

**Modelado y simulación  
en electrónica de potencia  
con ATP**



# **Modelado y simulación en electrónica de potencia con ATP**

Eduardo Antonio Cano Plata  
Hernán Emilio Tacca



UNIVERSIDAD  
**NACIONAL**  
DE COLOMBIA  
SEDE MANIZALES

FACULTAD DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA

ESPACIO PARA LA FICHA CATALOGRÁFICA

© Universidad Nacional de Colombia  
Sede Manizales  
Facultad de Ingeniería y Arquitectura

© Eduardo Antonio Cano Plata  
Hernán Emilio Tacca

Coordinación de la publicación:

Revisión de estilo: *Andrés Herrera*  
Diseño y diagramación: *Dora Álvarez S.*  
Diseño de portada: *Ángela Pílope*

Preparación editorial e impresión  
Universidad Nacional de Colombia, UNIBIBLOS  
Luis Ignacio Aguilar Zambrano, director  
dirunibiblo\_bog@unal.edu.co

ISBN: 978-958-719-008-3

Primera edición, 2008  
Bogotá, Colombia

## Dedicatorias

*Eduardo a:  
Fabi, Nany, José Alberto y Juan Marcos*

*Hernán a:  
Mónica y Marcela*



# Contenido

<b>Agradecimientos</b> . . . . .	21
<b>Biografía de autores</b> . . . . .	23
<b>Prólogo</b> . . . . .	25
<b>Capítulo 1 – Introducción y teoría del EMTP-ATP</b>	
1.1 Introducción histórica . . . . .	27
1.2 Metodología de simulación . . . . .	28
1.3 Ecuaciones discretas de los componentes elementales con ayuda del método de integración trapezoidal . . . . .	30
1.3.1 Elementos lineales no emparejados . . . . .	31
1.3.1.1 Resistencia . . . . .	31
1.3.1.2 Inductancia . . . . .	31
1.3.1.3 Capacitancia . . . . .	32
1.3.2 Componentes entre nodos . . . . .	32
1.3.3 Elementos no lineales . . . . .	33
1.3.3.1 Linealización por tramos . . . . .	33
1.3.3.2 Método de compensación . . . . .	35
1.4 Ecuaciones de una línea de transmisión con parámetros distribuidos y sin pérdidas . . . . .	37
1.5 Simulación de interruptores . . . . .	39
1.6 Simulación de fuentes de tensión y de corriente . . . . .	40
1.7 Modelos más elaborados . . . . .	40
1.8 Solución del sistema . . . . .	41
1.9 Reducción del orden de los sistemas de ecuaciones . . . . .	42
1.10 Errores en el ATP . . . . .	45
1.10.1 Errores de la regla de integración trapezoidal . . . . .	46
1.11 Amortiguamiento de oscilaciones numéricas . . . . .	50

1.12	Modelación del comportamiento mecánico de la máquina eléctrica giratoria . . . . .	55
1.12.1	Introducción . . . . .	55
1.12.2	Cálculo de las magnitudes mecánicas de estado estacionario en condiciones iniciales . . . . .	57
1.12.3	Cálculo de las variables mecánicas en estado transitorio . . . . .	58
1.13	Simulación de máquinas eléctricas giratorias . . . . .	59
1.13.1	Máquina sincrónica . . . . .	59
1.13.1.1	Simulación de la parte eléctrica . . . . .	59
1.13.1.2	Parámetros de la máquina sincrónica . . . . .	66
1.13.2	Modelación de la máquina sincrónica en el EMTP . . . . .	76
1.13.2.1	Introducción . . . . .	76
1.13.2.2	Modelo matemático de la máquina sincrónica . . . . .	77
1.13.2.3	Transformación de Park . . . . .	81
1.13.2.4	Cálculo de variables eléctricas iniciales (estado estacionario) . . . . .	84
1.13.2.5	Solución del sistema de ecuaciones utilizando el teorema de compensación . . . . .	91
1.13.2.6	Transformaciones de corrientes y flujos en el sistema de ecuaciones [2] . . . . .	93
1.13.2.7	Predicción y corrección de variables . . . . .	96
1.13.2.8	Resolución del sistema eléctrico incluyendo la máquina . . . . .	98
1.13.3	Máquina generalizada . . . . .	100
1.13.3.1	Introducción . . . . .	100
1.13.3.2	Analogías entre sistemas mecánicos y sistemas eléctricos . . . . .	102
1.13.3.3	Solución por compensación . . . . .	103
1.13.3.4	Solución por predicción de flujos . . . . .	107
1.14	Sistemas de control dinámico . . . . .	109
1.15	Análisis de error . . . . .	112
1.16	Generación de un fichero de simulación y obtención de resultados . . . . .	116
1.17	Conclusiones . . . . .	127

## Capítulo 2 – Convertidor estático

2.1	Introducción . . . . .	129
2.2	Diseño de la fuente eléctrica . . . . .	130
2.3	Planteamiento de la ecuación de una red con interruptores . . . . .	133

2.4	Diseño del convertidor estático . . . . .	139
2.4.1	Diseño con los macromodelos . . . . .	142
2.4.2	Interruptor generalizado . . . . .	147
2.4.3	Diseño a topología fija . . . . .	149
2.4.4	Diseño a topología mixta . . . . .	149
2.4.5	Diseño con conocimientos a priori de la conmutación . . . . .	151
2.4.6	Comparación de los diversos métodos para simular interruptores . . . . .	152
2.4.6.1	Pasos para crear un macromodelo con ATP utilizando la rutina DBM (Data Base Module) [26]	152
2.4.6.2	Pasos para crear un macromodelo con ATP utilizando la rutina MODEL . . . . .	159
2.4.6.3	Ejercicios de aplicación de macromodelos para abolir las oscilaciones numéricas . . . . .	167
2.5	Modelado de la máquina . . . . .	172
2.5.1	Búsqueda de régimen permanente . . . . .	176
2.5.2	Modelos particulares . . . . .	182
2.6	Conclusiones . . . . .	187

### **Capítulo 3 – Modulación por ancho de pulso y sistemas de control**

3.1	Sistema de comando cercano (ACR) [2] . . . . .	189
3.2	Comando remoto o regulación . . . . .	195
3.3	Sistemas de control discreto . . . . .	196
3.4	Procedimiento de simulación de reguladores y de ACR para los convertidores más usuales . . . . .	200
3.4.1	Fuente conmutada . . . . .	200
3.4.2	Regulación de corriente y tensión controlada . . . . .	204
3.5	Conclusiones . . . . .	207

### **Capítulo 4 – Diseño de una fuente trifásica**

4.1	Introducción . . . . .	209
4.2	Principio de operación . . . . .	209
4.3	Análisis del sistema . . . . .	212
4.3.1	Normalización . . . . .	213
4.3.2	Definiciones . . . . .	214
4.4	Ecuaciones básicas . . . . .	214
4.5	Selección de los componentes del sistema . . . . .	218

4.5.1	Tensión de bloqueo sobre los semiconductores de potencia	218
4.5.2	Corriente máxima, promedio y RMS de los dispositivos	218
4.6	Corrientes a la entrada del sistema y corriente de carga	219
4.7	Modelo de pequeña señal	221
4.8	Diseño del convertidor	223
4.8.1	Procedimiento de diseño	223
4.8.2	Ejemplo de diseño	224
4.8.3	Resultados de simulación en lazo abierto transitorio de carga al segundo ciclo de $f_N$	227
4.8.4	Diseño del compensador	228
4.9	Método de inyección de armónicos para reducir el THD	234
4.9.1	Análisis de los armónicos en la corriente de entrada	234
4.9.2	Generador de la señal de inyección en el circuito de control	235
4.10	Rizado	244
4.11	Conclusiones	244

## Capítulo 5 – Variadores de velocidad ASD

5.1	Introducción	247
5.2	Control por flujo orientado	248
5.2.1	Fundamentos	248
5.2.2	Esquema adoptado	249
5.3	CAO para el control por flujo orientado	251
5.3.1	Etapa 1: Implementación del sistema de potencia, del ACR y del sistema de control de corriente	251
5.3.2	Etapa 2: Desarrollo de un ondulator vectorial	256
5.3.3	Etapa 3: Identificación del sistema por respuesta a un escalón de par	258
5.3.4	Etapa 4: Diseño del regulador de velocidad y simulación	259
5.3.5	Etapa 5: Diseño a partir de un modelo simplificado	260
5.4	Conclusiones	262

## Capítulo 6 – Tecnología con dispositivos FACTS

6.1	Introducción	263
-----	--------------	-----

6.2	Aplicación de los dispositivos FACTS en transporte de energía eléctrica . . . . .	264
6.3	Aplicación de las tecnologías CUSTOM POWER en redes de distribución . . . . .	267
6.3.1	Acondicionador dinámico de tensión (Dynamic Voltage Restorer, DVR) . . . . .	267
6.3.2	Compensador estático (Distribution Static	
6.3.3	Interruptor de estado sólido	
6.4	Compensador ideal en derivación . . . . .	270
6.5	Compensador ideal serie . . . . .	271
6.6	Compensador ideal de ángulo de fase . . . . .	273
6.7	Síntesis de compensadores en derivación usando tiristores . . . . .	276
6.8	Síntesis de compensadores SHUNT (derivación) usando llaves autoconmutadas . . . . .	278
6.9	Síntesis de compensadores serie usando tiristores . . . . .	281
6.10	Síntesis de compensadores serie usando llaves autoconmutadas . . . . .	282
6.11	Síntesis de controladores de ángulo de fase usando tiristor . . . . .	283
6.12	Controlador unificado de flujo de potencia (UPFC) . . . . .	284
6.12.1	Introducción . . . . .	284
6.12.2	Control del UPFC . . . . .	288
6.12.2.1	Compensador estático (STATCOM) . . . . .	288
6.12.2.2	Compensador serie síncrono estático (SSSC) . . . . .	289
6.13	Operación en régimen permanente . . . . .	293
6.13.1	Modelo de dispositivos FACTS en operación en régimen permanente . . . . .	293
6.13.2	Seguridad en los sistemas de potencia . . . . .	295
6.13.2.1	Región de seguridad . . . . .	296
6.13.2.2	Seguridad y optimización de operación . . . . .	297
6.13.2.3	Regiones de seguridad con FACTS . . . . .	298
6.13.3	Modelos ideales de dispositivos FACTS en régimen permanente . . . . .	299
6.14	Dinámica y control . . . . .	301
6.14.1	Aplicación en los estudios de estabilidad . . . . .	302
6.14.1.1	Estabilidad transitoria (grandes perturbaciones) . . . . .	302
6.14.1.2	Estabilidad dinámica (pequeñas perturbaciones) . . . . .	303
6.14.2	El problema del control . . . . .	303
6.14.2.1	Robustez . . . . .	303
6.14.2.2	Descentralización . . . . .	304

6.14.2.3	Intercambio entre controladores . . . . .	305
6.14.2.4	Importancia de la localización . . . . .	305
6.14.2.5	Importancia de las señales de realimentación . . . . .	306
6.14.3	Teoría de la potencia instantánea [62, 68] . . . . .	307
6.14.3.1	Sistema trifásico genérico . . . . .	307
6.14.3.2	Potencia activa y reactiva instantánea en las coordenadas $\alpha$ - $\beta$ -0 . . . . .	308
6.14.3.3	Potencias instantáneas en función de las componentes simétricas . . . . .	311
6.14.3.4	Significado físico de las potencias reales, imaginarias y de secuencia cero [68] . . . . .	313
6.15	Conclusiones . . . . .	314
 <b>Capítulo 7 – Ejercicios propuestos</b>		
7.1	<i>Ejercicio 1:</i> Transitorio de un circuito R-C . . . . .	317
7.2	<i>Ejercicio 2:</i> Sistema de control para la velocidad de arranque de una máquina . . . . .	319
7.3	<i>Ejercicio 3:</i> Regulación de corriente a través de un comando ACR . . . . .	323
7.4	<i>Ejercicio 4:</i> Modulación Delta para una carga inductiva . . . . .	328
7.5	<i>Ejercicio 5:</i> Esquema de una modulación Delta a través de TACS . . . . .	330
7.6	<i>Ejercicio 6:</i> Tratamiento de la señal para el control discreto . . . . .	332
7.7	<i>Ejercicio 7:</i> Fuente conmutada . . . . .	334
7.8	<i>Ejercicio 8:</i> Regulación de corriente y tensión controlada . . . . .	337
7.9	<i>Ejercicio 9:</i> Esquema de una fuente trifásica . . . . .	340
7.10	<i>Ejercicio 10:</i> Sistema de regulación por modulación natural . . . . .	343
7.11	<i>Ejercicio 11:</i> Esquema de un controlador de flujo de potencia unificado . . . . .	348
 <b>Referencias bibliográficas</b> . . . . .		359

# Contenido figuras

## Capítulo 1 – Introducción y teoría del EMTP-ATP

<b>Figura 1.1.</b>	Representación circuital de la inductancia . . . . .	31
<b>Figura 1.2.</b>	Inductancia entre dos nodos . . . . .	32
<b>Figura 1.3.</b>	Curva característica por fragmentos de la inductancia . . . . .	33
<b>Figura 1.4.</b>	Curva característica por fragmentos de la resistencia . . . . .	33
<b>Figura 1.5.</b>	Simulación de una inductancia no lineal por fragmentos . . . . .	34
<b>Figura 1.6.</b>	Simulación de una resistencia no lineal por fragmentos . . . . .	34
<b>Figura 1.7.</b>	Método de la inductancia incremental . . . . .	34
<b>Figura 1.8.</b>	Método de compensación [3] . . . . .	36
<b>Figura 1.9.</b>	Diferencial de una línea de transmisión . . . . .	37
<b>Figura 1.10.</b>	Forma discreta de la línea de transmisión . . . . .	39
<b>Figura 1.11.</b>	Simulación de un interruptor . . . . .	39
<b>Figura 1.12.</b>	Apertura en un interruptor . . . . .	46
<b>Figura 1.13.</b>	Corriente en el nodo $m$ y el error relativo en un instante de tiempo de 0.5 ms. . . . .	47
<b>Figura 1.14.</b>	Función de transferencia equivalente. . . . .	48
<b>Figura 1.15.</b>	Oscilación numérica [2]. . . . .	49
<b>Figura 1.16.</b>	Tensiones de fase con y sin amortiguamiento [3] . . . . .	50
<b>Figura 1.17.</b>	Resistencia de amortiguamiento . . . . .	51
<b>Figura 1.18.</b>	Circuito mecánico de una máquina eléctrica giratoria . . . . .	55
<b>Figura 1.19.</b>	Esquemas equivalentes de la máquina síncrona . . . . .	64
<b>Figura 1.20.</b>	Modelo de simulación de la máquina síncrona. . . . .	65
<b>Figura 1.21.</b>	Parámetros de la máquina en cortocircuito. . . . .	69
<b>Figura 1.22.</b>	Modelo circuital complejo de una máquina . . . . .	70
<b>Figura 1.23.</b>	Modelo circuital simplificado de una máquina. . . . .	70
<b>Figura 1.24.</b>	Modelo circuital de una máquina con parámetros modificados. . . . .	72
<b>Figura 1.25.</b>	Característica frecuencial del generador Lambton [3] . . . . .	75
<b>Figura 1.26.</b>	Disposición de los arrollamientos de la máquina síncrona. . . . .	78
<b>Figura 1.27.</b>	Corriente de excitación, tensiones y corrientes de eje directo [3] . . . . .	84
<b>Figura 1.28.</b>	Diagramas fasoriales de máquinas eléctricas . . . . .	85
<b>Figura 1.29.</b>	Linealización de la inductancia incremental . . . . .	88
<b>Figura 1.30.</b>	Característica de saturación. . . . .	89
<b>Figura 1.31.</b>	Representación de tensiones y corrientes en el eje $q$ . . . . .	96
<b>Figura 1.32.</b>	Representación de tensiones y corrientes en el eje $d$ . . . . .	96
<b>Figura 1.33.</b>	Predicción y alisado de las corrientes $i_{d,q}(t)$ . . . . .	97

<b>Figura 1.34.</b>	Circuito equivalente de una máquina en eje directo, en cuadratura y con sus respectivas fases . . . . .	99
<b>Figura 1.35.</b>	Equivalencia de modelos entre los componentes mecánicos y eléctricos . . . . .	102
<b>Figura 1.36.</b>	Modelo en estrella de la máquina generalizada (en el eje directo) .	103
<b>Figura 1.37.</b>	Representación de la máquina generalizada con el método de predicción del flujo . . . . .	108
<b>Figura 1.38.</b>	Simulación de la máquina generalizada con el método de predicción de flujo . . . . .	108
<b>Figura 1.39.</b>	Interpretación física de la representación discreta de la ecuación de la inductancia . . . . .	114
<b>Figura 1.40.</b>	Interpretación física de la representación discreta de la ecuación de la capacitancia . . . . .	114
<b>Figura 1.41.</b>	Ambiente gráfico ATPDraw . . . . .	121
<b>Figura 1.42.</b>	Ejercicio propuesto . . . . .	122
<b>Figura 1.43.</b>	Salida entregada por el utilitario PLOTXY . . . . .	125
<b>Capítulo 2 – Convertidor estático</b>		
<b>Figura 2.1.</b>	Control de una máquina de inducción . . . . .	130
<b>Figura 2.2.</b>	Distorsión de tensión debido a las conmutaciones del convertidor . .	131
<b>Figura 2.3.</b>	Regulación de la tensión fundamental y minimización de armónicas ( $3^\circ$ y $5^\circ$ ) por optimización de los ángulos de conmutación . . . . .	132
<b>Figura 2.4.</b>	Líneas y columnas $k$ y $M$ correspondientes a un interruptor . . . . .	134
<b>Figura 2.5.</b>	Nueva disposición de la matriz nodal reducida . . . . .	134
<b>Figura 2.6.</b>	Representación triangular de la matriz $ G' II $ asociada a tensiones desconocidas . . . . .	135
<b>Figura 2.7.</b>	Conmutaciones en un ondulator de transistores (relación cíclica de 50% en el comando) . . . . .	136
<b>Figura 2.8.</b>	Efecto de las conmutaciones sobre el modelo discreto de la inductancia . . . . .	137
<b>Figura 2.9.</b>	Efecto amortiguador de una resistencia en paralelo con la inductancia . . . . .	138
<b>Figura 2.10.</b>	Interruptores de base . . . . .	140
<b>Figura 2.11.</b>	Interruptores unidireccionales . . . . .	140
<b>Figura 2.12.</b>	Interruptores bidireccionales . . . . .	141
<b>Figura 2.13.</b>	Simulación de un convertidor con la ayuda de EMTP . . . . .	142
<b>Figura 2.14.</b>	Mal condicionamiento de la matriz $ G $ . Régimen de conducción no establecido . . . . .	144
<b>Figura 2.15.</b>	Red de ayuda a la conmutación . . . . .	145
<b>Figura 2.16.</b>	Solución al problema de oscilaciones con un circuito de ayuda a la conmutación . . . . .	146
<b>Figura 2.17.</b>	Circuito rectificador con redes de ayuda a la conmutación . . . . .	147
<b>Figura 2.18.</b>	Interruptor generalizado en EMTP (interruptor tipo 13 y un macrooperador lógico) . . . . .	147
<b>Figura 2.19.</b>	Convertidor diseñado con la ayuda del interruptor generalizado . .	148
<b>Figura 2.20.</b>	Convertidor diseñado con topología fija . . . . .	149
<b>Figura 2.21.</b>	Convertidor diseñado con topología mixta . . . . .	150

<b>Figura 2.22.</b>	Convertidor diseñado con topología variable y conocimiento <i>a priori</i> de las conmutaciones . . . . .	151
<b>Figura 2.23.</b>	Circuito en ATPDRAW para simular el convertidor Boost [37]. . . . .	167
<b>Figura 2.24.</b>	Circuito en ATPDraw para el convertidor Buk [37]. . . . .	171
<b>Figura 2.25.</b>	Circuito en ATPDRAW para el convertidor Cuk [37]. . . . .	171
<b>Figura 2.26.</b>	Interfase máquina universal red . . . . .	172
<b>Figura 2.27.</b>	Modelo eléctrico de un árbol de dos masas. . . . .	173
<b>Figura 2.28.</b>	Sistema inversor. Tiempo de simulación 41,9 s. Pentium III 300 MHz. . . . .	177
<b>Figura 2.29.</b>	Ejemplo para simular la secuencia y la clasificación de los datos para una simulación con ayuda de EMTP. . . . .	178
<b>Figura 2.30.</b>	Sistema de potencia simulado . . . . .	178
<b>Figura 2.31.</b>	Circuito de comando de los interruptores de un brazo del ondulator . . . . .	179
<b>Figura 2.32.</b>	Regulación de la corriente durante el ciclo de salida . . . . .	181
<b>Figura 2.33.</b>	Regulación de la corriente en proximidad de la velocidad nominal . . . . .	182
<b>Figura 2.34.</b>	Velocidad de la máquina en rd/s . . . . .	182
<b>Figura 2.35.</b>	Control de la velocidad de arranque del motor. . . . .	186
 <b>Capítulo 3 – Modulación por ancho de pulso y sistemas de control</b>		
<b>Figura 3.1.</b>	Diagrama del comando cercano. . . . .	189
<b>Figura 3.2.</b>	Circuito analógico para la modulación Delta. . . . .	190
<b>Figura 3.3.</b>	Circuito de comando por modulación Delta . . . . .	194
<b>Figura 3.4.</b>	Diagrama de flujo para la programación numérica del algoritmo de la modulación Delta . . . . .	194
<b>Figura 3.5.</b>	Modulación Delta . . . . .	195
<b>Figura 3.6.</b>	Diagrama de flujo de la regulación para el convertidor del sistema de potencia. . . . .	195
<b>Figura 3.7.</b>	Modelo de las funciones de transferencia con TACS . . . . .	196
<b>Figura 3.8.</b>	Modelo de un bloque no lineal desarrollado con TACS. . . . .	196
<b>Figura 3.9.</b>	Tratamiento de la señal para el control discreto . . . . .	197
<b>Figura 3.10.</b>	Diagrama de bloques del regulador discreto. . . . .	197
<b>Figura 3.11.</b>	Ilustración de las posibilidades de simulación de sistemas discretos con TACS. . . . .	199
<b>Figura 3.12.</b>	Fuente conmutada . . . . .	200
<b>Figura 3.13.</b>	Circuito de regulación de la tensión de salida $U_s$ . . . . .	200
<b>Figura 3.14.</b>	ACR para la regulación de tensión. . . . .	201
<b>Figura 3.15.</b>	Ensayo en bucle abierto con un “duty cycle” de 20% (corriente IL y tensión $U_s$ ) . . . . .	202
<b>Figura 3.16.</b>	Control proporcional integral para el sistema anterior . . . . .	202
<b>Figura 3.17.</b>	Regulación en modo de corriente . . . . .	202
<b>Figura 3.18.</b>	ACR para la regulación en modo de corriente. . . . .	202
<b>Figura 3.19.</b>	Prueba del sistema de regulación en modo de corriente . . . . .	203
<b>Figura 3.20.</b>	Esquema del sistema simulado . . . . .	204
 <b>Capítulo 4 – Diseño de una fuente trifásica</b>		
<b>Figura 4.1.</b>	Estructura del circuito de potencia y compensador . . . . .	210

<b>Figura 4.2.</b>	Corriente en cada uno de los elementos de la figura anterior . . . . .	212
<b>Figura 4.3.</b>	Intervalo de desmagnetización del diodo $I_D$ . . . . .	212
<b>Figura 4.4.</b>	Circuito equivalente de pequeña señal . . . . .	223
<b>Figura 4.5.</b>	Control de lazo abierto . . . . .	227
<b>Figura 4.6.</b>	Corriente de fase. . . . .	227
<b>Figura 4.7.</b>	Corriente del diodo Boost . . . . .	228
<b>Figura 4.8.</b>	Tensión de salida . . . . .	228
<b>Figura 4.9.</b>	Diagrama de Bode del sistema $G_p(s)$ . . . . .	230
<b>Figura 4.10.</b>	Diagrama de Bode del sistema $G_c(s)$ . . . . .	231
<b>Figura 4.11.</b>	Diagrama de Bode del sistema compensado . . . . .	231
<b>Figura 4.12.</b>	Diagrama de Bode de los sistemas $G_p(s)$ , $G_c(s)$ y el sistema compensado . . . . .	232
<b>Figura 4.13.</b>	Corriente en la fase $R$ . . . . .	232
<b>Figura 4.14.</b>	Corriente en el diodo Boost . . . . .	232
<b>Figura 4.15.</b>	Tensión de salida . . . . .	233
<b>Figura 4.16.</b>	Efecto del controlador en la señal. . . . .	233
<b>Figura 4.17.</b>	Diagrama del método de inyección de armónicos . . . . .	238
<b>Figura 4.18.</b>	Corriente de entrada . . . . .	238
<b>Figura 4.19.</b>	Espectro sin el método de inyección de armónicos (aparece un sub-armónico en 225 Hz, producto de la frecuencia de muestreo)	238
<b>Figura 4.20.</b>	Espectros de corriente de la fase $R$ . . . . .	240
<b>Figura 4.21.</b>	Tensión de referencia en el controlador . . . . .	241
<b>Figura 4.22.</b>	Tensión de salida del compensador. . . . .	241
<b>Figura 4.23.</b>	Tensión inyectada en el nodo $A$ . . . . .	241
<b>Figura 4.24.</b>	Espectro de la tensión inyectada en el nodo $A$ . . . . .	242
<b>Figura 4.25.</b>	Tensión entregada al ondulator . . . . .	242
<b>Figura 4.26.</b>	Espectro de la corriente de la fase $R$ en 40 ms sin inyección de armónicos. . . . .	243
<b>Figura 4.27.</b>	Espectro de la corriente de la fase $R$ con inyección de armónicos .	243
<b>Figura 4.28.</b>	Densidad del espectro de corriente de la fase $R$ . . . . .	243
<b>Capítulo 5 – Variadores de velocidad ASD</b>		
<b>Figura 5.1.</b>	Arquitectura de un ASD . . . . .	248
<b>Figura 5.2.</b>	Principio de control de la máquina de corriente continua y alterna	249
<b>Figura 5.3.</b>	Diagrama de bloques de un ASD por control vectorial . . . . .	250
<b>Figura 5.4.</b>	Modelo del sistema de potencia. . . . .	252
<b>Figura 5.5.</b>	Sistema de control del ondulator por modulación natural . . . . .	252
<b>Figura 5.6.</b>	Modelo global del sistema de regulación de corrientes por modulación natural . . . . .	252
<b>Figura 5.7.</b>	Simulación del regulador de corriente con el ACR en modulación natural . . . . .	253
<b>Figura 5.8.</b>	Diagrama del controlador vectorial. . . . .	257
<b>Figura 5.9.</b>	Regulador de velocidad. . . . .	259
<b>Figura 5.10.</b>	Diferentes casos de funcionamiento con TACS. . . . .	261
<b>Capítulo 6 – Tecnología con dispositivos FACTS</b>		
<b>Figura 6.1.</b>	Instalación de un acondicionador dinámico de tensión . . . . .	268

<b>Figura 6.2.</b>	Instalación de un D-STATCOM . . . . .	269
<b>Figura 6.3.</b>	Diagrama de un interruptor de estado sólido . . . . .	269
<b>Figura 6.4.</b>	Compensador ideal en derivación conectado a un punto medio en la línea de transmisión . . . . .	271
<b>Figura 6.5.</b>	Diagrama fasorial del sistema propuesto con compensación de potencia reactiva . . . . .	271
<b>Figura 6.6.</b>	Compensador serie ideal conectado a un punto medio de una línea de transmisión corta. . . . .	272
<b>Figura 6.7.</b>	Diagrama fasorial del sistema propuesto con compensación capacitiva serie. . . . .	272
<b>Figura 6.8.</b>	Controlador ideal de ángulo de fase. . . . .	274
<b>Figura 6.9.</b>	Diagrama fasorial del sistema propuesto con un controlador de ángulo de fase . . . . .	274
<b>Figura 6.10.</b>	Características de transferencia de potencia activa del sistema propuesto con compensación en derivación, la serie, de ángulo de fase y sin compensación . . . . .	275
<b>Figura 6.11.</b>	Diagrama ideal esquemático del controlador de flujo de potencia universal . . . . .	275
<b>Figura 6.12.</b>	Dispositivos FACTS basados en tiristores: a) Control del reactor por el tiristor (RCT); b) Condensador variable por el tiristor (CCT)	277
<b>Figura 6.13:</b>	a) Circuito básico de un compensador estático; b) característica $V \times I$ . . . . .	277
<b>Figura 6.14.</b>	a) Compensador estático en adelanto (STATCOM) basado en el convertor fuente de tensión (CFT); b) Característica de operación $V \times I$ . . . . .	279
<b>Figura 6.15.</b>	Compensador en derivación en adelanto. . . . .	280
<b>Figura 6.16.</b>	Condensador serie variado por el tiristor (módulos discretos de operación) . . . . .	281
<b>Figura 6.17.</b>	Condensador serie controlado por tiristor, TCSC (módulo de control continuo) . . . . .	281
<b>Figura 6.18.</b>	Condensador serie continuamente controlado por tiristores duales . . . . .	282
<b>Figura 6.19.</b>	Compensador serie en adelanto. . . . .	283
<b>Figura 6.20.</b>	Ejemplo de un controlador desfasador usando tiristores y el diagrama fasorial de tensión fase-neutro de la fase “a” . . . . .	284
<b>Figura 6.21.</b>	UPFC operando en modo de inyección de voltaje y sus respectivos diagramas fasoriales . . . . .	285
<b>Figura 6.22.</b>	Modelo de un UPFC básico . . . . .	287
<b>Figura 6.23.</b>	Modelo en EMTP de un UPFC . . . . .	287
<b>Figura 6.24.</b>	Diagrama de bloque del control de un compensador estático (STATCOM) . . . . .	289
<b>Figura 6.25.</b>	Diagrama de bloque del control de un compensador serie síncrono estático (SSSC) . . . . .	289
<b>Figura 6.26.</b>	Actuación de un UPFC, con 24 pulsos cuasi-resonantes con tres niveles de polaridad, operando en modo de inyección de voltaje. .	292

<b>Figura 6.27.</b>	Formas de onda de un UPFC, con 24 pulso cuasi-resonantes con tres niveles de polaridad, operando en modo de inyección de voltaje. . . . .	292
<b>Figura 6.28.</b>	Modelos de dispositivos FACTS. a) En serie; b) En derivación . . . .	295
<b>Figura 6.29.</b>	Modelo del transformador desfasador . . . . .	295
<b>Figura 6.30.</b>	Ejemplo de 3 barras. . . . .	296
<b>Figura 6.31.</b>	Región de seguridad para el ejemplo de 3 barras . . . . .	297
<b>Figura 6.32.</b>	Región de seguridad con un transformador desfasador . . . . .	298
<b>Figura 6.33.</b>	Región de seguridad con reactancia serie variable y transformador desfasador . . . . .	299
<b>Figura 6.34.</b>	Sistema con FACTS en la línea $(i, k)$ . . . . .	300
<b>Figura 6.35.</b>	Modelo ideal de dispositivos FACTS con fuentes de corriente . . . .	300
<b>Figura 6.36.</b>	Modelo ideal de dispositivos FACTS con fuentes de tensión . . . .	300
<b>Figura 6.37.</b>	Modelo ideal de dispositivos FACTS con fuentes de potencia . . . .	301
<b>Figura 6.38.</b>	Región de seguridad con dispositivos FACTS ideales . . . . .	301
<b>Figura 6.39.</b>	Sistemas con 2 áreas. . . . .	305
<b>Figura 6.40.</b>	Flujo de las potencias instantáneas definidas en las coordenadas $\alpha$ - $\beta$ -0. . . . .	314
<b>Capítulo 7 – Ejercicios propuestos</b>		
<b>Figura 7.1.</b>	Ejercicio propuesto en el capítulo 1. . . . .	317
<b>Figura 7.2.</b>	Interconexión y simulación de la velocidad de arranque de un motor . . . . .	320
<b>Figura 7.3.</b>	Control de velocidad de una máquina . . . . .	324
<b>Figura 7.4.</b>	Simulación con modulación Delta para una carga inductiva . . . .	328
<b>Figura 7.5.</b>	Simulación a través de TACS para una modulación Delta . . . . .	331
<b>Figura 7.6.</b>	Simulación de sistemas discretos . . . . .	333
<b>Figura 7.7.</b>	Simulación del comando cercano y remoto . . . . .	335
<b>Figura 7.8.</b>	Regulación de corriente y tensión . . . . .	338
<b>Figura 7.9.</b>	Simulación de una fuente trifásica . . . . .	341
<b>Figura 7.10.</b>	Simulación del regulador de corriente con el ACR en modulación natural . . . . .	344
<b>Figura 7.11.</b>	Simulación de un UPFC con ATPDraw. . . . .	349

## Agradecimientos

Parte de los trabajos fueron financiados con fondos provenientes del proyecto de investigación I003, titulado Aplicaciones electrónicas al procesamiento y uso racional de la energía eléctrica de la programación científica UBACYT 2004-2007 de la Universidad de Buenos Aires. Las experiencias de laboratorio se realizaron con instrumentos adquiridos mediante una donación de la fundación YPF. Además, se obtuvo un permiso especial ad-honorem de la Universidad Nacional de Colombia durante los periodos 2001-2002, así como el apoyo para desplazamiento en la comisión de servicio externa remunerada para realizar pasantías de investigación en 2006, 2007 y 2008 en la Universidad de Buenos Aires. Estas permitieron el normal desarrollo del trabajo que presentamos.



## Biografía de autores



**Eduardo A. Cano Plata** nació en Neiva, Colombia, en 1967. Recibió título de ingeniero electricista en 1991 y cursó posgrado en sistemas de distribución en 1995 en la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales. En el periodo de 1996 a 1998 estudió en la Universidad Nacional de San Juan, Argentina, con la ayuda de una beca del DAAD. En 2006 obtuvo título de doctor de la Universidad de Buenos Aires, Área ingeniería. Actualmente es profesor asociado en la Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, donde está vinculado desde 1994. Los temas de interés del profesor Cano Plata son el modelado y la simulación de sistemas, la calidad de la energía y la electrónica de potencia. Es director del Grupo de trabajo Académico en redes de distribución y potencia GREDyP.



**Hernán E. Tacca** nació en Santa Fe, Argentina, en 1954. Recibió el grado de ingeniero electrónico por la Universidad de Buenos Aires en Argentina; luego en 1988 cursó una maestría y en 1993 el doctorado, ambos en la Universidad de Ciencias y Tecnologías de Lille, Francia. En 1998 obtuvo el título de doctor en Ingeniería por la Universidad de Buenos Aires. Desde 1984 trabaja en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. En el Departamento de Electrónica, es profesor asociado y se encarga de investigaciones en electrónica de potencia, calidad de la energía en el laboratorio de control de accionamientos, tracción y potencia (LABCATYP). Tiene interés en investigaciones sobre SMPS, UPS, cargadores de baterías, técnicas de conmutación, y microcontroladores de bajo costo para el control de convertidores.



## Prólogo

A mediados de 2000, en una discusión con el profesor G. A. Capolino del Instituto GRASY, Universidad de Picardie, Francia, Julio Verne nos motivó a revisar la tesis del profesor H. Henao para mostrar que se podía tener una biblioteca de modelos de electrónica de potencia con el ATP en lengua castellana.

El resultado de este trabajo fue el curso de posgrado Simulación en electrónica de potencia con el ATP, dictado en el primer cuatrimestre de 2001 en la Universidad de Buenos Aires.

Los posteriores trabajos de investigación y desarrollo en el tema han dado origen a tesis de alumnos de la Universidad de Buenos Aires y de la Universidad Nacional de Colombia: Marcelo Bruno, Pablo Rossi y Fredy Alexander Guzmán Roa.

En el presente documento tratamos de recopilar apuntes de clase y estudios de caso a través de la herramienta computacional ATP.

Queremos aclarar que en los tres primeros capítulos se utilizan como fuente las tesis de los ingenieros Oscar Trad y Humberto Henao. Al profesor Henao lo reconocemos como pionero en la simulación en electrónica de potencia. Este libro intenta aclarar muchas ecuaciones y presenta las bibliotecas de simulación para ejercitación autodidacta. Finalmente, en los capítulos cuarto y sexto, respectivamente, se presentan aportes de los autores en el tema de corrección dinámica del factor de potencia y FACTS.

Esperamos que la comunidad de habla hispana sepa poner su ojo crítico en la presente obra.

*Los autores*



# Capítulo 1

## Introducción y teoría del EMTP-ATP

### 1.1 Introducción histórica

El programa para cálculo de transitorios electromagnéticos, EMTP (*Electromagnetic Transient Program*) se desarrolló para el análisis de fenómenos transitorios en las redes eléctricas de potencia, pero en razón de los métodos utilizados se aplica al estudio de circuitos electrónicos.

Este programa fue concebido por Bonneville Power Administration (BPA) al final de los años sesenta gracias a los trabajos de H. Dommel y W. S. Meyer con el fin de remplazar los analizadores de transitorios clásicos, TNA (*Transients Network Analyzer*), por una herramienta más flexible.

Para su evolución en BPA, esta útil herramienta ha tenido las contribuciones de otros organismos de investigación públicos y privados. Debido a su constante desarrollo, EMTP se considera hoy día como un elemento de referencia en el análisis de los regímenes transitorios.

Desde 1974, EMTP pudo utilizarse en prácticamente todos los tipos de computadores gracias a un módulo de traducción universal y, por consiguiente, un solo lenguaje de programación (FORTRAN) que facilitó su empleo.

En 1985, después de una tentativa de comercialización de EMTP, BPA no volvió a recibir la ayuda de aquellos que habían trabajado por su mantenimiento y su difusión. En este momento se elaboró una nueva versión bajo el nombre de ATP (*Alternative Transients Program*). La versión ATP es gratuita, pero no es de dominio público como el programa desarrollado por BPA, con el fin de protegerse de la explotación comercial. Acompañado de estos eventos, una serie de grupos de usuarios se fue desarrollando en el ámbito mundial, a partir del Ame/Can EMTP Group, entidad autorizada para la utilización y el libre desarrollo del material ATP, organismo que trabaja bajo la forma de club de usuarios. Para hispanos, existe el grupo de usuarios en lengua castellana, administrado por el Comité Argentino de Usuarios del

EMTP (CAUE). Información y detalles históricos están disponibles en <http://www.iitree-unlp.org.ar/caue/index.html>

## 1.2 Metodología de simulación

La filosofía de simulación de EMTP tiene como finalidad la representación de un sistema eléctrico de potencia regulado bajo el efecto de regímenes transitorios. Las fuentes de fenómenos transitorios están representadas siguiendo el contexto, la situación del equipamiento y su medio ambiente. Un análisis de todos estos fenómenos tiene como fin la estimación de los efectos sobre la estabilidad del sistema, para decidir las leyes de mando que se deben implantar para mejorar su funcionamiento.

Con este propósito, EMTP se basa en dos módulos, NETWORK y TACS, con un gran número de modelos de los elementos constituyentes de los sistemas eléctricos (NETWORKS) y de control TACS (*Transient Analysis of Control Systems*).

En NETWORK, se dispone de:

- Resistencias.
- Inductancias.
- Capacitancias.
- Modelos polifásicos de componentes R-L-C en  $\pi$  o en T.
- Modelos polifásicos de líneas de transmisión con parámetros distribuidos.
- Cables subterráneos.
- Transformadores.
- Resistencias no lineales.
- Resistencias variantes con el tiempo.
- Inductancias no lineales.
- Pararrayos.
- Protectores de sobre tensiones.
- Interruptores, diodos y tiristores.
- Medidores de tensión, de corriente, de par y de velocidad.
- Fuentes de corriente y de tensión.

- Máquinas eléctricas giratorias.
- Analizadores de armónicos (transformada de Fourier).
- Analizadores de carga (flujo de carga).
- Analizadores de espectro (respuesta en frecuencia).
- Simplificación de redes (equivalentes de Thévenin).

En TACS o MODELS es posible modelar:

- Los sistemas de control dinámico.
- Los dispositivos o fenómenos que no están modelados en NETWORK.

Dado que en un estudio de regímenes transitorios una red eléctrica puede ser un sistema muy complejo a causa del modelado de las interacciones electro-magneto-mecánicas, la descripción numérica de los elementos representados por las ecuaciones diferenciales debe ser estable. Con este objetivo, el método de integración trapezoidal ha sido escogido por su simplicidad y por su eficacia en los sistemas llamados “rígidos” [1-2].

Con este método de integración, la simulación de una red eléctrica con  $n$  nodos, que tenga resistencias, capacitancias, inductancias, máquinas eléctricas estáticas y rotativas y otros dispositivos, se reduce a la solución de un conjunto de ecuaciones algebraicas reales simultáneas y expresadas bajo la forma de conductancia nodal (formulación nodal), que pueden ser resueltas en cada paso de tiempo  $\Delta t$  [3]. Al profundizar en la descripción, se tiene que si se suponen conocidas las corrientes y tensiones de una red eléctrica con  $n$  nodos en los instantes  $0, \Delta t, 2\Delta t \dots$  hasta  $t-\Delta t$ , el sistema de ecuaciones en el instante  $t$  es:

$$|G||v(t)| = |i(t)| - |hist| \quad (1.1)$$

con:

$|G|$  : Matriz simétrica ( $n \times n$ ) de conductancia nodal

$|v(t)|$  : Vector ( $n \times 1$ ) de tensiones de nodo

$|i(t)|$  : Vector ( $n \times 1$ ) de fuentes de corriente

$|hist|$  : Vector ( $n \times 1$ ) de términos históricos de la red conocidos

Normalmente hay nodos en los cuales se conoce la tensión, sea porque hay fuentes conectadas o porque están puestos a tierra. Entonces, la ecuación

ción (1.1) puede ser nuevamente planteada a partir de los valores conocidos, así:

$$[G_{DD}][v_D(t)] = [i_D(t)] - [hist_D] - [G_{DC}][v_C(t)] \quad (1.2)$$

con:

$[v_D(t)]$  : Vector de tensiones desconocidas

$[v_C(t)]$  : Vector de tensiones conocidas

Una expresión más simple de (1.2) es:

$$[G_{DD}][v_D(t)] = [K_D(t)] \quad (1.3)$$

con:

$[K_D(t)]$  : Conjunto de términos históricos, tensiones y corrientes conocidas.

De esta forma, el sistema lineal (1.3) está resuelto por el conocimiento de vector  $[v_D(t)]$  de las tensiones desconocidas, a partir de la factorización triangular de la matriz  $[G_{DD}]$ .

### 1.3 Ecuaciones discretas de los componentes elementales con ayuda del método de integración trapezoidal

Como se mencionó, el ATP utiliza la regla de integración trapezoidal que se discute en la referencia [3], para hacer el cálculo de la evolución temporal en las redes eléctricas. A pesar de que los métodos de integración de mayor orden que la regla trapezoidal se encuentran muy difundidos, este método ha demostrado ser muy estable numéricamente.

$$f = \frac{dx}{dt} \quad (1.4)$$

La regla de integración trapezoidal resuelve esta función así:

$$\frac{f(t) + f(t - \Delta t)}{2} = \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} \Rightarrow x(t) = \frac{\Delta t}{2} * f(t) + \frac{\Delta t}{2} * f(t - \Delta t) + x(t - \Delta t) \quad (1.5)$$

### 1.3.1 Elementos lineales no emparejados

#### 1.3.1.1 Resistencia

La formulación continua del elemento resistivo es:

$$v = R * i \Rightarrow i(t) = \frac{v(t)}{R} \quad (1.6)$$

Para la representación nodal discreta, la ecuación (1.6) en el instante  $t$  toma la forma:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} + \frac{v(t-\Delta t)}{R} - i(t-\Delta t) = \frac{1}{R} * v(t) + hist(t-\Delta t) \quad (1.7)$$

#### 1.3.1.2 Inductancia

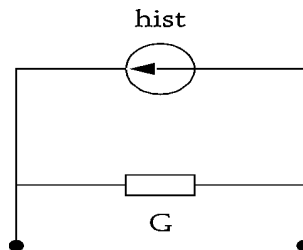
La formulación continua del elemento inductivo es:

$$v = L * \frac{di}{dt} \quad (1.8)$$

De la representación discreta de la ecuación (1.8), con la ayuda del método trapezoidal, se obtiene:

$$i(t) = \frac{\Delta t}{2L} * v(t) + \frac{\Delta t}{2L} * v(t-\Delta t) + i(t-\Delta t) = \frac{\Delta t}{2L} * v(t) + hist(t-\Delta t) \quad (1.9)$$

Es decir, un inductor se representa con una resistencia de valor  $2L/\Delta t$  en paralelo con una fuente de corriente de valor (figura 1.1).



**Figura 1.1.** Representación circuital de la inductancia.

### 1.3.1.3 Capacitancia

La formulación continua del elemento capacitivo es:

$$i = C * \frac{dv}{dt} \quad (1.10)$$

De la representación discreta de esta ecuación, con ayuda del método trapezoidal, se obtiene:

$$i(t) = \frac{2C}{\Delta t} * v(t) - \frac{2C}{\Delta t} * v(t - \Delta t) + i(t - \Delta t) = \frac{2C}{\Delta t} * v(t) + hist(t - \Delta t) \quad (1.11)$$

Es decir, un capacitor se representa con una resistencia de valor  $\frac{2C}{\Delta t}$  en paralelo con una fuente de corriente de valor  $hist(t - \Delta t)$ . En forma similar al caso de la inductancia, se obtiene un circuito equivalente como el de la figura 1.1 para el capacitor.

### 1.3.2 Componentes entre nodos

Las ecuaciones precedentes consideran los componentes conectados de nodo a tierra. En el caso más general (componentes entre dos nodos), las ecuaciones se plantean en su formulación nodal:

$$V_k - V_m = V_{km} = L \frac{di_{km}}{dt} \quad (1.12)$$

Discretizando:

$$\frac{v_k(t) + v_k(t - \Delta t)}{2} - \frac{v_m(t) + v_m(t - \Delta t)}{2} = L \frac{i_{km}(t) - i_{km}(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (1.13)$$

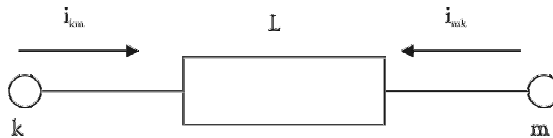


Figura 1.2. Inductancia entre dos nodos.

Despejando  $i_{km}$ :

$$i_{km}(t) = \frac{\Delta t}{2L} (v_k(t) - v_m(t)) - \frac{\Delta t}{2L} (v_k(t - \Delta t) - v_m(t - \Delta t)) + i_{km}(t - \Delta t) \dots \quad (1.14)$$

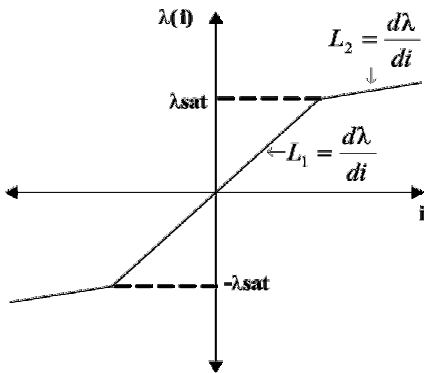
La misma ecuación se plantea para el nodo  $m$  respecto de la corriente  $mk$ .

### 1.3.3 Elementos no lineales

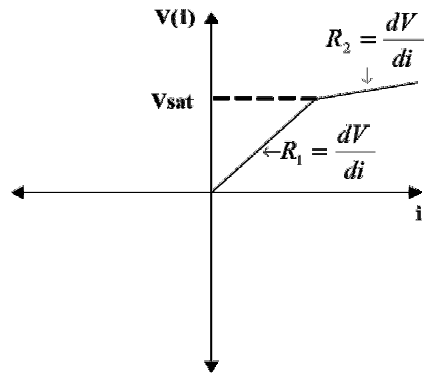
Buscando la manera de conservar el mismo algoritmo de resolución de ecuaciones en EMTP, se han implantado adaptaciones sobre el modelo lineal en remplazo de métodos no lineales, los cuales son menos eficaces para la totalidad de la red. Principalmente hay dos técnicas utilizadas para el tratamiento de elementos no lineales: el método de compensación y el método de descomposición en subsistemas lineales por fragmentos (tramos) [2].

#### 1.3.3.1 Linealización por tramos

La descomposición de una curva característica no lineal, en una función lineal por fragmentos (figuras 1.3 y 1.4) puede ser tratada de dos maneras: por medio de interruptores o por remplazo directo de los valores de la matriz  $[G](L_1, L_2$  o  $R_1, R_2$  en las figuras 1.3 y 1.4).

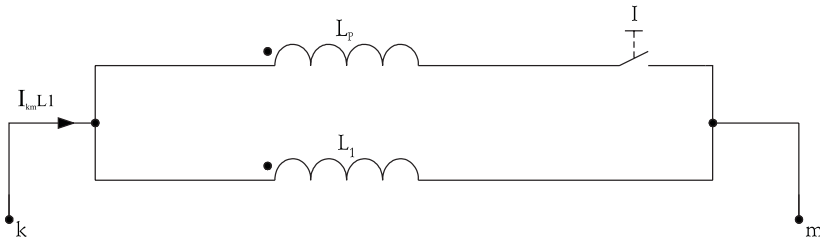


**Figura 1.3.** Curva característica por fragmentos de la inductancia.

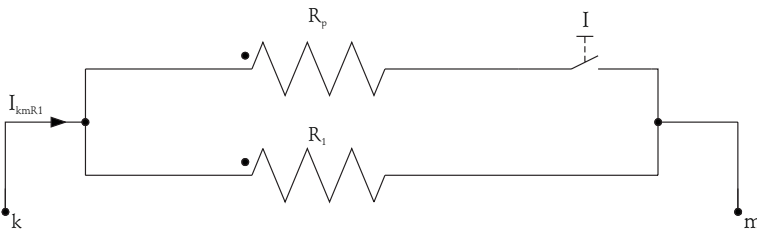


**Figura 1.4.** Curva característica por fragmentos de la resistencia.

Utilizando interruptores, el elemento no lineal es simulado con elementos lineales en paralelo como lo indican las figuras 1.5 y 1.6. En el caso de una inductancia (figura 1.5), el flujo se calcula por integración de la tensión entre los bornes  $k$  y  $m$ , independientemente de la posición del interruptor  $I$ . El interruptor  $I$  se cierra cuando  $|\lambda| \geq \lambda_{sat}$  ( $|v| \geq v_{sat}$ ) y se abre cuando  $|\lambda| < \lambda_{sat}$  ( $|v| < v_{sat}$ ).

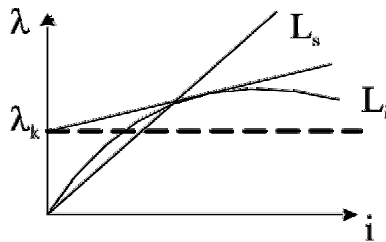


**Figura 1.5.** Simulación de una inductancia no lineal por fragmentos.



**Figura 1.6.** Simulación de una resistencia no lineal por fragmentos.

Otro método comúnmente usado en la linealización de sistemas no lineales es usar un criterio con el cual analizar los estados de saturación en máquinas eléctricas, que se puede representar mediante rectas tangentes. La exposición que a continuación se detalla se debe a los desarrollos logrados por el Ing. Oscar Trad y que dio a conocer el curso de postgrado que se cita en [3].



**Figura 1.7.** Método de la inductancia incremental.

En la figura 1.7 se muestra la curva de saturación de un inductor no lineal. En este caso es posible representar un punto sobre la curva a través de una recta tangente cuya ecuación será:

$$\lambda(t) = L_s(t)i(t) = L_i(t)i(t) + \lambda_k(t) \tag{1.15}$$

donde el subíndice  $i$  indica que se trata de una inductancia incremental y el subíndice  $s$  indica que es la inductancia saturada.

Derivando  $\lambda$  respecto a  $i$  se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d\lambda}{di} = L_i + \frac{dL_i}{di} i + \frac{d\lambda_k}{di} \quad (1.16)$$

De la figura 1.7 se tiene que la derivada es la recta tangente; esto implica que:

$$\frac{d\lambda}{di} = L_i \rightarrow i \frac{dL_i}{di} = -\frac{d\lambda_k}{di} \quad (1.17)$$

Multiplicando por  $\frac{di}{dt}$  se obtiene:

$$i \frac{dL_i}{di} \frac{di}{dt} = -\frac{d\lambda_k}{di} \frac{di}{dt} \rightarrow \frac{dL_i}{d_i} i = -\frac{d\lambda_k}{d_i} \quad (1.18)$$

Tomando la derivada respecto al tiempo del flujo:

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\{L_i i + \lambda_k\}}{dt} = L_i \frac{di}{dt} \quad (1.19)$$

Utilizando el concepto de inductancia incremental en componentes no lineales se obtienen ecuaciones idénticas a las de los componentes lineales. El problema reside en que  $L_i$  se modifica en cada instante, debiéndose actualizar la matriz de admitancia. Discretizando estas ecuaciones se obtienen:

$$v = L_i \frac{di}{dt} \rightarrow \frac{V(t) + V(t - \Delta t)}{2} = L_i(t - \Delta t) \frac{i(t) - i(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (1.20)$$

despejando el valor de la corriente  $i_n$  en cualquier instante  $t$ .

### 1.3.3.2 Método de compensación

En la referencia [3] se desarrolló detenidamente los llamados de compensación que simulan los elementos no lineales como fuentes de corrientes que son impuestas a la red lineal (sección 1.3) sin tener en cuenta las no linealidades. En el caso de que exista un elemento no lineal entre los nodos  $k$  y  $m$  (figura 1.8), este debe ser excluido de la solución de la red lineal y ser simulado como una fuente de corriente  $i$  que sale del nodo  $k$  y entra al nodo  $m$  (si el elemento es tratado como una carga). La corriente  $i_{km}$  resulta de la solución simultánea de la ecuación del circuito equivalente de Thévenin entre los bornes  $k$  y  $m$ , y la ecuación no lineal del elemento en cuestión. Este procedimiento también se denomina “Teorema de compensación” y la aplicación de este se ilustra en la figura 1.8. En este caso, el sistema se resuelve sumando la solu-

ción de la red lineal activa, desconectada del componente no lineal, más la solución de la red lineal pasiva, sometida a la acción de una fuente de corriente que reemplaza el componente no lineal. De esta manera:

$$v_{km} = v_{kmo} - R_{Thev} i_{km} \tag{1.21}$$

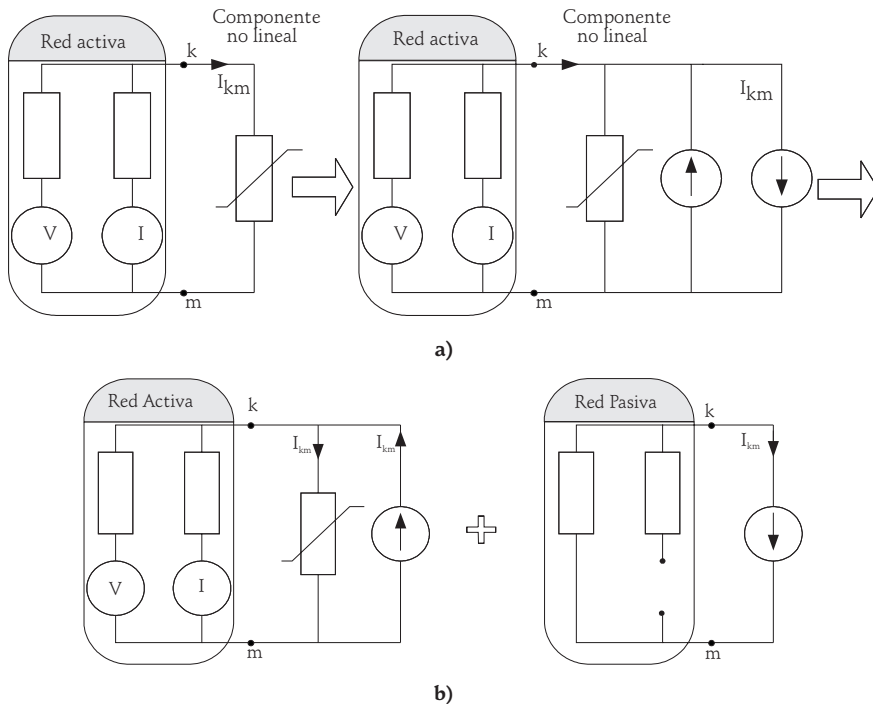
donde el subíndice *o* indica tensión de circuito abierto. El elemento no lineal se plantea según su función de dependencia:

$$v_{km} = f(i_{km}) \tag{1.22}$$

Resolviendo las ecuaciones (1.21) y (1.22) se obtiene  $i_{km}$  que es la incógnita por determinar. De la misma forma se procede para el caso de múltiples fuentes de perturbación o elementos no lineales conectados a diferentes nodos de la red. Las ecuaciones (1.21) y (1.22) anteriores serán:

$$[v_{km}] = [v_{kmo}] - [R_{Thev}][i_{km}]$$

$$[v_{km}] = [f(i_{km})]$$



**Figura 1.8.** Método de compensación [3].

Para obtener la matriz  $[R_{Thev}]$  se aplican fuentes de corrientes de valor unitario en los nodos con componentes no lineales. Para hallar los elementos fuera de la diagonal se restan las tensiones entre los nodos involucrados. Comúnmente se utiliza el método de Newton-Raphson para resolver el sistema de ecuaciones, aunque también podría utilizarse otra metodología. Adicionalmente, se pueden utilizar métodos iterativos, a pesar de ser la solución general de la red secuencial (caso EMTP-96).

### 1.4 Ecuaciones de una línea de transmisión con parámetros distribuidos y sin pérdidas

En el caso de la simulación de las líneas de transmisión, ATP tiene múltiples modelos. A modo de introducción, con el método de Bergeron se presenta el caso de una línea monofásica ideal sin pérdidas, modelo K. C. Lee [4]. Para este caso, son conocidas, las ecuaciones de onda:

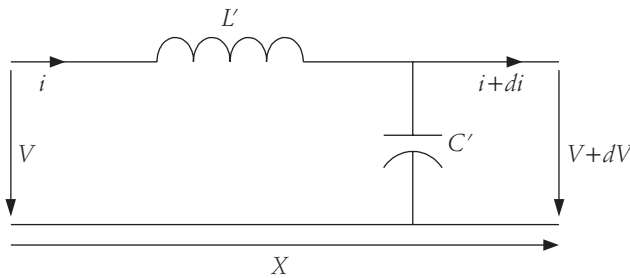


Figura 1.9. Diferencial de una línea de transmisión.

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = L' \frac{\partial i}{\partial t} \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C' \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.23)$$

donde:

$L', C'$  : Inductancia y capacitancia por unidad de longitud.

$x$  : Posición de la línea en relación con el nodo emisor.

D'Alembert plantea la siguiente solución:

$$i = F(x-ct) - f(x+ct) \quad (1.24)$$

$$v = Z * F(x-ct) + Z * f(x+ct) \quad (1.25)$$

donde  $F$  y  $f$  son funciones independientes,  $x$  es la coordenada espacial a lo largo de la línea,  $t$  el tiempo y  $Z$  es la impedancia de onda definida como  $Z = \sqrt{L'/C'}$ . Combinando las ecuaciones de tensión y corriente:

$$v + Zi = 2ZF(x - ct) \quad (1.26)$$

Por tanto, si  $(x - ct)$  es constante,  $v + Zi$  también adquiere un valor constante. Además, cuando una onda que se propaga de un extremo a otro de la línea tarda un tiempo  $\tau$  en arribar al final de la misma, denominada tiempo de viaje. Considerando la longitud de toda la línea, para una velocidad de propagación  $c$  y una longitud total  $l$  se tiene:

$$x - ct = l - ct = c\left(\frac{l}{c} - t\right) = -c(t - \tau) \quad (1.27)$$

Es decir, en el extremo receptor la combinación de tensión y corriente adquiere un valor igual a una función dependiente de  $\tau$  segundos antes, pero este es el valor que tenía la función  $V + Z_i$  en el instante  $(t - \tau)$ , en el nodo emisor, de tal manera que:

$$i_r(t) = \frac{1}{Z} v_r(t) + hist_r(t - \tau) \quad (1.28)$$

Por tanto:

$$hist_r(t - \tau) = \frac{1}{Z} v_e(t - \tau) - i_e(t - \tau) \quad (1.29)$$

De la misma forma, dado que la línea constituye un vínculo rígido entre ambos nodos:

$$i_e(t) = \frac{1}{Z} v_e(t) + hist_e(t - \tau) \quad (1.30)$$

con:

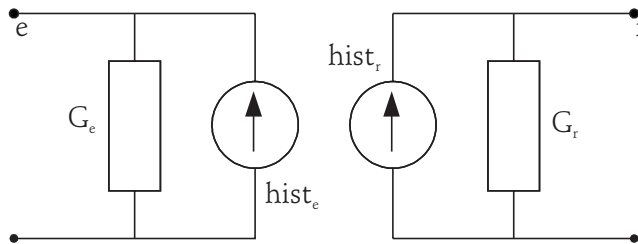
$$hist_e(t - c) = \frac{1}{Z} v_r(t - c) - i_r(t - c) \quad (1.31)$$

De estas expresiones se concluye que:

- Se debe mantener un registro de los valores en  $\frac{1}{Z} v - i$  de los instantes previos al instante considerado.

- Si  $\tau$  no es múltiplo de  $\Delta t$ , debe interpolarse; ATP tiene incluida interpolación lineal.
- Cuando se simulan varias líneas, no puede utilizarse un  $\Delta t$  menor que el menor de los  $C$  del conjunto de líneas.
- No existe error de discretización porque no se está aplicando ninguna regla de integración.
- Los nodos emisor y receptor están desacoplados.

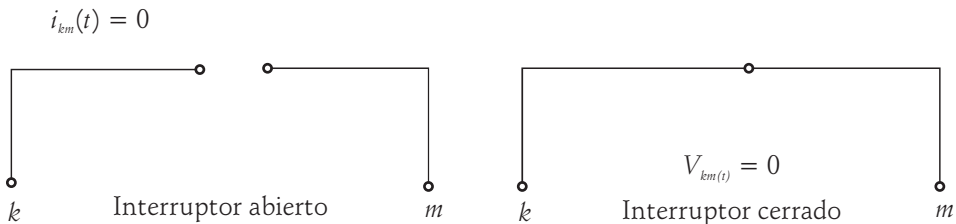
Finalmente el modelo que se obtiene para la línea es el que se presenta en la figura 1.10:



**Figura 1.10.** Forma discreta de la línea de transmisión.

## 1.5 Simulación de interruptores

En una red eléctrica, la manipulación de interruptores es una fuente importante de fenómenos transitorios. En EMTP, estos son representados como elementos perfectos con apertura y cierre instantáneos, siendo respectivamente  $R = \infty$  y  $R = 0$  como valores de resistencia equivalente en estos dos estados (figura 1.11).



**Figura 1.11.** Simulación de un interruptor.

Cuando un interruptor entre los nodos  $k$  y  $m$  se abre, los dos nodos tendrán una representación en el sistema de ecuaciones nodales. Pero si este se en-

cuentra cerrado, los nodos  $k$  y  $m$  se convierten en uno solo; entonces el método de simulación en EMTP es de topología variable.

La apertura y el cierre de los interruptores pueden ser controlados temporalmente, condicionando la tensión a los bornes y la corriente que pasa, o por acción de las señales de comando (definidas en TACS o MODELS).

El efecto de los interruptores en EMTP es simulado por compensación (numeral 1.3.3.2). Para representar  $M$  interruptores,  $M$  circuitos equivalentes de Thévenin son calculados (ecuación 1.21) y las de los interruptores necesarios para la superposición (ecuación 1.22) son:

$[i_{kimi}] = 0$  si los interruptores están abiertos.

$[i_{kimi}] = [R_{thv_{kfmf}}]^{-1} [V_{thv_{kimi}}]$  si hay interruptores cerrados.

Donde:  $[R_{thv_{kfmf}}]$  se obtiene eliminando las filas y las columnas de  $[R_{thv_{kimi}}]$  (ecuación (1.21)) correspondientes a los nodos de los interruptores abiertos.

En principio, este método es el mismo utilizado para los elementos no lineales, pero en el caso de los interruptores, los detalles de programación son diferentes.

## 1.6 Simulación de fuentes de tensión y de corriente

Las fuentes de corriente o tensión que se utilizan en el análisis de la red eléctrica también son modeladas por EMTP. Se pueden usar fuentes continuas (en escalón o rampas), fuentes alternas (sinusoidales) o fuentes de impulsos. Estas últimas son previstas para simular las pruebas de impulso a transformadores y otros aparatos eléctricos. Existen también fuentes de tensión controladas por corriente para la simulación simplificada de estaciones de conversión en corriente continua. Poniendo aparte las fuentes residentes que se citan con anterioridad, existe igualmente la posibilidad de definir otras (analíticas o experimentales) con la ayuda de instrucciones FORTRAN escritas en el módulo TACS o MODELS.

## 1.7 Modelos más elaborados

En ATP existen modelos de elementos del sistema que utilizan transformaciones matemáticas, las cuales hacen ver la solución del componente en el

plano transformado al plano temporal de manera más sencilla. Tal es el caso de la máquina sincrónica que utiliza la transformación de Park para hacer desacoplamiento inductivo entre fases, o el modelo de línea con parámetros dependiente de la frecuencia (modelo J. Martí) que utiliza transformaciones modales para independizar el comportamiento de cada fase.

## 1.8 Solución del sistema

Disponiendo de las expresiones discretizadas para cada componente, puede armarse el sistema de ecuaciones nodales:

$$[G(t)]*[v(t)]=[i(t)]+[hist(t-\Delta t)] \quad (1.32)$$

El sistema se construye considerando que:

- Se sigue la metodología normal para la construcción de matrices de admitancias.
- En lugar de matriz de admitancia se tiene una matriz de conductancias, ya que todos los componentes han sido reducidos a conductancias equivalentes.
- Los nodos que se encuentran conectados a fuentes de alimentación de tensión son agrupados al final del sistema de ecuaciones, ya que en ellos la tensión no es incógnita. Esto permite la reducción del orden del sistema de ecuaciones mediante la transformación de Gabriel Kron [23].

El sistema puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} G_{uu}(t) & G_{uk}(t) \\ G_{ku}(t) & G_{kk}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_u(t) \\ V_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_u(t) \\ i_k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} hist_u(t-\Delta t) \\ hist_k(t-\Delta t) \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Reagrupando términos:

$$[G_{uu}(t)][V_u(t)]=[i_u(t)]-[G_{uk}(t)][v_k(t)]+[hist_u(t-\Delta t)] \quad (1.34)$$

La resolución de este sistema de ecuaciones en cada instante permite obtener el comportamiento transitorio. Los términos históricos se almacenan para resolver el sistema en el próximo  $\Delta t$ .

Finalmente, el sistema se resuelve por un método de resolución de sistemas lineales, triangulizando la matriz de conductancias. Para mejorar los tiempos de cálculo se utilizan algunos procedimientos particulares; por ejemplo, la

matriz del sistema se ordena en una forma particular con el objeto de evitar retriangularizar toda la matriz de conductancias después de que se producen cambios en el sistema (cambio en el estado de un interruptor, cambio en componente no lineal, etc.).

En otros casos se trata de conseguir una optimización desde el punto de vista del almacenamiento de la matriz (explotar el grado de esparcidad). En el caso de procesamiento en paralelo, el ordenamiento puede efectuarse en forma tal de obtener submatrices sobre la diagonal.

$$\begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 & 0 & \dots \\ x & x & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & x & x & & \\ 0 & 0 & x & x & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

## 1.9 Reducción del orden de los sistemas de ecuaciones

En la resolución de los sistemas lineales de ecuaciones que se plantean en el diseño de sistemas eléctricos, frecuentemente se utiliza un método para reducir el orden del sistema lineal de ecuaciones [3]. Este método, conocido como método de Kron [12], representa el sistema con menor número de ecuaciones y de incógnitas que transforman el modelo matemático del sistema eléctrico en un modelo más simple. Si se tiene un sistema lineal:

$$[A] * [x] = [b] \quad (1.35)$$

siendo  $[A]$  la matriz que representa el sistema,  $[x]$  el vector de las incógnitas y  $[b]$  el vector resultado del sistema, si el valor de parte de las incógnitas no es de interés, el sistema de ecuaciones puede ser dividido en submatrices:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

siendo las incógnitas que interesa determinar  $[x_1]$  y las que no interesa  $[x_2]$ .

El vector  $[x_2]$  puede despejarse del segundo grupo de ecuaciones y remplazarse sobre el primero:

$$[x_2] = [A_{22}]^{-1} * \{ [b_2] - [A_{21}] * [x_1] \} \quad (1.37)$$

obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} (A_{11} - A_{12} * A_{22}^{-1} * A_{21}) & (A_{12} * A_{22}^{-1}) \\ (-A_{22}^{-1} * A_{21}) & (A_{22}^{-1}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

$$\begin{bmatrix} Ar_{11} - Ar_{12} \\ Ar_{21} & Ar_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Este sistema representa dos conjuntos de ecuaciones lineales desacopladas y el primer grupo puede ser resuelto independientemente del segundo. El costo de la transformación reside en la necesidad de invertir la matriz  $[A_{22}]$  y en la pérdida de simetría (si existía) de la matriz  $[A]$ . La economía de recursos computacionales (tiempo de cálculo, memoria, etc.) de este método depende de las dimensiones originales de  $[A]$  y del grupo de variables  $[x_1]$ .

El significado físico de la transformación puede visualizarse en los siguientes ejemplos de aplicación en el área eléctrica:

- Matriz de impedancia de una línea con múltiples conductores por fase: en estado estacionario la caída de tensión a lo largo de la línea puede representarse por el sistema formado por la matriz de impedancias y el vector de corrientes:

$$[Z] * [i] = [\Delta v] \quad (1.40)$$

donde el orden del sistema depende del número de conductores de la línea. Si se reduce el sistema de ecuaciones al número de fases de la línea (normalmente tres fases), el sistema representa una línea de tres conductores equivalente a la línea original.

- Representación de la máquina sincrónica: de acuerdo con el número de arrollamientos internos del modelo de máquina usado; el comportamiento transitorio de la misma puede representarse mediante el sistema de ecuaciones (usando la transformación de Park):

$$[v_{pk}] = [R_{pk}] * [i_{pk}] - \frac{d \left\{ \left[ \lambda_{pk} \right] \right\}}{dt} + [u_s] \quad (1.41)$$

donde:

$[v_{pk}]$  : Vector de tensiones

$[R_{pk}]$  : Matriz de resistencias

$[i_{pk}]$  : Vector de corrientes

$\frac{d\{\lambda_{pk}\}}{dt}$  : Derivada respecto del tiempo del vector de flujos magnéticos  
(efecto transformador).

$[u_s]$  : Tensiones inducidas por efecto de la rotación de los flujos.

Normalmente este sistema está formado por 7 ecuaciones (7 arrollamientos). Si se aplica la regla de integración trapezoidal, se reduce el orden del sistema a 3 arrollamientos, y si luego se aplica la transformación inversa de Park, se obtiene:

$$[v_{pk}] = [R_{cph}] * [i_{ph}] + [E_{ph}] \quad (1.42)$$

$[E_{ph}]$  : Vector de Fems en componentes de fase que contiene los términos históricos

$[R_{cph}]$  : Matriz de términos asociados

Estas ecuaciones representan tres fuentes de tensión detrás de impedancias y pueden incorporarse al sistema de ecuaciones que representa todo el sistema eléctrico (en componentes de fase) y resolverse junto con el mismo para obtener las corrientes de toda la red.

La aplicación del método en EMTP tiene las siguientes características:

- El procedimiento de reducción está basado en el método de Gauss Jordan.
- Retorna la matriz reducida del sistema de ecuaciones.
- Utiliza una sola matriz para el almacenamiento de la matriz original y de la matriz reducida (economizando memoria).
- Emplea pivotización de filas (Gauss Jordan es numéricamente inestable debido a los errores por redondeo [10]).

Comenzando con la última fila de la matriz, si se despeja la última incógnita:

$$a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + a_{mj} * x_j + \dots + a_{mm} * x_m = b_m \quad (1.43)$$

$$-\frac{a_{m1}}{a_{mm}} * x_1 - \frac{a_{m2}}{a_{mm}} * x_2 - \frac{a_{mj}}{a_{mm}} * x_j \dots + b_m = x_m \quad (1.44)$$

El valor de  $x_m$  debe remplazarse en el resto de las ecuaciones obteniendo:

$$a_{k1} * x_1 + a_{k2} * x_2 + a_{kj} * x_j + \dots + a_{km} * \left( -\frac{a_{m1}}{a_{mm}} * x_1 - \frac{a_{m2}}{a_{mm}} * x_2 - \frac{a_{mj}}{a_{mm}} * x_j \dots + b_m \right) = b_k \quad (1.45)$$

Si se llama  $a_{rij}$  a los nuevos términos se obtienen las siguientes expresiones:

- Para  $i = k$  (la fila que se reduce es la del elemento pivote):

$$a_{rij} = \frac{a_{ij}}{a_{kk}} \quad (1.46)$$

- Para  $i \neq k$ :

$$a_{rkj} = \left( a_{kj} - a_{km} \frac{a_{mj}}{a_{mm}} \right) * x_j \quad (1.47)$$

Este procedimiento debe repetirse para el resto de las ecuaciones hasta que el conjunto de incógnitas, cuyo valor no interesa, se haya eliminado del sistema de ecuaciones.

## 1.10 Errores en el ATP

Cuando se almacena un número en la memoria de una computadora mediante lógica de punto flotante, se efectúan modificaciones en la mantisa y el exponente para optimizar la precisión en el almacenamiento [3]. A su vez, cuando se opera con lógica binaria con 2 números, debe utilizarse el mismo exponente. Esto da origen a las operaciones de *normalización* y *desnormalización*, respectivamente.

*Normalización*: el exponente se ajusta para permitir que el primer dígito significativo se sitúe a la derecha del punto.

$$35.4 \Rightarrow .354 \times 10^2$$

*Desnormalización*: el exponente de 2 números se ajusta representados mediante punto flotante para realizar su suma. Estas operaciones son una de las causas de errores.

Los errores pueden clasificarse en:

- *Error por redondeo*: debido a la representación de punto flotante del número; también es el que se produce por efecto de la desnormalización. Este error puede ser detectado utilizando almacenamiento de simple o doble precisión.

- *Error por truncamiento*: debido a limitar un proceso numérico antes de llegar a su fin (por ejemplo, el truncamiento de series). Puede controlarse a través del número de iteraciones.
- *Error de discretización*: debido a asignar a una variable valores discretos, cuando en realidad varía en forma continua (por ejemplo, error dependiente de  $\Delta t^n$  en la solución de ecuaciones diferenciales. Otro ejemplo sería el error debido al uso de diferencias finitas para derivadas. Este tipo de error puede detectarse y analizarse cambiando el intervalo de tiempo.
- *Errores de datos*: provenientes de la información con que se alimenta el método.
- *Error de modelo*: el modelo matemático es una aproximación del fenómeno físico.

El error total, suma de los errores mencionados anteriormente, puede ser menor o mayor que los errores individuales, dependiendo de los respectivos signos. Esto origina el concepto de *estabilidad de la solución*. La solución obtenida puede discrepar de la solución real al transcurrir el tiempo. En general, puede decirse que para que la solución sea estable, al transcurrir el tiempo, el error total debe cambiar de signo, de tal manera que se pueda autocompensar. Se deben separar los conceptos de precisión y estabilidad. Un método puede ser estable o preciso, o ambas cosas a la vez. Respecto a los errores en procesos iterativos, cuando el método es realimentado negativamente, inexorablemente converge a un proceso oscilatorio. Es necesario fijar adecuadamente el control de las iteraciones.

### 1.10.1 Errores de la regla de integración trapezoidal

En el proceso de discretización de las ecuaciones diferenciales, se introduce un error que en algunos casos puede llegar a afectar considerablemente los resultados del cálculo. Con el objeto de estudiar la magnitud del error introducido, se analiza un caso sencillo, consistente en el transitorio de energización de un circuito serie RL, con una fuente de corriente continua (figura 1.12).

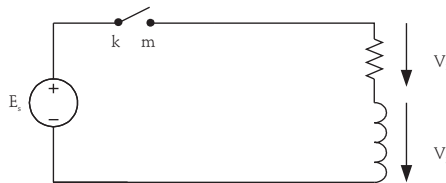


Figura 1.12. Apertura en un interruptor.

El circuito se resolvió utilizando la solución analítica, luego la regla de integración trapezoidal, y aplicando el ATP (regla de integración trapezoidal).

La ecuación diferencial del circuito es:

$$e_s(t) = R * i(t) + L * \frac{di(t)}{dt} \quad (1.48)$$

Las ecuaciones utilizadas por los diferentes métodos son:

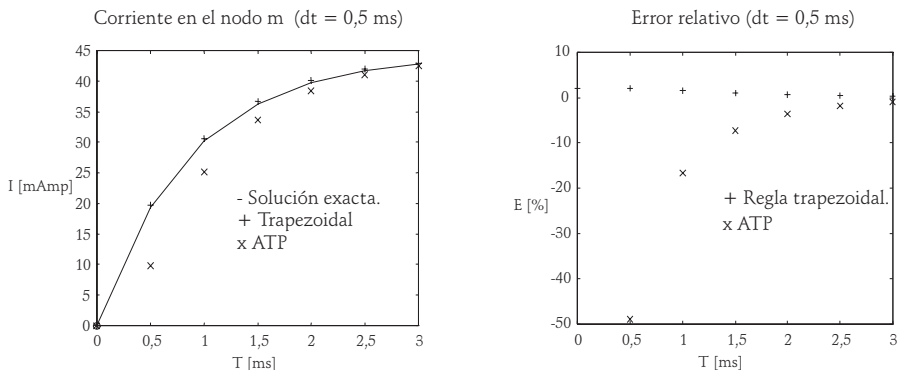
- Solución analítica:

$$i(t) = \frac{e_s(t)}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad (1.49)$$

- Regla de integración trapezoidal y programa ATP:

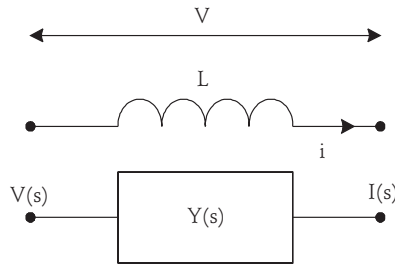
$$i(t) = \frac{1}{\left(R + \frac{2L}{\Delta t}\right)} e_s(t) + \frac{1}{\left(R + \frac{2L}{\Delta t}\right)} \left\{ e_s(t - \Delta t) + \left(-R + \frac{2L}{\Delta t}\right) i(t - \Delta t) \right\} \quad (1.50)$$

En la figura 1.13 se muestran resultados para un paso de integración. Puede observarse el error de inicialización en ATP, el cual se atenúa rápidamente. Este error no se debe a la regla de integración en sí misma, sino a que el programa cierra el interruptor de la fuente después de cumplirse el tiempo de actuación especificado. Este error presente en la mayoría de los programas de cálculo de transitorios podría solucionarse empleando procedimientos iterativos en el cálculo que permitan regresar (actualizando las fuentes históricas) al verdadero instante de actuación de los interruptores y reiniciar el cálculo a partir de ese instante [4-5].



**Figura 1.13.** Corriente en el nodo *m* y el error relativo en un instante de tiempo de 0.5 ms.

El efecto de discretización de la regla de integración puede ser interpretado como una distorsión de la naturaleza del componente discretizado. El análisis de sistemas discretos estudiados puede verse en [21]. Un método para determinar el error de la regla de integración consiste en considerar a la ecuación diferencial de un componente sencillo (inductancia por ejemplo) como una función de transferencia y aplicar a la entrada una señal senoidal. El apartado que a continuación se presenta fue originalmente desarrollado por Fernando Alvarado [67].



**Figura 1.14.** Función de transferencia equivalente.

Para una entrada senoidal pura, haciendo  $s \rightarrow j\omega$

$$v(t) = e^{j\omega t} \quad i(t) = y e^{j\omega t} \quad (1.51)$$

Por ejemplo, para la inductancia real (asumiendo condiciones iniciales iguales a cero), la función de transferencia (salida / entrada) es igual a:

$$v = L \frac{\partial i}{\partial t} \rightarrow V(s) = L \frac{I(s)}{S} \rightarrow Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{LS} \rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{jL\omega} \quad (1.52)$$

Aplicando esta expresión a la regla de integración trapezoidal se obtiene:

$$\frac{v(t) + v(t - \Delta t)}{2} \Delta t = L_i(t) - L_i(t - \Delta t) \quad (1.53)$$

$$i(t) - i(t - \Delta t) = \frac{\Delta t}{2L} (v(t) + v(t - \Delta t)) \quad (1.54)$$

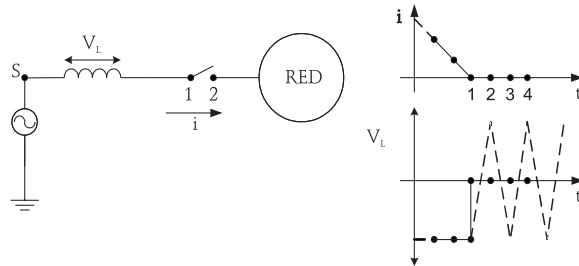
$$y_e(\omega) = \frac{\Delta t}{2L} \frac{e^{j\omega\Delta t} + 1}{e^{j\omega\Delta t} - 1} = \frac{\Delta t}{2L} \frac{e^{j\omega\frac{\Delta t}{2}} + e^{-j\omega\frac{\Delta t}{2}}}{e^{j\omega\frac{\Delta t}{2}} - e^{-j\omega\frac{\Delta t}{2}}} \frac{e^{j\omega\frac{\Delta t}{2}}}{e^{j\omega\frac{\Delta t}{2}}} \quad (1.55)$$

Considerando:

$$\frac{e^{j\omega\frac{\Delta t}{2}} + e^{-j\omega\frac{\Delta t}{2}}}{e^{j\omega\frac{\Delta t}{2}} - e^{-j\omega\frac{\Delta t}{2}}} = \frac{1}{jtg\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)} \quad (1.56)$$

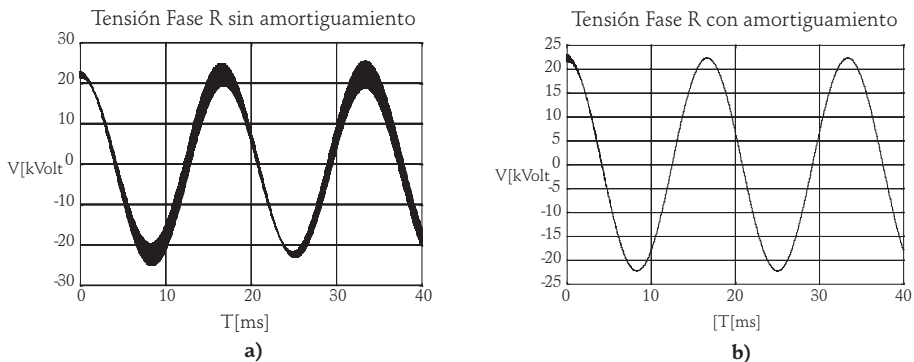
$$y_e(\omega) = \frac{\Delta t}{2L} \frac{1}{jtg\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)} = \frac{1}{j\omega L_{tg}\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)} \quad (1.57)$$

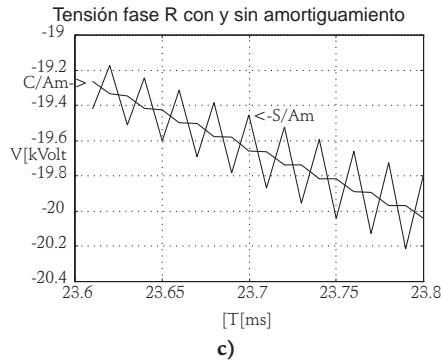
$$L_e(\omega) = L \frac{tg\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)} \quad (1.58)$$



**Figura 1.15.** Oscilación numérica [2].

El efecto de discretización de la regla de integración trapezoidal consiste en modificar el valor de la inductancia a través de un coeficiente similar al que aparece en la impedancia de los circuitos PI, del modelo de líneas en el dominio de la frecuencia, cuando un extremo es cortocircuitado. Es decir, se reemplaza la inductancia real por una inductancia de parámetro distribuido, asociada a una capacidad. Para una ampliación en el tema, se recomienda al lector la referencia [5] (de donde se extrajo esta sección); allí pueden verse varios métodos de integración numérica y sus comparaciones.





**Figura 1.16.** Tensiones de fase con y sin amortiguamiento [3].

## 1.11 Amortiguamiento de oscilaciones numéricas

La regla de integración trapezoidal utilizada en ATP produce en algunos casos oscilaciones numéricas [4-5]. Por ejemplo, cuando la corriente a través de un inductor es forzada a tomar un determinado valor (discontinuidad en  $di/dt$ ), la regla de integración trapezoidal genera oscilaciones que no se atenúan en el tiempo. Siendo:

$$v = -L * \frac{di}{dt} \quad (1.59)$$

$$i(t) = \frac{\Delta t}{2L} * v(t) + \frac{\Delta t}{2L} * v(t - \Delta t) + i(t - \Delta t) = \frac{\Delta t}{2L} * v(t) + hist(t - \Delta t) \quad (1.60)$$

Para los instantes de tiempo 2, 3, 4 etc., las diferencias de corrientes son cero y por tanto  $v(t) = -v(t - \Delta t)$ , produciéndose la oscilación sin amortiguamiento. Una modificación brusca de la inductancia es equivalente a un cambio brusco de la corriente.

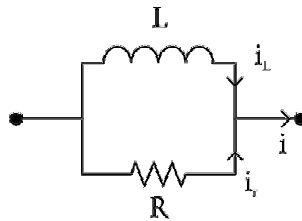
$$v = \frac{d(\lambda)}{dt} = \frac{d(L * i)}{dt} \quad (1.61)$$

El origen de las oscilaciones se debe a que en la representación discreta del sistema en el algoritmo de la solución numérica, una magnitud derivada que debe interrumpirse, difícilmente pueda hacerse en el cruce por cero de ella.

Tal es el caso de la corriente a través de una inductancia conectada al sistema mediante un interruptor abierto. Aunque los interruptores son modelados con apertura por cruce por cero de la corriente, finalmente la apertura se hace

en el instante  $t - \Delta t$  o  $t + \Delta t$ , cuando la corriente generalmente no tiene el valor de cero. Este tipo de fenómenos tiene una contraparte física relacionada con los cambios bruscos de magnitudes eléctricas (tensión, corriente) en bornes de elementos que almacenan energía (capacitores, reactores).

Este acomodamiento energético se observa igualmente en los sistemas reales; actualmente, con la introducción de los modernos interruptores de  $SF_6$  o los interruptores de vacío, los cuales, debido a su alta capacidad de ruptura, interrumpen los circuitos cuando aún circula una cantidad importante de corriente. Sin embargo, en estos casos se trata de frecuencias naturales del sistema que oscilan excitadas por saltos abruptos en las magnitudes eléctricas. La diferencia entre el fenómeno matemático y el físico radica en el amortiguamiento de las oscilaciones, escaso o nulo en el primero y real en el segundo. Asimismo la frecuencia observada para el caso matemático es igual a la frecuencia de Nyquist y se modifica al variar  $\Delta t$ . Para atenuar el efecto de las oscilaciones en el ATP se incorporan resistencias de amortiguamiento. En este método se introduce una resistencia en paralelo al componente en particular con el objeto de evitar las oscilaciones numéricas, tal como se muestra en la figura 1.17:



**Figura 1.17.** Resistencia de amortiguamiento.

$$v = L * \frac{di_L}{dt} \qquad v = R * i_r$$

Si se aplica la regla de integración trapezoidal a los dos componentes, para la resistencia:

$$i_r(t) = \frac{v(t)}{R} \qquad i_r(t - \Delta t) = \frac{v(t - \Delta t)}{R} \qquad (1.62)$$

para la inductancia:

$$i_L(t) = \frac{\Delta t}{2L} * (v(t) + v(t - \Delta t)) + i_r(t - \Delta t) \qquad (1.63)$$

La corriente total será:

$$i(t) = i_r(t) + i_L(t) = \left(\frac{1}{R} + \frac{\Delta t}{2L}\right) * v(t) + \frac{\Delta t}{2L} * v(t - \Delta t) + i_L(t - \Delta t) \quad (1.64)$$

Considerando que:

$$i_L(t - \Delta t) = i(t - \Delta t) - i_r(t - \Delta t) = i(t - \Delta t) - \frac{v(t - \Delta t)}{R} \quad (1.65)$$

Remplazando en la corriente total:

$$i(t) = \left(\frac{1}{R} + \frac{\Delta t}{2L}\right) * v(t) + \left(\frac{1}{R} + \frac{\Delta t}{2L}\right) * v(t - \Delta t) + i(t - \Delta t) \quad (1.66)$$

Reordenando términos:

$$v(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{R} + \frac{\Delta t}{2L}\right)} * (i(t) - i(t - \Delta t)) - \left(\frac{\frac{1}{R} - \frac{\Delta t}{2L}}{\left(\frac{1}{R} + \frac{\Delta t}{2L}\right)}\right) * v(t - \Delta t) \quad (1.67)$$

donde:

$\frac{1}{\left(\frac{1}{R} + \frac{\Delta t}{2L}\right)}$  Es una resistencia equivalente que será necesario agregar al circuito para evitar la oscilación.

$\left(\frac{\frac{1}{R} - \frac{\Delta t}{2L}}{\left(\frac{1}{R} + \frac{\Delta t}{2L}\right)}\right)$  Es un factor de amortiguamiento que atenúa las oscilaciones.

$\left(\frac{1}{R} + \frac{\Delta t}{2L}\right)$

En el caso de circuitos donde se tienen varias inductancias, debe considerarse un sistema matricial:

$$[v(t)] = [L] * \frac{d[i_L(t)]}{dt} = [R] * [i_r(t)] \quad (1.68)$$

Para las inductancias:

$$[i_L(t)] = \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} * \{[v(t)] + [v(t - \Delta t)]\} + [i_L(t - \Delta t)] \quad (1.69)$$

Para las resistencias:

$$[i_r(t)] = [R]^{-1} * \{[v(t)] + [v(t-\Delta t)]\} - [i_r(t-\Delta t)] \quad (1.70)$$

Combinando ambas expresiones:

$$[i(t)] = \left\{ \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} + [R]^{-1} \right\} * \{[v(t)] + [v(t-\Delta t)]\} + [i_L(t-\Delta t)] - [i_r(t-\Delta t)] \quad (1.71)$$

Considerando que:

$$\left. \begin{aligned} [i_L(t-\Delta t)] &= [i(t-\Delta t)] - [R]^{-1} [v(t-\Delta t)] \\ [i_r(t-\Delta t)] &= [R]^{-1} [v(t-\Delta t)] \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

Remplazando en la expresión de la corriente total:

$$[i(t)] = \left\{ \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} + [R]^{-1} \right\} * [v(t)] + \left\{ \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} - [R]^{-1} \right\} * [v(t-\Delta t)] + [i(t-\Delta t)] \quad (1.73)$$

Reagrupando términos:

$$\begin{aligned} [v(t)] &= \left\{ \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} + [R]^{-1} \right\}^{-1} * \{[i(t)] - [i(t-\Delta t)]\} - \\ &- \left\{ \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} + [R]^{-1} \right\}^{-1} * \left\{ \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} + [R]^{-1} \right\} * [v(t-\Delta t)] \end{aligned} \quad (1.74)$$

Se elige en función de

$$[L]:[R] = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} * \frac{2}{\Delta t} [L]$$

donde  $\alpha$  es un escalar que define el grado de amortiguamiento de la regla de integración.

Remplazando términos:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} + [R]^{-1} \right)^{-1} &= \left( \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} * \frac{\Delta t}{2} [L]^{-1} \right)^{-1} = \\ &= \left( \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} * \frac{\Delta t}{2} [L]^{-1} \right)^{-1} = \frac{1+\alpha}{\Delta t} * [L] \end{aligned}$$

Reduciendo términos:

$$\left\{ \left( \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} + [R]^{-1} \right)^{-1} \right\} * \left\{ \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} - [R]^{-1} \right\} = \frac{1+\alpha}{\Delta t} * [L] * \left\{ \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} - \frac{1-\alpha}{1+\alpha} * \frac{\Delta t}{2} [L]^{-1} \right\}$$

Queda como resultado la siguiente ecuación:

$$\left\{ \left( \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} + [R]^{-1} \right)^{-1} \right\} * \left\{ \frac{\Delta t * [L]^{-1}}{2} - [R]^{-1} \right\} = \frac{1+\alpha}{\Delta t} * [L] * \frac{\alpha}{1+\alpha} * \frac{\Delta t}{2} [L]^{-1} = \alpha [I] \quad (1.75)$$

Si se introducen estos factores en la regla de integración, se obtiene la expresión para la regla amortiguada:

$$[v(t)] = \frac{1+\alpha}{\Delta t} * [L] * \{ [i(t)] - [i(t-\Delta t)] \} - \alpha * [v(t-\Delta t)] \quad (1.76)$$

Comparando con las expresiones de la regla trapezoidal sin amortiguamiento:

$$[v(t)] = \frac{2}{\Delta t} * [L] * \{ [i(t)] - [i(t-\Delta t)] \} - [v(t-\Delta t)] \quad (1.77)$$

Un valor adecuado de  $\alpha$  se obtiene cuando la siguiente expresión:  $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = 100$ .

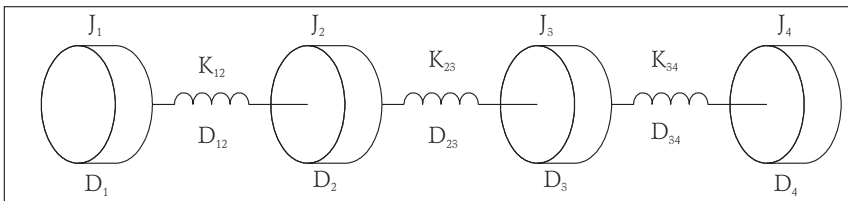
Para  $\alpha = 1$  el amortiguamiento es nulo y para  $\alpha = 0$  se obtiene el caso donde es críticamente amortiguado. En ATP, el amortiguamiento es calculado y luego alterado en la topología de red pues este no incluye el algoritmo de amortiguamiento.

## 1.12 Modelación del comportamiento mecánico de la máquina eléctrica giratoria

Apartado tomado de los apuntes de clase de Oscar Trad [3].

### 1.12.1 Introducción

El diseño del comportamiento mecánico de la máquina se tiene en cuenta a través de la segunda ley de Newton para cuerpos rotantes [6]. Se considera el sistema turbina-generator, subdividido en diferentes masas rotantes concentradas y conectadas elásticamente mediante el eje del sistema (de momento de inercia despreciable) el cual incluye su correspondiente rigidez mecánica. En general, se utiliza un modelo de dos masas para las máquinas hidráulicas (generator-turbina) y de varias masas subdivididas de acuerdo con el número de etapas del sistema en las turbo-máquinas térmicas (generator, excitatriz si existe, etapa de alta, media, baja presión, etc.).



**Figura 1.18.** Circuito mecánico de una máquina eléctrica giratoria.

En la figura 1.18 se puede observar un esquema del modelo utilizado. Este modelo corresponde a las siguientes ecuaciones:

$$[T] = [J] * \frac{d^2 \{\theta\}}{dt^2} + [D] * \frac{d \{\theta\}}{dt} + [K] * \{\theta\} \quad (1.78)$$

$$[w] = \frac{d \{\theta\}}{dt} \quad (1.79)$$

donde:

$[T]$  : Vector de torques o momentos actuantes sobre las masas del sistema. El signo de estas magnitudes depende de si la masa es motriz (turbina) o carga (generator o excitatriz).

$$[T]^T = [T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4]$$

$[J]$  : Matriz de momentos de inercia de las masas del sistema:

$$[J] = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & J_4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$[\theta]$  : Vector de posición de las masas del sistema:

$$[\theta]^T = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \cdot]$$

$[D]$  : Matriz de coeficientes de amortiguamiento. Incluye los coeficientes de amortiguamiento de las masas y de los vínculos entre ellas (ejes) debido a rozamiento, ventilación, etc.:

$$[D] = \begin{pmatrix} (D_1 + D_{12}) & -D_{12} & 0 & 0 & \cdot \\ -D_{12} & (D_{12} + D_2 + D_{23}) & -D_{23} & 0 & \cdot \\ 0 & -D_{23} & (-D_{23} + D_3 + D_{34}) & -D_{34} & \cdot \\ 0 & 0 & -D_{34} & (D_{34} + D_4 + D_{45}) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$[K]$  : Matriz de coeficientes de rigidez mecánica:

$$[K] = \begin{pmatrix} K_{12} & -K_{12} & 0 & 0 & \cdot \\ K_{12} & (K_{12} + K_{23}) & -K_{23} & 0 & \cdot \\ 0 & -K_{23} & (K_{23} + K_{34}) & -K_{34} & \cdot \\ 0 & 0 & K_{34} & (K_{34} + K_{45}) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$[w]$  : Vector de velocidades angulares de las masas del sistema:

$$[w]^T = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ \cdot]$$

La relación entre las magnitudes eléctricas y mecánicas se presenta a través de los torques de carga del generador y excitatriz. En la misma se tiene en cuenta el número de polos de la máquina ( $N_p$ ):

$$\theta_{mgen} = \frac{2}{N_p} * \beta \quad w_{mgen} = \frac{2}{N_p} * w_{egen} \quad (1.80)$$

$$T_{mgen} = \frac{N_p}{2} * (\lambda_d * i_q - \lambda_q * i_d) \quad T_{mexc} = \frac{1}{w_{mexc}} * (-v_f * i_f + i_f^2 * R_{exc}) \quad (1.81)$$

Donde las letras  $e$  y  $m$  utilizadas en los subíndices indican magnitudes eléctricas y mecánicas, respectivamente;  $\beta$  es la posición del rotor y la velocidad angular del rotor medidas en ángulos eléctricos,  $v_f$  e  $i_f$  son la tensión y corriente de excitación; y  $R_{exc}$  es la resistencia eléctrica del circuito de excitación.

### 1.12.2 Cálculo de las magnitudes mecánicas de estado estacionario en condiciones iniciales

En estado estacionario, la ecuación dinámica adquiere la siguiente forma:

$$[T] = [D] * [w] + [K] * [\theta] \quad (1.82)$$

Los torques iniciales son conocidos debido a que se conocen las variables eléctricas (torque de carga) así como la forma como se reparte la carga entre las distintas etapas de la turbina. Además las velocidades son iguales para todas las masas. El término  $[D] * [w]$  adquiere la forma:

$$[D] * [w] = w_m * [Dp] = w_m * [D_1 \ D_2 \ D_3 \ D_4 \ \dots]^t \quad (1.83)$$

Por tanto:

$$[T] - w_m * [Dp] = [K] * [\theta] \quad (1.84)$$

Debido a la estructura de la matriz  $[K]$ , el sistema de ecuaciones es singular. Para su solución pueden utilizarse dos expresiones recursivas, considerando que  $\theta_{gen}$ , la posición del rotor, es conocida después de obtener el estado inicial de las variables eléctricas. Las expresiones son:

$$\theta_{i-1} = \theta_i + \frac{\sum_{k=1}^{i-1} Rhs}{K_{i-1,j}}, i=k, \dots, 1 \quad \theta_{i+1} = \theta_i + \frac{\sum_{k=i+1}^n Rhs}{K_{i,j+1}}, i=k, \dots, n \quad (1.85)$$

donde  $k$  es el índice correspondiente a la masa del generador,  $n$  el número de masas del sistema y  $Rhs$  la sumatoria de los términos  $[T] - w_m * [Dp]$  para cada fila.

### 1.12.3 Cálculo de las variables mecánicas en estado transitorio

Si se aplica la regla de integración trapezoidal a las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento transitorio de las variables mecánicas (ecuaciones (1.78) y (1.79)) se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{2}{\Delta t} [J] + [D] + \frac{2}{\Delta t} [K] \right\} * [w(t)] = [T(t)] + [T(t - \Delta t)] + \\ + \left\{ \frac{2}{\Delta t} [J] - [D] - \frac{2}{\Delta t} [K] \right\} * [w(t - \Delta t)] \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$[\theta(t)] = \frac{2}{\Delta t} \{ [w(t)] + [w(t - \Delta t)] \} + [\theta(t - \Delta t)] \quad (1.87)$$

Por similitud con el sistema eléctrico se puede escribir el sistema considerando términos históricos y una matriz de términos adjuntos:

$$[R_{cm}] * [w(t)] = [T(t)] + [H_m(t - \Delta t)] \quad (1.88)$$

donde:

$$[R_{cm}] = \left\{ \frac{2}{\Delta t} [J] + [D] + \frac{2}{\Delta t} [K] \right\} \quad (1.89)$$

$$[H_m(t - \Delta t)] = [T(t - \Delta t)] + \left\{ \frac{2}{\Delta t} [J] - [D] - \frac{2}{\Delta t} [K] \right\} * [w(t - \Delta t)] \quad (1.90)$$

La matriz  $[R_{cm}]$  se calcula una vez al inicio del proceso; la matriz  $[H_m(t - \Delta t)]$  debe ser actualizada en cada iteración. Es importante destacar que existen dos posibilidades respecto a los torques mecánicos. Una de ellas es asumir que son constantes e independientes de la velocidad, y la otra es que la potencia es la variable mecánica constante con la cual se deben actualizar en cada iteración los torques mecánicos de cada etapa de la turbina con la expresión  $T_i(t) = P_i(t) / \omega_i(t)$ . Los torques de carga (excitatriz y generador) se obtienen de las variables eléctricas en cada iteración.

Mientras que la primera hipótesis implica que solo la velocidad mecánica del generador debe ser supuesta y, por tanto, menor error o menor número de iteraciones, por otra parte, la segunda hipótesis es aparentemente más congruente con la realidad del sistema físico [4] pero requiere predicción de las velocidades de todas las masas.

### 1.13 Simulación de máquinas eléctricas giratorias

Los macromodelos de máquinas eléctricas son de dos tipos [2]:

- La máquina sincrónica (Synchronous Machines, SM).
- Las máquinas generalizadas o Universal (Universal Machine, UM).

#### 1.13.1 Máquina sincrónica

El comportamiento de los bobinados inducidos e inductores son descritas por las ecuaciones de tensión (convención generador) y la relación flujo (corriente en el referencial de las fases 1, 2 y 3) tal como se muestra en las ecuaciones (1.91) y (1.92):

$$[V_{1,2,3}(t)] = [R][i_{1,2,3}(t)] + \frac{d}{dt} [\lambda_{1,2,3}(t)] \quad (1.91)$$

$$[\lambda_{1,2,3}(t)] = [L_{1,2,3}(t)] [i_{1,2,3}(t)] \quad (1.92)$$

La parte mecánica se representa según la forma matricial de la segunda ley de Newton por  $n$  masas unidas en línea por resorte, modelando así el eje del rotor:

$$[J] \frac{d^2}{dt^2} [\theta(t)] + [D] \frac{d}{dt} [\theta(t)] + [K][\theta(t)] = [T_{mec}(t)] - [T_{em}(t)] \quad (1.93)$$

con:

$[\theta(t)]$  : Vector  $n \times 1$  de las posiciones angulares

$[J]$  : Matriz  $n \times n$  diagonal de momentos de inercia

$[D]$  : Matriz  $n \times n$  tridiagonal de coeficientes de fricción

$[K]$  : Matriz  $n \times n$  tridiagonal de rigidez del eje

$[T_{mec}(t)]$  : Vector  $n \times 1$  de pares mecánicos aplicados

$[T_{em}(t)]$  : Vector  $n \times 1$  de pares electromagnéticos aplicados

#### 1.13.1.1 Simulación de la parte eléctrica

La simulación de la máquina se efectúa con la ayuda de los componentes utilizados en la transformación de Park ( $d, q, O$ ) por transformación ortogonal

(matriz de transformación  $[T]$  de magnitudes de fase del inducido (ecuación 1.91)).

$$[T] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \beta & \operatorname{sen} \beta & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos\left(\beta - \frac{2}{3}\pi\right) & \operatorname{sen}\left(\beta - \frac{2}{3}\pi\right) & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \cos\left(\beta + \frac{2}{3}\pi\right) & \operatorname{sen}\left(\beta + \frac{2}{3}\pi\right) & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (1.94)$$

$$[T]^{-1} = [T]^t \quad (1.95)$$

Por tanto:

$$\beta = \frac{\theta_{gen}}{np} \quad \begin{array}{l} \theta_{gen} : \text{Posición angular del rotor} \\ np : \text{Número de pares de polos} \end{array}$$

Las ecuaciones de (1.91) y (1.92) se expresan entonces así:

$$[V_{d,q,0}(t)] = -[R][i_{d,q,0}(t)] - [L_{d,q,0}] \frac{d}{dt} [i_{d,q,0}(t)] - w [\phi_{d,q,0}(t)] \quad (1.96)$$

$$[\lambda_{d,q,0}(t)] = [L_{d,q,0}] [i_{d,q,0}(t)] \quad (1.97)$$

con:

$$[V_{d,q,0}(t)], [i_{d,q,0}(t)], [\lambda_{d,q,0}] = [T] \{ [V_{1,2,3}(t)], [i_{1,2,3}(t)], [\lambda_{1,2,3}(t)] \}$$

$$[L_{d,q,0}] = [T]^t [L_{1,2,3}] [T]$$

$$[\phi_{d,q,0}(t)] = [\lambda_q(t) - \lambda_d(t) 0]^t$$

$$w = \frac{d\beta}{dt} = w_{gen.}$$

Para cada uno de los ejes  $d$ ,  $q$  y  $0$ , la ecuación (1.96) se resuelve con el método trapezoidal amortiguado (matriz resistencia de amortiguamiento  $R_p$  en pa-

ralelo con  $[L_{d,q,o}]$  para evitar las oscilaciones debidas al método numérico de integración (sección 1.11).

$$[R_p] = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \frac{2}{\Delta t} [L_{d,q,0}] \quad (1.98)$$

donde  $\alpha$  es el factor de amortiguamiento.

Para el eje  $d$ , el método trapezoidal amortiguado conduce a:

$$[V_d(t)] = - \left\{ [R] + \frac{1+\alpha}{\Delta t} [L_d] \right\} [i_d(t)] - w [\phi_d(t)] - [hist_d(t-\Delta t)]$$

Simplificando:

$$[hist_d(t-\Delta t)] = \left\{ \alpha [R] - \frac{1+\alpha}{\Delta t} [L_d] \right\} [i_d(t-\Delta t)] + \alpha [V_d(t-\Delta t)] + \alpha w [\phi_d(t-\Delta t)]$$

que es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} V_d(t) \\ V_f(t) \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{dd} & R_{df} & R_{dD} \\ R_{df} & R_{ff} & R_{fD} \\ R_{dD} & R_{fD} & R_{DD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_f(t) \\ i_D(t) \end{bmatrix} - w \begin{bmatrix} \lambda_q(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} hist_d(t-\Delta t) \\ hist_f(t-\Delta t) \\ hist_D(t-\Delta t) \end{bmatrix} \quad (1.99)$$

con:

$$\begin{bmatrix} \lambda_d(t) \\ \lambda_f(t) \\ \lambda_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & M_{df} & M_{dD} \\ M_{df} & L_f & M_{fD} \\ M_{dD} & M_{fD} & L_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_f(t) \\ i_D(t) \end{bmatrix} \quad (1.100)$$

Esta ecuación comprende:

- Los componentes en el eje directo del circuito inducido (índice  $d$ ).
- Los componentes del circuito inductor (índice  $f$ ).
- Los componentes en el eje directo del circuito de amortiguadores (índice  $D$ ).

De la ecuación (1.99) se extraen los componentes del inductor y del amortiguamiento:

$$\begin{bmatrix} i_f(t) \\ i_D(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{ff} & R_{fD} \\ R_{fD} & R_{DD} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} V_f(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} hist_f(t-\Delta t) \\ hist_D(t-\Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{df} \\ R_{dD} \end{bmatrix} i_d(t) \right\} \quad (1.101)$$

Remplazando la ecuación (1.101) con la ecuación (1.99) se encuentra que:

$$v_d(t) = e_d - R_d i_d(t) \quad (1.102)$$

con:

$$R_d = R_{dd} - \begin{bmatrix} R_{df} & R_{dD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{ff} & R_{fD} \\ R_{fD} & R_{DD} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{df} \\ R_{dD} \end{bmatrix}$$

$$e_d = -w\lambda_q(t) - hist'_d(t-\Delta t)$$

$$hist'_d(t-\Delta t) = hist_d(t-\Delta t) + \begin{bmatrix} R_{df} & R_{dD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{ff} & R_{fD} \\ R_{fD} & R_{DD} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} hist_f(t-\Delta t) - v_f(t) \\ hist_D(t-\Delta t) \end{bmatrix}$$

La tensión equivalente  $e_d$  se calcula con la predicción de los valores de  $-w\lambda_q(t)$  y de  $v_f(t)$ . Para el eje  $q$ , el método trapezoidal amortiguado conduce a:

$$[V_q(t)] = - \left\{ [R] + \frac{1+\alpha}{\Delta t} [L_q] \right\} [i_q(t)] - w[\phi_q(t)] - [hist_q(t-\Delta t)] \quad (1.103)$$

con:

$$[hist_q(t-\Delta t)] = \left\{ \alpha[R] - \frac{1+\alpha}{\Delta t} [L_q] \right\} [i_q(t-\Delta t)] + \alpha[V_q(t-\Delta t)] + \alpha w[\phi_q(t-\Delta t)]$$

equivalente a:

$$\begin{bmatrix} V_q(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{qq} & R_{qg} & R_{qQ} \\ R_{qg} & R_{gg} & R_{gQ} \\ R_{qQ} & R_{gQ} & R_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q(t) \\ i_g(t) \\ i_Q(t) \end{bmatrix} - w \begin{bmatrix} \lambda_{dq}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} hist_q(t-\Delta t) \\ hist_g(t-\Delta t) \\ hist_Q(t-\Delta t) \end{bmatrix} \quad (1.104)$$

con:

$$\begin{bmatrix} \lambda_q(t) \\ \lambda_g(t) \\ \lambda_Q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_q & M_{qg} & M_{qQ} \\ M_{qg} & L_g & M_{gQ} \\ M_{qQ} & M_{gQ} & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_q(t) \\ i_g(t) \\ i_Q(t) \end{bmatrix} \quad (1.105)$$

Esta ecuación comprende:

- Los componentes con el eje en cuadratura del circuito inducido (índice  $q$ ).
- Los componentes que simulan las corrientes de Foucault (índice  $g$ ).
- Los componentes con el eje en cuadratura del circuito de amortiguador (índice  $Q$ ).

De la ecuación (1.104) se extraen los componentes debidos a las corrientes de Foucault y al amortiguador:

$$\begin{bmatrix} i_g(t) \\ i_Q(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{gg} & R_{gQ} \\ R_{gQ} & R_{QQ} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} hist_g(t-\Delta t) \\ hist_Q(t-\Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{qg} \\ R_{qQ} \end{bmatrix} i_q(t) \right\} \quad (1.106)$$

Remplazando la ecuación (1.104) en la ecuación (1.106), se encuentra que:

$$v_q(t) = e_q - R_q i_q(t) \quad (1.107)$$

con:

$$R_q = R_{qq} - \begin{bmatrix} R_{qg} & R_{qQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{gg} & R_{gQ} \\ R_{gQ} & R_{QQ} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{qg} \\ R_{qQ} \end{bmatrix}$$

$$e_q = -w\lambda_d(t) - hist_q'(t-\Delta t)$$

$$hist_q'(t-\Delta t) = hist_q(t-\Delta t) + \begin{bmatrix} R_{qg} & R_{qQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{gg} & R_{gQ} \\ R_{gQ} & R_{QQ} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} hist_g(t-\Delta t) \\ hist_Q(t-\Delta t) \end{bmatrix}$$

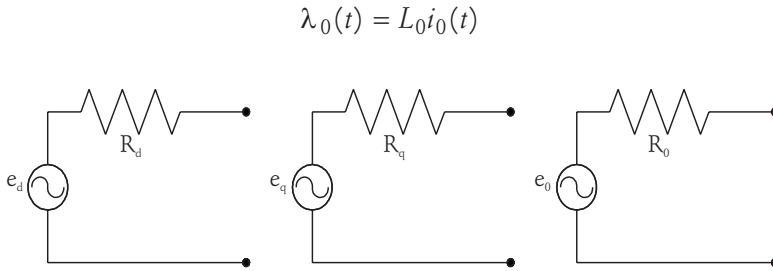
La tensión equivalente  $e_q$  se calcula con una predicción del valor de  $w\lambda_d(t)$ . Finalmente, para obtener los valores de la secuencia 0, el método trapezoidal amortiguado lleva a:

$$v_0(t) = e_0 - R_0 i_0(t) \quad (1.108)$$

con:

$$R_0 = R_a + \frac{1+\alpha}{\Delta t} L_0 \quad \text{con } R_a \text{ definida como resistencia del inductor.}$$

$$e_0 = \left( \frac{1+\alpha}{\Delta t} L_0 - \alpha R_a \right) i_0(t-\Delta t) - \alpha v_0(t-\Delta t)$$



**Figura 1.19.** Esquemas equivalentes de la máquina sincrónica.

Las ecuaciones (1.102), (1.107) y (1.108) llevan a los esquemas equivalentes de la máquina sincrónica representada con ayuda de los componentes de la transformación de Park (figura 1.19).

Las ecuaciones de la máquina deben ser resueltas con las ecuaciones de la red eléctrica a la cual está conectada. Con este fin, las ecuaciones (1.102), (1.107) y (1.108) están escritas en el referencial original (transformación de  $d, q, O$  a  $1, 2, 3$ ). Esta transformación exige un ordenamiento de los últimos parámetros  $R_d$  y  $R_q$ , definiendo:

$$R_{moy} = \frac{R_d + R_q}{2} \quad (1.109)$$

El sistema modificado es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} V_d(t) \\ V_q(t) \\ V_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{d \text{ mod}} \\ e_{q \text{ mod}} \\ e_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{moy} & 0 & 0 \\ 0 & R_{moy} & 0 \\ 0 & 0 & R_{moy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(t) \\ i_q(t) \\ i_0(t) \end{bmatrix} \quad (1.110)$$

con:

$$e_{d \text{ mod}} = e_d - \frac{R_d - R_q}{2} i_d(t)$$

$$e_{q \text{ mod}} = e_q - \frac{R_d - R_q}{2} i_q(t)$$

Los valores predichos de  $i_d(t)$  y  $i_q(t)$  se utilizan para determinar  $e_{d \text{ mod}}$  y  $e_{q \text{ mod}}$ . Las fuentes de tensión  $e_{d \text{ mod}}$  y  $e_{q \text{ mod}}$  y  $e_0$  en serie con las resistencias  $R_{moy}$ ,  $R_{moy}$  y  $R_0$  respectivamente (circuito equivalente de Thévenin) se transforman en fuentes

de corriente en paralelo con esas mismas resistencias (circuito equivalente de Norton).

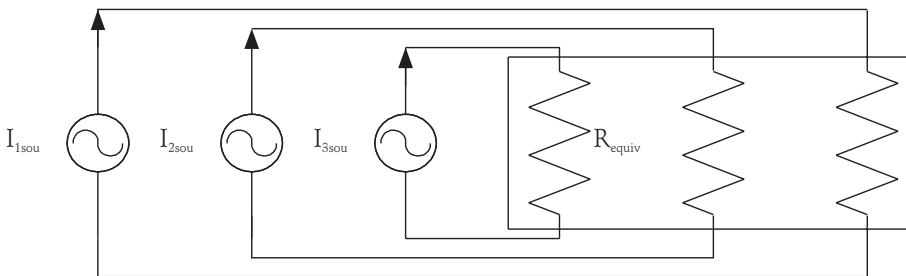
$$\begin{bmatrix} i_{dsou}(t) \\ i_{qsou}(t) \\ i_{0sou}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_{moy}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{moy}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_{moy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{d\ mod} \\ e_{q\ mod} \\ e_0 \end{bmatrix} \quad (1.111)$$

Finalmente, en la señal (1,2,3) de las fases de la máquina con la predicción de  $\beta(t)$ , el circuito equivalente Norton es representado por la figura 1.20

$$\begin{bmatrix} i_{1sou}(t) \\ i_{2sou}(t) \\ i_{3sou}(t) \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} i_{dsou}(t) \\ i_{qsou}(t) \\ i_{0sou}(t) \end{bmatrix} \quad (1.112)$$

en paralelo con:

$$R_{equiv} = \begin{bmatrix} R_s & R_m & R_m \\ R_m & R_s & R_m \\ R_m & R_m & R_s \end{bmatrix}, \text{ donde } R_s = \frac{R_0 + 2R_{moy}}{3}, R_m = \frac{R_0 - 2R_{moy}}{3}$$



**Figura 1.20.** Modelo de simulación de la máquina sincrónica.

De esta manera, la máquina sincrónica es descrita en la forma nodal para ser integrada al sistema eléctrico (ecuaciones (1.3) o (1.24)). De la solución completa de la red se toman las tensiones transformadas a los bornes de la máquina ( $V_d(t)$ ,

$V_q(t)$ ,  $V_o(t)$ ); luego se utilizan para encontrar las corrientes del estator transformadas a partir de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} i_d(t) &= \frac{e_{d \text{ mod}} - V_d(t)}{R_{equiv}} \\ i_q(t) &= \frac{e_{q \text{ mod}} - V_q(t)}{R_{equiv}} \\ i_0(t) &= \frac{e_0 - V_0(t)}{R_0} \end{aligned} \quad (1.113)$$

Las corrientes de referencia correspondientes al rotor se obtienen de la ecuación (1.101) para el eje  $d$  y de la ecuación (1.106) para el eje  $q$ . Los flujos  $\lambda_d$  y  $\lambda_q$  se calculan de las ecuaciones (1.100) y (1.105). El par electromagnético es dado por la relación:

$$T_{em}(t) = np \left[ \lambda_d(t) i_q(t) - \lambda_q(t) i_d(t) \right] \quad (1.114)$$

con  $np$ , el número de pares de polos.

### 1.13.1.2 Parámetros de la máquina sincrónica

Dentro de las precisiones en métodos numéricos los autores resaltan el trabajo del Ing. Oscar Trad en el tratamiento que da a la máquina sincrónica a continuación se detallan un apartado de estos logros [3].

Los parámetros utilizados en el modelo clásico de la máquina sincrónica (modelo de Park) se calculan a partir de la información obtenida de ensayos normalizados. Resulta importante distinguir entre los parámetros necesarios para la representación de la máquina y los necesarios para incluir los efectos de saturación. Esto se debe a que el tratamiento de los efectos de saturación en el modelo clásico es una adición al mismo.

Dos ensayos diferentes pueden ser utilizados para determinar los parámetros de la máquina: el ensayo de cortocircuito y el ensayo de respuesta frecuencial. En rigor, otras técnicas de ensayo podrían aplicarse, tales como el ensayo de vacío o las técnicas de identificación de parámetros a partir de pequeñas perturbaciones. Sin embargo, los ensayos mencionados en primer lugar tienen la ventaja de que la máquina no se encuentra afectada por los efectos de saturación [4]. De esta forma, los efectos de saturación son incluidos poste-

riormente, utilizando información adicional proveniente del ensayo en vacío de la máquina y de algunos otros ensayos no normalizados tales como el ensayo para determinación de la característica de saturación del eje en cuadratura o del ensayo propuesto en la bibliografía [24] para determinar la impedancia característica introducida por Canay.

#### 1.13.1.2.1 *Ensayo de cortocircuito*

Como su nombre lo indica, este ensayo consiste en aplicar un cortocircuito en los bornes de la máquina. A través de la observación de los valores y tiempos de decaimiento de las corrientes de falla puede obtenerse la siguiente información:

- $R_a$  : Resistencia de armadura
- $X_L$  : Reactancia de dispersión de armadura
- $X_d, X_q$  : Reactancias sincrónicas de eje directo y en cuadratura
- $X'_d, X'_q$  : Reactancias transitorias de eje directo y en cuadratura
- $X''_d, X''_q$  : Reactancias subtransitoria de eje directo y en cuadratura
- $T'_d, T'_q$  : Constantes de tiempo transitorio de eje directo y en cuadratura (medidas en condiciones de cortocircuito)
- $T''_d, T''_q$  : Constantes de tiempo subtransitoria de eje directo y en cuadratura (medidas en condiciones de cortocircuito)

Las constantes de tiempo de circuito abierto se obtienen por cálculo en lugar de medición, ya que en este último caso son afectadas por los efectos de saturación. Pueden usarse las siguientes expresiones [4], las cuales asumen la hipótesis de que la resistencia de armadura es despreciable, hipótesis válida para la mayoría de las máquinas sincrónicas. Para el eje en cuadratura son válidas las mismas expresiones, considerando los parámetros de este eje:

$$\frac{1}{L'_d} - \frac{1}{L_d} = -\frac{1}{L_d} * \frac{(T'_d - T'_{d0}) * (T'_d - T''_{d0})}{T'_d * (T'_d - T''_d)} * \frac{(\omega T'_d)^2}{1 + (\omega T'_d)^2} \quad (1.115)$$

Estas expresiones se obtienen al resolver el circuito de oscilación natural (al cortocircuitar los bornes de máquina) utilizando la transformación de Laplace. Modificando estas ecuaciones, se obtienen las expresiones utilizadas

en las normas internacionales (IEEE, IEC, etc.) para la definición de los parámetros mencionados como resultado del ensayo de cortocircuito:

En forma operacional:

$$\frac{1}{x_d(p)} = \frac{1}{x_d} + \left( \frac{1}{x_d'} - \frac{1}{x_d} \right) * \frac{pT_d'}{1+pT_d'} + \left( \frac{1}{x_d''} - \frac{1}{x_d'} \right) * \frac{pT_d''}{1+pT_d''} \quad (1.116)$$

En el dominio del tiempo:

$$\frac{1}{x_d(t)} = \frac{1}{x_d} + \left( \frac{1}{x_d'} - \frac{1}{x_d} \right) * e^{-(t/T_d')} + \left( \frac{1}{x_d''} - \frac{1}{x_d'} \right) * e^{-(t/T_d'')} \quad (1.117)$$

Adicionalmente, dos ecuaciones que resultan de interés en posteriores deducciones son:

$$T_{d0}' + T_{d0}'' = \frac{x_d}{x_d'} T_{d0}' + \left( 1 - \frac{x_d}{x_d'} + \frac{x_d}{x_d''} \right) * T_{d0}'' \quad (1.118)$$

$$T_{d0}' * T_{d0}'' = T_{d0}' * T_{d0}'' * \frac{x_d}{x_d} \quad (1.119)$$

Para el eje en cuadratura se utilizan las mismas expresiones reemplazando los valores del eje en directo por el eje en cuadratura. Estas ecuaciones responden al circuito de la figura 1.21. Para el eje en cuadratura puede plantearse la misma ecuación reemplazando las correspondientes reactancias y constantes de tiempo del eje en cuadratura.

Debe destacarse que las reactancias y resistencias que aparecen en la figura 1.21 no representan los arrollamientos de excitación ni de amortiguamiento de la máquina. Este circuito simplemente representa la evolución temporal de la impedancia de eje directo o en cuadratura vista desde bornes de la máquina (impedancia subtransitoria, transitoria y sincrónica).

Frecuentemente se utilizan dos hipótesis simplificativas en la determinación de los parámetros de máquinas que permiten asociar este circuito a los arrollamientos de excitación y de amortiguamiento en el eje directo o a los de amortiguamiento en el eje de cuadratura. Estas hipótesis son [24]:

- Las reactancias mutuas entre arrollamientos del rotor y del estator son iguales:

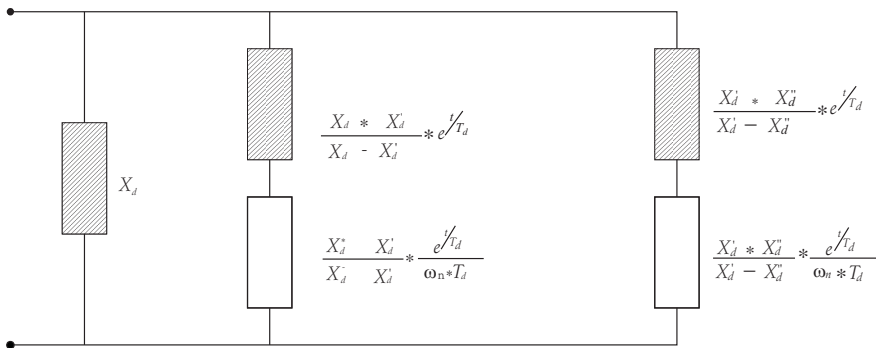
$$X_{ad} = X_{af} = X_{dD} = X_{fD}$$

$$X_{aq} = X_{qg} = X_{qG} = X_{gQ}$$

Esta hipótesis conduce a una errónea representación de las magnitudes del rotor, lo que resulta crítico en el caso particular de la corriente de excitación, la cual es la única corriente del rotor que puede medirse. Las magnitudes del estator no son afectadas por esta hipótesis, lo que ha sido comprobado a través de mediciones de campo.

- Cada período (transitorio, subtransitorio o sincrónico) está asociado a la intervención de uno de los arrollamientos con que se representa la máquina. Por ejemplo, durante el período transitorio solo el arrollamiento de excitación y los del estator participan en el comportamiento sobre el eje directo de la máquina, habiéndose extinguido el efecto del arrollamiento de amortiguamiento.

Esta aproximación produce resultados incorrectos en casos particulares; por ejemplo, en el caso de máquinas con pequeñas constantes de tiempos transitorias [24] en las cuales se aprecian notables diferencias en las corrientes de estator de la máquina. En algunos casos, citados en la referencia [24], el 80% de la corriente transitoria fluye a través del arrollamiento de excitación y el 20% restante a través del arrollamiento de amortiguamiento [4].

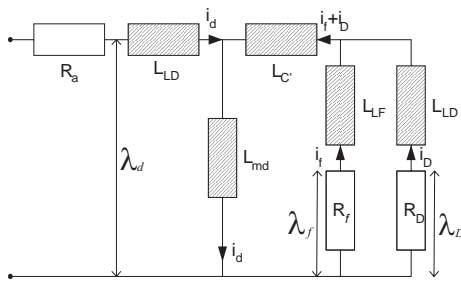


**Figura 1.21.** Parámetros de la máquina en cortocircuito.

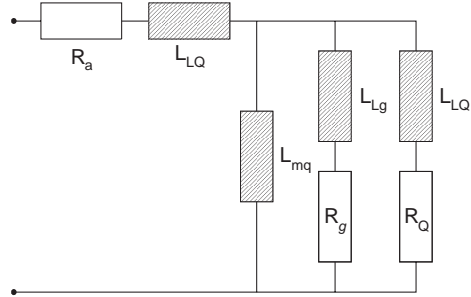
### 1.13.1.2.1.1 Transformación de Canay

Con el objeto de salvar inconvenientes e imprecisiones en la determinación de los parámetros de la máquina, I. M. Canay introduce una modificación en el modelo circuital de la máquina y un procedimiento para determinar los parámetros de ese nuevo modelo [3]. Este procedimiento de conversión se usa

en el programa EMTF para obtener los parámetros de la máquina [4]. Previo a describir el proceso se introducen algunos conceptos necesarios.



**Figura 1.22.** Modelo circuital complejo de una máquina.



**Figura 1.23.** Modelo circuital simplificado de una máquina.

La modificación circuital puede verse en la figura 1.22. Consiste en considerar distintos valores de reactancia mutua sobre el eje directo entre los arrollamientos de rotor y de estator, que finalmente se refleja en una inductancia adicional sobre las ramas de los arrollamientos del rotor denominada LC.

### 1.13.1.2.1.2 Modificación de la ecuaciones para la inclusión de la LC

Este circuito puede ser modificado utilizando matrices de transformación de acuerdo con el procedimiento para la modificación del número de espiras de arrollamientos detallado en la sección 1.13.2.3. Las ecuaciones que describen el flujo en el caso del eje directo son:

$$[\lambda_{pk}] = [L_{pk}] * [i_{pk}]$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \\ \lambda_f \\ \lambda_D \\ \lambda_g \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_{ld} + L_{md}) & 0 & 0 & L_{md} & L_{md} & 0 & 0 \\ 0 & L_{lq} + L_{mq} & 0 & 0 & 0 & L_{mq} & L_{mq} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{md} & 0 & 0 & (L_{lf} + L_{rc} + L_{md}) & (L_{rc} + L_{md}) & 0 & 0 \\ L_{md} & 0 & 0 & (L_{rc} + L_{md}) & (L_{LD} + L_{rc} + L_m) & 0 & 0 \\ 0 & L_{mq} & 0 & 0 & 0 & (L_{Lg} + L_{mq}) & L_{mq} \\ 0 & L_{mq} & 0 & 0 & 0 & L_{mq} & (L_{LQ} + L_{mq}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_D \\ i_g \\ i_Q \end{bmatrix}$$

Aplicando la transformación mencionada:

$$[T_m] * [\lambda_{pk}] = [T_m] * [L_{pk}] * [T_m] * [T_m]^{-1} * [i_{pk}] \quad (1.120)$$

con:

$$[T_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{cd} \\ \lambda_{cq} \\ \lambda_0 \\ \lambda_f \\ \lambda_D \\ \lambda_g \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (L_{ld} + L_{md}) & 0 & 0 & k * L_{md} & k L_{md} & 0 & 0 \\ 0 & L_{lq} + L_{mq} & 0 & 0 & 0 & L_{mq} & L_{mq} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k * L_{md} & 0 & 0 & k^2 (L_{lf} + L_{rc} + L_{md}) & k^2 (L_{rc} + L_{md}) & 0 & 0 \\ k * L_{md} & 0 & 0 & k^2 (L_{rc} + L_{md}) & k^2 (L_{LD} + L_{rc} + L_{md}) & 0 & 0 \\ 0 & L_{mq} & 0 & 0 & 0 & (L_{Lg} + L_{mq}) & L_{mq} \\ 0 & L_{mq} & 0 & 0 & 0 & L_{mq} & (L_{LQ} + L_{mq}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_D \\ i_g \\ i_Q \end{bmatrix}$$

Adoptando adecuadamente el valor de la constante  $k$ , se puede obtener el circuito de la figura 1.24. Para obtener  $k$  se parte de la condición de obtener una inductancia mutua para los 3 circuitos con una inductancia de dispersión para cada uno. Esto permite plantear las siguientes ecuaciones:

$$L_{md}^m + L_a^m = L_{md} + L_a$$

$$L_{md}^m + k^2 (L_{rc} + L_{md})$$

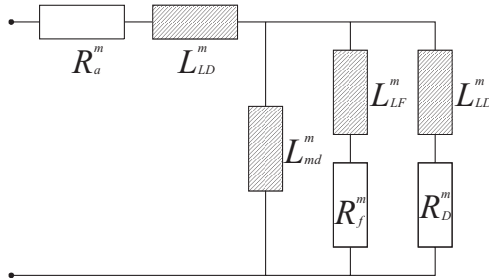
$$L_{md}^m + k * L_{md}$$

Modificando estas relaciones se obtienen las expresiones:

$$\frac{1}{L_{md}^m - L_a} = \frac{1}{L_{md}} + \frac{1}{L_{rc}} \quad (1.121)$$

$$k = \frac{L_d - L_a^m}{L_{md}} \quad (1.122)$$

Así se obtiene el circuito de la figura 1.24 (el superíndice  $m$  indica, en este caso, un parámetro modificado).



**Figura 1.24.** Modelo circuital de una máquina con parámetros modificados.

En esta figura puede observarse que, a excepción de  $R_a^m$  y  $L_{Ld}^m$ , el circuito tiene la misma representación que el de la figura 1.21, para el cual estaban dadas las ecuaciones dinámicas en función de las constantes de tiempo y reactancias transitorias y subtransitorias.

Si al circuito de la figura 1.21 se le adiciona una reactancia externa  $X_e$ , se obtienen las siguientes ecuaciones (a partir de las ecuaciones válidas para la figura 1.24).

$$x_d(p) + x_e = x_{de} \frac{(1 + pT_{de}') (1 + pT_{de}'')}{(1 + pT_{d0}') (1 + pT_{d0}'')} = x_{de}(p) \quad (1.123)$$

$$T_{de}' + T_{de}'' = \frac{x_d(T_d' + T_d'') + x_e(T_{d0}' + T_{d0}'')}{x_d + x_e} \quad (1.124)$$

$$T_{de}' * T_{de}'' = T_{d0}' * T_{d0}'' * \frac{x_d + x_e}{x_d + x_e} \quad (1.125)$$

$$x_{de} = x_d + x_e$$

$$x_{de}' = x_{de} \frac{(T_{de}' + T_{de}'')}{T_{d0}' + T_{d0}'' - \left(1 + \frac{x_{de}}{x_{de}}\right) * T_{de}''} \quad (1.126)$$

$$x_{de}'' = x_{de}'' + x_e \quad (1.127)$$

Combinando las ecuaciones (1.121) a (1.127) se tiene un problema resoluble mediante algoritmos de ecuaciones no lineales; se considera conocida  $L_{am}$  o  $L_{rc}$  mediante ensayos.

Una vez introducidos estos conceptos, se puede describir el proceso propuesto por Canay. Resumiendo, el procedimiento consiste en:

- De los ensayos normalizados se obtienen las constantes de tiempo, reactancias dinámicas y resistencia de armadura.
- De la observación del oscilograma de la corriente de excitación durante el ensayo de cortocircuito se obtiene el valor de  $L_{LD}^m$ .
- Utilizando las ecuaciones (1.123) a (1.127) se obtienen las constantes de tiempos y reactancias para un circuito de máquina modificado con un valor de reactancia externa de valor  $-X_{ld}^m$ . La reactancia  $R_a$  es despreciada en este proceso.
- Por asociación directa entre las inductancias y resistencias operacionales (figura 1.21) se obtienen las reactancias y resistencias de los arrollamientos del rotor.
- La adición de la resistencia  $R_a^m$  y de la reactancia  $X_a^m$  completan el equivalente circuital de la máquina.
- El procedimiento para el eje en cuadratura es similar, solamente que en este caso se adopta  $X_q = X_a^m$ .

#### **1.13.1.2.2 Ensayos de respuesta frecuencial**

Los ensayos de respuesta frecuencial presentan ciertas ventajas sobre el ensayo de cortocircuito clásico, las cuales pueden resumirse [3-9] así:

- Son más sencillos de efectuar.
- Brindan información sobre parámetros en ambos ejes, directo y en cuadratura.
- No someten a la máquina a condiciones extremas como en el caso del ensayo de cortocircuito.
- Brindan información en condiciones no saturadas de la máquina.

Sus principales desventajas residen en que:

- El punto de ensayo se encuentra muy alejado del punto de operación en condiciones no saturadas. Debido a que el comportamiento del material

magnético no es totalmente lineal, debe efectuarse una corrección de los valores para obtener los parámetros en el punto de operación.

- El ensayo (dependiendo de su modalidad) no refleja adecuadamente el comportamiento de los bobinados del rotor, debido a efectos de apantallamiento de los arrollamientos de amortiguamiento (en el caso de tener varios), y en el caso del ensayo con rotor detenido, se pueden reproducir deformaciones y excentricidades del rotor, las cuales no están presentes en las condiciones de operación normal de la máquina.

Para salvar estos inconvenientes, se realizan ensayos frecuenciales siguiendo metodologías distintas y se combinan resultados.

### 1.13.1.2.3 *Ensayo de respuesta frecuencial a rotor bloqueado (SSFR)*

El rotor se mantiene estacionario, alineado en las direcciones de eje directo o en cuadratura, dependiendo de qué parámetros deseen obtenerse. Se conecta a la fase seleccionada una fuente de frecuencia variable en el rango de 0,001 Hz a 1.000 Hz y de niveles de tensión y corriente de 20V y 60A [9]. Utilizando la transformación de Laplace, considerando funciones de transferencia, se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

Para el eje directo:

$$sG(s) = \frac{\Delta i_f(s)}{\Delta i_d(s)} \quad Z_d(s) = \frac{\Delta e_d(s)}{\Delta i_d(s)} \quad L_d(s) = \frac{Z_d(s) - R_a}{s} \quad (1.128)$$

Para el eje en cuadratura:

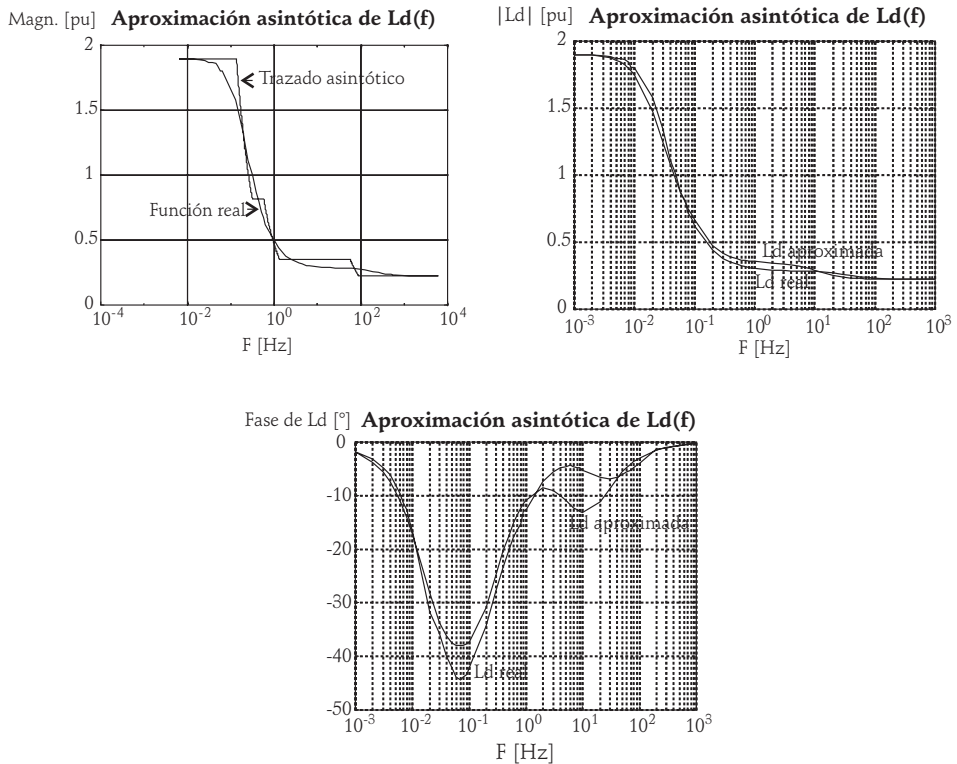
$$L_d(s) = \frac{Z_q(s) - R_a}{s} \quad Z_d(s) = \frac{\Delta e_q(s)}{\Delta i_q(s)} \quad (1.129)$$

donde se ha denominado  $R_a$  a la reactancia de dispersión,  $L_{ld}$  y  $L_{lq}$  denominadas reactancia de eje directo y en cuadratura, respectivamente, y  $\Delta$  indica incrementos de magnitudes. Una vez obtenidos los valores de  $L_d(S)$  y  $L_q(S)$ , los parámetros del modelo circuital, se pueden obtener remplazando  $S$  por  $j\omega$  utilizando procedimientos de ajuste de curvas.

A continuación se muestran los parámetros obtenidos para el eje directo de una máquina presentada en la referencia [9], el generador de Lambton. Una

vez obtenida la característica frecuencial, se realiza un procedimiento de ajuste de parámetros por aproximación asintótica de funciones.

### 1.13.1.2.4 Ensayo de respuesta frecuencial en línea



**Figura 1.25.** Característica frecuencial del generador Lambton [3].

En este ensayo, la máquina se encuentra operando en condiciones cercanas a carga nominal o a poca carga; se introducen perturbaciones en la excitación, de forma sinusoidal o aleatoria y se realizan análisis espectrales para obtener el comportamiento frecuencial del equipo. En este caso, la información obtenida está relacionada con el punto de operación de la máquina.

## ***1.13.2 Modelación de la máquina sincrónica en el EMTP***

### **1.13.2.1 Introducción**

En las herramientas digitales, el modelo más usado para simular la máquina sincrónica es conocido como transformación de Park o Blondel. Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de la máquina relacionan corrientes a través de arrollamientos (ficticios o reales) con flujos magnéticos y sus derivadas, las tensiones inducidas.

Los coeficientes de acoplamiento magnético entre arrollamientos varían al girar el rotor. Esta transformación permite tener coeficientes de acoplamientos inductivos constantes. Sin embargo, esta ventaja se pierde parcialmente al actuar la saturación pues la matriz del sistema debe ser retriangularizada en cada paso.

Se han realizado algunas experiencias utilizando la modelación en componentes de fase, las cuales incluyen efectos de saturación. Generalmente este tipo de modelo utiliza algunas consideraciones de la teoría de Park o Blondel, e igualmente expresiones empíricas o semiempíricas para la variación de las inductancias de la máquina en función de la posición del rotor respecto del campo magnético. Presenta la desventaja de requerir la retriangularización de la matriz del sistema o de la máquina en cada iteración.

Existen otros modelos, por ejemplo los basados en fasores de estados (descomposición de las variables en fasores rotantes de secuencia directa, inversa y nula con frecuencia variable), los cuales son utilizados para incluir efectos de saturación. En estos modelos pueden obtenerse ciertas ventajas, como por ejemplo un menor número de variables predecidas. Para la interfaz entre la máquina y el resto de la red se pueden emplear dos métodos: el primero es el teorema de compensación junto con el equivalente de Thévenin multifásico; el segundo (actual programación usada en el EMTP), incluye la máquina dentro de la matriz de admitancia de la red.

La saturación se representa mediante una o dos características de saturación, de eje directo solo o de eje directo y en cuadratura. En el primer caso, se considera el flujo total sometido a efectos de saturación; en el segundo, se someten a saturación ambos flujos, de eje directo y en cuadratura por separado.

El modelo permite simular máquinas sincrónicas de polos salientes y de rotor cilíndrico. La única diferencia es la cantidad de arrollamientos que se utilizan para modelar el rotor; comúnmente se usa un solo arrollamiento sobre el eje

en cuadratura para las de polos salientes y dos o más para las de rotor cilíndrico. En ambos casos, sobre el eje directo se representa la misma cantidad de arrollamientos. A continuación se detallan los principales aspectos del modelo y de la programación. Una descripción más pormenorizada puede obtenerse en la referencia [4].

### 1.13.2.2 Modelo matemático de la máquina sincrónica

El comportamiento de la máquina sincrónica puede describirse a través del siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales en componentes de fase (indicado con el subíndice  $ph$ ):

$$[v_{ph}] = -[R_{ph}] * [i_{ph}] - \frac{d[\lambda_{ph}]}{dt} \quad (1.130)$$

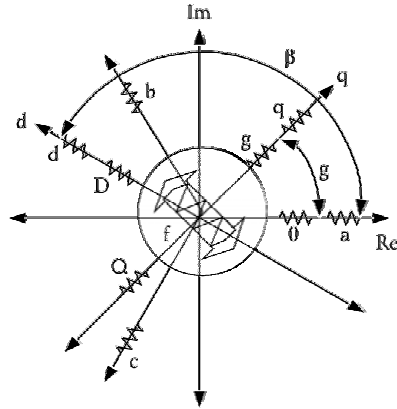
El vector de flujos puede expresarse en función de las corrientes mediante una matriz de inductancias:

$$[v_{ph}] = -[R_{ph}] * [i_{ph}] - \frac{d\{[L_{ph}] * [i_{ph}]\}}{dt} \quad (1.131)$$

Donde:

- $[v_{ph}]$  : Vector de tensiones
- $[R_{ph}]$  : Matriz de resistencias
- $[L_{ph}]$  : Matriz de inductancias o acoplamientos inductivos
- $[i_{ph}]$  : Vector de corrientes
- $\frac{d[\lambda_{ph}]}{dt}$  : Derivada respecto del tiempo del vector de flujos

El signo negativo depende de la convención utilizada para el sentido de las corrientes; en este caso, se usa la convención para generadores. El número de ecuaciones diferenciales depende del número de arrollamientos considerados para describir el comportamiento de la máquina. Este número puede no coincidir con el número real de arrollamientos, ya que se suelen incorporar arrollamientos ficticios para considerar efectos de corrientes parásitas.



**Figura 1.26.** Disposición de los arrollamientos de la máquina síncrona.

El modelo incluido dentro del programa EMTF utiliza siete arrollamientos y, por tanto, es descrito por un conjunto de siete ecuaciones diferenciales [4]: Tres de los arrollamientos corresponden a las fases  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en componentes de fase o  $d$ ,  $q$ ,  $0$  en componentes de Park. El cuarto arrollamiento es de excitación, denominado  $f$ ; un arrollamiento ficticio que representa efectos de corrientes parásitas sobre el eje directo denominado  $D$  y dos arrollamientos ficticios representando corrientes parásitas sobre el eje  $q$ , denominadas  $g$  y  $Q$ . Los efectos de barras de amortiguamiento se incluyen en los arrollamientos ficticios.

Las matrices y los vectores tienen la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ v_f \\ v_D \\ v_g \\ v_Q \end{bmatrix} = [v_{ph}] ; \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_g \\ i_Q \end{bmatrix} = [i_{ph}] ; \begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_Q \end{bmatrix} = [R_{pk}]$$

$$[L_{ph}] = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{af} & L_{aD} & L_{ag} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bf} & L_{bD} & L_{bg} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cf} & L_{cD} & L_{cg} & L_{cQ} \\ L_{fa} & L_{fb} & L_{fc} & L_{ff} & L_{fD} & 0 & 0 \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{Df} & L_{DD} & 0 & 0 \\ L_{ga} & L_{gb} & L_{gc} & 0 & 0 & L_{gg} & L_{gQ} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & 0 & 0 & L_{Qg} & L_{qQ} \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de acoplamiento propios entre fases y entre fases y arrollamientos del rotor son variables con la posición del mismo, medida a través del ángulo  $\beta$ ;  $\beta = \beta_a$  entre el eje estacionario de referencia ( $Re$ ) y el eje directo de la máquina, como se muestra en la figura 1.26.

La posición para cada fase es:

$$\beta_a = \omega t + \delta + \pi/2; \beta_b = \beta_a + 2\pi/3; \beta_c = \beta_a + 4\pi/3$$

Las inductancias propias:

$$L_{aa} = L_{a0} + \sum_{n=1}^{\infty} L_{a2n} \cos(2n\beta_a) \quad (1.132)$$

$$L_{bb} = L_{b0} + \sum_{n=1}^{\infty} L_{b2n} \cos(2n\beta_b) \quad (1.133)$$

$$L_{cc} = L_{c0} + \sum_{n=1}^{\infty} L_{c2n} \cos(2n\beta_c) \quad (1.134)$$

Las inductancias propias de los arrollamientos del rotor son independientes de la posición del rotor.

Las ecuaciones de las inductancias mutuas son:

$$L_{ab} = L_{ab0} + \sum_{n=1}^{\infty} L_{ab2n} \cos(2n\beta_c) \quad L_{aD} = \sum_{n=0}^{\infty} L_{aD(2n+1)} \cos((2n+1)\beta_a)$$

$$L_{ac} = L_{ac0} + \sum_{n=1}^{\infty} L_{ac2n} \cos(2n\beta_b) \quad L_{ag} = \sum_{n=0}^{\infty} L_{ag(2n+1)} \cos((2n+1)\beta_a)$$

$$L_{bc} = L_{bc0} + \sum_{n=1}^{\infty} L_{bc2n} \cos(2n\beta_c) \quad L_{aQ} = \sum_{n=0}^{\infty} L_{aQ(2n+1)} \cos((2n+1)\beta_a)$$

$$L_{af} = \sum_{n=0}^{\infty} L_{af(2n+1)} \cos((2n+1)\beta_a)$$

En estas expresiones puede destacarse lo siguiente:

- Las inductancias propias y mutuas entre fases están formadas por términos constantes ( $L_{a0}$ ,  $L_{b0}$ , etc.) más una sumatoria de armónicos pares (fundamentalmente porque el número de polos de la máquina siempre es par).
- Las inductancias mutuas entre fases y bobinados del rotor no tienen términos constantes y están formadas por armónicos impares debido a que el número de fases es impar.
- Estas expresiones no incluyen algunos efectos especiales debido a asimetría en la construcción de la máquina; por ejemplo, el efecto sobre el flujo de pasos no enteros para el arrollamiento del estator o asimetrías entre polos. Sí cubren otros efectos como asimetrías estáticas de la posición del rotor (diferentes valores para los términos constantes).
- En el caso ideal de una máquina perfectamente construida y balanceada se tiene:

$$L_{a0} = L_{b0} = L_{c0} = L; L_{a2n} = L_{b2n} = L_{c2n} = L_m$$

$$L_{ab0} = L_{bc0} = L_{ac0} = L_{ms}; L_{ab2n} = L_{bc2n} = L_{ac2n} = L_{mm}$$

- En este modelo, los armónicos superiores a 2 son depreciados, lo que hace que el mismo no sea adecuado para estudiar algunos aspectos del diseño de la máquina. No obstante, resulta apropiado para representar su comportamiento en conjunto con la red eléctrica.
- El hecho de que los coeficientes de acoplamiento sean función del tiempo complica la solución del sistema. Con el objeto de hacer estos independientes del tiempo, se aplica la transformación de Park.
- Los efectos de saturación se consideran a través de la modificación de los coeficientes de acoplamiento en función del grado de saturación.

### 1.13.2.3 Transformación de Park

Si se hace un cambio de variables mediante la siguiente matriz (transformación ortogonal, con  $\beta = \beta_d$ ):

$$[\lambda_{dq0}] = [T_{pk}] * [\lambda_{ph}] \quad (1.135)$$

$$[T_{pk}] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} * \cos \beta & \sqrt{\frac{2}{3}} * \cos(\beta - 120^\circ) & \sqrt{\frac{2}{3}} * \cos(\beta + 120^\circ) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}} * \text{sen } \beta & \sqrt{\frac{2}{3}} * \text{sen}(\beta - 120^\circ) & \sqrt{\frac{2}{3}} * \text{sen}(\beta + 120^\circ) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_{pk}] * [v_{ph}] = -[T_{pk}] * [R_{ph}] * [T_{pk}]^{-1} * [i_{pk}] - [T_{pk}] * \frac{d\{[T_{pk}]^{-1} * [\lambda_{pk}]\}}{dt}$$

$$[T_{pk}] * [v_{ph}] = -[T_{pk}] * [R_{ph}] * [T_{pk}]^{-1} * [i_{pk}] - \frac{d\{[\lambda_{pk}]\}}{dt} - [T_{pk}] * \frac{d\{[T_{pk}]^{-1}\}}{dt} * [\lambda_{pk}]$$

$$[v_{pk}] = -[R_{pk}] * [i_{ph}] - \frac{d\{[\lambda_{pk}]\}}{dt} - [u_s]$$

Ahora se tiene el sistema en componentes de Park donde:

$$[R_{pk}] = [T_{pk}] * [R_{ph}] * [T_{pk}]^{-1} \quad \text{es la nueva matriz de resistencias.}$$

$$[u_s] = -[T_{pk}] * \frac{d\{[T_{pk}]^{-1}\}}{dt} * [\lambda_{pk}] \quad \text{es el vector de tensiones inducidas por efecto de rotación de los flujos.}$$

El resto de los vectores representan las mismas magnitudes que el sistema original en componentes de fase, pero en componentes de Park.

Cabe destacar lo siguiente:

- El significado físico de la transformación es que se han remplazado los arrollamientos del estator por tres arrollamientos, dos de ellos rotantes, ubicados en los ejes directos y en cuadratura de la máquina, y el tercero, estacionario, de secuencia cero, coincidente con el eje de la fase a de la máquina. Esto implica, además, que en estado estacionario y balanceado, las corrientes alternas en los bobinados del estator ahora son representadas por corrientes continuas en los bobinados rotantes  $dq$ .
- La matriz  $[T_{pk}]$  suele tener diferentes valores de coeficientes, dependiendo del autor. Con los valores elegidos en la matriz mostrada, se obtiene una transformación invariante en la potencia. Esto implica que  $p = v_a * i_a + v_b * i_b + v_c * i_c = v_d * i_d + v_q * i_q + v_o * i_o$  y simétrica. Además la matriz de transformación es ortogonal y, por tanto  $[T_{pk}]^{-1} = [T_{pk}]^T$ .
- Los valores de resistencias de los bobinados del rotor no cambian con la transformación, pues en  $[T_{pk}]$  y  $[T_{pk}]^{-1}$  la diagonal tiene un valor de uno para las filas correspondientes. Los valores de resistencias de los arrollamientos del estator, ahora en componentes  $dqo$ , no cambian si los valores originales de las tres fases son iguales. Esto se demuestra realizando la transformación por separado para magnitudes del rotor y del estator; si  $R_a = R_b = R_c$  la matriz de resistencias es una constante por la matriz unitaria.
- El vector de flujos ahora puede representarse en función de las corrientes y la matriz de inductancia. Esta última adquiere una forma particular con coeficientes independientes de la posición del rotor y desacoplados entre los ejes directos y en cuadratura.

$$\begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_o \\ \lambda_f \\ \lambda_D \\ \lambda_g \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & L_{df} & L_{dD} & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & L_{qg} & L_{qQ} \\ 0 & 0 & L_o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{fd} & 0 & 0 & L_{ff} & L_{fD} & 0 & 0 \\ L_{Dd} & 0 & 0 & L_{Df} & L_{DD} & 0 & 0 \\ 0 & L_{gq} & 0 & 0 & 0 & L_{gg} & L_{gQ} \\ 0 & L_{Qq} & 0 & 0 & 0 & L_{Qg} & L_{QQ} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_o \\ i_f \\ i_D \\ i_g \\ i_Q \end{bmatrix}$$

Si se determina la matriz

$$[A] = [T_{pk}] * \frac{d\{[T_{pk}]^{-1}\}}{dt}$$

para simplificar la notación y se derivan las funciones sinusoidales, resulta una matriz de la siguiente forma:

$$[A] = [T_{pk}] * \frac{d\{[T_{pk}]^{-1}\}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & -w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, el vector  $u_s$  puede expresarse en función de las corrientes y los coeficientes de acoplamientos de flujos como:

$$[u_s] = [A] * [L_{pk}] * [i_{pk}] \tag{1.136}$$

- Considerando que en el nuevo sistema de referencia, la matriz de inductancias es constante respecto del tiempo (sin tener en cuenta los efectos de la saturación) y expresando los flujos en función de esta y de las corrientes se obtiene:

$$[v_{pk}] = -[R_{pk}] * [i_{pk}] - [L_{pk}] * \frac{d\{*[i_{pk}]\}}{dt} + [A] * [L_{pk}] * [i_{pk}] \tag{1.137}$$

Finalmente, en la figura 1.27 aparecen los resultados de la transformación de Park para el caso de un rechazo de carga sobre un generador, calculado con el programa ATP. El primer oscilograma muestra la tensión en bornes del generador en componentes de fase, para la fase a. Los siguientes oscilogramas muestran la corriente de excitación, la tensión y corriente de eje directo.

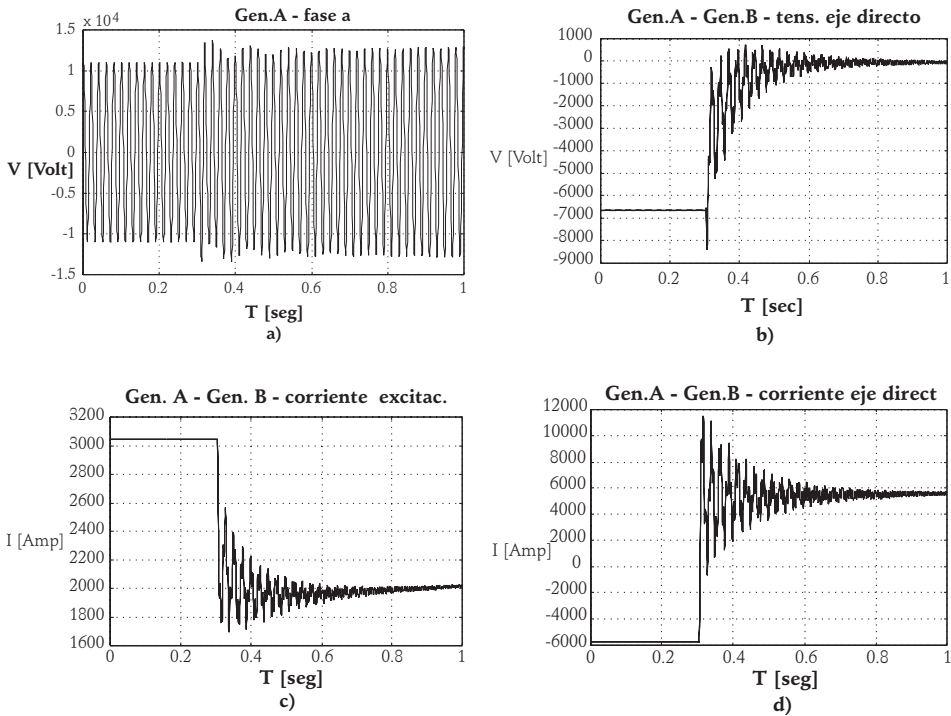


Figura 1.27. Corriente de excitación, tensiones y corrientes de eje directo [3].

### 1.13.2.4 Cálculo de variables eléctricas iniciales (estado estacionario)

#### 1.13.2.4.1 Sin considerar efectos de saturación

El cálculo de las condiciones iniciales aquí presentado se efectúa considerando condiciones de carga balanceada y simétrica en las tres fases; no obstante, utilizando componentes simétricas, se pueden considerar condiciones desbalanceadas. En las distintas versiones del programa EMTP, se puede trabajar con condiciones desbalanceadas sin incluir efectos de saturación.

El cálculo de las condiciones iniciales se efectúa a partir de la corriente y tensión en bornes de la máquina. Estas se obtienen de un flujo de carga resultado de cálculos manuales o con alguna de las versiones de EMTP. A partir de la corriente y tensión en bornes de máquina se obtienen las variables en componentes de Park de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$v_q + jv_d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} * V_a * e^{j\delta} ; \quad i_q + ji_d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} * I_a * e^{j\delta} \quad (1.138)$$

donde  $\delta$  es el ángulo de posición del eje en cuadratura respecto al eje de referencia y  $V_a, I_a$  son los fasores en valor de pico que representan la corriente y tensión de la fase a:

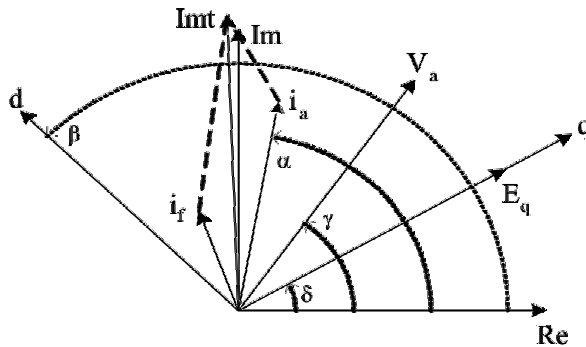
$$V_a = V_{pico} * e^{j\lambda} ; \quad I_a = I_{pico} * e^{j\alpha}$$

Utilizando el sistema de ecuaciones que define el comportamiento de la máquina (1.130):

$$[v_{ph}] = -[R_{ph}] * [i_{ph}] - \frac{d\{\{\lambda_{ph}\}\}}{dt} + [u_s]$$

se obtienen las siguientes expresiones que permiten vincular la corriente de excitación con las magnitudes del estator:

$$v_d = -R_a * i_d - \omega * L_q * i_q ; \quad v_q = -R_a * i_q + \omega * L_d * i_q + \omega * L_{df} * i_f \quad (1.139)$$



**Figura 1.28.** Diagramas fasoriales de máquinas eléctricas.

De la figura 1.28 y de los diagramas fasoriales de máquinas eléctricas puede obtenerse la siguiente relación:

$$|E_q| * e^{j\delta} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} * (V_a + (R_a + jX_q) * I_a) \quad (1.140)$$

De esta ecuación puede obtenerse el ángulo  $\delta$  que define la posición del eje en cuadratura.

Si se consideran estas tres ecuaciones (1.138), (1.139) y (1.140), introduciendo las dos primeras en la tercera, se obtiene la fórmula que permite calcular la corriente de excitación; por ley de Ohm la tensión de excitación será:

$$i_f = \frac{V_q + R_a * i_q + w * L_d * i_q}{w * L_{df}}; V_f = R_f * i_f \quad (1.141)$$

El resto de las corrientes en los bobinados del rotor valen cero, en condiciones estacionarias, y las tensiones, por ser bobinadas en cortocircuito, tienen un valor de cero. Finalmente los flujos son obtenidos de la expresión:

$$[\lambda_{pk}] = [\lambda_l] + [\lambda_m] = \{[L_l] + [L_m]\} * [i_{pk}] \quad (1.142)$$

donde los subíndices  $l$  y  $m$  implican flujo disperso y mutuo, respectivamente.

#### 1.13.2.4.2 Integración de la ecuación diferencial para el modelo lineal

Para integrar la ecuación diferencial de la máquina sin considerar los efectos de la saturación, se aplica la regla de integración trapezoidal:

$$\begin{aligned} \frac{[v_{pk(t)}] + [v_{pk(t-\Delta t)}]}{2} &= [R_{pk}] * \frac{[i_{pk(t)}] + [i_{pk(t-\Delta t)}]}{2} - \\ &- [L_{pk}] * \frac{[i_{pk(t)}] - [i_{pk(t-\Delta t)}]}{\Delta t} + [A] * \frac{[i_{pk(t)}] + [i_{pk(t-\Delta t)}]}{2} \\ [v_{pk(t)}] &= [R_{pk}] * [i_{pk(t)}] - \frac{2}{\Delta t} * [L_{pk}] * [i_{pk(t)}] + [A] * [L_{pk}] * [i_{pk(t)}] - \\ &- [v_{pk(t-\Delta t)}] + \frac{2}{\Delta t} * [L_{pk}] * [i_{pk(t-\Delta t)}] + [A] * [L_{pk}] * [i_{pk(t-\Delta t)}] \end{aligned}$$

Si se hace:

$$\begin{aligned} [R_{c_{pk}}] &= [R_{pk}] + \frac{2}{\Delta t} * [L_{pk}] - [A] * [L_{pk}] \\ [H_{pk}] &= [v_{pk(t-\Delta t)}] + \frac{2}{\Delta t} * [L_{pk}] * [i_{pk(t-\Delta t)}] + [A] * [L_{pk}] * [i_{pk(t-\Delta t)}] \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene:

$$\left[ v_{pk}(t) \right] = -\left[ R_{cpk} \right] * \left[ i_{pk}(t) \right] + \left[ H_{pk} \right] \quad (1.143)$$

donde:

$\left[ R_{cpk} \right]$  : Matriz “*R companion*” o matriz de resistencias equivalente que representa los efectos resistivos e inductivos en el sistema.

$\left[ H_{pk} \right]$  : Vector de los términos históricos; este vector agrupa todos los términos que dependen de  $t - \Delta t$ .

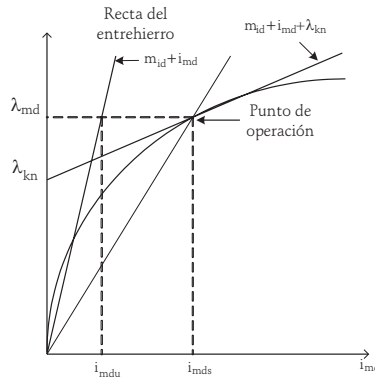
#### **1.13.2.4.3 Incluyendo efectos de saturación**

Para incluir los efectos de saturación de la máquina, debe realizarse una modificación al sistema de ecuaciones. Adicionalmente es necesario realizar predicción de variables con el objeto de conocer el estado de saturación de la máquina en el instante en que se está calculando.

Las principales hipótesis simplificativas en la modelación de la saturación son:

- Descomposición del flujo en las direcciones de los ejes directos, en cuadratura y secuencia cero.
- Se consideran efectos de saturación solo sobre los flujos mutuos y no sobre los flujos dispersos.
- El estado de saturación de la máquina es tomado como una función del flujo en el entrehierro de la máquina.
- No se contemplan efectos de asimetría del flujo respecto del centro del polo (efectos de magnetización cruzada).

Considere la característica de saturación de eje directo. La misma puede linealizarse por tramos en varios segmentos utilizando el concepto de inductancia incremental. La programación actual usa dos segmentos, uno para la parte lineal y otro para la zona saturada, pero podría utilizarse un número mayor de segmentos (figura 1.29).



**Figura 1.29.** Linealización de la inductancia incremental.

El segmento lineal tiene la siguiente ecuación (ver figura 1.3):

$$\lambda_{mdu} = L_{m1d} * i_{md}$$

Para el segmento no lineal:

$$\lambda_{m ds} = L_{m2d} * i_{md} + \lambda_{kn}$$

Los subíndices *s* y *u* indican saturado o no, respectivamente; la corriente  $i_{md}$  es una corriente de magnetización equivalente que representa todas las corrientes actuantes y, por tanto, tiene dos expresiones para su cálculo, dependiendo del número de características de saturación utilizadas. Una característica para el flujo total:

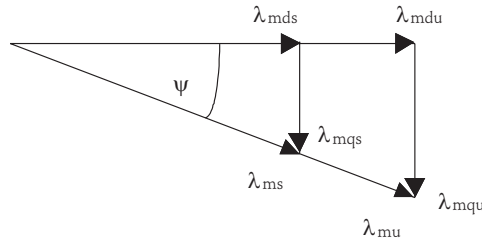
$$i_{md} = \frac{\sqrt{(i_d + i_f + i_D)^2 L_{md}^2 + (i_q + i_g + i_Q)^2 L_{mq}^2}}{L_{md}} \quad (1.44)$$

Dos características independientes para cada eje:  $i_{md} = (i_d + i_f + i_D)$ .

Para la característica de saturación de eje en cuadratura, se tienen expresiones equivalentes:

$$\lambda_{mqu} = L_{m1q} * i_{mq}; \lambda_{mqs} = L_{m2q} * i_{mq} + \lambda_{knq}; i_{mq} = (i_q + i_g + i_Q) \quad (1.45)$$

Si se utiliza una característica de saturación (eje directo), ambos flujos (eje directo y en cuadratura) emplean la misma inductancia incremental pero  $\lambda_{kn}$  difiere para cada eje.



**Figura 1.30.** Característica de saturación.

De la figura 1.30 se definen dos valores de  $\lambda_{kn}$ ,  $\lambda_{knd}$  y  $\lambda_{knq}$ , obtenidos de las proyecciones de  $\lambda_{kn}$  sobre los ejes directo y en cuadratura:

$$\lambda_{knd} = \lambda_{kn} * \cos(\psi); \lambda_{knq} = \lambda_{kn} * \text{sen}(\psi)$$

siendo  $\psi$  la posición del flujo mutuo total respecto al eje directo.

Cuando se utilizan dos curvas de saturación, los coeficientes se simplifican, tratándose cada flujo por separado, obtenidos de  $\lambda_{md} = f(i_{md})$  y de  $\lambda_{mq} = f(i_{mq})$ . Todos los flujos empleados en las expresiones anteriores son flujos mutuos.

#### 1.13.2.4.4 *Modificación del sistema de ecuaciones de la máquina para incluir saturación*

Una vez realizada la transformación para igualar los coeficientes de acoplamiento, se consideran los flujos descompuestos según los ejes directos y en cuadratura y dentro de cada dirección formada por un flujo mutuo y unos flujos dispersos para cada arrollamiento. El efecto de saturación actúa sobre el flujo mutuo y no sobre los flujos dispersos. Se introducen las expresiones del flujo y se elimina el subíndice  $pk$  para simplificar las expresiones:

$$[v] = -[R][i] - \frac{d[\lambda]}{dt} + [A][\lambda] \tag{1.146}$$

El flujo total (incluyendo los flujos dispersos) en componentes de PARK vale:

$$[\lambda] = [L_l][i] + [L_{mi}][i] + [\lambda_e] \tag{1.147}$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 [\lambda_m] &= \begin{bmatrix} \lambda_{md} \\ \lambda_{mq} \\ 0 \\ \lambda_{md} \\ \lambda_{md} \\ \lambda_{mq} \\ \lambda_{mq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{ked} \\ \lambda_{kek} \\ 0 \\ \lambda_{ked} \\ \lambda_{ked} \\ \lambda_{kek} \\ \lambda_{kek} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{mid} & 0 & 0 & L_{mid} & L_{mid} & 0 & 0 \\ 0 & L_{miq} & 0 & 0 & 0 & L_{miq} & L_{miq} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{mid} & L_{mid} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{mid} & L_{mid} & 0 & 0 \\ 0 & L_{miq} & 0 & 0 & 0 & L_{miq} & L_{miq} \\ 0 & L_{miq} & 0 & 0 & 0 & L_{miq} & L_{miq} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_D \\ i_g \\ i_Q \end{bmatrix} \\
 [\lambda_l] &= \begin{bmatrix} \lambda_{ld} \\ \lambda_{lq} \\ \lambda_{l0} \\ \lambda_{lf} \\ \lambda_{lD} \\ \lambda_{lg} \\ \lambda_{lQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ld} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{lq} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_{l0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{lf} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{lD} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{lg} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{lQ} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_D \\ i_g \\ i_Q \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación de la máquina:

$$\begin{aligned}
 [v] &= [R][i] - \frac{d\{[L_l][i] + [L_{mi}][i] + [\lambda_k]\}}{dt} + [A]\{[L_l][i] + [L_{mi}][i] + [\lambda_k]\} \\
 [v] &= -[R][i] - [L_l] + [L_{mi}] \frac{d[i]}{dt} + [A]\{[L_e + L_{mi}][i] + [\lambda_k]\}
 \end{aligned}$$

Aplicando la regla de integración *trapezoidal*:

$$\begin{aligned}
 \frac{[v(t) + v(t - \Delta t)]}{2} &= -[R] \frac{[i(t) + i(t - \Delta t)]}{2} - [L_e + L_{mi}(t - \Delta t)] \frac{[i(t) + i(t - \Delta t)]}{\Delta t} + \\
 &+ \frac{\{[A(t)] * \{[L_l + L_{mi}(t)][i(t)] + [\lambda_k(t)]\} + [A(t - \Delta t)] * \{[L_l + L_{mi}(t - \Delta t)][i(t - \Delta t)] + [\lambda_k(t - \Delta t)]\}\}}{2}
 \end{aligned}$$

Reordenando términos se obtiene:

$$[R_c] = [R] - \frac{2}{\Delta t} \{[L_l] + [L_{mi}(t - \Delta t)]\} + [A(t - \Delta t)] \tag{1.148}$$

Siendo la matriz de términos asociados:

$$[R_c] = -[R] - \frac{2}{\Delta t} \{ [L_l] + [L_{mi}(t-\Delta t)] \} + [A(t-\Delta t)] \quad (1.149)$$

Y el vector de los términos históricos:

$$[Hist(t-\Delta t)] = [A(t)] * [\lambda_k(t)] + [A(t-\Delta t)] * [\lambda_k(t-\Delta t)] - [v(t-\Delta t)] + \left\{ -[R_{pk}] + \frac{2}{\Delta t} \{ [L_l] + [L_{mi}(t-\Delta t)] \} + [A(t-\Delta t)] * \{ [L_l] + [L_{mi}(t-\Delta t)] \} \right\} * [i(t-\Delta t)] \quad (1.150)$$

Debe destacarse lo siguiente:

- El término histórico posee un término que no es función de  $t - \Delta t$  sino de  $t$ . Pero es conveniente incluirlo en  $[Hist(t - \Delta t)]$  debido a que no es multiplicado por el vector de corrientes.  $[\lambda_k(t)]$  se obtiene de la predicción de flujos y de las características de saturación.
- Al usar amortiguamiento de oscilaciones, los coeficientes  $2/\Delta t$  cambian por  $(1 + \alpha)/\Delta t$ .

### 1.13.2.5 Solución del sistema de ecuaciones utilizando el teorema de compensación

Utilizando el procedimiento descrito para reducir sistemas de ecuaciones, el sistema que representa la máquina se divide en las magnitudes del rotor y del estator. Para la conexión al resto del sistema interesan las variables del estator.

$$\begin{bmatrix} v_{pks} \\ v_{pkr} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{cpkss} & R_{cpksr} \\ R_{cpkrs} & R_{cpkrr} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_{pks} \\ i_{pkr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{pks} \\ H_{pkr} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{pks} \\ v_{pkr} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{pks} \\ H_{pkr} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{cpkss} & R_{cpksr} \\ R_{cpkrs} & R_{cpkrr} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_{pks} \\ i_{pkr} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{pks} - H_{pks} \\ i_{pkr} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{rpkss} & R_{rpksr} \\ R_{rpkrs} & R_{rpkrr} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i_{pks} \\ v_{pkr} - H_{pkr} \end{bmatrix}$$

Se obtiene:

$$[v_{pks}] = -[R_{rpkss}] * [i_{pks}] - [R_{rpksr}] * [v_{pkr} - H_{pkr}] + [H_{pks}] \quad (1.151)$$

$$[i_{pkr}] = -[R_{rpks}] * [i_{pks}] - [R_{rpkr}] * [v_{pkr} - H_{pkr}]$$

El primer sistema de ecuaciones, de las tensiones del estator, representa un conjunto de fuentes de tensión detrás de un conjunto de resistencias acopladas:

$$[v_{pks}] = -[R_{rpks}] * [i_{pks}] + [E_{pks}] \quad (1.152)$$

A este sistema de orden 3 se le aplica la transformación inversa de Park, obteniéndose el sistema en componentes de fase.

$$[T_{ph}] * [v_{pks}] = -[T_{ph}] * [R_{rpks}] * [T_{ph}]^{-1} * [i_{pks}] + [T_{ph}] * [E_{pks}] \quad (1.153)$$

$$[v_{phs}] = -[R_{rphss}] * [i_{phs}] + [E_{phs}] \quad (1.154)$$

Utilizando el procedimiento descrito para la obtención de un equivalente de Thévenin multi-fase de la red en el punto de conexión de la máquina, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones de la red:

$$[v_{phs}] = [v_{open}] + [R_{th}] * [i_{phs}] \quad (1.155)$$

Como se ha elegido la dirección positiva de las corrientes de acuerdo con la convención generador, el signo del segundo término es positivo. Ambos sistemas de ecuaciones, de la máquina y de la red, pueden resolverse en conjunto (restando ambos sistemas):

$$[0] = [v_{open}] - [E_{phs}] + \{[R_{th}] + [R_{rphss}]\} * [i_{phs}] \quad (1.156)$$

$$- \{[v_{open}] - [E_{phs}]\} + \{[R_{th}] + [R_{rphss}]\} * [i_{phs}] \quad (1.157)$$

Una vez obtenido el vector de corrientes en componentes de fase, se calcula el vector de tensiones  $[v_{phs}]$ , se transforma a componentes de Park y se utiliza el segundo conjunto de ecuaciones de la máquina para obtener las corrientes del rotor y conocer el estado de la máquina.

### 1.13.2.6 Transformaciones de corrientes y flujos en el sistema de ecuaciones [2]

Si se considera la relación de flujos y corrientes en los arrollamientos de la máquina operando linealmente:

$$\begin{bmatrix} \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_0 \\ \lambda_f \\ \lambda_D \\ \lambda_g \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & L_{df} & L_{dD} & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & L_{qg} & L_{qQ} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{fd} & 0 & 0 & L_{ff} & L_{fD} & 0 & 0 \\ L_{Dd} & 0 & 0 & L_{Df} & L_{DD} & 0 & 0 \\ 0 & L_{gq} & 0 & 0 & 0 & L_{gg} & L_{gQ} \\ 0 & L_{Qq} & 0 & 0 & 0 & L_{Qg} & L_{qQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_D \\ i_g \\ i_Q \end{bmatrix} *$$

La matriz de inductancias es simétrica; esta es obtenida del ajuste del modelo a los parámetros estandarizados suministrados por el fabricante. El proceso se realiza a través de la transformación de Canay [24]. Como los arrollamientos  $D$ ,  $g$  y  $Q$  son ficticios y sus corrientes no pueden ser medidas, y, además, el número de parámetros es mayor que el número de datos, en la transformación de Canay se elige  $L_{dD} = L_{fd}$ ,  $L_{qg} = L_{qQ}$ . En la matriz resultante, los elementos fuera de la diagonal son distintos entre sí, aún si se consideran los elementos de eje directo y en cuadratura por separado.

Los coeficientes de la matriz de inductancia y de resistencias se pueden modificar manteniendo la validez del sistema de ecuaciones de la máquina. Esto permite obtener coeficientes de acoplamiento iguales para cada dirección (directa y en cuadratura).

El significado físico de esta modificación del sistema es el cambio del número de espiras y, por tanto, de las corrientes y los flujos de algunos de los arrollamientos, esto permite además, obtener la representación de la máquina tal como se muestra en las figuras 1.31 y 1.32, es decir, con una inductancia común.

Esto se puede realizar mediante transformaciones matriciales. Considérense las siguientes matrices: