3-5: Puntos de bifurcación para el modelo dinámico no lineal del reactor CSTR

Puntos de bifurcación					
Parámetro	Variables del reactor				
	Valor	Punto	$C_{A_4}(kgmol/m^3)$	$C_{C_4}(kgmol/m^3)$	$T_4(K)$
$F_{A_1}(kgmol/h)$	33.5018	1	1.3184	1.4074	317.3907
	33.5718	2	1.6104	1.1200	312.6958
$T_1(K)$	294.4262	1	1.1418	1.7665	321.7482
	295.4903	2	1.9582	0.9501	309.0073
$\dot{m}_{E_2}(kgmol/h)$	719.8646	1	1.8199	1.0883	311.2294
	773.7390	2	1.3117	1.5966	319.0280
$T_{E_2}(K)$	283.0983	1	1.1418	1.7665	321.7482
	285.3820	2	1.9582	0.9501	309.0073

Tabla 3-6: Valores propios en los puntos de bifurcación para el modelo dinámico no lineal del reactor CSTR

Parámetro	Valores propios					
	Punto	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	Tipo
$F_{A_1}(kgmol/h)$	1	-6.49666	-3.1122	-3.1122	0	Fold
	2	-6.49914	-6.49914	-4.31013	0	Fold
$T_1(K)$	1	-6.59531	-6.59531	-1.61417	0	Fold
	2	-6.59531	-6.59531	-5.06624	0	Fold
$\dot{m}_{E_3}(kgmol/h)$	1	-6.59531	-6.59531	-2.02467	0	Fold
	2	-6.59531	-6.59531	-4.41498	0	Fold
$T_{E_3}(K)$	1	-6.59531	-6.59531	-1.61417	0	Fold
	2	-6.59531	-6.59531	-5.06624	0	Fold

del balance de materia (3.24) y el balance de energía (3.27), cuyo resultado son las ecuaciones (3.47) y (3.48). Así, tomando una temperatura de entrada T_1 , se realiza un barrido de temperatura sobre T_4 , encontrando X_{BM} y X_{BE} . La deducción completa de las expresiones de conversión se

puede ver en (Fogler, 2001) y (Perlmutter, 1972).

$$X_{BM} = \frac{\tau A_r \exp\left(-\frac{E_a}{\frac{R}{1.8}\left(T_4 \frac{9}{5} + 0,33\right)}\right)}{1 + \tau A_r \exp\left(-\frac{E_a}{\frac{R}{1.8}\left(T_4 \frac{9}{5} + 0,33\right)}\right)} \quad (3.47)$$

$$X_{BE} = \frac{\theta_{Cp}(T_4 - T_1) - \left(Q/F_{A_1}\right)}{-\Delta H_{rxn}} \quad (3.48)$$

La conversión del reactivo (A) a partir del balance de materia y energía en función de T_1 y T_4 hacen parte de la Figura (3-15).

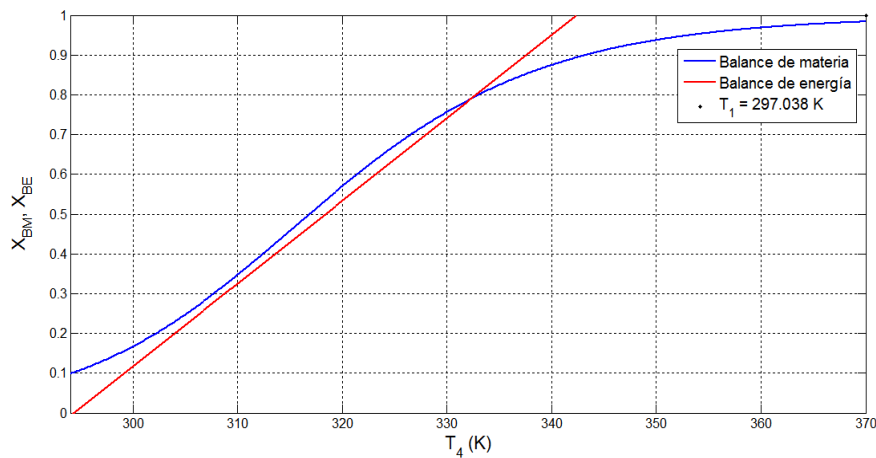


Figura 3-15: Estados estacionarios del reactor CSTR en función de la conversión del reactivo (A)

Como un anexo a los resultados obtenidos a partir de (3.47) y (3.48), la Figura 3-15 indica el desplazamiento de la línea de balance de energía (-) ante una temperatura de alimentación mayor o menor que la propuesta en el diseño. Si $T_1' > T_1$, la línea de balance de energía se desplaza hacia la derecha de su ubicación original cambiando el punto de intersección con el balance de materia (-). Si la temperatura de alimentación $T_1' < T_1$, el balance de energía se desplaza hacia la izquierda de su ubicación original cambiando también el punto de intersección con el balance de materia. Para ambos casos la nueva intersección entre las dos curvas trae como consecuencia un nuevo estado estacionario del sistema.

Debido a que las intersecciones entre el balance de materia y energía de la Figura 3-15 muestran el estado estacionario según la T_1 elegida, es importante tener en cuenta las siguientes posibilidades: Existencia de múltiples puntos de intersección (múltiples estados estacionarios), un solo corte (estado estacionario único), uno o más cortes y puntos tangentes (uno o más estados estacionarios y punto de bifurcación) y solo puntos tangentes (puntos de bifurcación). La Figura 3-16 muestra

las diferentes intersecciones o estados estacionarios en función de la temperatura de entrada T_1 . El algoritmo de cálculo funciona de la siguiente manera: Para cada T_1 , se calcula T_4 en estado estable también llamada T_{ss} resolviendo simultáneamente (3.24) - (3.27). Finalmente, sobre cada el punto de equilibrio local obtenido se realiza su caracterización verificando si corresponde a un estado estacionario estable, estado estacionario inestable o punto de bifurcación.

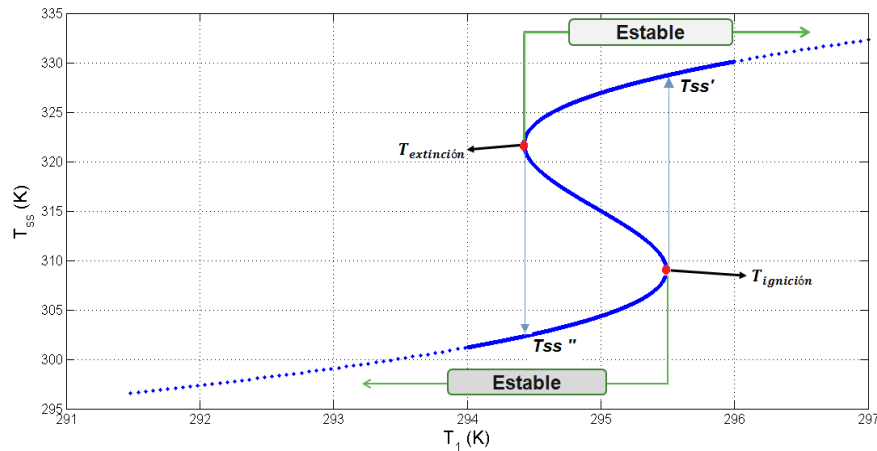


Figura 3-16: Curva de Ignición - Extinción para el reactor CSTR de (3.24) - (3.27)

La curva de la Figura 3-16 da cuenta dos zonas de estabilidad del reactor. La primera región sobre la *Temperatura de extinción* notada como T_{ext} y la segunda por debajo de la *Temperatura de ignición* o T_{ign} . A medida que T_1 aumenta, T_{ss} o temperatura del punto de equilibrio, se incrementa hasta llegar a la temperatura de ignición. Así pues, cualquier incremento de fracción de grado en T_1 más allá de T_{ign} forzará a que T_{ss} salte a T_{ss}' . Si el reactor opera a una temperatura mayor a T_{ss}' y T_1 desciende hasta la temperatura de extinción, cualquier decremento en T_1 ocasionará que la temperatura de estado estacionario se desplome hasta T_{ss}'' . Los puntos que se encuentran entre T_{ign} y T_{ext} son estados estacionarios inestables para el reactor. Las temperaturas T_1 a la derecha de T_{ext} y a la izquierda de T_{ign} son estados estacionarios localmente estables. De esta forma, se deduce numéricamente las zonas sobre las cuales el reactor operará sin perder la estabilidad. Las coordenadas para los puntos de T_{ign} y T_{ext} se encuentran en la Tabla 3-5, columna de T_4 cuando se modifica la temperatura de entrada T_1 .

De esta manera, queda totalmente demostrado la presencia de múltiples estados estacionarios en el reactor, ayudando además a clarificar el razonamiento que permitió escoger las condiciones de operación óptimas en la sección anterior. Por ejemplo, para T_1 se sabe con mayor certeza que debe estar sobre 295,4903 K . Si esto no ocurre, el reactor operará con $T_{ign} < T_4 < T_{ss}'$, corriendo el riesgo de caer en un estado estacionario inferior si $T_1 < T_{ext}$ que aunque estable, perjudicaría en gran medida el desarrollo del proceso industrial. Este mismo tipo de análisis fue realizado para los flujos F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} , \dot{m}_{E_2} y la temperatura de entrada de refrigerante T_{E_2} , verificando así la validez de las condiciones de operación sugeridas en la sección anterior.

3.4. Linealización alrededor de un punto de equilibrio del modelo dinámico para el reactor CSTR

La segunda parte del capítulo está dirigida hacia la linealización del modelo dinámico que describe el reactor CSTR. Este procedimiento se lleva a cabo con el uso de la expansión en series de Taylor, encontrando finalmente una aproximación lineal en el espacio de estados que reproduce el comportamiento de la dinámica no lineal alrededor de un punto de operación fijo. Debido a la presencia de no linealidades cuyo tratamiento analítico es complejo, se usa esta clase de linealización dejando de un lado la linealización entrada - estado y entrada - salida las cuales requieren un manejo analítico más riguroso que el primer método. Un ejemplo acerca de la linealización por realimentación aplicado en reactores químicos se encuentra reportado en (Rincón, 2007).

3.4.1. Volumen de control, variables manipuladas, controladas y perturbaciones

El aspecto más importante del control de reactores químicos es establecer los objetivos a cumplir durante la operación del equipo. Entonces, considerando el proceso real se plantean las siguientes metas para el control del reactor: Producir (C) disminuyendo el desperdicio de materia prima (A) y (B) y brindar seguridad en la operación del reactor impidiendo la pérdida de producto y/o reactivos por evaporación ó desborde de la temperatura del reactor T_4 sobre los límites permitidos.

El volumen de control analizado es el reactor y junto a la chaqueta de enfriamiento. A continuación, se establece un diagrama de caja negra para el proceso.

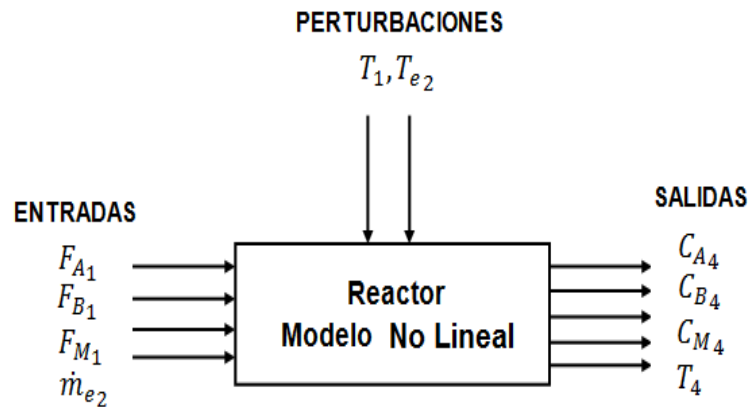


Figura 3-17: Diagrama de caja negra para un reactor CSTR no isotérmico con intercambio de calor

Las variables controladas y las variables manipuladas son escogidas teniendo en cuenta los propósitos fundamentales para el control del reactor (Larsson et al., 2003, Skogestad, 2004):

- **Controlar la concentración del reactivo A en la salida del reactor - (C_{A_4}):** Para este fin se asignan como variables manipuladas a los flujos de entrada (F_{A_1}), (F_{B_1}) y (F_{M_1}).
- **Controlar la temperatura del reactor - (T_4), operando dentro de un rango de forma que el proceso se efectúe de forma segura:** El flujo másico de refrigerante (\dot{m}_{E_2}) es utilizado como variable manipulada para alcanzar este objetivo.

Según la Figura 3-17 y la elección de las variables manipuladas, se tiene finalmente:

- *Salidas:* C_{A_4} , C_{B_4} , C_{M_4} y T_4
- *Entradas:* F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{m}_{E_2}
- *Perturbaciones:* T_1 y T_{E_2}
- *Variables controladas:* C_{A_4} , C_{B_4} , C_{M_4} y T_4
- *Variables manipuladas:* F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{m}_{E_2}

En la linealización del modelo (3.24) - (3.27), como se indicará más adelante, las señales de salida del sistema dinámico están en función de las variables de estado. Por esta razón y debido a que uno de los planteamientos básicos de la tesis es el uso del control por realimentación de estados, se asume que las salidas son las mismas variables de estado para continuar con el desarrollo del trabajo.

Retomando la linealización, las expresiones (1.7) corresponden a la expansión en series de Taylor usadas en el desarrollo del modelo linealizado para el reactor CSTR alrededor de un punto de operación fijo, y en la caracterización del punto de equilibrio en la Sección 3.3.1. Sea un sistema MIMO descrito según (1.5), sin pérdida de generalidad la expresión (1.7) para variables en el espacio de estados tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ f_{n-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Las salidas del sistema están agrupadas en forma de p - vectores y matrices según:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{p-1}(t) \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ g_{p-1}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ g_p(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

donde:

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_{op} \\ \bar{u} = u - u_{op} \\ \bar{y} = y - y_{op} \end{cases} \quad (3.51)$$

Resumiendo, las matrices (3.49) y (3.50) representan el sistema dinámico en el espacio de estados ²:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= F\bar{x}(t) + G\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) &= H\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde:

$$\begin{cases} F = \left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial x} \right|_{x_{op}, u_{op}} \\ G = \left. \frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} \right|_{x_{op}, u_{op}} \\ H = \left. \frac{\partial g(\cdot)}{\partial x} \right|_{x_{op}, u_{op}} \\ D = \left. \frac{\partial g(\cdot)}{\partial u} \right|_{x_{op}, u_{op}} \end{cases}$$

A partir de la Figura 3-17 y según el planteamiento de las variables manipuladas y controladas las dimensiones finales del sistema linealizado son: $n = 4$, $m = 4$ y $p = 4$. El vector de entradas de control $\bar{u}(t)$ de dimensión 4×1 , así como el vector de estados $\bar{x}(t)$ de dimensión 4×1 y el vector

²A menos que se especifique lo contrario, en adelante las expresiones de los sistemas dinámicos representarán las variables de estado como variables de desviación. El planteamiento del problema en ambos casos es totalmente idéntico.

de salidas $\bar{y}(t)$ de dimensión 4×1 están conformados de la siguiente manera:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \bar{C}_{A_4} \\ \bar{C}_{B_4} \\ \bar{C}_{M_4} \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix}, \bar{u}(t) = \begin{bmatrix} \bar{F}_{A_1} \\ \bar{F}_{B_1} \\ \bar{F}_{M_1} \\ \bar{m}_{E_2} \end{bmatrix}, \bar{y}(t) = \begin{bmatrix} \bar{C}_{A_4} \\ \bar{C}_{B_4} \\ \bar{C}_{M_4} \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Omitiendo el desarrollo de la expansión en series de Taylor, a continuación se muestran los elementos de las matriz de estado (F), la matriz de control (G), la matriz de salidas (H) y matriz de transmisión directa (D), de acuerdo al procedimiento analítico que propone el tratamiento de las matrices (3.49), (3.50) y (3.53). Para el modelado en el espacio de estados son usadas 4 ecuaciones diferenciales linealmente independientes (3.24) - (3.27) denotadas como f_1, f_2, f_3 y f_4 , respectivamente. El punto estacionario ó p_s esta referenciado en la Tabla 3-4 y los parámetros del modelo no lineal son los mismos de las Tablas 3-3 y 3-2. El vector $\bar{y}(t)$ esta integrado por lo elementos g_1, g_2, g_3 y g_4 .

$$F = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial C_{A_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial C_{B_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial C_{M_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial T_4} \right)_{p_s} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial C_{A_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial C_{B_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial C_{M_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial T_4} \right)_{p_s} \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial C_{A_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_3}{\partial C_{B_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_3}{\partial C_{M_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_3}{\partial T_4} \right)_{p_s} \\ \left(\frac{\partial f_4}{\partial C_{A_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_4}{\partial C_{B_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_4}{\partial C_{M_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_4}{\partial T_4} \right)_{p_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4 & 0 & 0 & a_5 \\ a_9 & a_{10} & 0 & a_{11} \\ 0 & 0 & a_{15} & 0 \\ a_{19} & a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$G = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial F_{A_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial F_{B_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial F_{M_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar{m}_{E_2}} \right)_{p_s} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial F_{A_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial F_{B_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial F_{M_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial \bar{m}_{E_2}} \right)_{p_s} \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial F_{A_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_3}{\partial F_{B_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_3}{\partial F_{M_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_3}{\partial \bar{m}_{E_2}} \right)_{p_s} \\ \left(\frac{\partial f_4}{\partial F_{A_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_4}{\partial F_{B_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_4}{\partial F_{M_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial f_4}{\partial \bar{m}_{E_2}} \right)_{p_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_6 & a_7 & a_8 & 0 \\ a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 \\ a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{23} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$H = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial C_{A_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_1}{\partial C_{B_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_1}{\partial C_{M_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_1}{\partial T_4} \right)_{p_s} \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial C_{A_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_2}{\partial C_{B_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_2}{\partial C_{M_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_2}{\partial T_4} \right)_{p_s} \\ \left(\frac{\partial g_3}{\partial C_{A_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_3}{\partial C_{B_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_3}{\partial C_{M_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_3}{\partial T_4} \right)_{p_s} \\ \left(\frac{\partial g_4}{\partial C_{A_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_4}{\partial C_{B_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_4}{\partial C_{M_4}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_4}{\partial T_4} \right)_{p_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$D = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial F_{A_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_1}{\partial F_{B_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_1}{\partial F_{M_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_1}{\partial \dot{m}_{E_2}} \right)_{p_s} \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial F_{A_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_2}{\partial F_{B_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_2}{\partial F_{M_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_2}{\partial \dot{m}_{E_2}} \right)_{p_s} \\ \left(\frac{\partial g_3}{\partial F_{A_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_3}{\partial F_{B_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_3}{\partial F_{M_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_3}{\partial \dot{m}_{E_2}} \right)_{p_s} \\ \left(\frac{\partial g_4}{\partial F_{A_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_4}{\partial F_{B_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_4}{\partial F_{M_1}} \right)_{p_s} & \left(\frac{\partial g_4}{\partial \dot{m}_{E_2}} \right)_{p_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Por cuestiones de espacio y para evitar extenderse en el desarrollo del capítulo, se presentan solo algunas derivadas analíticas parciales de las ecuaciones (3.42) para f_1 , f_2 , f_3 y f_4 . Las derivadas parciales de $\bar{y}(t)$ en (3.53) son triviales y no están incluidas.

$$a_1 = \frac{\partial f_1}{\partial F_{A_1}} = \left(1 - \frac{C_{A_4}}{\rho_A} \right) V^{-1} \quad (3.58)$$

$$a_2 = \frac{\partial f_1}{\partial F_{B_1}} = -\frac{C_{A_4}}{\rho_B V} \quad (3.59)$$

$$a_3 = \frac{\partial f_1}{\partial F_{M_1}} = -\frac{C_{A_4}}{\rho_M V} \quad (3.60)$$

$$a_4 = \frac{\partial f_1}{\partial C_{A_4}} = -A_r \exp \left(\frac{-1,8E_a}{R \left(\frac{9}{5}T_4 + 0,33 \right)} \right) + \frac{\frac{F_{A_1}}{\rho_A} - \frac{F_{B_1}}{\rho_B} - \frac{F_{M_1}}{\rho_M}}{V} \quad (3.61)$$

$$a_5 = \frac{\partial f_1}{\partial T_4} = \frac{-3,24A_r E_a \exp \left(\frac{-1,8E_a}{R \left(\frac{9}{5}T_4 + 0,33 \right)} \right) C_{A_4}}{R \left(\frac{9}{5}T_4 + 0,33 \right)^2} \quad (3.62)$$

$$a_6 = \frac{\partial f_2}{\partial F_{A_1}} = -\frac{C_{B_4}}{\rho_A V} \quad (3.63)$$

$$a_7 = \frac{\partial f_2}{\partial F_{B_1}} = \left(1 - \frac{C_{B_4}}{\rho_B} \right) V^{-1} \quad (3.64)$$

$$a_8 = \frac{\partial f_2}{\partial F_{M_1}} = -\frac{C_{B_4}}{\rho_M V} \quad (3.65)$$

$$a_9 = \frac{\partial f_2}{\partial C_{A_4}} = -A_r \exp\left(\frac{-1,8E_a}{R\left(\frac{9}{5}T_4 + 0,33\right)}\right) \quad (3.66)$$

$$a_{10} = \frac{\partial f_2}{\partial C_{B_4}} = \left(-\frac{F_{A_1}}{\rho_A} - \frac{F_{B_1}}{\rho_B} - \frac{F_{M_1}}{\rho_M}\right) V^{-1} \quad (3.67)$$

$$a_{11} = \frac{\partial f_2}{\partial T_4} = \frac{-3,24A_r E_a \exp\left(\frac{-1,8E_a}{R\left(\frac{9}{5}T_4 + 0,33\right)}\right) C_{A_4}}{R\left(\frac{9}{5}T_4 + 0,33\right)^2} \quad (3.68)$$

Las totalidad de las constantes en el modelo linealizado evaluadas en p_s de la Tabla 3-4, se incluyen a continuación.

Tabla 3-7: Constantes del modelo linealizado de un reactor CSTR

Constante	Valor	Constante	Valor
a_1	0.50715	a_{13}	-0.03477
a_2	-0.00579	a_{14}	0.45069
a_3	-0.01297	a_{15}	-6.59530
a_4	-31.6740	a_{16}	-0.80618
a_5	-1.24400	a_{17}	-0.41460
a_6	-1.20563	a_{18}	-0.44915
a_7	0.20289	a_{19}	618.50518
a_8	-0.72964	a_{20}	$3.5518 \cdot 10^{-9}$
a_9	-25.0786	a_{21}	$3.8478 \cdot 10^{-9}$
a_{10}	-6.59530	a_{22}	20.81975
a_{11}	-1.24400	a_{23}	-0.11449
a_{12}	-0.12871		

3.4.2. Análisis comparativo de la dinámica lineal y no lineal para el reactor CSTR en lazo abierto

El enfoque de espacio de estados propio de la teoría de control moderna es una herramienta muy utilizada en el análisis de sistemas dinámicos SISO y MIMO. La parte final del capítulo incluye un

sencillo examen cualitativo sobre la respuesta del modelo dinámico linealizado y la del sistema no lineal en presencia de perturbaciones sobre las variables de entrada del sistema, comparando las dos tendencias con el fin de revisar la validez de la linealización por expansión en series de Taylor alrededor de un punto fijo de operación.

En primer lugar, la utilidad del modelo lineal en el espacio de estados representado por (3.54) y (3.55) se corrobora en la Figura 3-18. En ausencia de perturbaciones, las trayectorias en el tiempo de la dinámica lineal y no lineal se superponen en cercanías al punto operación, demostrando la eficacia del modelo linealizado. Recordando que $\bar{x}_i(t) = x_i(t) - x_{ss}$, para poder realizar esta comparación a cada variable $\bar{x}_i(t)$ se suma el estado estacionario x_{ss} , hallando de esta forma el valor para la variable de estado $x_i(t)$.

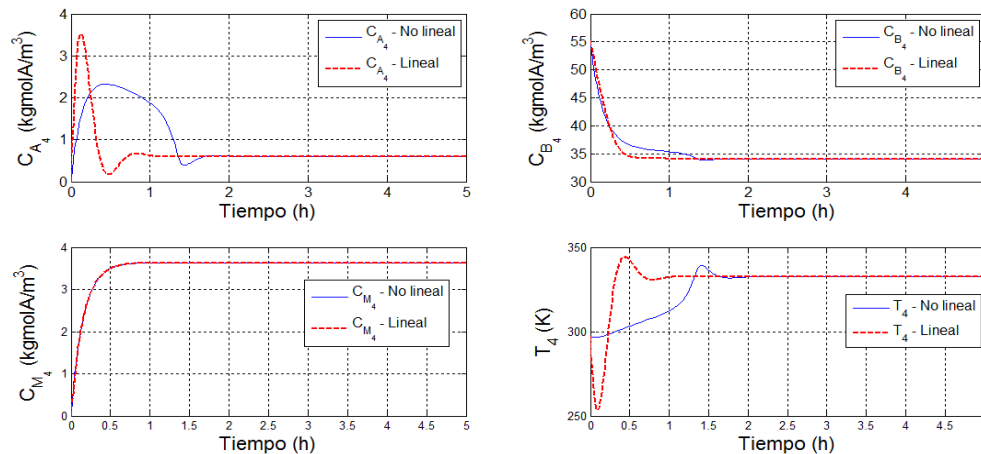


Figura 3-18: Respuesta en el tiempo de los sistemas dinámicos no lineal y lineal

La Figura 3-19 presenta la respuesta dinámica de los sistemas lineal y no lineal para C_{A4} y T_4 cuando se perturban los flujos de entrada F_{A1} y \dot{m}_{E2} en -20% y $+20\%$ respecto a los valores de diseño.

Siguiendo el mismo procedimiento, en la Figura 3-20 está indicada la respuesta dinámica de los sistemas lineal y no lineal para C_{A4} y T_4 cuando se perturban las temperaturas de entrada de T_1 y T_{E2} en -5% y $+5\%$ respecto a los valores de diseño.

El comportamiento del modelo linealizado alrededor del punto de operación fijo es bastante aceptable teniendo en cuenta que como una característica común en las Figuras 3-18, 3-19 y 3-20, las trayectorias de la dinámica lineal y no lineal se superponen cuando el sistema alcanza el nuevo estado estable oscilan entre $t = 1 h$ y $t = 2,6 h$, y ninguna de las variables de estado viola los límites establecidos en (3.39). Esto comprueba finalmente la efectividad del modelo linealizado en cercanías a un punto de operación fijo.

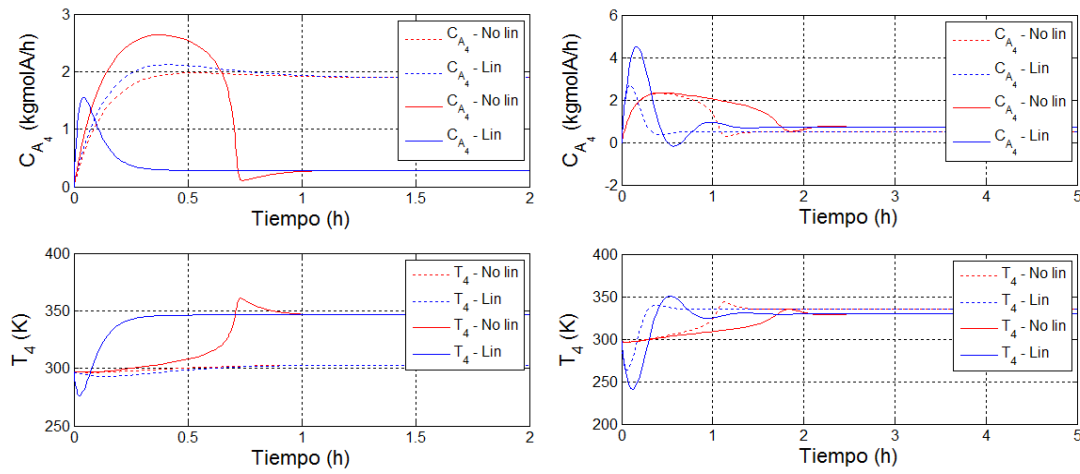


Figura 3-19: Respuesta del sistema dinámico linealizado con perturbaciones en F_{A_1} y \dot{m}_{E_2} . Línea continua (—) +20 %, Línea punteada (- -) -20 %. Izquierda (Perturbación sobre F_{A_1}). Derecha (Perturbación sobre \dot{m}_{E_2})

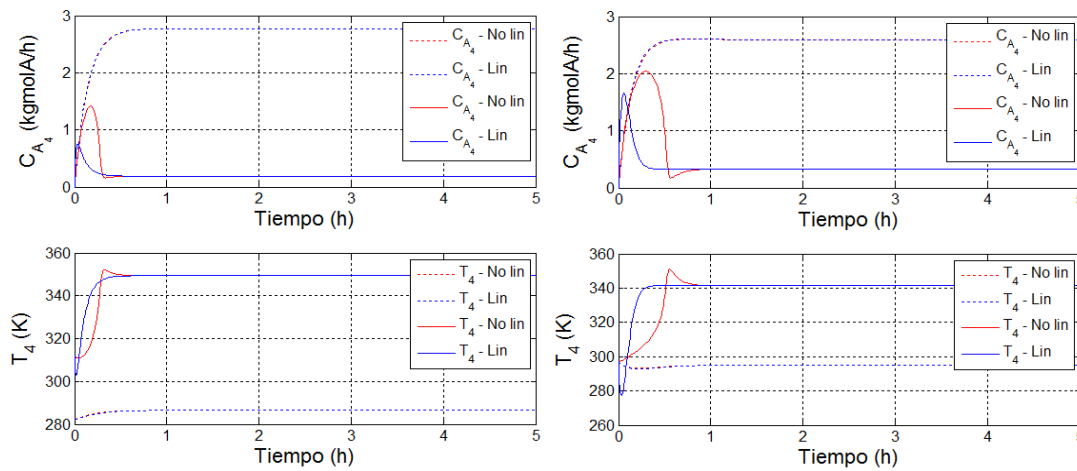


Figura 3-20: Respuesta del sistema dinámico linealizado con perturbaciones en T_1 y T_{E_2} . Línea continua (—) +5 %, Línea punteada (- -) -5 %. Izquierda (Perturbación sobre T_1). Derecha (Perturbación sobre T_{E_2})

3.5. Conclusiones

- Por medio del estudio una reacción química en fase líquida llevada a cabo en un reactor CSTR, se logró establecer el modelo dinámico no lineal MIMO de éste proceso industrial, luego de aplicar algunas suposiciones y restricciones que permitieron simplificar el modelo. El conjunto de ecuaciones que describen el proceso está conformado por 4 ecuaciones diferenciales de primer orden (3.24 - 3.27) y 11 funciones (3.28 - 3.38).
- Con la totalidad de las ecuaciones del modelo no lineal, fue realizado un análisis dinámico que comprendió el cálculo y caracterización de los puntos de equilibrio del sistema con el método indirecto de Lyapunov, análisis de la respuesta en el tiempo del modelo dinámico no lineal ante perturbaciones, análisis de bifurcaciones y comprobación de la presencia de múltiples estados estacionarios en el reactor.
- El punto de equilibrio único calculado y caracterizado posteriormente usando el método indirecto de Lyapunov tiene un comportamiento asintóticamente localmente estable de acuerdo a la matriz Hurwitz A . La convergencia de las trayectorias en el tiempo presentadas en el plano de fase Concentración C_{A_4} - Temperatura (T_1) apunta hacia el punto de equilibrio calculado, verificando la validez del cálculo de dicha singularidad.
- La respuesta dinámica del sistema no lineal fue examinada en detalle realizando perturbaciones simultáneas en los flujos molares de entrada (F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{n}_{E_2}) y temperaturas de entrada (T_1 , T_{E_2}). Se demostró que el modelo es muy sensible a los cambios en T_1 y T_{E_2} , distinto al comportamiento ante cambios en F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{n}_{E_2} . La tendencia de las trayectorias en el tiempo demuestran el carácter local del punto de equilibrio calculado inicialmente.
- La dinámica no lineal permitió encontrar que las perturbaciones en los flujos molares de entrada al reactor ocasionaron una respuesta aceptable con cambios de $\pm 20\%$ sobre el valor original del diseño. Los cambios en las temperaturas de entrada incidieron de forma más significativa, concluyendo que el sistema no soporta una perturbación fuera del rango $\pm 8\%$ sobre el valor original del diseño, considerando siempre como objetivo primordial el mantener una descripción real del proceso.
- Se encontró la existencia de 2 puntos de bifurcación Fold en el sistema no lineal respecto a la variación independiente de los parámetros F_{A_1} , T_1 , \dot{n}_{E_2} y T_{E_2} . Dichos cambios topológicos contribuyeron a determinar numéricamente condiciones de operación óptimas para el proceso, tal que se logre una mayor producción de (C) manteniendo los niveles de temperatura en el reactor en rangos de operación segura y físicamente factibles. El análisis de bifurcaciones relacionado a T_1 abrió la posibilidad de la existencia de múltiples estados estacionarios en el reactor. Así pues, el carácter local del único punto de equilibrio encontrado anteriormente queda totalmente confirmado.

- Con el análisis más detallado del diagrama de bifurcaciones sobre el parámetro T_1 , se comprobó la existencia de múltiples estados estacionarios del sistema, limitando la operación estable del reactor sobre dos zonas (Estados estacionarios superiores localmente estables y Estados estacionarios inferiores localmente estables). La primera zona garantiza mayor productividad del proceso y acota aún más los puntos de operación óptima del reactor. El análisis de bifurcaciones y el cálculo de la multiplicidad de estados estacionarios con la curva de Ignición - Extinción conforman una base muy importante para el desarrollo posterior de la tesis, dado que serán útiles en limitar el rango de las variables manipuladas cuando se implemente el algoritmo de control.
- Usando la expansión en series de Taylor de primer orden se linealizó el modelo dinámico del reactor CSTR. Así pues, la representación dinámica en el espacio de estados fue calculada teniendo en cuenta únicamente las ecuaciones diferenciales linealmente independientes. Como consecuencia de esto, se obtuvo un sistema dimensionado con $n = 4$ variables de estado expresadas como variables de desviación, $p = 4$ salidas del sistema y $m = 4$ entradas de control, tomando como volumen de control el reactor junto a la unidad de intercambio de calor. Además, fueron escogidas las variables manipuladas y controladas en el proceso, las cuales serán de gran importancia para el desarrollo de lo que resta de la tesis.
- Para comprobar la efectividad del modelo dinámico lineal en el espacio de estados, se comparó la dinámica del sistema mencionado con la dinámica del modelo no lineal en lazo cerrado sin perturbaciones en las entradas y ante la presencia de estas. Dichas perturbaciones se realizaron de forma independiente sobre los flujos de entrada F_{A_1} y \dot{m}_{E_2} y las temperaturas de entrada T_1 y T_{E_2} en $\pm 20\%$ y $\pm 5\%$, respectivamente. Las trayectorias de ambas dinámicas se solaparon totalmente en la cercanía al nuevo estado estable, demostrando la efectividad del modelo linealizado alrededor del punto de operación elegido.

CAPÍTULO 4

Control lineal óptimo por realimentación de estados y ley de control no lineal para un sistema MIMO, $n = 4$

La primera parte de este capítulo verifica la controlabilidad y observabilidad del modelo dinámico MIMO (Múltiples entradas- Múltiples salidas, de sus siglas en inglés) en el espacio de estados, obtenido en el Capítulo 3 - Sección 3.4 con las expresiones (3.53 - 3.57). En la segunda parte se calcula una ley de control lineal por realimentación de estados $u(t)$, usando la técnica LQR (Regulador lineal - cuadrático, de sus siglas en inglés). Esta ley de control, preserva la estabilidad del sistema lineal en lazo cerrado e introduce un nuevo parámetro de diseño, el ISE (Integral del error al cuadrado, de sus siglas en inglés).

Con la ley de control lineal de la segunda sección, se muestra el comportamiento dinámico en lazo cerrado, el esfuerzo de control y el ISE, ante cambios en algunos parámetros de la planta. En la parte final del capítulo, la ley de control lineal por realimentación de estados obtenida, es modificada con la introducción de un término no lineal (perturbación cúbica) en su estructura, a fin de establecer la formulación general de una ley de control no lineal.

De esta forma se completará la tercera etapa en el desarrollo de la tesis, como se muestra en la Figura 1-3, reuniendo los elementos necesarios para continuar en el siguiente capítulo con el análisis de estabilidad del sistema dinámico, el cálculo del esfuerzo de control y el ISE con diferentes condiciones de operación de la planta, y la respuesta dinámica en lazo cerrado bajo la ley de control no lineal.

4.1. Controlabilidad y observabilidad de estados para un modelo dinámico MIMO, $n = 4$

La controlabilidad de estados y la observabilidad sobre un sistema dinámico MIMO son un requisito primordial para desarrollar en primera instancia, una ley de control lineal por realimentación de estados. Las definiciones básicas de controlabilidad y observabilidad, fueron presentadas en el Capítulo 2 - Sección 2.1.2 y se evaluarán sobre la representación lineal en el espacio de estados, descrita en forma matricial por (3.53) - (3.57) donde se modela el reactor CSTR de la Sección 3.1 como un sistema dinámico lineal MIMO. Las trayectorias en el tiempo de las variables de estado ¹ para el modelo dinámico lineal del reactor CSTR se muestran en la Figura 4-1. Utilizando la expresión (3.51), las condiciones iniciales para la evolución de la dinámica linealizada se construyen usando variables de desviación como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{A_4}|_0 = C_{A_4}|_0 - C_{A}|_{op} \\ \bar{C}_{B_4}|_0 = C_{B_4}|_0 - C_{B}|_{op} \\ \bar{C}_{M_4}|_0 = C_{M_4}|_0 - C_{M}|_{op} \\ \bar{T}_4|_0 = T_4|_0 - T_4|_{op} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{A_4}|_0 = 0 \\ C_{B_4}|_0 = C_{B_0} \\ C_{M_4}|_0 = 0 \\ T_4|_0 = T_1 \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

donde las variables de estado del lado derecho de (4.1) notadas con el subíndice (0), corresponden a las condiciones iniciales en el reactor en $t = 0$, tomando $T_{40} = T_0$ de la Tabla 3-2 y $C_{B_{40}} = C_{B_0}$ de la Tabla 3-3. Las variables de estado del lado derecho de (4.1) notadas con el subíndice (*op*) hacen referencia al punto de operación del reactor dado en la Tabla 3-4.

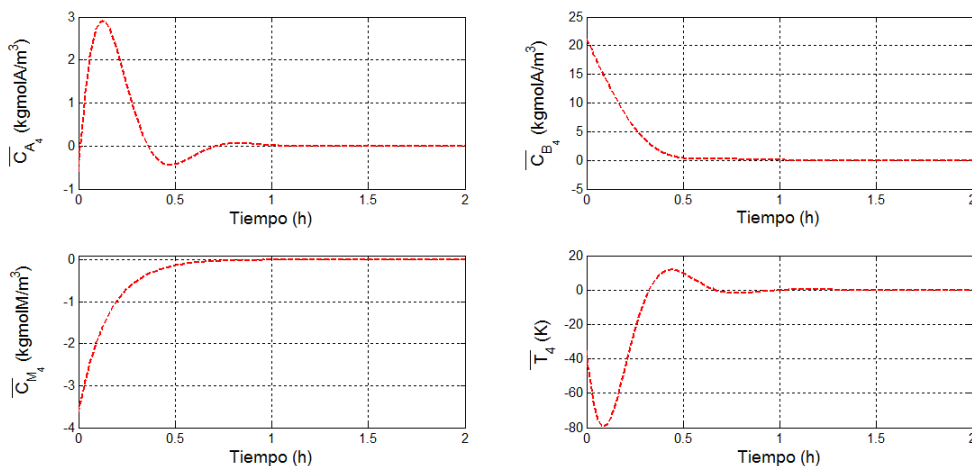


Figura 4-1: Dinámica del modelo lineal MIMO - Reactor CSTR

¹Variabes de desviación

Para comenzar, retomemos el modelo definido en la Sección 3.4 con la matriz de estados (F), la matriz de control (G), la matriz de salidas (H) y la matriz de transmisión directa (D), de dimensiones $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ y $p \times m$, respectivamente, con $n = 4$, $m = 4$ y $p = 4$. En general, para que en un sistema dinámico sea controlable y observable en todos sus estados, se han de cumplir las Definiciones 2.2 y 2.4, expresadas de forma resumida como:

- La matriz de controlabilidad de estados (M), de dimensiones $n \times (n \times m)$, sea de rango $n = 4$.
- La matriz de observabilidad (N), de dimensiones $(n \times p) \times n$, sea de rango $n = 4$.

Antes de verificar la controlabilidad y observabilidad del modelo lineal, se determinará la independencia lineal de la matriz de control (G) examinando su rango; esto se lleva a cabo con el objetivo de verificar la presencia de columnas linealmente dependientes. Si éstas existen, dicho de otro modo, habrá una redundancia en las entradas de control.

El efecto de la entrada redundante puede ser generado sobre el control del sistema por la(s) columna(s) independientes (entradas no redundantes). Por lo tanto, la eliminación de la(s) columna(s) dependiente(s) (entrada(s) de control redundante(s)), no afectará el control del sistema (Chen, 1999). La matriz de control (G) y el vector de control del sistema $\bar{u}(t)$ fueron hallados en la Sección 3.4, con los siguientes resultados:

$$G = \begin{bmatrix} 0,50715 & -0,00579 & -0,01297 & 0 \\ -1,20563 & 0,20289 & -0,72964 & 0 \\ -0,12871 & -0,03477 & 0,45069 & 0 \\ -0,80618 & -0,41460 & -0,44915 & -0,11449 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\bar{u}(t) = [\bar{F}_{A_1} \quad \bar{F}_{B_1} \quad \bar{F}_{M_1} \quad \bar{m}_{E_2}]' \quad (4.3)$$

El rango de la matriz de control (G), calculado con *Matlab 7.10*[®] es $r_G = 4$. Teniendo en cuenta las dimensiones de (G), es evidente que no existen columnas dependientes en la matriz de control G . La matriz de controlabilidad del sistema (M) de (2.5) y la matriz de observabilidad de (2.7), son de dimensiones 4×16 y 16×4 , respectivamente. El rango de las matrices (M) y (N) calculadas según las Definiciones 2.2 y 2.4, es:

$$\begin{cases} rango(M) = 4 \\ rango(N) = 4 \end{cases}$$

En resumen, el modelo dinámico lineal en el espacio de estados está integrado por la matriz de estados (F) de (3.54), la matriz de entradas de control (G) de (3.55), la matriz de salidas (H) de (3.56), la matriz de transmisión directa (D) de (3.56), el vector de estados $\bar{x}(t)$, el vector de salidas $\bar{y}(t)$ y el vector de control $\bar{u}(t)$ de (3.53). El modelo dinámico lineal en (4.4a) y (4.4b), es controlable y observable en todos los estados del sistema.

$$\dot{\bar{x}}(t) = F\bar{x}(t) + G\bar{u}(t) \tag{4.4a}$$

$$\bar{y}(t) = H\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \tag{4.4b}$$

4.2. Ley de control lineal con realimentación de estados para un sistema MIMO - Fundamento teórico

La mayoría de los métodos de control que utilizan la realimentación de estados, son aplicados con mejores resultados en el control de diversos procesos, en comparación a los usados por la teoría de control clásico, siempre y cuando el modelo de la planta describa las cualidades esenciales del sistema a controlar.

En el vasto grupo de técnicas para el diseño de controladores lineales, una de las más populares es el controlador LQR (Regulador lineal - cuadrático, de sus siglas en inglés). Esta metodología plantea una relación directa entre el desempeño dinámico y la acción de control, usando una función conocida como índice de desempeño cuadrático. La finalidad del método LQR es diseñar una ley de control lineal por realimentación de estados $u_L(t)$, que minimiza un índice de desempeño establecido y por ende, el ISE² y el esfuerzo de control, garantizando en todos los casos una dinámica estable en lazo cerrado bajo la ley de control obtenida.

El control lineal óptimo como también se conoce la técnica LQR, requiere del modelo dinámico lineal del sistema a controlar ó una aproximación de la planta real a éste comportamiento, con la suposición de que los estados de la planta están siempre disponibles para su realimentación. De acuerdo al tipo control requerido en la planta, la técnica LQR permite resolver cualquiera de los siguientes problemas (Shieh et al., 1986):

- **Diseño cualitativo del control por regulación:** Encontrar una entrada de control $u_L(t)$ que permita a las salidas del sistema, ajustarse a una referencia dada y llevar a cero sus derivadas temporales.
- **Diseño cualitativo del control por rastreo:** Encontrar una entrada de control $u_L(t)$ que permita a las salidas del sistema o sus derivadas seguir una trayectoria definida.

²Asociado al error de regulación ó rastreo

4.2.1. Ventajas del control lineal óptimo

Algunas ventajas en el uso de control por LQR según (El-Farra & Christofides, 2000), (García-Alvarado & López, 2010) y (Rantzer & Megretski, 1994) son:

- Soluciones numéricas con bajo esfuerzo computacional, debido al uso de una sola ecuación diferencial para el cálculo de la ley de control.
- Aplicabilidad en la solución de problemas de control no lineal. Es común que el diseño de controladores no lineales se reduzca a la solución de una secuencia de problemas de control lineal óptimo (Breakwell et al., 1963), (Kelley, 1962) y (Bellman & Kalaba, 1965).
- Buen desempeño dinámico por parte del sistema de control en el diseño de controladores no lineales, siempre y cuando el modelo de la planta a controlar sea lineal o demuestre una buena aproximación a este comportamiento.
- Proporciona un buen estimado para el diseño de controladores aplicados a sistemas dinámicos no lineales - no autónomos.

A continuación, se presenta un breve repaso teórico de la técnica de diseño de controladores lineales óptimos a través del método LQR³, tomado de (Anderson & Moore, 1989). La deducción completa del método LQR aplicado a sistemas continuos, discretos, variantes e invariantes en el tiempo y de horizonte finito o infinito de optimización, se encuentra detallada en el texto citado anteriormente y en (Ogata, 1997).

4.2.2. Diseño de controladores por el método LQR

Sea un sistema lineal, continuo en el tiempo, de dimensión finita e invariante en el tiempo, descrito por (4.4a) y (4.4b). Donde F , G , H y D son matrices de entradas continuas, con dimensiones $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ y $p \times m$, en su orden. El n - vector $x(t)$, el m - vector $u(t)$ y el p - vector $y(t)$, denotan el estado, la entrada de control y la salida del sistema dinámico en un tiempo t , respectivamente.

El método LQR tiene como objetivo encontrar una ley de control lineal $u_L(t)$ que permite a las salidas $y(t)$ del sistema dinámico ajustarse a unos valores de referencia predeterminados y que sus derivadas temporales sean nulas; para el caso del diseño de un regulador o control por regulación. Considerando el problema de control por regulación a través de la teoría de control clásica, el diseño de la ley de control se lleva a cabo utilizando la realimentación de los estados. Así pues, una ley de control invariante en el tiempo para el sistema de (4.4a) y (4.4b), está dada por:

$$u_L(t) = -Kx(t) \tag{4.5}$$

³El problema a resolver es el diseño de un controlador lineal óptimo por regulación, aplicado en sistemas continuos e invariantes en el tiempo, con un horizonte infinito de optimización.

donde K tiene dimensiones $m \times n$.

4.2.2.1. Error de regulación y esfuerzo de control

La magnitud de la señal de control se calcula por cualquiera de las ecuaciones (1.1) - (1.4). Por otro lado, el error de regulación es obtenido a partir con alguno de los índices de desempeño que consideran el módulo del error, entre ellos la IAE (Integral del error absoluto, de sus siglas en inglés) e ITAE (Integral del tiempo multiplicado por el error absoluto, de sus siglas en inglés):

$$IAE \quad J_D = \int_{t_0}^T |e(t)| dt \quad (4.6)$$

$$ITAE \quad J_D = \int_{t_0}^T |e(t)| t dt \quad (4.7)$$

o los índices de tipo cuadrático (ISE) donde $e(t) = x(t) - x_s$:

$$J_D = \int_{t_0}^T e^2(t) dt \quad (4.8)$$

4.2.2.2. Índice de desempeño cuadrático

Centrando la atención en el índice de desempeño (4.8), es obvio que este no brinda una relación directa entre el índice de desempeño y la acción de control $u(t)$, luego, si se diseña una ley de control óptimo $u_L(t)$ a partir de la minimización de este índice, seguramente habrá un conflicto entre la acción de control demandada y la alcanzable físicamente en la planta. Con una ley de control efectiva, el error de regulación en un tiempo T tiende a cero. La aproximación a dicho comportamiento por parte del sistema de control, está referido por:

$$e(T) = x'(T) A_m x(T) \quad (4.9)$$

con A_m como matriz positiva definida de dimensiones $n \times n$. Así, combinando (1.1), (4.8), (4.9) y el error de regulación en el tiempo $e(t)$ con un horizonte finito de optimización, podemos plantear un índice de desempeño cuadrático que penaliza el error de regulación en el tiempo $t_f = T$ así como el esfuerzo de control y el ISE para un tiempo t , de la siguiente manera:

$$J_D(x_0, u(\cdot), t_0) = x'(T) A_m x(T) + \int_{t_0}^T (x'(t) Q_d x(t) + u'(t) R_d u(t)) dt \quad (4.10)$$

donde la matriz Q_d es simétrica de dimensión n , no negativa, de entradas continuas y pondera el error de regulación al cuadrado, mientras que R_d es una matriz simétrica positiva definida con dimensión m , de entradas continuas y pondera la acción de control. El desarrollo del método LQR se enfocará en encontrar una entrada de control lineal óptima $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$ que minimice el índice de desempeño cuadrático J_D de (4.10).

Omitiendo el tratamiento analítico completo, el primer paso para resolver el problema de control por LQR es hallar la solución de la ecuación diferencial parcial de *Hamilton - Jacobi*, la cual bajo ciertas propiedades de diferenciabilidad permite encontrar la minimización de (4.10) y así, la ley de control lineal óptima deseada. Aunque la solución de la HJE (Ecuación de Hamilton - Jacobi, de sus siglas en inglés) no necesariamente existe, y no todo índice de desempeño la satisface., si existe un índice de desempeño que lo haga, la solución de la ecuación corresponde al control óptimo buscado. Una revisión completa de los métodos para el diseño de controladores basados en el tratamiento de la HJE y el Principio de Optimalidad de Bellman, puede ser encontrada en (Beeler et al., 2000).

4.2.3. Controlador lineal óptimo con tiempo de optimización infinito

Sea el sistema lineal, continuo e invariante en el tiempo descrito por (4.4a) y (4.4b) y las matrices simétricas Q_d no negativa, R_d positiva definida y A_m positiva definida. Tomando el índice de desempeño cuadrático (4.10) que relaciona el esfuerzo de control y el ISE para un horizonte de optimización finito, en (4.11) se define el mismo índice de desempeño, esta vez para un horizonte infinito de control. El objetivo de resolver un problema de control por regulación es encontrar una entrada óptima $u^*(t)$, $t \geq t_0$ que minimice la expresión:

$$J_D(x(t_0), u(\cdot), t_0) = \int_{t_0}^{\infty} (x'(t)Q_dx(t) + u'(t)R_du(t))dt \quad (4.11)$$

En el diseño de controladores para regulación con horizonte de optimización finito el J_D óptimo es siempre finito (Anderson & Moore, 1989). A diferencia del diseño de controladores para regulación con horizonte de optimización infinito, el índice de desempeño J_D puede llegar a ser infinito a causa por ejemplo, de la no controlabilidad de los estados del sistema (4.4a). Por esta razón, para que el problema de control óptimo tenga solución (J_D sea finito), el par F, G debe ser controlable en todos los estados del sistema para cualquier tiempo t . Además, si $T \rightarrow \infty$, $x(T)$ debe tender a 0. En consecuencia, en el índice de desempeño (4.11) se omite el término $x'(T)A_mx(T)$ presente en (4.10).

La solución del problema de control lineal óptimo plantea los siguientes lineamientos:

- Si el índice de desempeño óptimo $J_D^*(x(t))$ existe, tiene la forma $x'(t)P(t)x(t)$, donde $P(t)$ es una matriz simétrica. Si $P(t)$ es no simétrica, puede ser reemplazada por la matriz $(P(t) + P'(t))/2$.
- Suponiendo que $J_D^*(x(t))$ existe, el anterior resultado será usado junto con la teoría de Hamilton - Jacobi para mostrar que P satisface una ecuación diferencial no lineal, llamada la ecuación matricial de Riccati.

4.2.3.1. Ecuación matricial de Riccati

Usando la HJE, se demostrará a continuación que la matriz simétrica $P(t)$ satisface una ecuación matricial conocida como ecuación diferencial de Riccati. Una forma de expresar la HJE según (Lewis & Syrmos, 1995) es:

$$\frac{\partial J_D^*(x(t))}{\partial t} = - \min_{u(t)} \left\{ l(x(t), u(t)) + \left[\frac{\partial J_D^*(x(t))}{\partial x} \right]' f(x(t), u(t)) \right\} \quad (4.12)$$

donde l y f son funciones suaves y continuas de sus argumentos. En nuestro caso, $l(x(t), u(t))$ es $u'(t)R_d u(t) + x'(t)Q_d x(t)$; de 4.2.3, $[(\partial J_D^*/\partial x)(x(t))]'$ es $2x'(t)P(t)$, mientras que $f(x(t), u(t))$ es $Fx(t) + Gu(t)$. El lado izquierdo de (4.12) es simplemente $x'(t)\dot{P}x(t)$. Por consiguiente, la ecuación (4.12) se transforma para el caso especial de un problema de control por regulación en:

$$x'(t)\dot{P}(t)x(t) = - \min_{u(t)} \left[u'(t)R_d u + x'(t)Q_d x + 2x'(t)P(t)Fx + 2x'(t)P(t)Gu(t) \right] \quad (4.13)$$

Debido a que la matriz R_d es positiva definida, el mínimo de (4.13) es:

$$u^*(t) = -R_d^{-1}G'P(t)x(t) \quad (4.14)$$

Finalmente, el problema de control lineal por regulación, resuelto a través de la técnica LQR, permite encontrar una ley de control lineal óptima con la expresión (4.14)⁴ con $K = -R_d^{-1}G'P(t)$ de dimensiones $m \times n$. Para hallar la matriz $P(t)$ de dimensiones $n \times n$, es necesario solucionar la ecuación de Riccati, la cual se obtiene reemplazando (4.14) en la expresión (4.13):

$$-\dot{P} = P(t)F + F'P(t) - P(t)GR_d^{-1}G'P(t) + Q_d \quad (4.15)$$

⁴ $u^*(t) = u_L(t)$

con una condición de frontera dada por $P(T) = A_m$. La solución de la ecuación diferencial de Ricatti tiene dos componentes, un transitorio y otro estacionario. Así, para un tiempo $t = T - \epsilon$ con $\epsilon > 0$ y muy pequeño, la respuesta transitoria de la ecuación está ligada a la condición inicial $P(T)$. Una vez el estado transitorio termina ($t \ll T$), se hace presente el componente estacionario de la solución de (4.15), el cual se puede calcular haciendo $\dot{P} = 0$ en (4.15). De esta forma, se obtiene la ecuación algebraica de Ricatti:

$$P(t)F + F'P(t) - P(t)GR_d^{-1}G'P(t) + Q_d = 0 \quad (4.16)$$

cuya solución es $P(t)$ y hace parte del diseño de la ley de control lineal óptimo de (4.14). La solución $P(t)$ puede ser no única. Sin embargo, con la suposición de controlabilidad del sistema dinámico, la solución $P(t)$ es única si se condiciona además que ésta sea positiva definida y simétrica (Banks et al., 2007); obteniendo así un sistema de control en lazo cerrado siempre estable si Q_d es una matriz definida positiva.

4.3. Control lineal óptimo con realimentación de estados aplicado a un reactor CSTR no isotérmico con intercambio de calor

La sección anterior presentó el fundamento teórico necesario para calcular una ley de control lineal óptimo usando la técnica LQR sobre un sistema dinámico lineal, continuo e invariante en el tiempo con un horizonte infinito de control. A continuación, se aplicará esta técnica en el diseño de un regulador (ley de control lineal) para el modelo físico del reactor CSTR estudiado en el Capítulo 3, cuya linealización alrededor de un punto de operación así lo permite. En síntesis, se encontrará la ley de control lineal que minimiza un índice de desempeño cuadrático de la forma (4.11) y por ende, el esfuerzo de control y el ISE ⁵ del sistema de control.

El modelo lineal en el espacio de estados del reactor CSTR está descrito por el sistema dinámico (4.4a) y (4.4b). En este modelo, la matriz de estados (F), la matriz de control (G), la matriz de salidas (H), la matriz de transmisión directa (D), el vector de estados $x(t)$ y el vector de entradas de control $u(t)$, tienen dimensiones $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$, $p \times n$, $n \times 1$, $m \times 1$, respectivamente; con $n = 4$, $m = 4$ y $p = 4$.

⁵Si bien la expresión (4.10) es función de $x(t)$, cabe recordar que el modelo de las ecuaciones (3.53) - (3.57) usa variables de estado $x(t)$ como variables de desviación $\bar{x}(t) = x(t) - x_{ss}$, es decir, el equivalente al error de regulación.

Para dar solución al problema de control, en primer lugar se especificarán las matrices Q_d y R_d , que penalizan el cuadrado del error y el esfuerzo de control, respectivamente, como se indica en (4.11). Estas matrices son simétricas, positivas definidas, tienen dimensiones n y m en su orden, y están representadas por:

$$Q_d = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix}, R_d = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Los parámetros de penalización en la diagonal de Q_d y R_d se eligen muchas veces de forma intuitiva, teniendo en cuenta los requerimientos del problema de diseño (Beeler et al., 2000); más adelante se hará un pequeño análisis sobre la elección de estos elementos. Enfocando ahora la atención en la matriz $P(t)$ (solución de la ecuación algebraica de Ricatti) en 4.2.3.1, esta tiene la forma:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & p_{1,4} \\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{2,3} & p_{2,4} \\ p_{1,3} & p_{2,3} & p_{3,3} & p_{3,4} \\ p_{1,4} & p_{2,4} & p_{3,4} & p_{4,4} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

la cual es real y simétrica. De esta manera, usando la ecuación matricial algebraica de Riccati de (4.16), el problema de encontrar la ley de control lineal óptimo que minimice el índice de desempeño (4.11) se reduce a calcular los elementos de la matriz $P(t)$ mediante la solución simultánea de una matriz de ecuaciones homogéneas. El grupo de ecuaciones a resolver de acuerdo al sistema MIMO estudiado en el Capítulo 3 con $n = 4$ y $m = 4$ son:

$$\begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} & M_{1,4} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & M_{3,2} & M_{2,4} \\ M_{3,1} & M_{2,3} & M_{3,3} & M_{3,4} \\ M_{4,1} & M_{4,2} & M_{4,3} & M_{4,4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{1*}F_{*1} & P_{1*}F_{*2} & P_{1*}F_{*3} & P_{1*}F_{*4} \\ P_{2*}F_{*1} & P_{2*}F_{*2} & P_{2*}F_{*3} & P_{2*}F_{*4} \\ P_{3*}F_{*1} & P_{3*}F_{*2} & P_{3*}F_{*3} & P_{3*}F_{*4} \\ P_{4*}F_{*1} & P_{4*}F_{*2} & P_{4*}F_{*3} & P_{4*}F_{*4} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} F'_{1*}P_{*1} & F'_{1*}P_{*2} & F'_{1*}P_{*3} & F'_{1*}P_{*4} \\ F'_{2*}P_{*1} & F'_{2*}P_{*2} & F'_{2*}P_{*3} & F'_{2*}P_{*4} \\ F'_{3*}P_{*1} & F'_{3*}P_{*2} & F'_{3*}P_{*3} & F'_{3*}P_{*4} \\ F'_{4*}P_{*1} & F'_{4*}P_{*2} & F'_{4*}P_{*3} & F'_{4*}P_{*4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.19)

donde los subíndices i^* y $*j$ hacen referencia a todas las columnas de la i - ésima fila ó todas las filas de la j - ésima columna para una matriz dada. En la ecuación (4.19), los entradas $M_{i,j}$ corresponden a:

$$M_{i,j} = \sum_{k=1}^m (P_{i^*} \cdot G_{*k}) r_k^{-1} (G'_{k*} \cdot P_{*j})$$

4.3.1. Selección de las ponderados para el esfuerzo de control y error de regulación (R_d y Q_d)

Existen algunos procedimientos documentados para la selección de las matrices que penalizan el cuadrado del error y el esfuerzo de control en el cálculo de una ley de control lineal por medio del método LQR. La mayoría de estas técnicas involucran procesos iterativos y se enfocan principalmente en elegir los pesos del cuadrado del error y el esfuerzo de control como función de las características del sistema dinámico en lazo cerrado, y sus propiedades asintóticas a medida que los parámetros de penalización tiendan a infinito o a cero, como se muestra en (Harvey & Stein, 1978) y (Stein, 1979).

Resumiendo, la elección de Q_d y R_d está gobernada por el estudio de algunos factores según se reporta en (El-Farra & Christofides, 2000), (Garcia-Alvarado & López, 2010), (Doyle & Stein, 1981) y (Anderson & Moore, 1989), tales como:

- Polos en lazo cerrado y el ancho de banda en valores deseados.
- Proporcionar propiedades de robustez mediante la elección de R_d como una matriz diagonal.
- Estudiar la magnitud de las variables más importantes en el sistema dinámico.
- Caracterización y análisis de las incertidumbres en los parámetros de la planta.
- Establecer cotas sobre el ISE en valores deseados de acuerdo a especificaciones de diseño.

El desarrollo de la tesis no profundiza en el estudio de un método óptimo para calcular Q_d y R_d . Sin embargo, para el cálculo de estos parámetros de penalización, se plantearán algunos razonamientos enfocados sobre dos aspectos: En primer lugar, la magnitud de las variables de estado en el sistema dinámico, y en segundo lugar, el intento de obtener un esfuerzo de control e ISE, tal que su aporte sea equitativo en la minimización del índice de desempeño (4.11). Esta paridad permitirá garantizar que la ley de control no solo reduzca el gasto energético del sistema en esfuerzo de control, sino que también conserve un desempeño dinámico adecuado al no permitir que el error de regulación exceda notablemente el esfuerzo de control.

Inicialmente se estudian tres casos considerando a Q_d y R_d como el producto de un escalar (q_d) y (r_d) con la matriz identidad de orden n y m , respectivamente. La condición inicial para (4.4a) con las variables de estado $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ y \bar{x}_4 , que corresponden a las variables de desviación $\bar{C}_{A_4}, \bar{C}_{B_4}, \bar{C}_{M_4}$ y \bar{T}_4 se toma de (4.1). El esfuerzo de control y el ISE del sistema dinámico lineal en lazo cerrado se calculan desde dicha condición inicial hasta el punto de operación del proceso dado en la Tabla 3-4 .

El cálculo de una ley de control por LQR evaluará tres casos diferentes con respecto a q_d y r_d :

1. $q_d = 0,1, r_d = 0,9$ (Ponderado del 10 % para el error de regulación al cuadrado y 90 % para el esfuerzo de control).
2. $q_d = 0,5, r_d = 0,5$ (Ponderado del 50 % para el error de regulación al cuadrado y 50 % para el esfuerzo de control).
3. $q_d = 0,9, r_d = 0,1$ (Ponderado del 90 % para el error de regulación al cuadrado y 10 % para el esfuerzo de control).

La solución del problema de control óptimo usando la técnica LQR con un horizonte infinito de optimización, según se mostró en la Sección 4.2.3, se realiza en base al siguiente algoritmo:

1. Asignar matrices de penalización Q_d y R_d .
2. Hallar $P(t)$ resolviendo la ecuación matricial (4.19) con F y G calculados en (3.54) y (3.55), respectivamente.
3. Calcular la ley de control óptimo con la expresión (4.14).
4. Resolver la dinámica (4.4a) desde $t = 0$ hasta $t = t_f$, con la condición inicial (4.1) para las variables de estado y la ley de control del paso 3).
5. Con las variables de estado para cada t obtenidas en el paso 4), calcular el error de regulación y el esfuerzo de control del sistema dinámico con las expresiones (4.8) y (1.1), en su orden.

Por ende, usando el anterior algoritmo, es posible resolver la ecuación algebraica de Ricatti con la matriz P , que permite calcular la ley de control lineal óptimo de (4.14), la cual minimiza del índice de desempeño cuadrático de (4.11). En las Tablas 4-1 y 4-2 se especifican las posiciones de las matrices P (solución de la ecuación algebraica de Ricatti) y K (matriz de ganancias de la realimentación de estados en la ley de control lineal óptima), para cada uno de los tres grupos de parámetros q_d y r_d propuestos.

La dinámica en lazo cerrado se calcula mediante la expresión (4.20), que resulta de reemplazar la ley de control lineal (4.14) en (4.4a). Los polos de ésta dinámica para cada uno de los parámetros

Tabla 4-1: Solución de la ecuación algebraica de Riccati (4.16) - (P)

	q_d	r_d	q_d	r_d	q_d	r_d
$P_{i,j}$	0.1	0.9	0.5	0.5	0.9	0.1
$p_{1,1}$	12.224		28.001		14.851	
$p_{1,2}$	$-7.4681 \cdot 10^{-3}$		$1.9476 \cdot 10^{-2}$		$1.0413 \cdot 10^{-1}$	
$p_{1,3}$	$5.2807 \cdot 10^{-4}$		$7.6702 \cdot 10^{-3}$		$2.3745 \cdot 10^{-2}$	
$p_{1,4}$	$6.5486 \cdot 10^{-1}$		1.7027		1.1132	
$p_{2,1}$	$-7.4681 \cdot 10^{-3}$		$1.9476 \cdot 10^{-2}$		$1.0413 \cdot 10^{-1}$	
$p_{2,2}$	$7.5650 \cdot 10^{-3}$		$3.7576 \cdot 10^{-2}$		$6.5408 \cdot 10^{-2}$	
$p_{2,3}$	$7.7885 \cdot 10^{-7}$		$6.5778 \cdot 10^{-5}$		$1.1622 \cdot 10^{-3}$	
$p_{2,4}$	$-2.8154 \cdot 10^{-4}$		$1.3027 \cdot 10^{-3}$		$6.3470 \cdot 10^{-3}$	
$p_{3,1}$	$5.2807 \cdot 10^{-4}$		$7.6702 \cdot 10^{-3}$		$2.3745 \cdot 10^{-2}$	
$p_{3,2}$	$7.7885 \cdot 10^{-7}$		$6.5778 \cdot 10^{-5}$		$1.1622 \cdot 10^{-3}$	
$p_{3,3}$	$7.5801 \cdot 10^{-3}$		$3.7863 \cdot 10^{-2}$		$6.7598 \cdot 10^{-2}$	
$p_{3,4}$	$2.2727 \cdot 10^{-5}$		$3.6362 \cdot 10^{-4}$		$1.2834 \cdot 10^{-3}$	
$p_{4,1}$	$6.5486 \cdot 10^{-1}$		1.7027		1.1132	
$p_{4,2}$	$-2.8154 \cdot 10^{-4}$		$1.3027 \cdot 10^{-3}$		$6.3470 \cdot 10^{-3}$	
$p_{4,3}$	$2.2727 \cdot 10^{-5}$		$3.6362 \cdot 10^{-4}$		$1.2834 \cdot 10^{-3}$	
$p_{4,4}$	$3.9155 \cdot 10^{-2}$		$1.1847 \cdot 10^{-1}$		$1.0107 \cdot 10^{-1}$	

de penalización analizados se resumen en la Tabla 4-3. Los polos del sistema se ubican en el semiplano complejo izquierdo con cualquiera de los ponderados q_d y r_d , garantizando la estabilidad de control en lazo cerrado y verificando la solubilidad al problema de minimización del índice de desempeño cuadrático.

$$\dot{\bar{x}} = (F - G \cdot K) \cdot \bar{x}(t) \tag{4.20}$$

Conforme se incrementa la penalización sobre el error de regulación al cuadrado (q_d), los polos en lazo cerrado del sistema dinámico se desplazan a la izquierda en el SCI (Semiplano complejo izquierdo), obteniendo una respuesta más rápida por parte del sistema de control. A medida que (q_d) tiende a cero, los polos del lazo cerrado se aproximan a los valores propios del lazo abierto dados en (3.46).

Tabla 4-2: Ganancias de la realimentación en una ley de control óptimo - (K)

	q_d	r_d	q_d	r_d	q_d	r_d
$K_{i,j}$	0.1	0.9	0.5	0.5	0.9	0.1
$k_{1,1}$	6.3113		25.6070		65.058	
$k_{1,2}$	$-1.4090 \cdot 10^{-2}$		$-7.2968 \cdot 10^{-2}$		$-3.1316 \cdot 10^{-1}$	
$k_{1,3}$	$-8.0793 \cdot 10^{-4}$		$-2.7121 \cdot 10^{-3}$		$9.0530 \cdot 10^{-3}$	
$k_{1,4}$	$3.3431 \cdot 10^{-1}$		1.5328		4.7527	
$k_{2,1}$	$-3.8205 \cdot 10^{-1}$		-1.7289		-5.2727	
$k_{2,2}$	$1.8832 \cdot 10^{-3}$		$1.3937 \cdot 10^{-2}$		$9.9959 \cdot 10^{-2}$	
$k_{2,3}$	$-3.0655 \cdot 10^{-4}$		$-2.9968 \cdot 10^{-3}$		$-2.7844 \cdot 10^{-2}$	
$k_{2,4}$	$-2.2317 \cdot 10^{-2}$		$-1.1746 \cdot 10^{-1}$		$-4.7111 \cdot 10^{-1}$	
$k_{3,1}$	$-4.9674 \cdot 10^{-1}$		-2.2778		-7.5800	
$k_{3,2}$	$-5.8844 \cdot 10^{-3}$		$-5.6450 \cdot 10^{-2}$		$-5.1402 \cdot 10^{-1}$	
$k_{3,3}$	$3.7763 \cdot 10^{-3}$		$3.3507 \cdot 10^{-2}$		$2.8733 \cdot 10^{-1}$	
$k_{3,4}$	$-2.8743 \cdot 10^{-2}$		$-1.5219 \cdot 10^{-1}$		$-6.3896 \cdot 10^{-1}$	
$k_{4,1}$	$-8.3309 \cdot 10^{-2}$		$-3.8990 \cdot 10^{-1}$		-1.2746	
$k_{4,2}$	$3.5816 \cdot 10^{-5}$		$-2.9831 \cdot 10^{-4}$		$-7.2669 \cdot 10^{-3}$	
$k_{4,3}$	$-2.8912 \cdot 10^{-6}$		$-8.3265 \cdot 10^{-5}$		$-1.4694 \cdot 10^{-3}$	
$k_{4,4}$	$-4.9811 \cdot 10^{-3}$		$-2.7129 \cdot 10^{-2}$		$-1.1572 \cdot 10^{-1}$	

Tabla 4-3: Polos en lazo cerrado para el sistema dinámico (4.4a) y (4.4b) para diferentes parámetros de penalización

	q_d	r_d	q_d	r_d	q_d	r_d
Polos	0.1	0.9	0.5	0.5	0.9	0.1
s_1	$-6.9068 + 9.9373 i$		$-11.3985 + 13.4159 i$		$-20.4464 + 21.3934 i$	
s_2	$-6.9068 - 9.9373 i$		$-11.3985 - 13.4159 i$		$-20.4464 - 21.3934 i$	
s_3	-6.5969		-6.7015		-7.2305	
s_4	-6.6202		-6.6039		-6.6104	

El ISE calculado con la expresión (4.8), y la energía que el sistema gasta en esfuerzo de control

obtenido con la ecuación (1.1), para llevar la planta desde un estado inicial dado en (4.1) al punto de referencia de la ley de control, se muestran en la Tabla 4-4. Como es lógico, a medida que la penalización del esfuerzo de control (r_d) es mayor, se minimiza un índice de desempeño teniendo en cuenta principalmente el esfuerzo de control.

De forma similar al caso anterior, según la penalización sobre el error de regulación al cuadrado (q_d) aumenta, el índice de desempeño se minimiza en función de esta magnitud.

Tabla 4-4: Esfuerzo de control e ISE - Condición inicial (4.1)

	q_d	r_d	q_d	r_d	q_d	r_d
	0.1	0.9	0.5	0.5	0.9	0.1
Esfuerzo de control	14.5736	165.500	750.7966			
ISE	724.0981	327.3657	136.734			

En la Figura 4-2, es posible obtener por simple inspección el esfuerzo de control y el ISE del sistema dinámico en lazo cerrado de la expresión (4.20) con la condición inicial de (4.1), para diferentes valores de los parámetros de penalización q_d y r_d .

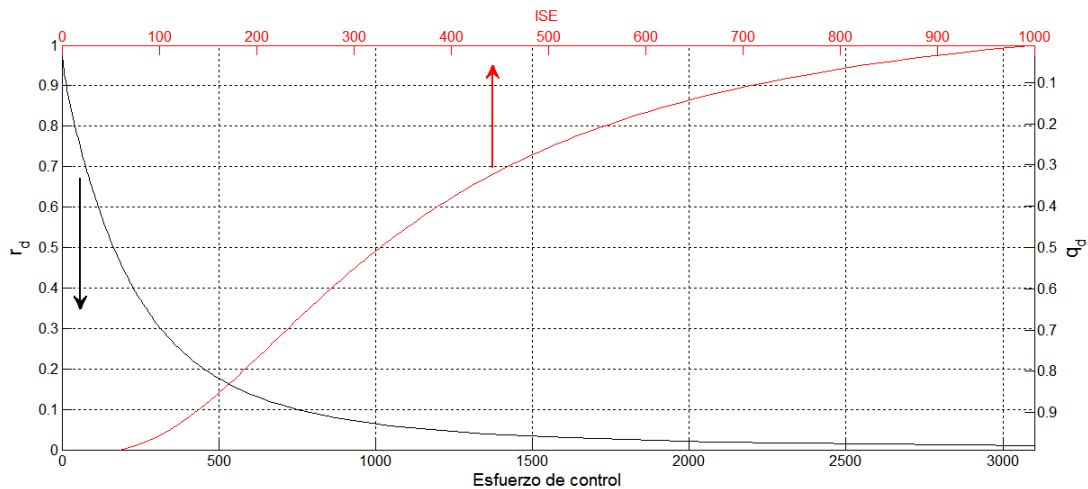


Figura 4-2: Esfuerzo de control e ISE para diferentes q_d y r_d - Condición inicial (4.1)

La respuesta temporal en lazo cerrado para las variables de estado \bar{x}_{1_0} y \bar{x}_{4_0} es mostrada en las Figuras 4-3 y 4-4. En esta parte del estudio se consideran las variables de estado mencionadas como aquellas de mayor importancia para el reactor CSTR, dado que describen la concentración del reactivo (A) en la salida del equipo \bar{C}_{A_4} y la temperatura de reacción \bar{T}_4 en variables de desviación. La trayectoria en el tiempo para cada una de las variables controladas - ecuación (3.53) - se muestran en la Figura 4-5 para la ley de control lineal propuesta con las diferentes matrices

de ganancias de la realimentación dadas en la Tabla 4-2. Cabe anotar que debido al cambio de parámetros (matriz de ganancias (K)) en la ley de control lineal óptima, y a que la acción de control mostrada es la necesaria para llevar el reactor desde las condiciones iniciales de las Tablas 3-2 - 3-3 hasta el estado punto de operación de la Tabla 3-4 en ausencia de perturbaciones, es decir, la acción de control requerida para el estado transitorio inicial del proceso; dichas acciones de control tienen puntos diferentes de arranque en $t = 0$.

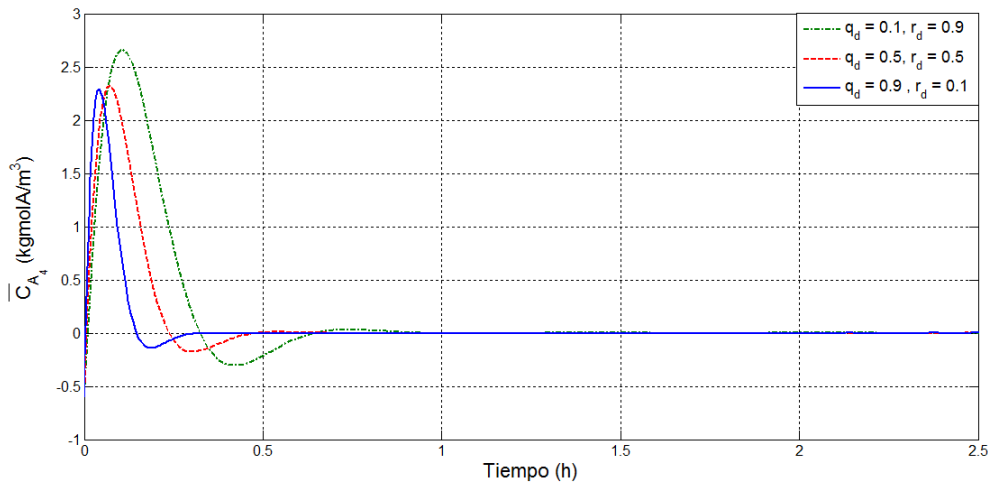


Figura 4-3: Dinámica en lazo cerrado (Concentración del reactivo (A) en variables de desviación) para diferentes leyes de control lineal - Condición inicial (4.1) - Punto de operación (Tabla 3-4)

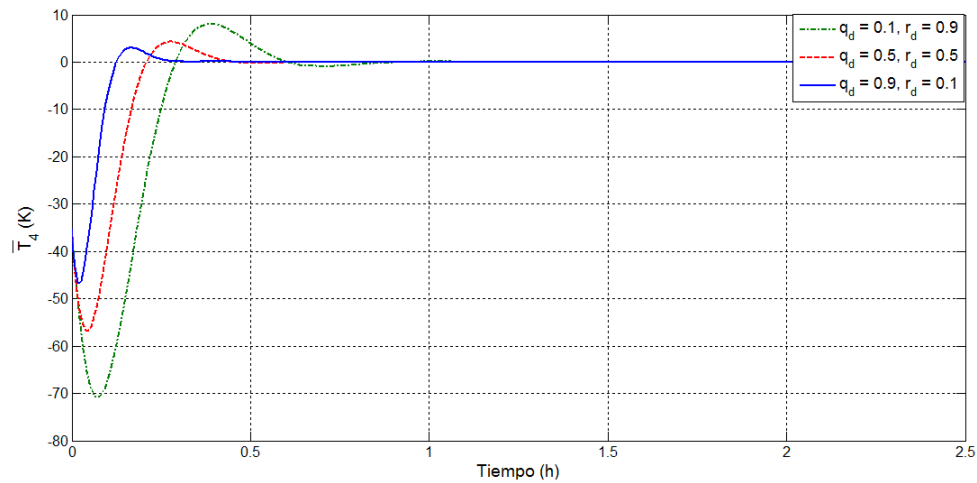


Figura 4-4: Dinámica en lazo cerrado (Temperatura del reactor en variables de desviación) para diferentes leyes de control lineal - Condición inicial (4.1) - Punto de operación (Tabla 3-4)

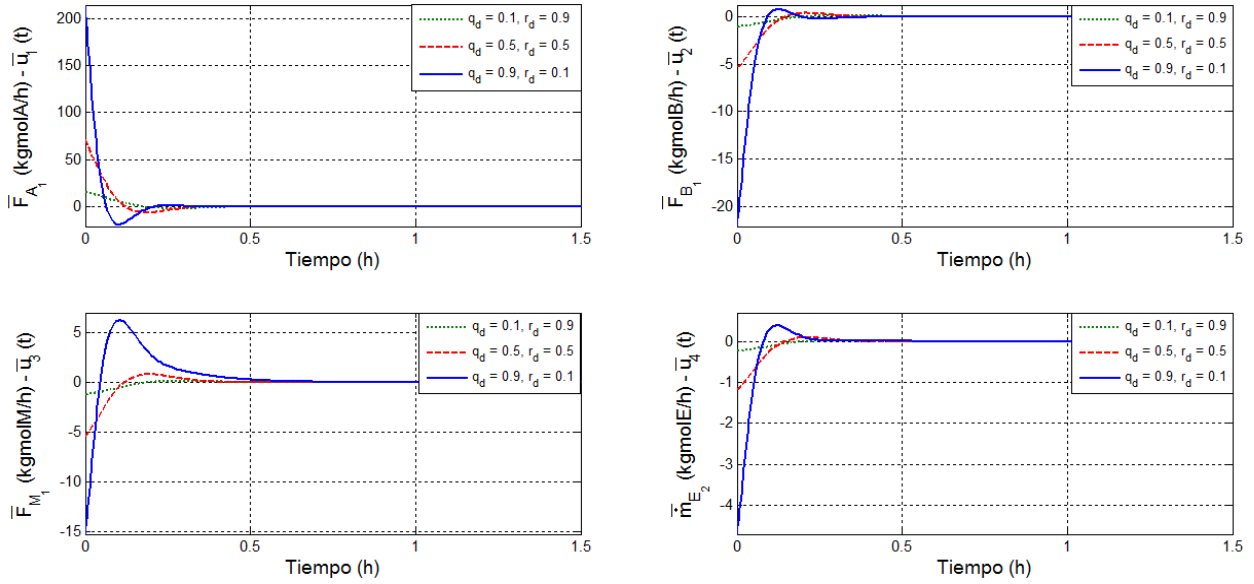


Figura 4-5: Entradas de control $\bar{u}(t)$ (Variables de desviación) para diferentes leyes de control lineal - Condición inicial (4.1) - Punto de operación (Tabla 3-4)

Un patrón común en el comportamiento dinámico de las variables de estado \bar{C}_{A_4} y \bar{T}_4 con diferentes parámetros de penalización q_d y r_d , y por ende diferentes matrices de ganancias de la realimentación, es el tiempo necesario para alcanzar la referencia del sistema de control $x_r = 0$; alrededor de 1,3 h. Sin embargo, la respuesta del sistema dinámico en lazo cerrado es más rápida para la ley de control cuya matriz (K) se calcula a partir de la minimización que reduce principalmente el ISE, es decir $q_d = 0,9$ y $r_d = 0,1$.

La tendencia general en el diseño de la ley de control lineal por el método LQR obedece a una respuesta dinámica rápida con $q_d \gg r_d$, obteniendo menor ISE y una matriz de ganancias con elementos de mayor magnitud, comparados a los calculados para el caso $q_d \ll r_d$. De forma análoga, la respuesta dinámica es más lenta a medida que el índice de desempeño se minimiza restringiendo principalmente el esfuerzo de control, es decir para $q_d \ll r_d$, ocasionando como efecto colateral un ISE alto. Dicho esto, aunque la simulación muestra que el sistema dinámico es capaz de aproximarse a la referencia ($x_r = 0$), entra a jugar la disponibilidad de una acción de control asociada por ejemplo al diseño de los elementos finales de control; capaz de llevar al sistema al punto de referencia en el caso $q_d \ll r_d$ o que tanto error de regulación se permita en el diseño del controlador con $q_d \gg r_d$; todo esto sin perder la descripción real de la planta.

El gasto de energía en esfuerzo de control, calculado con (1.1) y la ley de control lineal por realimentación de estados (4.14) con diferentes matrices de ganancias de la realimentación (K) calculadas con la técnica LQR, se puede analizar directamente en la Figura 4-5. El aumento en el parámetro de penalización sobre el error de regulación al cuadrado (q_d) ocasiona que se requiera un

mayor esfuerzo de control para llevar el sistema dinámico al punto de referencia propuesto, hecho evidente en la magnitud más elevada para las entradas de control (\bar{F}_{A_1} , \bar{F}_{B_1} , \bar{F}_{M_1} y \bar{m}_{E_2})⁶, para el caso ($q_d = 0,9$ y $r_d = 0,1$). La magnitud de las entradas de control es menor en el diseño con los parámetros de penalización ($q_d = 0,1$ y $r_d = 0,9$), y por ende, se requiere un menor esfuerzo de control en comparación al caso $q_d \gg r_d$.

Todo el conjunto de las observaciones realizadas llevan a inferir que sería conveniente asignar una penalización equivalente entre q_d y r_d , con el objetivo de minimizar un índice de desempeño en iguales proporciones para el esfuerzo de control y el ISE. Sin embargo, en la Tabla 4-4 se muestra que a pesar de esta asignación ($q_d = 0,5$ y $r_d = 0,5$) aún no es posible obtener un ISE y un esfuerzo de control con dichas características.

Finalmente, retomando la Figura 4-1, es evidente la diferencia entre la magnitud de las variables de estado, comportamiento relacionado directamente con el error de regulación del sistema dinámico. Continuando el análisis de las variables de estado, se puede suponer que penalizar el error de regulación sobre el esfuerzo de control para las variables de mayor magnitud, y penalizar el esfuerzo de control sobre el error de regulación para las variables de estado de menor magnitud, conducirá a minimizar el índice de desempeño cuadrático en (4.11) con proporciones equivalentes entre el esfuerzo de control y el ISE. Con esta suposición, se asignan los siguientes parámetros de penalización para el cálculo de la ley de control óptima por LQR:

$$Q_d = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}, R_d = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

La matriz P , solución de la ecuación algebraica de Ricatti (4.16) con Q_d y R_d de (4.21), es:

$$P = \begin{bmatrix} 40,833 & 4,3467 * 10^{-2} & 8,8628 * 10^{-3} & 2,5687 \\ 4,3467 * 10^{-2} & 5,6259 * 10^{-2} & 1,0763 * 10^{-4} & 2,7217 * 10^{-3} \\ 8,8628 * 10^{-3} & 1,0763 * 10^{-4} & 3,7863 * 10^{-2} & 4,3058 * 10^{-4} \\ 2,5687 & 2,7217 * 10^{-3} & 4,3058 * 10^{-4} & 1,8647 * 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Reemplazando (4.22) en (4.14), obtenemos la la matriz de ganancias de la realimentación de esta-

⁶Las entradas de control en adelante se expresan como variables de desviación ($\bar{u}_i(t) = u_i(t) - u_{i_{ref}}$). Las entradas de control de referencia ($u_{i_{ref}}$) para F_{A_1} , F_{B_1} , F_{M_1} y \dot{m}_{E_2} , están dadas en la Tabla 3-2.

dos para la ley de control lineal óptimo:

$$K_f = \begin{bmatrix} 30,973 & -7,9986 * 10^{-2} & -1,4261 * 10^{-3} & 1,9150 \\ -5,1720 & 4,0123 * 10^{-2} & -6,0983 * 10^{-3} & -3,6661 * 10^{-1} \\ -3,4226 & -8,5574 * 10^{-2} & 3,3355 * 10^{-2} & -2,3775 * 10^{-1} \\ -2,9410 & -3,1162 * 10^{-3} & -4,9299 * 10^{-4} & -2,1349 * 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Los polos del sistema dinámico en lazo cerrado con la matriz de ganancias 4.23 y las matrices de estado (F) de (3.54) y de control (G) en (3.55) son:

$$\lambda = \left\{ \begin{array}{l} -12,710 + 14,523i \\ -12,710 - 14,523i \\ -6,7272 \\ -6,6016 \end{array} \right\}$$

con $Re(\lambda) < 0$, obteniendo así una dinámica en lazo cerrado estable. El esfuerzo de control calculado integrando numéricamente (1.1) es 235,793, y el ISE según (4.8) es 275,331, para Q_d y R_d de (4.21), y la condición inicial (4.1). La magnitud similar confirma la validez del razonamiento propuesto en base a la asignación de los parámetros que penalizan el error y el esfuerzo de control con el análisis sobre las variables de estado.

La dinámica en lazo cerrado con la ley de control (4.14), la matriz de ganancias de la realimentación (4.23) y la condición inicial del sistema (4.1), se muestra en la Figura 4-6. Con estos parámetros, las entradas de control $\bar{u}_i(t)$ de (3.53) se muestran en la Figura 4-7.

4.3.2. Esfuerzo de control e ISE en el espacio de estados - Sistema MIMO, $n = 4$

Finalmente, tomando la ley de control lineal de la expresión (4.14) con la matriz de ganancias de la realimentación en (4.23), se mostrará el esfuerzo de control y el ISE en un intervalo de condiciones iniciales sobre el espacio de estados. Este rango de condiciones iniciales \bar{x}_{i0} se fija teniendo en cuenta dos aspectos: En primer lugar, las restricciones operativas del modelo establecidas en (3.39) de la Sección 3.2.2, considerando el límite práctico de estabilidad del reactor de 355,37 K, y en segundo lugar, el punto de operación sobre el cual el modelo lineal del reactor fue establecido, dado en la Tabla 3-4. Siguiendo estos dos aspectos se define un rango en el espacio de estados:

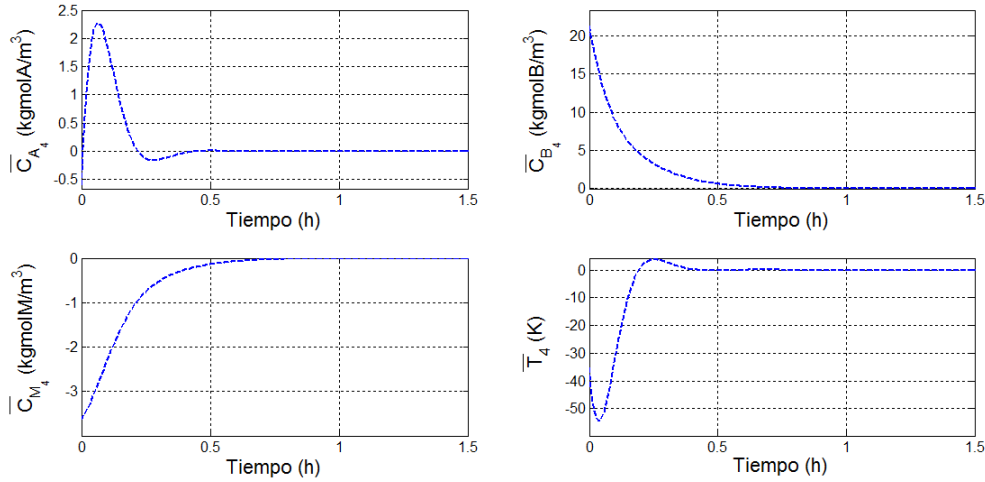


Figura 4-6: Dinámica de lazo cerrado con una ley de control lineal óptima - Modelo linealizado reactor CSTR

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_{10} = C_{A4}|_0 - C_{A}|_{op} \\ \bar{x}_{20} = C_{B4}|_0 - C_{B}|_{op} \\ \bar{x}_{30} = C_{M4}|_0 - C_{M}|_{op} \\ \bar{x}_{40} = T_4|_0 - T_4|_{op} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -0,6056 \leq \bar{x}_{10} \leq 4,2627 \\ -34,0516 \leq \bar{x}_{20} \leq 9,8062 \\ -3,6354 \leq \bar{x}_{30} \leq 2,70156 \\ -35,338 \leq \bar{x}_{40} \leq 22 \end{array} \right\} \quad (4.24)$$

La Figura 4-8 muestra el esfuerzo de control y el ISE en las ordenadas como función de la condición inicial para cada variable de estado \bar{x}_{i0} , evaluada de forma independiente.

El esquema presentado permite determinar el esfuerzo de control total y el ISE total para el sistema cuando cambian las condiciones iniciales de integración en la dinámica de lazo cerrado. Examinando estos resultados se puede observar que en todo el barrido sobre la condición inicial \bar{x}_{30} , tanto el esfuerzo de control como el ISE varían en un intervalo más cerrado, a diferencia de las otras condiciones iniciales en las variables de estado. Esto muestra la importancia de analizar la magnitud de las variables de estado en el diseño de una ley de control lineal usando LQR.

4.4. Ley de control no lineal por realimentación de estados para un sistema MIMO

La parte final del capítulo desarrolla el planteamiento algebraico básico de la ley de control no lineal por realimentación de estados, obtenida por incorporar un término no lineal (perturbación cúbica) en la ley de control lineal por realimentación de estados, calculada a lo largo de la Sección 4.3.

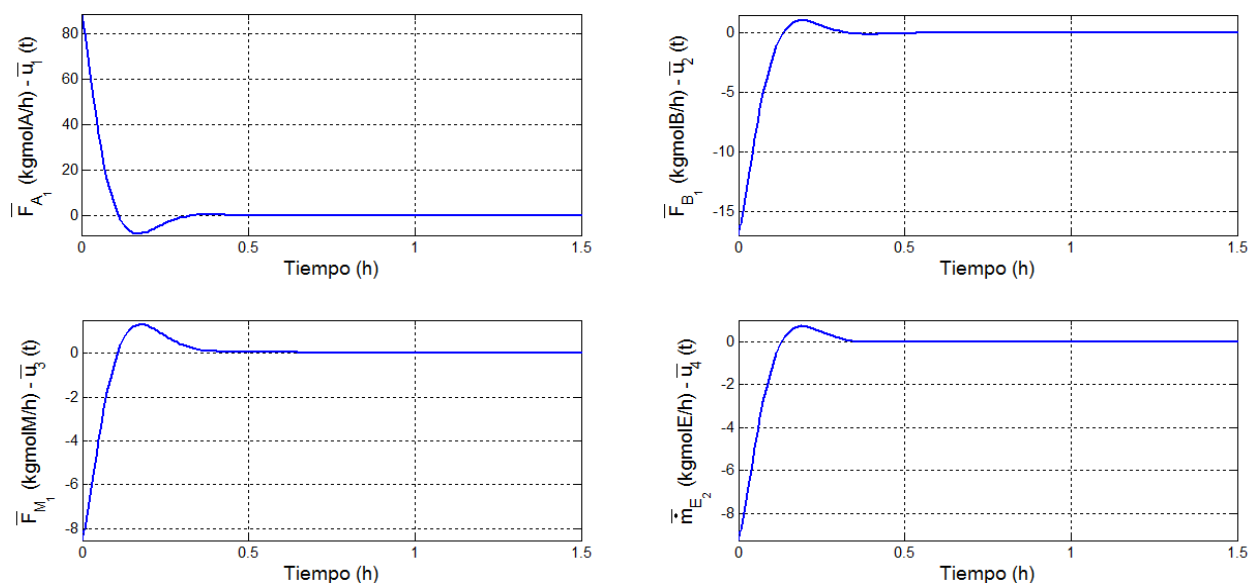


Figura 4-7: Entradas de control $\bar{u}(t)$ (Variables de desviación) con la ley de control óptima (4.23) - Modelo linealizado reactor CSTR

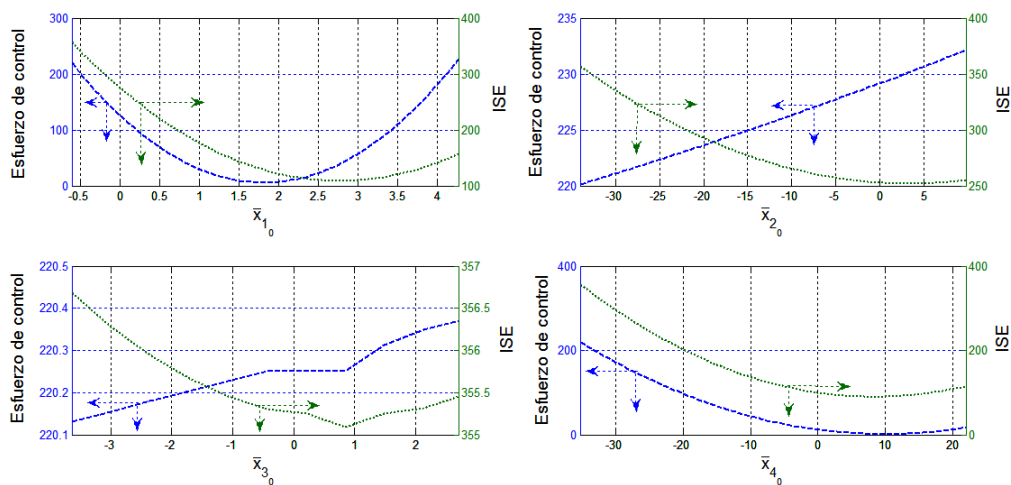


Figura 4-8: Esfuerzo de control e ISE para diferentes condiciones iniciales en las variables de estado - Modelo linealizado reactor CSTR

El sistema dinámico lineal no forzado MIMO está definido en el espacio de estados por:

$$\dot{\bar{x}} = F\bar{x}(t) + G\bar{u}(t) \quad (4.25a)$$

$$\bar{y}(t) = H\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \quad (4.25b)$$

donde la matriz de estados (F), matriz de entradas de control (G), matriz de salidas (H), matriz

de transmisión directa (D) tienen dimensiones $n \times n, n \times m, n \times n, p \times n, p \times m$. Los vectores de estado, control y salidas: $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n, \bar{u}(t) \in \mathbb{R}^m, \bar{y}(t) \in \mathbb{R}^p$.

La entrada de control lineal ⁷ en (4.25a) tiene la forma general:

$$\bar{u}_L(t) = -K_f \cdot \bar{x}(t) \tag{4.26}$$

donde K_f es la matriz de ganancias de la realimentación con dimensiones $m \times n$, calculada usando el método LQR. Ahora, modificando la ley de control lineal (4.26) con un término no lineal expresado por (4.27).

$$\bar{u}_{NL}(t) = \psi(t, \bar{x}(t)) \tag{4.27}$$

donde $\psi : [0, \infty] \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función sin memoria, no – lineal, variante en el tiempo y continua en t . La expresión de la ley de control no lineal con la perturbación cúbica tiene la forma:

$$\bar{u}_{NL}(t) = -K_f \cdot \bar{x}(t) + \alpha \cdot \bar{x}^3(t) \tag{4.28}$$

La matriz α es de orden $m \times n$ y el término $\bar{x}^3(t)$ es un n – vector compuesto por las variables de estado $\bar{x}_i(t)$ elevadas a la tercera potencia. Finalmente, el sistema en lazo cerrado para un modelo n – dimensional bajo la ley de control no lineal de la ecuación (4.28) se calcula a través de:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sum_{i=1}^n F_{1,i}x_i(t) + \sum_{j=1}^m G_{1,j} \left(\sum_{i=1}^n -K_{j,i}x_i(t) + \alpha_{j,i}x_i^3(t) \right) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \sum_{i=1}^n F_{n,i}x_i(t) + \sum_{j=1}^m G_{n,j} \left(\sum_{i=1}^n -K_{j,i}x_i(t) + \alpha_{j,i}x_i^3(t) \right) \end{aligned} \tag{4.29}$$

En el siguiente capítulo se analizará la estabilidad del sistema dinámico no lineal (4.29). En síntesis, se demostrará la tesis principal del trabajo, comprobando qué tan efectiva es la aplicación de perturbaciones cúbicas a sistemas lineales controlados por realimentación de estados, con el objetivo final de diseñar una ley de control no lineal $\bar{u}_{NL}(t)$ que reduzca el esfuerzo de control sin modificar sustancialmente el comportamiento dinámico de la planta, en comparación al esfuerzo de control y desempeño dinámico proporcionados por la entrada de control lineal $\bar{u}_L(t)$.

⁷ $\bar{u}_L(t) = \bar{u}(t)$

4.5. Conclusiones

- Se corroboraron las condiciones de controlabilidad de estados y observabilidad sobre el modelo dinámico lineal en el espacio de estados que describe un reactor CSTR no isotérmico en estado no estacionario. Un sencillo análisis algebraico del modelo lineal determinó la independencia lineal de la matriz de control (G). El modelo dinámico lineal se conformó por la matriz de estados (F) de (3.54), la matriz de control (G) de (3.55), la matriz de salidas (H) (3.56), la matriz de transmisión directa (D) de (3.57), el vector de estados $\bar{x}(t)$, el vector de salidas $\bar{y}(t)$ y el vector de control $\bar{u}(t)$ de (3.53).
- Se formuló una ley de control óptima lineal usando la técnica LQR de la Sección 4.2, con diferentes matrices de ganancias (K) de la realimentación de estados, usando tres grupos diferentes de parámetros (q_d y r_d) que penalizan el error de regulación al cuadrado y el esfuerzo de control, respectivamente. Los resultados fueron consignados en las Tablas 4-1 - 4-2 y se obtuvieron siguiendo el algoritmo de cálculo propuesto en 4.3.1.
- Con la ley de control lineal óptima para diferentes matrices de ganancias (K) calculadas se observó que el aumento en la penalización del error de regulación al cuadrado (q_d), hizo que los polos en lazo cerrado del sistema dinámico se desplazaran a la izquierda en el SCI (Semiplano complejo izquierdo), obteniendo una respuesta más rápida por parte del sistema de control y así un ISE cada vez menor. A medida que la penalización del esfuerzo de control (r_d) aumentó, la magnitud del ISE sobrepasó el valor del esfuerzo de control calculado.
- El análisis de la ley de control lineal óptima con matrices de ganancias (K) distintas, permitió establecer un comportamiento general en el diseño de una ley de control lineal por LQR: Una respuesta dinámica rápida se obtuvo con $q_d \gg r_d$. La respuesta dinámica fue más lenta a medida que el índice de desempeño se minimizó restringiendo principalmente el esfuerzo de control, es decir para $q_d \ll r_d$, derivando en un ISE alto. En este tipo de diseño se debe tener en cuenta disponibilidad de una acción de control capaz de llevar al sistema al punto de referencia en el caso $q_d \ll r_d$, o qué tanto error de regulación se permita en el diseño del controlador con $q_d \gg r_d$.
- Con el estudio de la magnitud de las variables de estado en el sistema dinámico, fueron asignados parámetros de penalización q_d y r_d para el diseño de una ley de control lineal con LQR que permitió garantizar no solo la reducción del gasto energético del sistema en esfuerzo de control, sino también un desempeño dinámico adecuado evitando que el ISE exceda notablemente el esfuerzo de control. Con la ley de control diseñada, finalmente se obtuvieron un esfuerzo de control de 235,793 y un error de regulación de 275,331. La matriz de ganancias de la realimentación para ley de control final se indicó en (4.23) y al igual que las tres matrices calculadas anteriormente, proporcionó estabilidad en lazo cerrado al sistema dinámico. Los parámetros de penalización asignados se establecieron en 4.21.

- Retomando las restricciones operativas del modelo dinámico no lineal establecidas en (3.39) y el punto de operación de la Tabla 3-4 sobre el cual se modeló el reactor, se definió un rango en el espacio de estados sobre el cual se calculó el esfuerzo de control y el ISE para diferentes condiciones iniciales de las variables de estado usando la ley de control lineal (4.5) con la matriz de ganancias (4.23). Los resultados encontrados en este intervalo, servirán como punto de comparación cuando sean calculados los mismos parámetros usando una ley de control no lineal.
- Se presentó la formulación general de la ley de control no lineal - ecuación (4.28), obtenida por la introducción de una no - linealidad en la ley de control lineal - ecuación (4.26) - desarrollada a lo largo del capítulo. La expresión general para la dinámica en lazo cerrado de un sistema dinámico lineal MIMO usando la ley de control no lineal propuesta, fue establecida en (4.29).

CAPÍTULO 5

Esfuerzo de control e ISE con una ley de control no lineal sobre el sistema lineal MIMO - Reactor CSTR - Análisis de estabilidad absoluta

La primera sección del capítulo presenta las herramientas necesarias para evaluar la estabilidad de sistemas dinámicos MIMO continuos e invariantes en el tiempo. Utilizando el criterio de estabilidad de Popov y el concepto de no linealidad de sector, se establecen condiciones básicas sobre la matriz α , para formular finalmente una ley de control no lineal $u_{NL}(t)$ expresada como (4.28), de forma que se reduzca el esfuerzo de control comparado al producido con una ley de control lineal $u_L(t)$, preservando la estabilidad de la dinámica en lazo cerrado.

En la segunda parte del capítulo, el esfuerzo de control y la medida del error acumulado a través del ISE, son calculados para el sistema dinámico MIMO correspondiente al modelo linealizado del reactor CSTR, utilizando la ley de control lineal $u_L(t)$ hallada en el Capítulo 4, y la ley de control no lineal que se propone en este capítulo. Se comparan los resultados obtenidos con las dos entradas de control y tomando algunos ejemplos, se muestra la efectividad de la técnica de control no lineal $u_{NL}(t)$ en la reducción del esfuerzo de control, sin alterar el comportamiento dinámico de forma significativa. Usando el concepto de no linealidad de sector, en esta sección del capítulo se establecen algunas cotas sobre las no linealidades (perturbación cúbica).

Finalmente, se muestra la aplicación del criterio de estabilidad de Popov utilizando las cotas para los elementos no lineales, establecidas en la sección anterior. Un procedimiento general para caracterizar la estabilidad de un sistema dinámico MIMO en lazo cerrado del tipo (4.29) es presentado.

De esta forma, se completarán la tercer y cuarta etapa del esquema de la Figura 1-3, cumpliendo con el objetivo del trabajo, al evaluar el efecto de la perturbación cúbica sobre el gasto de energía en esfuerzo de control y el comportamiento dinámico para un sistema dinámico MIMO con

realimentación de estados.

5.1. Análisis de estabilidad absoluta para sistemas dinámicos realimentados

Los conceptos teóricos necesarios para analizar la estabilidad de sistemas dinámicos realimentados, usando el enfoque de estabilidad absoluta propuesto en (Popov, 1962) para sistemas SISO y extendido para sistemas MIMO en (Moore & Anderson, 1968), conocido como el criterio de estabilidad absoluta de Popov, serán planteados en la primera parte de esta sección. El desarrollo detallado de la técnica se muestra en (Khalil, 1996), (Gasparyan, 2008) y (Liao & Yu, 2008). Luego de revisar la teoría del criterio de estabilidad, se establecerán las condiciones básicas sobre la matriz α de la ley de control no lineal (4.28), con el objetivo de reducir el esfuerzo de control, preservando la estabilidad del sistema dinámico MIMO en lazo cerrado de (4.29); en comparación al comportamiento obtenido bajo la ley de control lineal $u_L(t)$ de (4.5) y la matriz de ganancias K de (4.23).

5.1.1. Criterio de estabilidad absoluta para sistemas dinámicos realimentados

Algunos sistemas dinámicos no lineales realimentados pueden ser representados por el esquema de la Figura 5-1, donde el componente de alimentación directa es un sistema lineal e invariante en el tiempo, en tanto que el componente realimentado es una función no lineal de los estados $x(t)$ o salidas $y(t)$ del sistema dinámico, y continua en el tiempo.

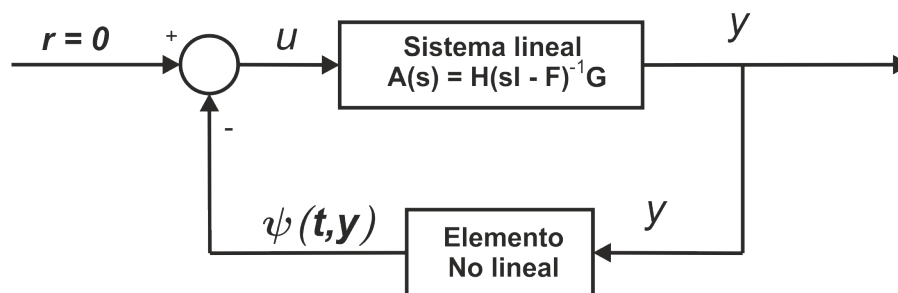


Figura 5-1: Esquema de conexión de un sistema lineal y un elemento no lineal

Según la Figura **5-1**, el comportamiento dinámico no forzado del sistema lineal está dado por:

$$\dot{x} = Fx(t) + Gu(t) \quad (5.1a)$$

$$y = Hx(t) \quad (5.1b)$$

donde F , G y H son matrices de dimensión $n \times n$, $n \times m$ y $p \times n$, respectivamente, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, el par (F, G) es controlable y el par (F, H) es observable. La entrada de control $u(t)$ en el sistema (5.1a) se expresa como:

$$u(t) = -\psi(t, y) \quad (5.2)$$

La función $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ es no – lineal, variante en el tiempo, localmente Lipschitz en y y continua en t . La matriz de funciones de transferencia del sistema dinámico (5.1a) - (5.1b) está dada por:

$$A(s) = H(sI - F)^{-1}G \quad (5.3)$$

Se supone que la matriz de funciones de transferencia de (5.3) es cuadrada y estrictamente propia¹, es decir $p = m$. Los requerimientos de controlabilidad y observabilidad del modelo dinámico aseguran que la matriz de estado (F), la matriz de estados (G) y la matriz de salidas (H), sean una realización mínima de la matriz de funciones de transferencia $A(s)$.

Enfocando ahora la atención en la función no lineal $\psi(\cdot, \cdot)$ de la realimentación en (5.2), se requiere que la no linealidad esté acotada por una condición de sector, es decir sea una *no - linealidad de sector*. La condición de sector para modelos dinámicos SISO², expresada como $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se satisface si existen constantes η , β y a y b con $(\beta > \eta)$ y $(a < 0 < b)$ tal que:

$$\eta y^2 \leq y\psi(t, y) \leq \beta y^2, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y \in [a, b] \quad (5.4)$$

Si la condición del sector (5.4) es válida para una función no lineal $\psi(\cdot, \cdot)$ en $y \in (-\infty, \infty)$, entonces la no - linealidad satisface la condición de sector globalmente. La Figura **5-2** muestra la no linealidad del sector cuando (5.4) se satisface globalmente (Izquierda) y cuando se satisface en un dominio finito (Derecha).

¹Orden del numerador (m_A) menor al orden del denominador (n_A)

² $m = 1$ y $p = 1$.

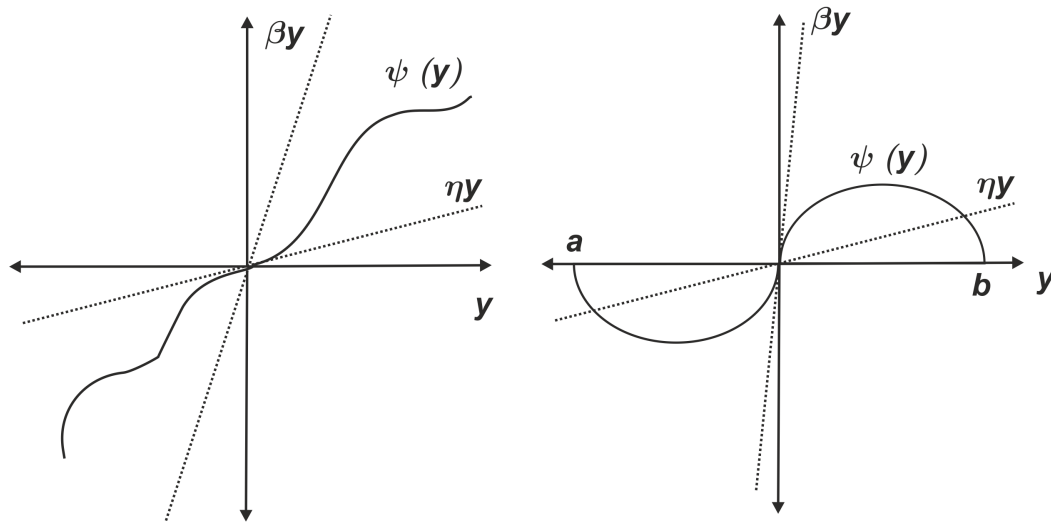


Figura 5-2: Esquema de una no linealidad de sector - Global (Izquierda) - Local (Derecha)

Si la desigualdad (5.4) se cumple globalmente, entonces la función no lineal $\psi(\cdot, \cdot)$ pertenece al sector $[\eta, \beta]$. Según los signos (\leq o $<$) en la desigualdad (5.4), la no linealidad puede pertenecer al sector $(\eta, \beta]$, $[\eta, \beta)$ o (η, β) , según sea el caso. A partir de la expresión (5.4), se puede verificar la siguiente desigualdad:

$$[\psi(t, y) - \eta y] [\psi(t, y) - \beta y] \leq 0, \forall t \geq 0, \forall y \in [a, b] \quad (5.5)$$

En el caso multivariable (sistemas MIMO), si u y y son vectores m o p dimensionales, la condición de sector se formula según la expresión (5.6), suponiendo que la no - linealidad $\psi(t, y)$ está desacoplada en el sentido de que $\psi_i(t, y)$ depende solamente de y_i , es decir:

$$\psi(t, y) = \begin{bmatrix} \psi_1(t, y_1) \\ \psi_2(t, y_2) \\ \vdots \\ \psi_p(t, y_p) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Si cada componente $\psi_i(\cdot, \cdot)$ de (5.6) satisface la condición de sector (5.4) con constantes η_i, β_i, a_i y b_i , éstas pueden agruparse de forma matricial como ³:

$$K_{min} = diag(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n), \quad K_{max} = diag(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

³Las matrices K_{min} , K_{max} y K_c no tienen ningún tipo de relación con la matriz de ganancias de la realimentación K , mencionada desde el principio de la tesis.

y

$$\Gamma = \{y \in \mathbb{R}^p \mid a_i \leq y_i \leq b_i\}$$

De esta manera, la condición de sector (5.4) se formula para el caso multivariable como:

$$[\psi(t, y) - K_{min}y]' [\psi(t, y) - K_{max}y] \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y \in \Gamma \quad (5.7)$$

donde $K_{max} - K_{min}$ es una matriz diagonal y positiva definida. La siguiente definición resume la condición del sector, para sistemas dinámicos SISO y MIMO.

Definición 5.1. Una no linealidad $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, satisface una condición de sector si:

$$[\psi(t, y) - K_{min}y]' [\psi(t, y) - K_{max}y] \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p \quad (5.8)$$

para cualquier matriz real K_{min} y K_{max} , donde $K_c = K_{max} - K_{min}$ es una matriz simétrica positiva definida y el interior de Γ está conectado y contiene el origen. Si $\Gamma = \mathbb{R}^p$, entonces $\psi(\cdot, \cdot)$ satisface la condición de sector globalmente, es decir $\psi(\cdot, \cdot)$ pertenece al sector $[K_{min}, K_{max}]$. Si (5.8) cumple estrictamente la desigualdad, entonces $\psi(\cdot, \cdot)$ pertenece al sector (K_{min}, K_{max}) .

Para cualquier no - linealidad que satisface la condición de sector (5.8), el origen es un punto de equilibrio del sistema (5.1). Si la condición de sector (5.8) se satisface globalmente y el origen es globalmente asintóticamente estable, el sistema dinámico tendrá *estabilidad absoluta global*. De otra forma, si la condición de sector se satisface localmente y el origen es uniformemente asintóticamente estable, el sistema dinámico tendrá *estabilidad absoluta con dominio finito*.

Definición 5.2. Considere el sistema dinámico (5.1) - (5.2), donde $\psi(\cdot, \cdot)$ satisface la condición de sector según la Definición 5.1; el sistema es absolutamente estable si el origen es globalmente uniformemente asintóticamente estable para cualquier no linealidad en el sector dado. En otro caso, el sistema es absolutamente estable con un dominio finito si el origen es uniformemente asintóticamente estable.

La estabilidad asintótica del origen se investiga usando una candidata a función de Lyapunov, conocida como función *Luré - Lyapunov* - (Popov, 1962), dada por:

$$V(x) = x' P_L x + \tau_c \int_0^x \psi'(\sigma) K_c d\sigma; \quad P_L = P_L' > 0, \quad \tau_c \geq 0 \quad (5.9)$$

El análisis de la estabilidad absoluta usando este tipo de función restringe su aplicación a no - linealidades invariantes en el tiempo. Se supone además que la integral de (5.9) es no - negativa. El primer paso para resolver el problema de estabilidad con la candidata a función de Lyapunov propuesta, es obtener la matriz P_L de orden $n \times n$. Luego, se establecen algunas condiciones bajo las cuales P_L existe y la derivada temporal de (5.9) es negativa definida, ante la no linealidad que satisface la condición de sector según la Definición 5.1.

Formulando el problema del análisis de estabilidad en el dominio de la frecuencia, la Definición 5.3 plantea una de las condiciones necesarias para asegurar la estabilidad absoluta global o en un dominio finito del sistema dinámico (5.1).

Definición 5.3. Sea $Z(s)$ una matriz de funciones de transferencia racional propia, y suponga que el determinante $\det[Z(s) + Z'(-s)]$ es diferente de cero. Entonces $Z(s)$ es estrictamente real positiva, si y solo si:

- $Z(s)$ es Hurwitz; es decir, todos los polos de los elementos de $Z(s)$ tienen partes reales negativas.
- $Z(j\omega) + Z'(-j\omega) > 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$, y
- se satisface alguna de las siguientes condiciones:
 1. $Z(\infty) + Z'(\infty) > 0$
 2. $Z(\infty) + Z'(\infty) = 0$ y $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 [Z(j\omega) + Z'(j\omega)] > 0$
 3. $Z(\infty) + Z'(\infty) \geq 0$ (no cero ni no - singular) y existen constantes positivas σ_0 y ω_0 , tal que:

$$\omega^2 \sigma_{min} [Z(j\omega) + Z'(j\omega)] \geq \sigma_0, \quad \forall |\omega| \geq \omega_0$$

Así, la función de transferencia $Z(s)$ es estrictamente real positiva si $Z(s - \epsilon)$ es real positiva para cualquier $\epsilon > 0$. En el caso SISO ($m = 1, p = 1$), la condición de dominio en la frecuencia de la Definición 5.3 se reduce a $Re(Z(j\omega) > 0), \forall \omega \in \mathbb{R}$, lo cual es equivalente a la condición de que la gráfica de Nyquist de $Z(j\omega)$ permanezca en el lado derecho del plano complejo.

El carácter estricto real positivo de las funciones de transferencia surgirá en este análisis a partir del siguiente lemma, conocido como el *Lemma real positivo* ó *Lemma de Kalman - Yacubovich - Popov* (Khalil, 1996).

El problema de determinar la estabilidad absoluta de sistemas realimentados, con un sistema lineal en la alimentación directa y un elemento no lineal invariante en el tiempo en la realimentación como se muestra en la Figura 5-1, está resumido en el siguiente teorema, conocido como el *Criterio Multivariable de Popov*.

Teorema 5.4. *Considere el sistema (5.1) y la entrada de control $u(t)$ de (5.2), donde (F) es Hurwitz, (F, G) es controlable, (F, H) es observable y $\psi(\cdot)$ es una no linealidad invariante en el tiempo que satisface globalmente la condición de sector (5.8) con $K_{min} = 0$, con una matriz simétrica positiva definida K_c . Suponga que $K_c\psi(x)$ es el gradiente de una función escalar y la condición (5.10) se satisface globalmente.*

$$\int_0^y \psi'(\sigma) K_c d\sigma \geq 0 \quad (5.10)$$

Entonces, el sistema es absolutamente estable si existe un $\tau_c \geq 0$, con $-1/\tau_c$ que no sea valor propio de la matriz de estados (F) , tal que:

$$Z(s) = I + (1 + \tau_c s) K_c A(s) \quad (5.11)$$

sea estrictamente real positiva según la Definición 5.3. Si la desigualdad (5.8) con $K_{min} = 0$ y (5.10) se satisfacen solamente en un conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^p$, entonces el sistema es absolutamente estable en un dominio finito.

En el caso SISO ($m = 1, p = 1$), es posible verificar el carácter real positivo de la función de transferencia $Z(s)$ gráficamente. Elijiendo τ_c tal que $Z(\infty) > 0$, entonces según la Definición 5.3 la matriz $Z(s)$ es estrictamente real positiva si y solo si:

$$\text{Re} [1 + (1 + j\tau_c\omega) k_c A(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

lo cual es equivalente a:

$$\frac{1}{k_c} + \text{Re} [A(j\omega)] - \tau_c \omega \text{Im} [A(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (5.12)$$

donde $A(j\omega) = \text{Re}[A(j\omega)] + j\text{Im}[A(j\omega)]$. Graficando $\text{Re}[A(j\omega)]$ versus $\omega \text{Im}[A(j\omega)]$ con ω como parámetro, la condición (5.12) se satisface si la gráfica permanece a lado derecho de la línea que intercepta el punto $-1/k_c + j0$ con pendiente $1/\tau_c$.

De esta manera, la meta de establecer condiciones suficientes para la estabilidad absoluta del sistema dinámico (5.1) a través del criterio de Popov, se reduce a encontrar valores numéricos del parámetro real τ_c en el rango $0 < \tau_c < \infty$ para los cuales se garantice el carácter estricto positivo de la matriz (5.11), en todas las frecuencias positivas $\omega \neq 0$. Si el valor de τ_c existe, este garantiza la estabilidad absoluta del punto de equilibrio $x = 0$ para el sistema dinámico de la Figura 5-1.

5.1.2. Análisis dinámico cualitativo - Sistema MIMO, ($m = 4, n = 4, p = 4$)

Al igual que el análisis de sistemas dinámicos $n = 1$ y $n = 2$ del Capítulo 2, se determinarán las condiciones básicas sobre la matriz α en la ley de control no lineal $u_{NL}(t)$ de (4.28), en base a la matriz de ganancias dada en (4.23), con el objetivo principal de disminuir el esfuerzo de control que el sistema dinámico (5.1) - (5.2) gasta en llevar sus estados desde una condición inicial x_0 hasta un punto de referencia u operación definido previamente; comparado al esfuerzo de control y desempeño dinámico derivado de la ley de control lineal $u_L(t)$ dada en (4.5).

La formulación del problema propuesto en la tesis, plantea utilizar una entrada de control no lineal $u_{NL}(t)$ descrita por (4.28), la cual depende de los estados $x_i(t)$ y no de las salidas $y_i(t)$ del sistema dinámico. Debido a que se asume que la matriz de salidas $H = I$, el problema de evaluar la estabilidad del sistema (5.1a) puede desarrollarse con el criterio de Popov planteado en la sección anterior, sin pérdida de validez en los conceptos propuestos.

Usando la ley de control no lineal de (4.28), la dinámica en lazo cerrado del sistema (5.1) es:

$$\dot{x} = F \cdot x(t) + G \cdot (-K \cdot x(t) + \alpha \cdot x^3(t)) \tag{5.13}$$

La dinámica lineal y el elemento no lineal de (5.13) según el esquema de la Figura 5-1, a partir del planteamiento propuesto en la Sección 5.1.1, están dados por:

$$\dot{x} = \overbrace{(F - G \cdot K)}^{\text{Sistema lineal}} \cdot x(t) + G \cdot \overbrace{u_{NL}(t)}^{\text{No-linealidad}} \Rightarrow u_{NL}(t) = -\psi(x(t))$$

Con el objetivo de acoplar esta formulación al planteamiento de la dinámica (5.1a) - (5.1b) y la ley de control $u(t)$ de (5.2), se realizan las siguientes transformaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} FF = F - GK \\ GG = G \\ HH = H \\ DD = D \end{array} \right\} \tag{5.14}$$

Finalmente, reescribiendo la dinámica (5.13) y la función de transferencia (5.3), tenemos ⁴:

$$\dot{x} = FF \cdot x + GG \cdot u_{NL}(t) \quad (5.15a)$$

$$y = HH \cdot x \quad (5.15b)$$

$$u_{NL}(t) = \alpha \cdot x^3(t) \Rightarrow \psi(x) = -\alpha \cdot x^3(t) \quad (5.15c)$$

$$AA(s) = HH (sI - FF)^{-1} GG \quad (5.15d)$$

5.1.3. Condiciones de estabilidad según el criterio de Popov - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$)

La condición de sector (5.8) debe cumplirse local o globalmente, con el fin de aplicar correctamente el criterio de estabilidad de Popov. En primer lugar, para desacoplar las no - linealidades $\psi(\cdot)$, como lo requiere el criterio de estabilidad, la matriz α será diagonal, es decir:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Retomando la condición de sector de (5.8) en función de los estados del sistema $x_i(t)$, con $K_{min} = 0$, tenemos:

$$0 \leq x(t) \cdot \psi(x) \leq K_{max} \cdot x^2(t) \quad (5.17)$$

donde $\psi(x)$ es un n - vector de funciones no lineales $\psi_i(x_i)$. Ahora, se determinarán las restricciones sobre los elementos diagonales de la matriz α con el fin de satisfacer la condición de sector (5.17). El análisis se realiza únicamente en torno al caso $\alpha_i < 0$, ya que tomando en cuenta la definición de la no - linealidad de (5.15c), si $\alpha_i > 0$, ésta se ubicará en el II y IV cuadrante de la Figura 5-1, región que impide la aplicación del criterio de estabilidad absoluta de Popov.

⁴Las simplificaciones de las matrices de estado, control y salidas no cambian las dimensiones del sistema $n = 4$, $m = 4$ y $p = 4$.

Caso: ($\alpha_i < 0$)

Para que la no - linealidad (5.15c) satisfaga la condición de sector (5.17) con $\alpha_i < 0$, se requiere que:

$$|\alpha_i| \leq \frac{\beta_i}{x_i^2(t)}$$

Acotando el estado $|x_i(t)| \leq 1$, esta restricción sobre el parámetro α_i se simplifica como:

$$|\alpha_i| \leq \beta_i \quad (5.18)$$

Aplicando esta restricción sobre cada elemento del vector de no - linealidades $\psi(x)$, se garantizará que la matriz $K_c = K_{max} - K_{min}$ sea positiva definida. La elección correcta del parámetro τ_c , la controlabilidad de (F, G) y observabilidad de (F, H) , brindarán las condiciones necesarias para aplicar el criterio de Popov y determinar la estabilidad absoluta del sistema dinámico (5.15), con la ley de control no lineal $u_{NL}(t)$ de (5.15c).

5.1.4. Consideraciones finales para la estabilidad y disminución del esfuerzo de control - Sistema MIMO, ($n = 4, m = 4, p = 4$)

Esta sección reúne las condiciones analíticas consideradas anteriormente para la selección conveniente de la matriz α , con el objetivo de mantener la estabilidad del sistema dinámico en lazo cerrado y reducir el esfuerzo de control. La parte final del problema con el modelo 4 - dimensional considera el caso único expuesto en la sección anterior, sin olvidar que k_i y α_i deben tener el mismo signo, siguiendo la meta de reducir el esfuerzo de control.

Caso: $k_i < 0$ y $\alpha_i < 0$

La elección de α_i ha de satisfacer los requerimientos para reducir el esfuerzo de control y la condición de sector (5.17). Reuniendo la restricción para reducir el esfuerzo de control de (2.53) y la condición para que la matriz de no -linealidades $\psi(x(t))$ de (5.15c) esté acotada a través de la condición de sector (5.17), tenemos:

$$|\alpha_i| < \min(2|k_i|, \beta_i) \quad \forall i \quad (5.19)$$

Así entonces, una condición necesaria para el diseño de una ley de control no lineal por realimentación de estados, que conserve la estabilidad del sistema y reduzca el esfuerzo de control en relación al producido por el control lineal, está dada por (5.19) en el caso $\alpha_i < 0$. Si bien únicamente se consideró el caso $\alpha_i < 0$, no se puede dejar de lado el uso de $\alpha_i > 0$ si $k_i > 0$. El problema que surge en este último caso es la carencia de las herramientas necesarias que caractericen la estabilidad de las no - linealidades confinadas en el II y IV cuadrante de la Figura 5-1, y por ende, no es posible garantizar la estabilidad del sistema dinámico (5.1) - (5.2) bajo estas condiciones.

5.2. Esfuerzo de control e ISE con una ley de control no lineal en el modelo lineal del reactor CSTR

Esta sección muestra el cálculo del esfuerzo de control y el ISE obtenidos con la ley de control no lineal $u_{NL}(t)$ propuesta en (4.28), sobre el modelo linealizado del reactor CSTR presentado en el Capítulo 3 - Sección 3.4. Antes de continuar, se impondrá una cota sobre el espacio de estados dentro del cual se estudiará el gasto energético, sin perder la descripción del proceso real. Esta acotación se realiza con el objetivo de estudiar el desempeño dinámico del sistema en puntos del espacio de estados en una vecindad al punto de equilibrio (4.24).

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_{10} = C_{A4}|_0 - C_{A}|_{op} \\ \bar{x}_{20} = C_{B4}|_0 - C_{B}|_{op} \\ \bar{x}_{30} = C_{M4}|_0 - C_{M}|_{op} \\ \bar{x}_{40} = T_4|_0 - T_4|_{op} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -0,6056 \leq \bar{x}_{10} \leq 1 \\ -1 \leq \bar{x}_{20} \leq 1 \\ -1 \leq \bar{x}_{30} \leq 1 \\ -1 \leq \bar{x}_{40} \leq 1 \end{array} \right\} \quad (5.20)$$

Siguiendo la relación de los parámetros de diseño K y α , en la cual se propone que k_i y α_i sean del mismo signo, es necesario aclarar que esta sección del capítulo está dirigida a cuantificar los efectos de los signos de los elementos α_i , en el esfuerzo de control y en el desempeño dinámico del sistema en lazo cerrado. La ley de control lineal de (4.26), permitirá diseñar la ley de control no lineal (4.28), siguiendo la condición establecida en (5.19). De esta forma, las principales restricciones sobre α se imponen según las características de la matriz de ganancias K , mientras que la condición (5.19) complementa el diseño, permitiendo brindar estabilidad al sistema dinámico en lazo cerrado y disminuir el gasto energético en esfuerzo de control.

La Figura 5-3 presenta el esfuerzo de control y el ISE para diferentes valores de los parámetros α_i . El cálculo fue realizado con la integración de la dinámica lineal (3.54) - (3.57), usando la entrada de control no lineal $u_{NL}(t)$ de (4.28), conformada por la matriz de ganancias (K) de (4.23) y la matriz α de (5.16). El esfuerzo de control se obtuvo con la expresión (1.1) y el ISE fue determinado con (4.8), variando individualmente α_i , mientras los elementos restantes de la matriz α se mantuvieron en cero.

El esfuerzo de control y el ISE usando la ley de control lineal $u_L(t)$ de (4.5) y la matriz de ganancias de la realimentación dada en (4.23), dependen únicamente de la condición inicial \bar{x}_0 . Los valores calculados para el esfuerzo de control con (1.1) y el ISE con (4.8), respectivamente, fueron de $EC_L = 40,554$ e $ISE_L = 25,558$, usando la condición inicial $\bar{x}_0 = [1, 1, 1, 1]$.

Tanto el esfuerzo de control como el ISE calculado con la entrada de control no lineal $u_{NL}(t)$ de (4.28), varían en un intervalo más amplio sobre el recorrido del parámetro α_4 , como es evidente en

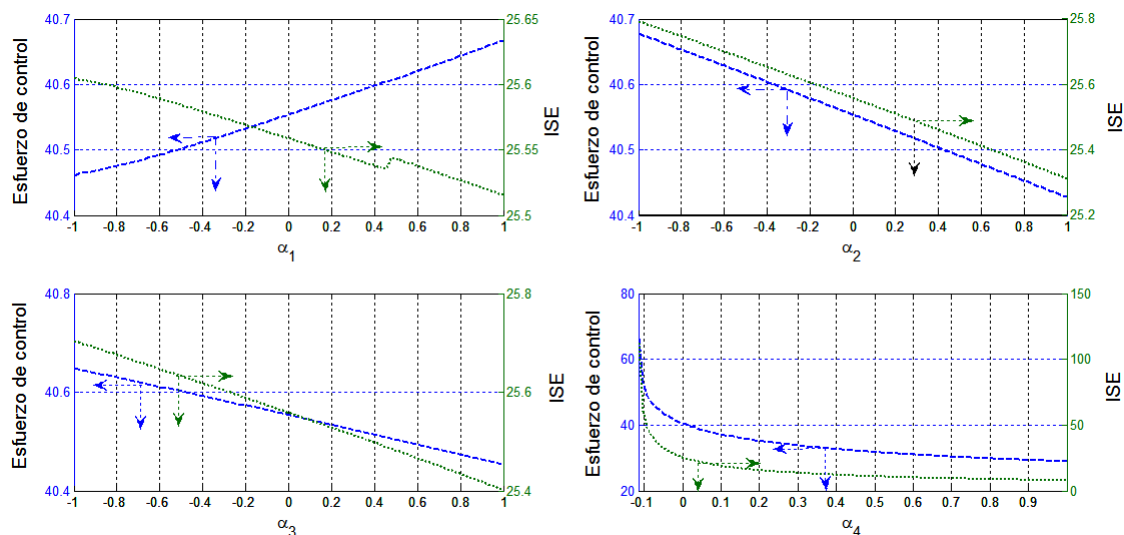


Figura 5-3: Esfuerzo de control e ISE para la ley de control no lineal de (4.28) - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - Condición inicial $\bar{x}_0 = [1, 1, 1, 1]$

la parte inferior derecha de la Figura 5-3. Esto permite inferir a priori que la asignación adecuada de dicho parámetro en particular, aportará una mayor contribución en la disminución del gasto energético en esfuerzo de control.

Continuando con el método de asignar diferentes valores para α_i de forma independiente, esta vez utilizando las condiciones iniciales en el intervalo de estados definido en (5.20), en las Figuras 5-4 - 5-7 se muestra el esfuerzo de control y el ISE para la ley de control lineal de (4.5) y la ley de control no lineal de (4.28), utilizando la matriz de ganancias de (4.23) en ambas entradas de control.

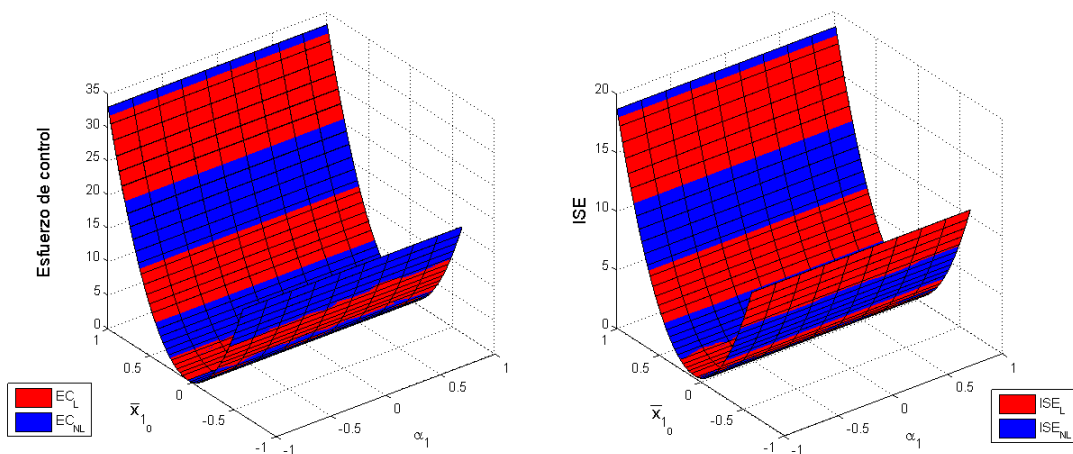


Figura 5-4: Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de α_1 - Sistema $n = 4$

La superficie generada por el esfuerzo de control no lineal en función de α_1 , proyectada el plano de la condición inicial \bar{x}_{10} , no muestra diferencias significativas con respecto a los resultados obtenidos bajo la ley de control lineal, según se puede verificar en la Figura 5-4. El comportamiento del ISE no lineal sigue el mismo patrón del esfuerzo de control. De esta manera, el parámetro α_1 evaluado en el intervalo $\alpha_1 \in [-1 \ 1]$ no disminuye notablemente el esfuerzo de control, ante diferentes condiciones iniciales de las variables de estado.

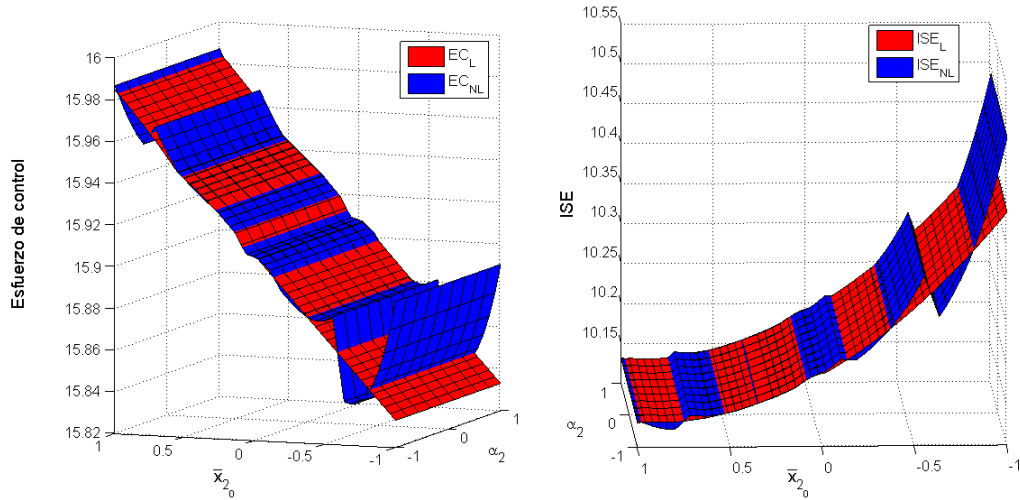


Figura 5-5: Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de α_2 - Sistema MIMO ($n = 4$, $m = 4$, $p = 4$)

La diferencia del esfuerzo de control e ISE no lineal respecto a sus contrapartes lineales, se verifica de forma más representativa en las Figuras 5-5 - 5-6, en las cuales se realiza un barrido sobre α_2 y α_3 , respectivamente. Las regiones de la superficie para el esfuerzo de control no lineal que se encuentran por debajo de la superficie de esfuerzo de control lineal, muestran claramente que se alcanza el objetivo de reducir dicho indicador en algunas puntos de $\alpha_2 \in [-1 \ 1]$ y $\alpha_3 \in [-1 \ 1]$, a pesar de no brindar ahorros de energía muy importantes. Para estos dos casos, el aporte en la reducción del esfuerzo de control mediante la selección adecuada de los parámetros α_2 y α_3 , será un poco más representativo que el resultado obtenido con la selección de α_1 .

El análisis individual de los parámetros α_i finaliza con la muestra de cálculo de la Figura 5-7, donde se presentan las superficies para el esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal, realizando un barrido sobre el parámetro $\alpha_4 \in [-0,3 \ 1]$. El esquema indica la presencia de regiones más amplias donde se ahorra energía en esfuerzo de control usando la entrada no lineal (4.28). Así pues, la evaluación individual para cada elemento de la matriz α en (5.16), permitió determinar que en torno a las zonas donde se logró disminuir el esfuerzo de control, el mayor aporte para este efecto lo realiza el parámetro α_4 , escogido según la restricción (5.19).

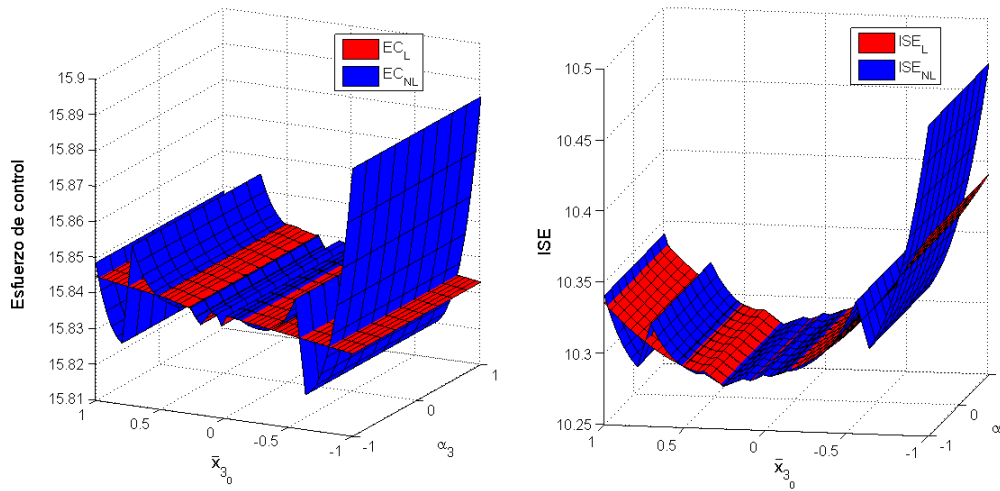


Figura 5-6: Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de α_3 - Sistema MIMO ($n = 4$, $m = 4$, $p = 4$)

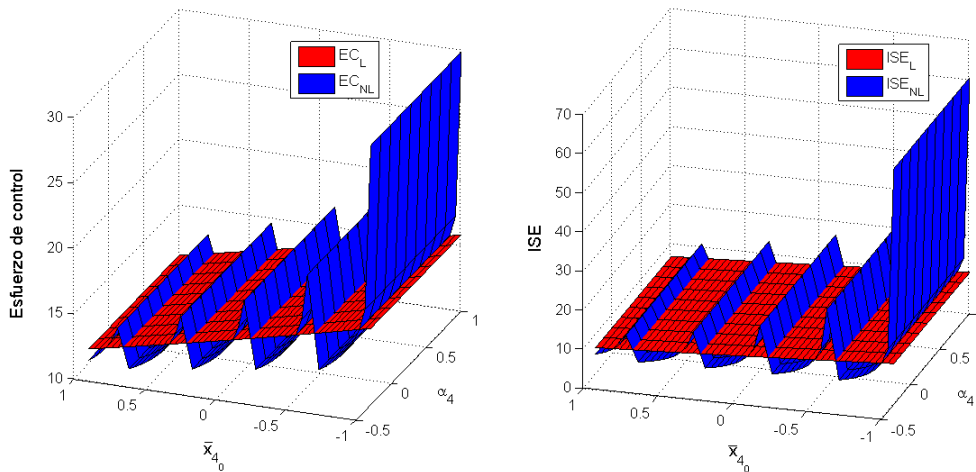


Figura 5-7: Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de α_4 - Sistema $n = 4$

Aunque en ninguno de los anteriores casos se indicó exactamente que parámetros de α_i permiten obtener menor esfuerzo de control, a continuación se analizará con más detalle sobre que puntos de α_i se obtiene dicho comportamiento. El método de cálculo es básicamente el mismo que el expuesto en los ejemplos anteriores, solo que en esta ocasión varían simultáneamente los elementos de la diagonal en la matriz α , determinando en cada punto el esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal, verificando también en que porcentaje se disminuye el esfuerzo de control y el ISE, mediante las expresiones:

$$\% \text{ Ahorro}_{EC} = \frac{EC_L - EC_{NL}}{EC_L} * 100 \tag{5.21a}$$

$$\% \text{ Ahorro}_{ISE} = \frac{ISE_L - ISE_{NL}}{ISE_L} * 100 \quad (5.21b)$$

En las Figuras 5-8 - 5-11 se muestra el esfuerzo de control y el ISE, calculados con las leyes de control lineal $u_L(t)$ y no lineal $u_{NL}(t)$ de (4.5) y (4.28), respectivamente, usando la matriz de ganancias de (4.23) para ambas entradas de control. Las superficies presentadas en cada figura se obtienen de integrar la dinámica de (5.1) - (5.2) sobre el espacio de estados considerado en (5.20), utilizando diferentes valores de los parámetros α_i acotados por $|\alpha_i| < 1$.

La proyección del esfuerzo de control e ISE para las entradas de control lineal $u_L(t)$ y no lineal $u_{NL}(t)$, se realiza en el espacio de las condiciones iniciales \bar{x}_{1_0} en la Figura 5-8. El lado derecho e izquierdo del esquema muestran la presencia de cuatro superficies, las cuales están referencias con respecto a la norma de la matriz α . En la Tabla 5-1 están indicados los valores de α_i para cada superficie.

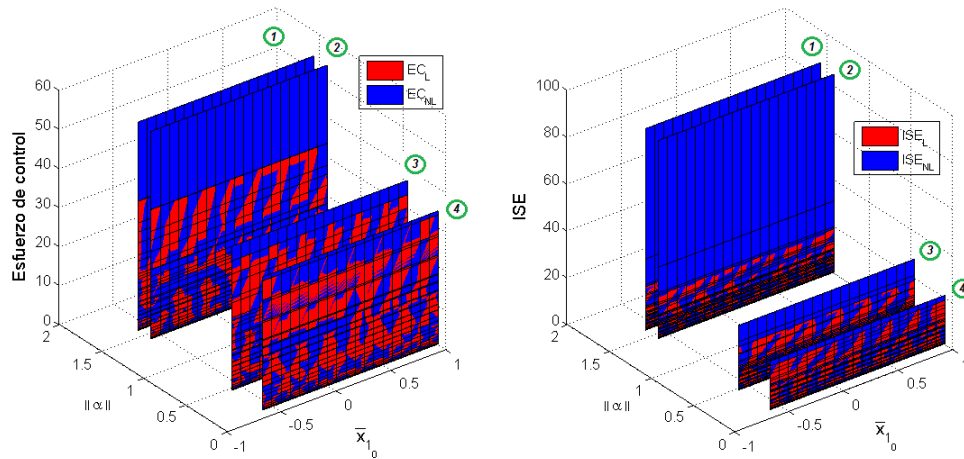


Figura 5-8: Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de $\|\alpha\|$ proyectado sobre \bar{x}_{1_0} - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - $\alpha < 0$

La matriz α para las Figuras 5-8 - 5-9 es negativa definida, y sus valores reportados en la Tabla 5-1 son aquellos que generan la reducción del esfuerzo de control más significativa, en el barrido de condiciones iniciales propuesto en (5.20). Una segunda vista de la dispersión entre los puntos de esfuerzo de control e ISE se da en la Figura 5-9, donde se proyectan los resultados obtenidos sobre el espacio de las condiciones iniciales \bar{x}_{4_0} . La simulación con los parámetros 3 y 4 de la Tabla 5-1 con $\alpha < 0$, permite obtener un esfuerzo de control e ISE de menor magnitud, comparado al resultado de los parámetros 1 y 2.

En cuanto a los esquemas de las Figuras 5-10 - 5-11, la proyección del esfuerzo de control e ISE para las entradas de control lineal $u_L(t)$ y no lineal $u_{NL}(t)$, se muestra sobre el espacio de las condiciones iniciales \bar{x}_{1_0} y \bar{x}_{4_0} , respectivamente. El lado derecho e izquierdo del esquema muestran

Tabla 5-1: Parámetros α_i - Superficies de esfuerzo de control e ISE

$\alpha < 0$					
Superficie	α_1	α_2	α_3	α_4	$\ \alpha\ $
1	-0.6842	-1	-1	-0.1565	1.578
2	-1	-0.05263	-1	-0.1565	1.424
3	-0.2631	-0.2631	-0.2631	-0.095	0.466
4	-0.0526	-0.0526	-0.0526	-0.034	0.098
$\alpha > 0$					
Superficie	α_1	α_2	α_3	α_4	$\ \alpha\ $
1	0.0526	0.0526	0.0526	1	1.004
2	1	1	1	0.087	1.734
3	0.0526	0.0526	0.0526	0.452	0.461
4	0.0526	0.0526	0.0526	0.2087	0.227

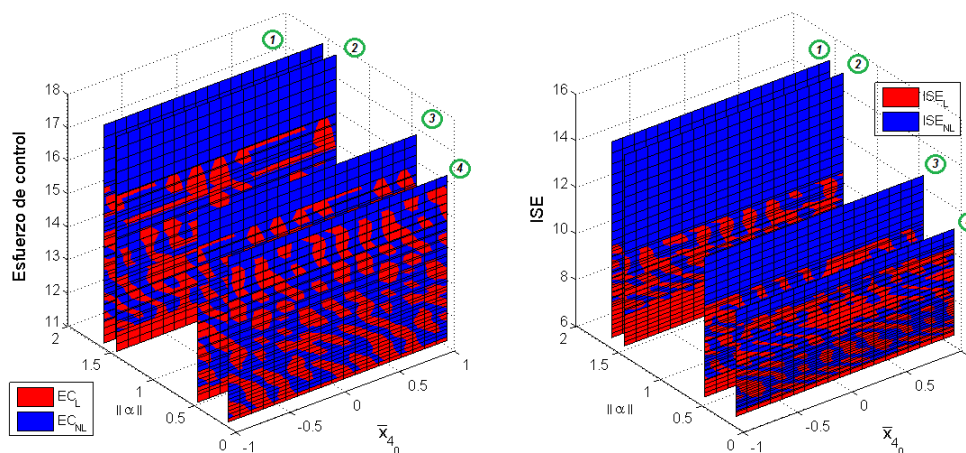


Figura 5-9: Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de $\|\alpha\|$ proyectado sobre \bar{x}_{4_0} - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - $\alpha < 0$

la presencia de 4 superficies, las cuales están referencias con respecto a la norma de la matriz α . En la Tabla 5-1 están indicados los valores de α_i para cada superficie.

La matriz α para las Figuras 5-10 - 5-11 es positiva definida. Los valores reportados en la Tabla 5-1 son aquellos que permiten alcanzar una mayor reducción del esfuerzo de control, en el intervalo de condiciones iniciales propuesto en (5.20). La dispersión entre los puntos de esfuerzo de control

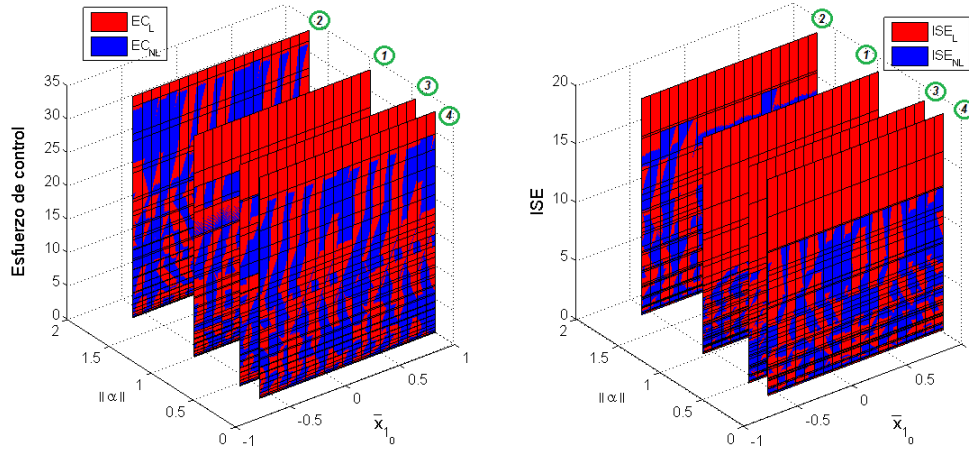


Figura 5-10: Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de $\|\alpha\|$ proyectado sobre \bar{x}_{10}
 - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - $\alpha > 0$

e ISE que muestra la Figura 5-11, proyecta los resultados obtenidos sobre el espacio de las condiciones iniciales \bar{x}_{40} . Como patrón general de comportamiento, el esfuerzo de control y el ISE para la matriz α positiva definida, tienen menor magnitud en referencia a la escala de valores obtenidos con $\alpha < 0$ según se indica en las Figuras 5-8 - 5-9.

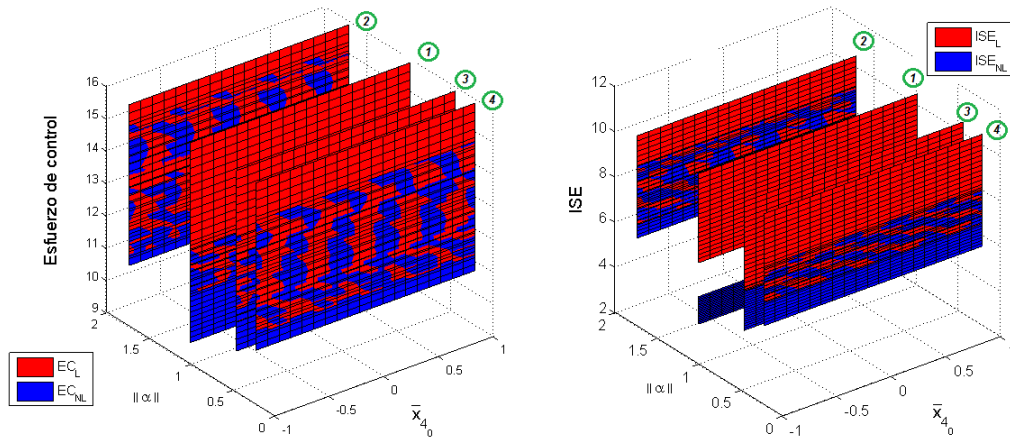


Figura 5-11: Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal en función de $\|\alpha\|$ proyectado sobre \bar{x}_{40}
 - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - $\alpha > 0$

Dos ejemplos de las trayectorias en el tiempo para las variables de estado $\bar{x}_i(t)$, se presentan en las Figuras 5-12 y 5-13. En el primer esquema, se muestra la dinámica en lazo cerrado de (4.29), usando una ley de control no lineal $u_{NL}(t)$ de (4.28), con la matriz de ganancias dada en (4.23), la matriz diagonal $\alpha < 0$ y la condición inicial \bar{x}_0 de la Tabla 5-2, asignando $\beta = [1, 1, 1, 1]$. Las trayectorias de estado se comparan a las calculadas usando la ley de control lineal (4.26) y la matriz de ganancias (4.23), obviamente tomando la misma condición inicial. Para cada matriz α

y condición inicial $\bar{x}_0(t)$ propuestos como ejemplo, se calcula el esfuerzo de control - (ecuación 1.1) e ISE - (ecuación 4.8), tanto para el caso lineal y no lineal, obteniendo además el porcentaje de ahorro en esfuerzo de control e ISE, según las expresiones (5.21).

Tabla 5-2: Esfuerzo de control e ISE para diferentes α y \bar{x}_0

$\alpha = \text{diag}([-0,6842, -1, -1, -0,1565])$					
$\bar{x}_0 = [0,0704, -1, -1, -1]$					
EC_L	EC_{NL}	ISE_L	ISE_{NL}	$\%AhorroEC$	$\%AhorroISE$
0.01779	0.01472	0.1695	0.1685	17.257	0.6
$\alpha = \text{diag}([0,0526, 0,0526, 0,0526, 1])$					
$\bar{x}_0 = [1, -1, -1, -1]$					
EC_L	EC_{NL}	ISE_L	ISE_{NL}	$\%AhorroEC$	$\%AhorroISE$
33.045	25.309	18.6348	6.613	23.410	64.51

La Figura 5-13 muestra las variables de estado del sistema dinámico en lazo cerrado (4.29), con $\alpha > 0$ de la Tabla 5-2, asignando $\beta = [-1, -1, -1, -1]$. Las trayectorias de estado se comparan a las calculadas usando la ley de control lineal (4.26) y la matriz de ganancias (4.23), tomando la misma condición inicial. El esfuerzo de control y el ISE, así como el ahorro de estos dos parámetros comparados a los encontrados con la ley de control lineal, se indican en la Tabla 5-2.

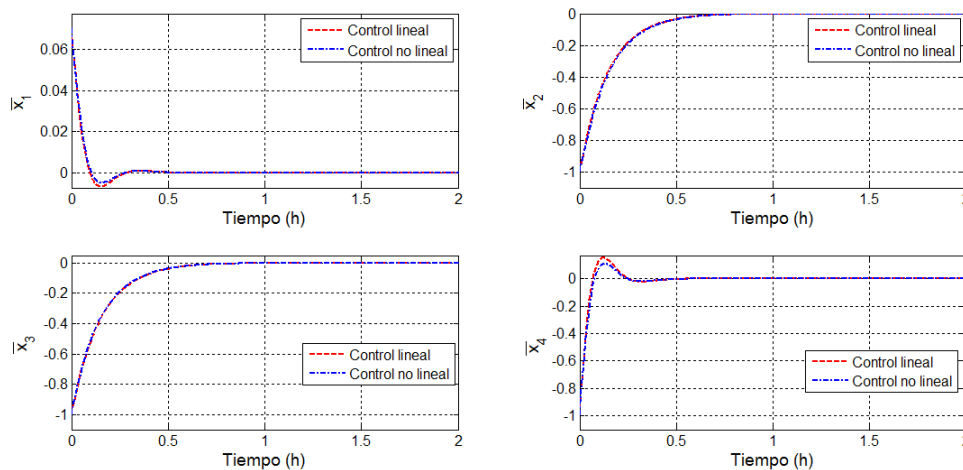


Figura 5-12: Variables de estado $\bar{x}_i(t)$ para $\alpha < 0$ - Modelo linealizado reactor CSTR

El estado estacionario en las cuatro variables del sistema dinámico se alcanza en aproximadamente 0,7 h, tanto para la ley de control no lineal con α definida negativa (Figura 5-12) como en α positiva

definida (Figura 5-13). Es evidente además, observando la Figura 5-12 que asignar una matriz α positiva definida, genera diferencias apreciables entre la dinámica de las dos leyes de control, en el estado transitorio del sistema; al contrario del comportamiento dinámico encontrado con $\alpha < 0$, donde el desempeño de la ley de control lineal y no lineal no evidencia diferencias significativas, como se muestra en la Figura 5-12.

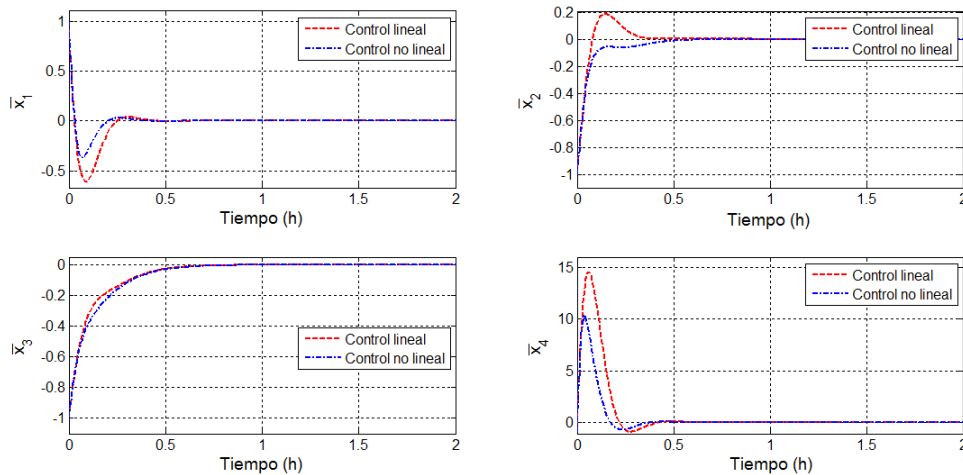


Figura 5-13: Variables de estado $\bar{x}_i(t)$ para $\alpha > 0$ - Modelo linealizado reactor CSTR

En las Figuras 5-14 y 5-15 se muestra el perfil en el tiempo del esfuerzo de control e ISE, calculados con la ley de control no lineal $u_{NL}(t)$ de (4.28) y la ley de control lineal $u_L(t)$ (4.26), utilizando la matriz α y las condiciones iniciales \bar{x}_0 de la Tabla 5-2.

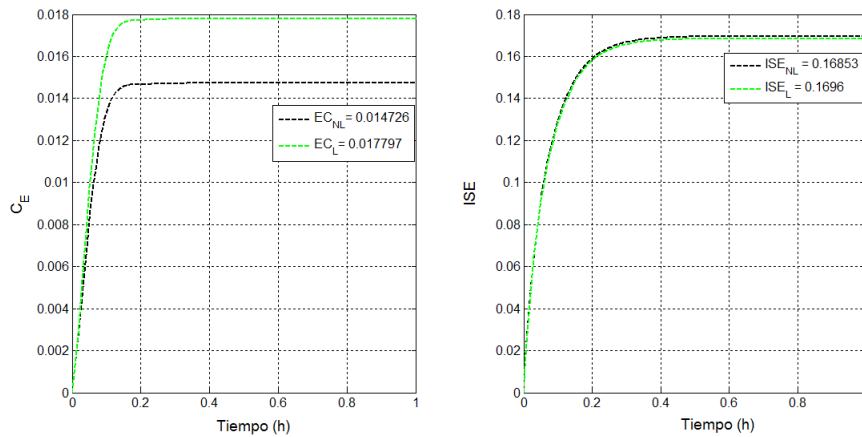


Figura 5-14: Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - Matriz $\alpha < 0$

La entrada de control no lineal (4.28) con α negativa definida y positiva definida, permite determinar el perfil de las variables manipuladas ($\bar{F}_{A_1}, \bar{F}_{B_1}, \bar{F}_{M_1}$ y \bar{m}_{E_2}), como se indica en las Figuras

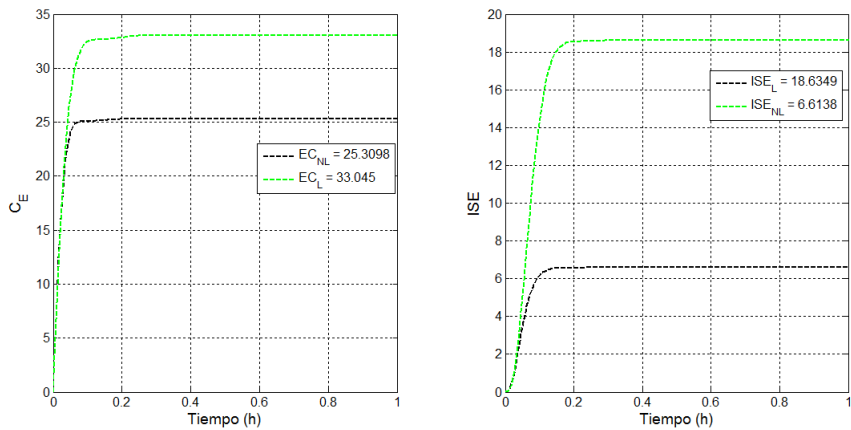


Figura 5-15: Esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal - Sistema MIMO ($n = 4, m = 4, p = 4$) - Matriz $\alpha > 0$

5-16 y 5-17. Si $\alpha < 0$, el esfuerzo de control y el ISE tienen menor magnitud comparado a lo obtenido con $\alpha > 0$, según lo indica la Tabla 5-2.

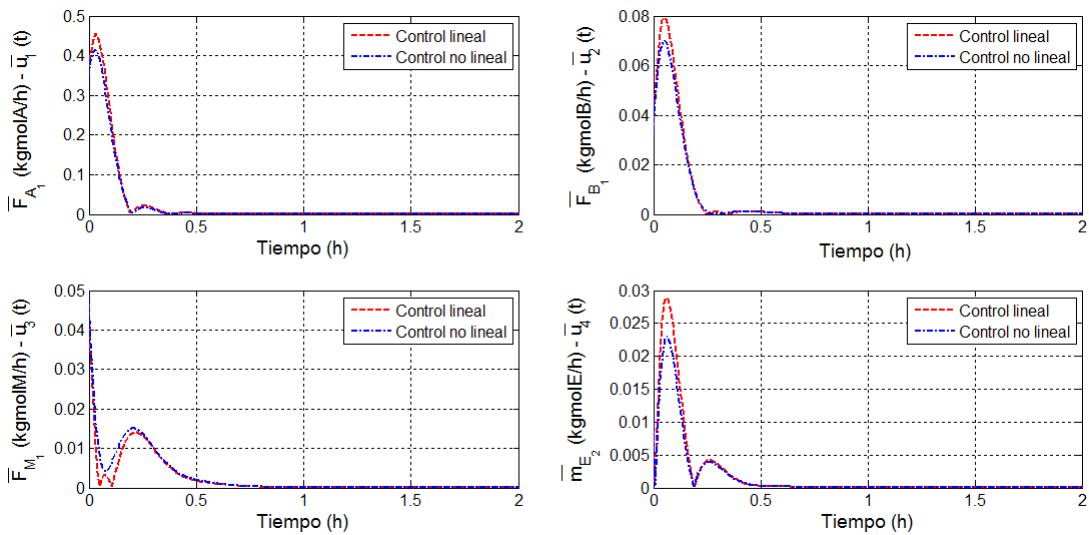


Figura 5-16: Entradas de control $\bar{u}(t)$ (Variables de desviación) ante una ley de control no lineal $\alpha < 0$ - Modelo linealizado reactor CSTR

A pesar de requerir mayor energía en esfuerzo de control para el caso $\alpha > 0$, el perfil de las variables manipuladas en el tiempo, no presenta divergencias apreciables entre los resultados obtenidos con la ley de control no lineal de (4.28) y la ley de control lineal (4.26), para los ejemplos propuestos.

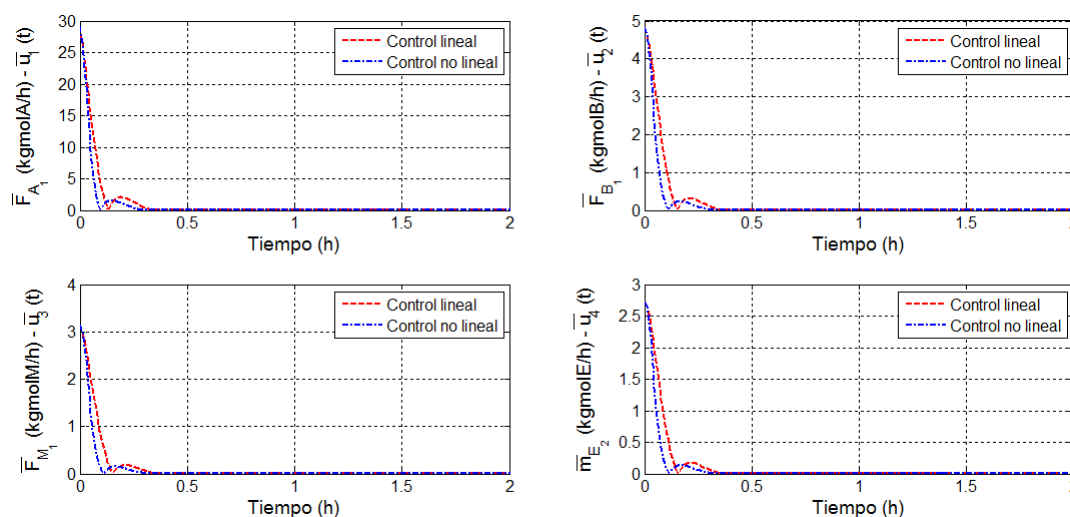


Figura 5-17: Entradas de control $\bar{u}(t)$ (Variables de desviación) ante una ley de control no lineal $\alpha > 0$ - Modelo linealizado reactor CSTR

5.3. Estabilidad absoluta de un sistema dinámico MIMO, $n = 4$ - Aplicación

La tercera y última sección del capítulo muestra la aplicación del criterio de estabilidad absoluta de Popov sobre el sistema dinámico MIMO - ($n = 4, m = 4, p = 4$). El análisis de estabilidad se realiza con el objetivo de garantizar que el sistema no lineal (5.15), es estable ante la presencia de funciones no lineales $\psi(x)$ dadas en (5.15c), acotadas por la condición de sector (5.8).

Dado el planteamiento teórico del criterio de estabilidad, solo se caracterizará el sistema dinámico no lineal (5.15) con $\alpha < 0$, debido a que bajo ésta condición los elementos del vector de no linealidades $\psi(x)$, estarán confinados en los cuadrantes I y III, donde es válida la condición del sector (5.11) y la aplicación del criterio de estabilidad, para funciones no lineales del tipo de (5.15c).

Con sistemas dinámicos MIMO, su estabilidad absoluta se confirma con la caracterización de la matriz de funciones de transferencia $Z(s)$. Si dicha matriz de funciones de transferencia es estrictamente real positiva, entonces el sistema dinámico tendrá estabilidad absoluta en un dominio finito o global, según la cota de la condición de sector (5.11). Básicamente, las propiedades a verificar sobre la matriz de funciones de transferencia $Z(s)$ están listadas en la Definición 5.3.

El sistema dinámico a examinar está conformado por los siguiente elementos:

- Matriz de estados (F) de (3.54).
- Matriz de control (G) de (3.55).
- Matriz de salidas (H) de (3.56).
- Matriz de realimentación directa (D) de (3.57).
- Matriz de ganancias de la realimentación (K) de (4.23).
- Cota superior de la condición de sector (K_{max}) de la Tabla 5-2 para $\alpha < 0$.

Para acoplar el problema planteado en la tesis al criterio de estabilidad, es necesario reagrupar algunos términos según se muestra en (5.14).

Criterio 5.5. *La estabilidad absoluta de un sistema dinámico MIMO linealizado con una realimentación no lineal de (5.15c), se determina mediante el siguiente procedimiento:*

1. Agrupar los términos de la dinámica lineal (F), (G), (H), (D) y (K) según las expresiones (5.15c).
2. Determinar la matriz de funciones de transferencia $AA(s)$ de acuerdo a (5.15d).
3. Establecer la matriz diagonal α siguiendo la restricción (5.19), hacer $K_c = \alpha$.
4. Suponer un valor de $\tau_c > 0$ y $-1/\tau_c$ diferente a un valor propio de la matriz (FF).
5. Calcular la matriz de funciones de transferencia ($Z(s)$) según la expresión (5.11).
6. Verificar las propiedades de la Definición 5.3.

Aplicando el anterior procedimiento, a continuación se muestran los resultados obtenidos para el problema MIMO estudiado en los últimos 3 capítulos de la tesis.

1. Las nueva matrices (FF), (GG), (HH) y (DD) están dadas por las expresiones (5.22a) - (5.22d):

$$FF = \begin{bmatrix} -47,4563 & 0,03968 & 0,001120 & -2,2204 \\ 10,8150 & -6,7623 & 0,02385 & 0,965747 \\ 5,3494 & 0,02966 & -6,61073 & 0,340903 \\ 639,456 & -0,08664 & 0,01124 & 22,0804 \end{bmatrix} \quad (5.22a)$$

$$GG = \begin{bmatrix} 0,50715 & -0,00579 & -0,01297 & 0 \\ -1,20563 & 0,20289 & -0,72964 & 0 \\ -0,12871 & -0,03477 & 0,45069 & 0 \\ -0,80618 & -0,41460 & -0,44915 & -0,11449 \end{bmatrix} \quad (5.22b)$$

$$HH = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.22c)$$

$$DD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22d)$$

2. La matriz de funciones de transferencia ($AA(s)$), calculada a partir de (5.15d) es:

$$AA(s) = \frac{1}{DenAA} \begin{bmatrix} AA_{1,1} & AA_{1,2} & AA_{1,3} & AA_{1,4} \\ AA_{2,1} & AA_{2,2} & AA_{2,3} & AA_{2,4} \\ AA_{3,1} & AA_{3,2} & AA_{3,3} & AA_{3,4} \\ AA_{4,1} & AA_{4,2} & AA_{4,3} & AA_{4,4} \end{bmatrix}$$

con un denominador común:

$$DenAA = s^4 + 38,7489s^3 + 755,7085s^2 + 6093,59s + 16541,843 \quad (5.23)$$

Los coeficientes de los polinomios para cada posición están consignados en la Tabla 5-3.

Los polos de la matriz de funciones de transferencia $AA(s)$ son:

$$s_{i_{AA(s)}} = \left\{ \begin{array}{l} -12,71001 + 14,5235i \\ -12,71001 - 14,5235i \\ -6,72446 \\ -6,60424 \end{array} \right\} \quad (5.24)$$

Tabla 5-3: Coeficientes para los polinomios de la matriz de funciones de transferencia $AA(s)$

	s^3	s^2	s	s^0
$AA_{1,1}$	$5.0715*10^{-1}$	-2.6739	-102.62	-415.01
$AA_{1,2}$	-1.2056	-33.860	-445.16	-1811.3
$AA_{1,3}$	$-1.2872*10^{-1}$	-1.7343	-7.2424	-15.472
$AA_{1,4}$	$-8.0618*10^{-1}$	275.36	3764	12616
$AA_{2,1}$	$-5.7923*10^{-3}$	$9.7905*10^{-1}$	13.662	45.856
$AA_{2,2}$	$2.0290*10^{-1}$	6.0261	95.187	424.25
$AA_{2,3}$	$-3.4772*10^{-2}$	-1.2838	-22.241	-100.37
$AA_{2,4}$	$-4.1461*10^{-1}$	-28.942	-326.85	-1015.7
$AA_{3,1}$	$-1.2976*10^{-2}$	1.0819	16.859	60.411
$AA_{3,2}$	$-7.2964*10^{-1}$	-23.902	-412.05	-1887.3
$AA_{3,3}$	$4.5069*10^{-1}$	14.240	239.41	1094.9
$AA_{3,4}$	$-4.4916*10^{-1}$	-35.552	-430.39	-1421
$AA_{4,1}$	$-7.1054*10^{-14}$	$2.5422*10^{-1}$	3.3953	11.335
$AA_{4,2}$	$7.1054*10^{-15}$	$-1.1057*10^{-1}$	-3.2297	-16.524
$AA_{4,3}$	$-1.4211*10^{-14}$	$-3.9031*10^{-2}$	$-7.5955*10^{-1}$	-3.4101
$AA_{4,4}$	$-1.1449*10^{-1}$	-6.9646	-77.730	-242.56

3. La matriz diagonal K_{max} la cual es la cota superior de las no linealidades $\psi(x)$ se construye a partir de los elementos de β elegidos para el caso $\alpha < 0$. Se obtiene el resultado:

$$K_{max} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Con $K_{min} = 0$, entonces $K_c = K_{max}$.

4. Como ejemplo de aplicación se supone $\tau_c = 0,5$.
5. La matriz de funciones de transferencia $Z(s)$ se calcula con (5.11). La muestra de los elementos $Z_{i,j}$ se omiten en el documento.

6. Verificando cada una de las condiciones de la Definición 5.3, tenemos:

- El rango de $Z(s) + Z'(s)$ calculado con *Matlab 7.10* es $r_{[Z(s)+Z'(s)]} = 4$.
- Los polos de la matriz de funciones de transferencia $Z(s)$ son:

$$s_{iZ(s)} = \begin{pmatrix} -6,6016 \\ -6,7271 \\ -12,710 \\ -12,710 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

Dado que $Re(s_i) < 0$, entonces $Z(s)$ es Hurwitz.

- La Figura 5-18 muestra $Re(\lambda)$ vs. ω para cada eigenvalor de la matriz $Z(j\omega) + Z'(-j\omega)$.

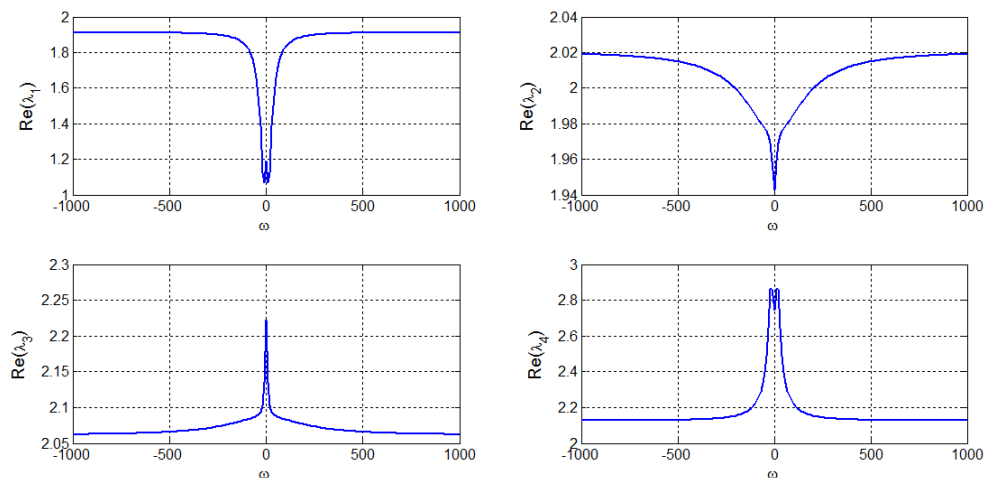


Figura 5-18: Parte real λ_i de la matriz $Z(j\omega) + Z'(-j\omega)$

Se puede verificar que en el intervalo de ω evaluado, $Re(\lambda_i) > 0$, lo cual indica que $Z(j\omega) + Z'(-j\omega)$ es positiva definida.

- Los eigenvalores de $Z(\infty) + Z'(\infty)$ son:

$$\lambda_{[Z(\infty)+Z'(\infty)]} = \begin{pmatrix} 1,9134 \\ 2,0207 \\ 2,0609 \\ 2,1252 \end{pmatrix}$$

Dado que $Re(\lambda) > 0$, la matriz $Z(\infty) + Z'(\infty)$ es positiva definida.

Para el ejemplo de $\alpha < 0$ y el parámetro τ_c supuesto, con la evaluación de cada una de las condiciones de la Definición 5.3, se concluye que $Z(s)$ es estrictamente real positiva y por lo tanto el sistema dinámico (5.15) es absolutamente estable en un dominio finito dado por:

$$\bar{x}_0 = \left\{ \begin{array}{l} 0 < \bar{x}_{1_0} \leq 0,0704 \\ -1 < \bar{x}_{2_0} \leq 0 \\ -1 < \bar{x}_{3_0} \leq 0 \\ -1 < \bar{x}_{4_0} \leq 0 \end{array} \right\} \quad (5.27)$$

5.4. Conclusiones

- Se proporcionaron las herramientas necesarias para analizar la estabilidad de sistemas dinámicos no lineales MIMO, continuos en invariantes en el tiempo. Fue propuesto el criterio de estabilidad absoluta de Popov, que caracteriza a sistemas con elementos no lineales en la realimentación y elementos lineales en el componente de alimentación directa.
- Utilizando la condición de sector (5.8), se establecieron las restricciones básicas sobre los parámetros α_i , dadas en (5.19), con el objetivo de reducir el esfuerzo de control usando una ley de control no lineal $u_{NL}(t)$ del tipo (4.28), preservando además la estabilidad de la dinámica en lazo cerrado. Fue posible analizar solamente el caso $\alpha < 0$, debido a que el criterio de estabilidad no está definido para no - linealidades (5.15c) con $\alpha > 0$.
- Fue calculado el esfuerzo de control y el ISE usando la ley de control lineal $u_L(t)$ de (4.26) y la ley de control no lineal (4.28), sobre el espacio de condiciones iniciales definido en (5.20) para $|\alpha_i| < 1$.
- Las simulaciones realizadas condujeron a encontrar ciertos grupos de parámetros α_i , que permitieron disminuir el esfuerzo de control respecto al obtenido con la ley de control lineal $u_L(t)$. El ahorro en esfuerzo de control e ISE, así como el esfuerzo de control e ISE lineal y no lineal se muestran en la Tabla **5-2**, indicando una reducción del 23,410 % en esfuerzo de control para $\alpha > 0$ y de 17,257 % para $\alpha < 0$. Si $\alpha < 0$, el esfuerzo de control y el ISE tienen menor magnitud, comparado al obtenido con $\alpha > 0$, según lo indica la misma tabla.
- Con las matrices α y las condiciones iniciales \bar{x}_0 de la Tabla **5-2**, fue calculada la dinámica en lazo cerrado de (4.29). Los resultados fueron presentados en las Figuras **5-12** - **5-13**. El análisis de estas figuras condujo a concluir que la ley de control no lineal con $\alpha < 0$ no altera de forma significativa el comportamiento dinámico frente al calculado con la entrada de control lineal. Para $\alpha > 0$, la dinámica en lazo cerrado usando la ley de control no lineal, presentó algunas diferencias respecto a la generada por la ley de control lineal, principalmente en el estado transitorio. Así mismo, se calculó el perfil de las variables manipuladas para $\alpha < 0$ y $\alpha > 0$ (Figuras **5-16** y **5-17**). La elección de $\alpha < 0$ no exige que la señal de control sea de gran magnitud y por ende no hay la misma cantidad de esfuerzo de control, en comparación al requerido con $\alpha > 0$.
- Los cálculos del esfuerzo de control e ISE fueron exclusivos de los casos puestos en consideración. Si se asume cualquier otro valor de α , \bar{x}_0 y β , posiblemente habrá una mayor o menor reducción en esfuerzo de control, diferente desempeño dinámico y otro comportamiento de las variables manipuladas.
- Usando las cotas β propuestas en el caso $\alpha < 0$ de la Tabla **5-2**, el análisis de estabilidad absoluta llevado a cabo con el criterio de Popov, caracterizó el caso $\alpha < 0$. La suposición del

parámetro $\tau_c = 0,5$, llevó a concluir que el sistema dinámico 5.15 es absolutamente estable en el dominio finito (5.27), para el ejemplo propuesto.

- Es muy importante analizar las interacciones entre las variables, dado que estas afectan la estabilidad y el comportamiento del sistema controlado. La suposición de utilizar una no - linealidad de sector (5.15c) desacoplada, es bastante restrictiva y es posible que ante tal suposición, se omitan los efectos entre todas la entradas de control y todas las variables controladas. A pesar de que las condiciones sobre la matriz α constituyen una buena aproximación, con el objetivo de disminuir el esfuerzo de control, preservando la estabilidad en lazo cerrado para sistemas SISO, no se aplica con igual efectividad en sistemas MIMO.
- Finalmente se concluye que la aplicación de perturbaciones cúbicas a sistemas lineales SISO y MIMO controlados por realimentación de estados, permite disminuir la magnitud de la señal de control, y por ende el esfuerzo de control, preservando además la estabilidad del sistema dinámico en lazo cerrado, si se elige de forma adecuada la matriz α . El análisis de sistemas SISO $n = 1$ y $n = 2$ fue llevado a cabo en el Capítulo 2, mientras que los ejemplos propuestos en este capítulo, permitieron demostrar la hipótesis del trabajo para un sistema MIMO. Cabe resaltar que las nociones básicas de técnica de control que surgió a partir del desarrollo de la tesis, son principalmente aplicables en sistemas dinámicos donde el ahorro de energía, ahorro de materia prima, menor desgaste de actuadores, mayor eficiencia del controlador, entre otros factores, sean los principales parámetros de diseño, como es lógico, brindando estabilidad al sistema de control.

CAPÍTULO 6

Trabajo Futuro

Algunas de las pautas por seguir en el desarrollo futuro de la técnica de control son:

- Desde el punto de vista del comportamiento dinámico de los sistemas a controlar, es importante analizar algunos fenómenos propios de sistemas dinámicos no lineales, tales como: Bifurcaciones de codimensión 2, dinámicas oscilantes, ciclos límite, deslizamiento, entre otros; con el objetivo de ajustar la técnica de control a un comportamiento dinámico deseado.
- Una de las tareas más importantes en el condicionamiento de la matriz α , la cual hace parte de la no - linealidad en la ley de control, es establecer las condiciones necesarias y suficientes sobre cada elemento de la matriz mencionada. Aunque la tesis propone algunas restricciones básicas, en el caso de sistemas MIMO, es necesario abordar el problema desde el punto de vista de análisis y optimización multivariable, con el objetivo de plantear un fundamento analítico más robusto que permita disminuir el esfuerzo de control con la ley no lineal, preservando la estabilidad en lazo cerrado.
- Brindar robustez al controlador mediante el análisis de estabilidad, utilizando herramientas como el análisis de pequeña ganancia, aproximación de pasividad, entre otros, permitirá implementar la técnica de control de forma general sobre sistemas SISO y MIMO.
- La extensión de la técnica de control sobre sistemas que tengan parámetros variantes en el tiempo, sistemas dinámicos con incertidumbre de parámetros, o realimentación de salidas, es una importante aplicación futura que merece ser tomada en cuenta durante los estudios posteriores del tema.
- El uso de control por seguimiento, es una posible aplicación futura de la ley de control, dado que en ésta tesis únicamente se consideró el control por regulación.
- Finalmente, la discretización e implementación de la técnica sobre un sistema real, es tal vez la meta más relevante en el desarrollo de la ley de control. El acoplamiento con los

parámetros de diseño de los actuadores, y la comprobación real de los beneficios obtenidos al reducir el esfuerzo de control, permitirán evaluar y mejorar la técnica de control.

Bibliografía

- Ait Rami, M., El Faiz, S., Benzaouia, A., & Tadeo, F. (2009). Robust Exact Pole Placement via an LMI - Based Algorithm. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 54(2), 394 –398.
- Alvarez-Ramirez, J., Morales, A., & Cervantes, I. (1998). Robust Proportional - Integral Control. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 37(12), 4740–4747.
- Anderson, B. & Moore, J. (1989). *Optimal Control - Linear Quadratic Methods*. Prentice - Hall International, Inc. Englewood Cliffs. New Jersey, 1st edition.
- Angulo, F. (1999). *Análisis de Sistemas de Control No Lineales*. Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales.
- Angulo, F., Olivar, G., & Osorio, G. (2010). Improving the performance of linear controllers through nonlinear perturbations: Applications to one - dimensional systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, In Press, Corrected Proof.
- Antoniades, C. & Christofides, P. (1999). Feedback control of nonlinear differential difference equation systems. *Chemical Engineering Science*, 54(23), 5677 – 5709.
- Aström, K. & Wittenmark, B. (1995). *Adaptive Control*. Addison - Wesley. Reading, Mass, 2nd edition.
- Banks, H. T., Lewis, B. M., & Tran, H. T. (2007). Nonlinear feedback controllers and compensators: a state-dependent riccati equation approach. *Comput. Optim. Appl.*, 37, 177–218.
- Beeler, S. C., Tran, H. T., & Banks, H. T. (2000). Feedback Control Methodologies for Nonlinear Systems. *J. Optim. Theory Appl.*, 107, 1–33.
- Bellman, R. & Kalaba, R. (1965). *Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems*. New York: Elsevier.
- Bequette, B. W. (1991). Nonlinear control of chemical processes: A review. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 30(7), 1391–1413.

- Breakwell, J., Speyer, J., & Bryson, A. (1963). Optimization and Control of Nonlinear Systems Using the Second Variation. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, 1(2), 193–223.
- Brusher, G. A., Kabamba, P. T., & Ulsoy, A. G. (1997). Coupling between the modeling and controller-design problems. Part II: Design. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 119(2), 278–283.
- Buckley, S. (1964). *Techniques of process control*. John Wiley & Son, 1st edition.
- Chen, C. & Dai, C. (2001). Robust controller design for a class of nonlinear uncertain chemical processes. *Journal of Process Control*, 11(5), 469 – 482.
- Chen, C.-T. (1999). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Inc.
- Chen, C.-Y. & Perng, M.-H. (1995). Quantitative robust performance design with minimal cost of feedback. *Automatica*, 31, 891–896.
- Chen, W.-H., Ballance, D. J., & Gawthrop, P. J. (2003). Optimal control of nonlinear systems: A predictive control approach. *Automatica*, 39(4), 633 – 641.
- Cimen, T. (2010). Systematic and effective design of nonlinear feedback controllers via the state - dependent Riccati equation (SDRE) method. *Annual Reviews in Control*, 34(1), 32 – 51.
- Coulibaly, E., Maiti, S., & Brosilow, C. (1995). Internal Model Predictive Control (IMPC). *Automatica*, 31(10), 1471–1482.
- Dacic, D., Subbotin, M., & Kokotovic, P. (2006). Control Effort Reduction in Tracking Feedback Laws. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 51(11), 1831 –1837.
- Dacic, D. B. & Kokotovic, P. V. (2006). Path - following for linear systems with unstable zero dynamics. *Automatica*, 42(10), 1673 – 1683.
- Daoutidis, P. & Christofides, P. D. (1995). Dynamic feedforward/output feedback control of nonlinear processes. *Chemical Engineering Science*, 50(12), 1889 – 1907.
- Demetriou, M. & Kazantzis, N. (2005). A new integrated output feedback controller synthesis and collocated actuator/sensor scheduling framework for distributed parameter processes. *Computers & Chemical Engineering*, 29(4), 867 – 876.
- Douglas, J. (1988). *Conceptual Design of Chemical Processes*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math.
- Doyle, J. & Stein, G. (1981). Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 26(1), 4 – 16.

- Edgar, T., Campbell, W., & Bode, C. (1999). Model - based control in microelectronics manufacturing. In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*.
- Edwards, C. & Spurgeon, S. (1998). *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Taylor & Francis, 7th edition.
- El-Farra, N. H. & Christofides, P. D. (2000). Robust optimal control and estimation of constrained nonlinear processes. *Computers & Chemical Engineering*, 24(2-7), 801 – 807.
- Escobar, G., Ortega, R., Sira-Ramirez, H., & Ludvigsen, H. (1998). A hybrid passivity based controller design for a three phase voltage source reversible boost type rectifier. In *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*, volume 2 (pp. 2035 –2040).
- Farivar, F., Shoorehdeli, M., Nekoui, M., & Teshnehlab, M. (2009). Chaos synchronization of uncertain nonlinear gyros via hybrid control. In *Advanced Intelligent Mechatronics, 2009. AIM 2009. IEEE/ASME International Conference on* (pp. 1365 –1370).
- Fisher, W. R., Doherty, M. F., & Douglas, J. M. (1988). The interface between design and control. 1. Process controllability. 2. Process operability and 3. Selecting a set of controlled. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 27(4), 606–611.
- Fogler, H. (2001). *Elementos de Ingeniería de las Reacciones Químicas*. Pearson Education, 3th edition.
- Franklin, G., Powell, D., & Workman, M. (1997). *Digital Control of Dynamic Systems*. Prentice Hall. Addison Wesley Longman, Inc., 3th edition.
- Franzé, G. & Muraca, P. (2000). Eigenvalue assignment by static output feedback: Minimizing of the control effort. In *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, volume 1 (pp. 406 –407 vol.1).
- Freidovich, L. B. & Khalil, H. K. (2005). Logic - based switching for robust control of minimum - phase nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 54(8), 713 – 727.
- French, M., Szepesvári, C., & Rogers, E. (2002). LQ performance bounds for adaptive output feedback controllers for functionally uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 38(4), 683 – 693.
- Frost, S. & Bodson, M. (2010). Resource balancing control allocation. In *American Control Conference (ACC), 2010* (pp. 1326 –1331).
- Furusawa, T., Nishimura, H., & Miyauchi, T. (1969). Experimental study of a bistable continuous stirred tank reactor. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, 2, 95.
- Garcia-Alvarado, M. & López, I. R. (2010). A design method for robust and quadratic optimal MIMO linear controllers. *Chemical Engineering Science*, 65(11), 3431 – 3438.

- Gasparyan, O. (2008). *Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: A Classical Approach*. John Wiley & Sons.
- Grigoriadis, K. & Skelton, R. (1998). Integrated structural and control design for vector second-order systems via LMIs. volume 3 (pp. 1625 –1629 vol.3).
- Grigoriadis, K. M. & Skelton, R. E. (1997). Minimum - energy covariance controllers. *Automatica*, 33(4), 569 – 578.
- Hahn, J., Monnigmann, M., & Marquardt, W. (2004). A method for robustness analysis of controlled nonlinear systems. *Chemical Engineering Science*, 59(20), 4325 – 4338.
- Halpern, M. (2000). L_1 - Suboptimal pole placement design. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 45(10), 1881 – 1885.
- Härkegard, O. & Glad, S. T. (2005). Resolving actuator redundancy - optimal control vs. control allocation. *Automatica*, 41(1), 137 – 144.
- Harvey, C. & Stein, G. (1978). Quadratic weights for asymptotic regulator properties. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 23(3), 378 – 387.
- Henrion, D., Tarbouriech, S., & Kucera, V. (2005). Control of linear systems subject to time - domain constraints with polynomial pole placement and LMIs. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 50(9), 1360 – 1364.
- Henson, M. A. & Seborg, D. E. (1990). Input - output linearization of general nonlinear processes. *AIChE Journal*, 36(11), 1753–1757.
- Huber, C. I. & Kermodé, R. I. (1968). Linear programming. Z - Transform Design of Digital Controllers for Regulator Systems. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 7(1), 158–164.
- Hwang, C. L., Sung, F. Y., & Wei, M. H. (1997). Improved fuzzy sliding - mode control for a linear servo motor system. *Control Engineering Practice*, 5(2), 219 – 227.
- Ingram, G. A., Franchek, M. A., Balakrishnan, V., & Surnilla, G. (2005). Robust SISO H_∞ controller design for nonlinear systems. *Control Engineering Practice*, 13(11), 1413 – 1423.
- Jiang, T. & Chen, C. (2006). A design method of nonlinear optimal predictive controller for thyristor controlled series compensation. *Electric Power Systems Research*, 76(9-10), 753 – 759.
- Kalman, R. (1959). On the general theory of control systems. *Automatic Control, IRE Transactions on*, 4(3), 110.

- Kalman, R. E. (1963). Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, 1(2), 152–192.
- Kalman, R. E., Ho, Y. C., & Narendra, K. S. (1963). *Controllability of Linear Dynamic Systems, Contributions to Differential Equations*. Wiley & Sons- Interscience Publishers, Inc. New York.
- Kayihan, F. (1997). A review of modeling and control in the pulp and paper industries. In J. C. Kantor, C. E. Garcia, B. Carnahan. *Fifth international conference on chemical process control* (pp. 117 – 132).
- Kelley, H. (1962). Guidance theory and extremal fields. *Automatic Control, IRE Transactions on*, 7(5), 75 – 82.
- Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice - Hall, Inc. Upper Saddle River. New Jersey, 2nd edition.
- King, B. B., Hovakimyan, N., Evans, K. A., & Buhl, M. (2006). Reduced order controllers for distributed parameter systems: LQG balanced truncation and an adaptive approach. *Mathematical and Computer Modelling*, 43(9-10), 1136 – 1149.
- Knapp, T., Budman, H., & Broderick, G. (2001). Adaptive control of a CSTR with a neural network model. *Journal of Process Control*, 11(1), 53 – 68.
- Kolavennu, S., Palanki, S., & Cockburn, J. C. (2001). Nonlinear control of nonsquare multivariable systems. *Chemical Engineering Science*, 56(6), 2103 – 2110.
- Kouvaritakis, B. & Cameron, R. (1980). Pole placement with minimised norm controllers. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings D*, 127(1), 32 –36.
- Kuo, B. C. (1997). *Sistemas de Control Automático*. Prentice - Hall Hispanoamerica S.A., 7 edition.
- Kuznetsov, Y. (2004). *Elements of Applied Bifurcation Theory (Applied Mathematical Sciences)*. Springer, 3a edition.
- Larsson, T., Govatsmark, M. S., Skogestad, S., & Yu, C. C. (2003). Control Structure Selection for Reactor, Separator, and Recycle Processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 42(6), 1225–1234.
- Lee, Y., Oh, S., & Park, S. (2002). Enhanced Control with a General Cascade Control Structure. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 41(11), 2679–2688.
- Lee, Y., Park, S., & Lee, M. (1998). PID Controller Tuning To Obtain Desired Closed loop Responses for Cascade Control Systems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 37(5), 1859–1865.

- Lewis, F. & Syrmos, V. (1995). *Optimal Control*. Jhon Wiley & Sons. Nwe York.
- Li, Z.-H. & Krstic, M. (1997). Optimal design of adaptive tracking controllers for non - linear systems. *Automatica*, 33(8), 1459 – 1473.
- Liao, X. & Yu, P. (2008). *Absolute Stability of Nonlinear Control Systemsn (Mathematical Modelling: Theory and Applications)*. Springer, 2nd edition.
- Luenberger, D. (1967). Canonical forms for linear multivariable systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 12(3), 290 – 293.
- Luo, J. & Tsiotras, P. (2000). Control design for chained - form systems with bounded inputs. *Systems & Control Letters*, 39(2), 123 – 131.
- Luyben, W. (2002). *Plantwide Dynamic Simulators in Chemical Processing and Control (Chemical Industries)*. CRC Press, 1th edition.
- Luyben, W., Luyben, M., & Tyreus, B. (1998). *Plantwide Process Control*. McGraw-Hill Professional Publishing.
- Mc Avoy, T. J., Ye, N., & Gang, C. (1996). Nonlinear Inferential Parallel Cascade Control. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 35(1), 130–137.
- Moore, J. & Anderson, B. (1968). A generalization of the Popov criterion,. *Journal of the Franklin Institute*, 285(6), 488 –492.
- Morari, M. Zafiriou, E. (1989). *Robust Process Control*. Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs. New Jersey.
- Moreno, L. & Garrido, S. (2004). *Ingeniería de control: Modelado, análisis y control de sistemas dinámicos*. Ariel.
- Mufti, I. (1965). On the reduction of a system to canonical (phase - variable) form. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 10(2), 206 – 207.
- Na, D. & Xie, X. (2008). Control effort reduction in output - feedback stabilization for a class of stochastic nonlinear systems. In *Control Conference, 2008. CCC 2008. 27th Chinese* (pp. 398 –402).
- Na, D. & Xie, X. (2010). Output - feedback control of a class of high - order nonlinear systems. In *Control and Decision Conference (CCDC), 2010 Chinese* (pp. 1633 –1638).
- Na, D., Xie, X., & Liu, H. (2008). An Improved Control Algorithm of High - Order Nonlinear Systems. *Acta Automatica Sinica*, 34(10), 1262 – 1267.

- Nikolaou, M. & Misra, P. (2003). Linear control of nonlinear processes: Recent developments and future directions. *Computers & Chemical Engineering*, 27(8-9), 1043 – 1059.
- Nikolaou, M. (1997). Computer - aided process engineering in the snack food industry. In *J.C. Kantor, C.E. Garcia, B. Carnahan. Fifth international conference on chemical process control* (pp. 61 – 70).
- Ogata, K. (1995). *Discrete - Time Control Systems*. Prentice Hall, 2nd edition.
- Ogata, K. (1997). *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice - Hall Hispanoamerica S.A., 3 edition.
- Othman, N., Févotte, G., & McKenna, T. (2002). Polymer Composition Control in Emulsion Co- and Terpolymerizations. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 41(5), 1261–1275.
- Palanki, S., Cockburn, J., & Kolavennu, S. (2003). Robust state feedback synthesis for control of non - square multivariable nonlinear systems. *Journal of Process Control*, 13(7), 623 – 631.
- Patel, Y., Patton, R., & Burrows, S. (1992). Robust eigenstructure assignment for multirate control systems. In *Control Applications, 1992., First IEEE Conference on* (pp. 1024 –1029 vol.2).
- Perlmutter, D. (1972). *Stability of chemical reactors*. Prentice - Hall Hispanoamerica.
- Popov, V. (1962). Absolute Stability of Nonlinear Systems of Automatic Control. *Auto. and Remote Control*, 22(8), 857 – 875.
- Prakash, J. & Srinivasan, K. (2009). Design of nonlinear PID controller and nonlinear model predictive controller for a continuous stirred tank reactor. *ISA Transactions*, 48(3), 273 – 282.
- Quin, S. & Badgwell, T. (2000). An Overview of Nonlinear Model Predictive Control Applications. In *Nonlinear Predictive Control* (pp. 369–392).
- Rantzer, A. & Megretski, A. (1994). System analysis via integral quadratic constraints. In *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*, volume 3 (pp. 3062 –3067).
- Retallack, D. (1970). Extended root - locus technique for design of linear multivariable feedback systems. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, 117(3), 618 – 622.
- Retallack, D. & MacFarlane, A. (1970). Pole - shifting techniques for multivariable feedback systems. *Electrical Engineers, Proceedings of the Institution of*, 117(5), 1037 – 1038.
- Rincón, A. (2007). Análisis y Control de un Reactor de Lecho Fijo Anaerobio de Flujo Ascendente en un Esquema de Reacción en Dos Etapas. Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales.
- Samyudia, Y. & Lee, P. L. (2004). Iterative design of robust generic model controllers for industrial processes. *Control Engineering Practice*, 12(9), 1167 – 1177.

- Schömig, E., Sznaier, M., & Ly, U. (1993). Minimum control effort state - feedback H - control. In *American Control Conference, 1993* (pp. 595 –599).
- Shieh, L., Dib, H., & McInnis, B. (1986). Linear Quadratic Regulators with Eigenvalue Placement in a Vertical Strip. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 31(3), 241 – 243.
- Shinskey, F. (1996). *Process Control Systems: Application, Design, and Tuning*. McGraw-Hill Professional, 4th edition.
- Skogestad, S. (2004). Control structure design for complete chemical plants. *Computers and Chemical Engineering*, 28, 219 – 234.
- Slotine, J. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs. New Jersey.
- Stein, G. (1979). Generalized quadratic weights for asymptotic regulator properties. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 24(4), 559 – 566.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice - Hall, Inc. Englewood Cliffs. New Jersey, 2nd edition.
- Vieira, R. A. M., Sayer, C., Lima, E. L., & Pinto, J. C. (2002). Closed - Loop Composition and Molecular Weight Control of a Copolymer Latex Using Near-Infrared Spectroscopy. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 41(12), 2915–2930.
- Visioli, A. (2004). A new design for a PID plus feedforward controller. *Journal of Process Control*, 14(4), 457 – 463.
- Weinmann, A. (1999). Optimum system matrix assignment subject to limited controller effort. In *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*.
- Wolff, E. A. & Skogestad, S. (1996). Temperature Cascade Control of Distillation Columns. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 35(2), 475–484.
- Wu, J. & Lee, T. (2005). Optimal static output feedback simultaneous regional pole placement. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on*, 35(5), 881 –893.
- Zahedzadeh, V. & Alizadeh, G. (2003). Control effort reduction in quantitative feedback theory for multivariable systems. In *Emerging Technologies and Factory Automation, 2003. Proceedings. ETFA '03. IEEE Conference*, volume 1 (pp. 652 – 657 vol.1).