

**EL PAPEL DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS
MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA**



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

AISNARDI SOTO ACEVEDO

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MEDELLIN COLOMBIA
2013**

**EL PAPEL DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS
MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN BÁSICA Y MEDIA**



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

AISNARDI SOTO ACEVEDO

**Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**

Director:

Msc. ELMER JOSÉ RAMÍREZ MACHADO

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
MEDELLIN COLOMBIA**

2013

Agradecimientos

A la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín por propiciar espacios para la cualificación docente.

Al profesor Elmer Ramírez Machado por su acompañamiento y disposición en el proceso de asesoría.

A los profesores Juan Gonzalo Moreno y Fernando Puerta por sus inolvidables y maravillosas clases colmadas de sabiduría, de pasión por el conocimiento y de un profundo respeto por el otro. Tener la posibilidad de conocer estos dos grandes maestros representa para mí un invaluable privilegio.

A mis amigos y a mi familia quienes siempre han sido mi apoyo, mi motivación y mi fuerza.

RESUMEN

Es innegable que el mejoramiento de los ambientes de aprendizaje, depende en gran medida de la transformación de las prácticas de enseñanza asociadas, entre otros factores, a educadores con conocimiento de lo que enseñan y de cómo se enseña. Esta propuesta pretende abordar estos dos aspectos haciendo en primer lugar un recorrido histórico y conceptual por la geometría analítica para destacar su importancia no sólo en el ámbito de las matemáticas sino en el de la educación matemática. Y en segundo lugar enfatizando en el diseño de situaciones problema como una estrategia didáctica que propicia niveles de conceptualización y simbolización de manera progresiva hacia la significación matemática.

PALABRAS CLAVE: Situación problema, geometría analítica, función cuadrática, parábola, ecuación cuadrática

ABSTRACT

It cannot be doubted that the improvement, within learning environments, depends a lot on the transformation of the teaching methods related, among other factors, to teachers who know about what they teach and how to teach it. The proposal of this writing is to deal with these two aspects.

Firstly, there is a historic and conceptual overrun through the analytic geometry in order to remark its importance not only within the limits of mathematics but inside the mathematical teaching. Secondly, it is emphasized the design of problematic situations as a didactic strategy that generates, in a progressive way, conceptual and symbolical levels towards the mathematical signification.

KEY WORDS: Problematic situation, analytic geometry, quadratic function, quadratic equation, parabola.

Contenido

	<u>Pág.</u>
Resumen	III
Introducción	1
1. Justificación y formulación del problema	4
2. Objetivos	9
2.1 Objetivo general.....	9
2.2 Objetivos específicos.....	9
3. Referente Teórico	10
3.1 Consideraciones para el diseño de una situación problema.....	12
3.2 Proceso para el diseño de situaciones problema.....	13
3.2.1 El diseño de redes conceptuales.....	14
3.2.2 La selección de los motivos.....	14
3.2.3 Los estados de complejidad.....	15
3.2.4 Las estrategias de intervención.....	16
3.2.5 Los problemas y ejercicios prototipo.....	16
3.2.6 Posibilidades para la aplicación, cuantificación y desarrollo de los conceptos tratados.....	17
3.2.7 La evaluación durante el acompañamiento.....	17
4. Referente disciplinar	19
4.1 Antes de Fermat y Descartes.....	21
4.1.1 El álgebra geométrica de Los Elementos de Euclides.....	21
4.1.2 Las cónicas de Menecmo y Apolonio.....	22
4.1.3 La Colección Matemática de Pappus y La Aritmética de Diofanto.....	24
4.1.4 El Tractatus Latitudinibus Formarum de Oresme.....	26
4.1.5 El Arte Analítica de Vieta.....	28
4.2 Fermat y Descartes.....	31
4.2.1 Pierre de Fermat.....	32
4.2.2 René Descartes.....	34
4.3 Después de Fermat y Descartes.....	38
5. Situación problema para la enseñanza de la función cuadrática, su gráfica y su ecuación asociada	42
5.1 Bloque 1: Situación problema para caracterizar la función cuadrática.....	43
5.1.1 Área del cuadrado.....	44
5.1.2 Área del rectángulo.....	45
5.1.3 Área del paralelogramo.....	46
5.1.4 Área del triángulo.....	47
5.1.5 Área del trapecio.....	47
5.1.6 Área del polígono regular.....	47
5.1.7 Área del círculo.....	48

5.1.8.	Área de otras figuras planas	49
5.1.8.1	Actividades	49
5.1.9	Conclusiones	51
5.2	Bloque 2: La parábola	53
5.2.1	La parábola como gráfica de la función cuadrática.....	53
5.2.1.1	Gráfica de $y = ax^2$	53
5.2.1.2	Gráfica de $y = ax^2 + n$	55
5.2.1.3	Gráfica de $y = a(x - m)^2$	56
5.2.1.4	Gráfica de $y = a(x - m)^2 + n$	58
5.2.1.4.1	Ejercicios	58
5.2.1.5	Gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$	59
5.2.1.5.1	Máximos y mínimos	60
5.2.1.5.1.1	Ejercicios	61
5.2.2	La parábola como lugar geométrico	61
5.2.2.1	Construcción de la parábola con regla y compás	63
5.2.2.2	Ecuación de la parábola en términos de su parámetro "p"	64
5.2.2.2.1	Ejercicios	69
5.2.3	La parábola como sección cónica	70
5.2.3.1	Propiedades de la parábola	70
5.2.3.2	Ejercicios.....	72
5.3	Bloque 3: La ecuación cuadrática	73
5.3.1.	Definición	73
5.3.2	Solución de la ecuación cuadrática	74
5.3.2.1	Naturaleza de las soluciones	75
5.3.2.1.1	Ejercicios	77
5.3.3	Algunos métodos alternativos para resolver ecuaciones cuadráticas	78
5.3.3.1.	El método de partir, cuadrar y restar	79
5.3.3.2	Completar el cuadrado geoméricamente	80
5.3.3.3.	Solución con regla y compás	85
5.3.3.4	Ejercicios.....	88

Bibliografía	89
---------------------------	-----------

INTRODUCCIÓN

En los diferentes estudios sobre los factores asociados al éxito en el desempeño de los estudiantes, se señala que éstos deben ser abordados desde una perspectiva integral. Entre otros se citan la gestión de la institución, la coherencia del currículo, el uso pedagógico del tiempo escolar, las condiciones básicas para la permanencia, la existencia de material educativo de apoyo para docentes y alumnos, y la participación de las familias¹. Sin embargo no puede desconocerse que el papel del maestro para generar ambientes de aprendizaje altamente eficaces es un factor fundamental, que puede atenuar considerablemente el efecto de los demás factores. Si bien para mejorar el desempeño académico es necesario crear las condiciones que faciliten el proceso de aprendizaje, es indudable que la estrategia central de transformación se traduce en prácticas de enseñanza más efectivas. Avanzar hacia la calidad de la educación implica coordinar acciones en la formación de los educadores para desarrollar o fortalecer sus competencias profesionales, actualizar y profundizar sus conocimientos, crecer en lo personal y mejorar su desempeño y su clima institucional. Una formación que le permita cualificar sus prácticas pedagógicas al tiempo que se desarrolla como persona y como profesional, respondiendo a las expectativas, necesidades y demandas de la sociedad. Estas prácticas están asociadas, entre otros factores, a educadores con conocimiento de la disciplina que enseñan y con conocimiento pedagógico del contenido que enseñan:

“El conocimiento profesional del docente tiene como uno de sus pilares el conocimiento disciplinar, pero, está esencialmente relacionado con las elaboraciones y construcciones que el docente propone para un tópico específico y las representaciones múltiples de éste, así como con los propósitos didácticos involucrados. Hace referencia además a los mecanismos de pensamiento y razonamiento que pueden resultar fructíferos para el objetivo pedagógico, junto a

¹ Programa para la transformación de la calidad educativa. Ministerio de Educación Nacional, 2011, pág. 3.

los valores, creencias y concepciones que participan en la práctica de la enseñanza-aprendizaje en un nivel determinado. En consecuencia, la competencia del docente en el área de matemáticas se relaciona con el uso flexible y comprensivo, en contextos diversos, del conocimiento matemático y del conocimiento matemático escolar para transformar el saber a enseñar en objeto de enseñanza (trasposición didáctica). Este uso se puede evidenciar, entre otros, en su capacidad para analizar, razonar, y comunicar ideas efectivamente, para formular, resolver e interpretar problemas en situaciones didácticas.”²

Las indicaciones planteadas por el Ministerio de Educación Nacional en torno a las líneas fundamentales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Colombia, buscan impulsar el desarrollo de la misma, tanto en su investigación como en el mejoramiento de sus procesos para potenciar la interacción cultural en la formación matemática de los estudiantes. En los lineamientos curriculares de matemáticas se plantean como actividades propias de esta área: estimular la actividad y las operaciones mentales, activar la capacidad de razonamiento y de pensamiento crítico y creativo, generar procesos mentales superiores, contribuir a organizar la mente y a formar para la toma de decisiones y para la formulación, análisis y solución de problemas.

Potenciar el pensamiento matemático es un reto escolar al que esta propuesta pretende contribuir mostrando como la Geometría Analítica cobra una importancia relevante no sólo como una herramienta fundamental de la Matemática sino también de la Educación matemática, puesto que desarrolla elementos conceptuales comunes que permiten el diseño de situaciones de aprendizaje, y en particular de situaciones problema, que integran la mayoría de los pensamientos planteados en los lineamientos curriculares de matemáticas: pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento aleatorio y pensamiento variacional. Además posibilita que los procesos de aprendizaje de

² Documento guía evaluación de competencias en matemáticas. Ministerio de Educación Nacional y Universidad Nacional, 2011, pág. 40.

las matemáticas se den a partir de la construcción de formas generales y articuladas de esos mismos tipos de pensamiento.

El conocimiento profesional del educador matemático es complejo, incluye contenidos de y sobre la disciplina: conceptos y procedimientos, métodos de construcción, validación y comunicación, estructuras cognoscitivas, aplicaciones, construcción de modelos matemáticos, planteamiento y solución de problemas; así como, conocimientos filosóficos, históricos y sociológicos sobre las matemáticas. Por tanto esta propuesta va dirigida a docentes de matemáticas de la básica secundaria y media, y pretende desarrollarse en tres momentos principales. En el primero se hará una síntesis de los elementos teóricos expuestos por el profesor Orlando Mesa en el texto: *“Contextos para el diseño de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas”*, para enfatizar en el diseño de situaciones problema como un instrumento de enseñanza y aprendizaje que propicia niveles de conceptualización y simbolización de manera progresiva hacia la significación matemática. En el segundo momento se pretende destacar la importancia, no sólo en el ámbito de las matemáticas sino en el de la educación matemática, de la geometría analítica a través de una reseña histórica apoyada principalmente en el texto *“Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica”* de Pedro Miguel González Urbaneja. Finalmente para vincular los dos momentos anteriores se mostrará el diseño de una situación problema en el ámbito de la geometría analítica, en particular sobre la función cuadrática, su gráfica y su ecuación asociada, en la que se busca una reorganización de contenidos y de la forma de su enseñanza, que posibilite la construcción de significados por parte del estudiante.

1. JUSTIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Es innegable que las matemáticas son una parte importante de la cultura y en este sentido uno de los objetivos de la educación matemática es contribuir a dar sentido al entorno globalizado sostenido tecnológicamente en el que estamos indefectiblemente inmersos. Este es un aspecto que se destaca en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas:

“Las matemáticas son una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura y por su historia, en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas tanto internos como externos a las matemáticas mismas. En la búsqueda de soluciones y respuestas a estos problemas surgen progresivamente técnicas, reglas y sus respectivas justificaciones, las cuales son socialmente decantadas y compartidas.”³

La historia de las matemáticas no puede aislarse de la historia de la humanidad, puesto que el desarrollo de la una ha avanzado paralelamente con el desarrollo de la otra. En la actualidad, la mayoría de las ciencias incluso las humanas y sociales tienen cada vez más carácter matemático, pues muchos comportamientos sociales y económicos se explican a través de modelos matemáticos. Este proceso de modelización es precisamente uno de los cinco procesos generales que se contemplan en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas. La modelación puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente⁴. En el caso de la educación matemática para la básica secundaria y media, la modelación se refiere a la simplificación y restricción de la complejidad de una nueva situación para reducirla a una situación ya conocida, de tal manera que se pueda detectar fácilmente qué esquema se le puede aplicar, cómo se

³ Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 50.

⁴ Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 53.

relaciona con otras y qué operaciones matemáticas pueden ser pertinentes para responder a las preguntas que suscita dicha situación.

En los Lineamientos curriculares también se plantea que los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y la modelación del espacio, y que en estos sistemas geométricos se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial que se refiere al conjunto de procesos cognitivos mediante los cuales se construyen, manipulan, relacionan y transforman las representaciones mentales de los objetos del espacio y sus diversas traducciones a representaciones materiales. La importancia de la enseñanza de la geometría también ha sido reconocida por autores como Hernández y Villalba (2001) quienes brindan una visión de la geometría, entre otras, como:

- La ciencia del espacio, vista ésta como una herramienta para describir y medir figuras, como base para construir y estudiar modelos del mundo físico y otros fenómenos del mundo real.
- Un punto de encuentro en una matemática teórica y una matemática como fuente de modelos.⁵

Otro autor que señala la importancia de la enseñanza de la geometría es Almeida (2002), quien afirma que tener una cultura geométrica con visión histórica e interdisciplinaria, aplicar conocimientos geométricos para modelar, crear o resolver problemas, entre otros, tendrían que ser algunos de los objetivos generales que todo ciudadano debería alcanzar durante su formación básica⁶. Pero en nuestro sistema de educación, usualmente los contenidos de geometría no son abordados

⁵ Gamboa, Ronny y Ballester, Esteban. *Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría* en: https://docs.google.com/a/unal.edu.co/viewer?a=v&q=cache:hrHu8z7xeSAJ:www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/629/608+&hl=es&gl=co&pid=bl&srcid=ADGEESjnXe9wTEpTaKAIzS8nXLNdr5q3IAo29_R3ZCgzxeDI_yODWI2g9N-YhKs7smTNk-ruZ96rwe8Gw4iWqr6GhvHiErRf6sDRKcBwCnBmCLBNNwIVB3N2eOHRHBRgT0K2HWEENytZ&sig=AHIEtbQAF7_ri3G8_v7xYMMkK5JdmCQICw

⁶ Gamboa, Ronny y Ballester, Esteban. *Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría* en: https://docs.google.com/a/unal.edu.co/viewer?a=v&q=cache:hrHu8z7xeSAJ:www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/629/608+&hl=es&gl=co&pid=bl&srcid=ADGEESjnXe9wTEpTaKAIzS8nXLNdr5q3IAo29_R3ZCgzxeDI_yODWI2g9N-YhKs7smTNk-ruZ96rwe8Gw4iWqr6GhvHiErRf6sDRKcBwCnBmCLBNNwIVB3N2eOHRHBRgT0K2HWEENytZ&sig=AHIEtbQAF7_ri3G8_v7xYMMkK5JdmCQICw

o se presentan como productos acabados de la actividad matemática dejando de lado los procesos implícitos de construcción y razonamiento.

En el caso particular de los estándares básicos de competencias en matemáticas para los grados décimo y undécimo se propone el abordaje de la geometría analítica mediante la resolución de problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras. Cabe anotar el hecho de que la geometría analítica cobra una importancia relevante pues su aparición es uno de los momentos más importantes en la historia de las matemáticas. Como lo señala Javier de Lorenzo:

“El cambio notacional y la geometría analítica, en última instancia dan paso a los conceptos de función, variables y constantes. Conceptos en torno a los cuales va a girar la matemática desde el siglo XVII hasta los primeros años de nuestro siglo.”⁷

La geometría analítica es innegablemente una herramienta fundamental de la matemática y a la vez de la educación matemática, porque de un lado permite que las cuestiones geométricas puedan formularse algebraicamente y que los objetivos geométricos puedan alcanzarse por medio del álgebra, e inversamente, facilita la interpretación geométrica de los enunciados algebraicos, lo que propicia una percepción más intuitiva de su significado, con la posible apertura a la visión de nuevos problemas y conclusiones:

“La Geometría Analítica es una poderosa herramienta del pensamiento matemático que al unir la Geometría con la Aritmética, a través del Álgebra, democratiza la Geometría y la Matemática en general. La fuerza algebraica inexorable de la Geometría Analítica la convierte en un instrumento que permite a cualquier persona normal, a todo escolar que tenga pequeños rudimentos de

⁷ DE LORENZO, Javier. Introducción al estilo matemático. Madrid, 1971.

Álgebra resolver problemas geométricos. En este sentido decimos que la Geometría Analítica es una geometría democratizadora, y por tanto un potente utensilio de la Matemática escolar. Al sustituir las ingeniosas y complejas construcciones geométricas euclídeas por sistemáticas y mecánicas operaciones algebraicas, con una elegancia, rapidez y plenitud heurística que funde en un único acto el descubrimiento y la demostración, la Geometría Analítica cambió la faz de las Matemáticas –en frase de Morris Kline– y la faz de la Educación Matemática.”⁸

Sin embargo la geometría analítica aun no ha alcanzado el sitio preferencial que merece en el currículo escolar, ni en su enseñanza se han logrado introducir los cambios que permitan generar ambientes propicios para un aprendizaje significativo por parte de los estudiantes:

“Se supone que la geometría analítica presenta los modelos algebraicos para las situaciones geométricas. Pero, tan pronto como los estudiantes son introducidos a estos métodos nuevos, son empujados repentinamente a un mundo de cálculos y símbolos en los que se rompen las ligas entre las situaciones geométricas y sus modelos algebraicos y con frecuencia son omitidas las interpretaciones geométricas de los cálculos numéricos”.⁹

En el caso particular de mi experiencia como docente de matemáticas de los grados décimos y undécimos de las diferentes instituciones donde he laborado, he constatado la validez de lo anteriormente expuesto pues aunque dentro del plan de estudios institucional aparece la temática de la geometría analítica para el grado décimo, la realidad es que no se aborda adecuadamente porque hace parte de las últimas unidades programadas en el año lectivo. Esta situación provoca que no se vincule como un continuo aprendizaje, las temáticas del álgebra y la geometría desarrolladas en los grados octavo y noveno, y además que no se genere un puente propicio para el anclaje de conceptos previos necesarios en el

⁸ GONZÁLEZ, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica, pág 147

⁹ Perspectivas para la enseñanza de la geometría en el siglo XXI. Documento de discusión para un estudio ICMI, 2001.

tratamiento del cálculo en el grado undécimo. De esta caracterización del estado actual de la enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica en la educación básica y media, surge entonces el siguiente interrogante: ***¿Cómo articular en una propuesta didáctica, para la enseñanza de la geometría analítica, acciones que propicien un punto de encuentro entre la matemática vista como una teoría abstracta y la matemática vista como un recurso de modelación?***

El propósito de este trabajo es dar respuesta a este interrogante a través de la presentación del diseño de una situación problema en una de las temáticas de la educación básica y media que se aborda en geometría analítica, en la que se busca una reorganización no sólo de contenidos sino de la forma de su enseñanza para propiciar en el estudiante la vinculación a procesos de modelación y para facilitar el aprendizaje de conceptos matemáticos de manera significativa.

2 OBJETIVOS

2.1 Objetivo general:

Mostrar la incidencia de la geometría analítica en la enseñanza de las Matemáticas en la educación básica y media.

2.2 Objetivos Específicos:

- Elaborar un recorrido por la geometría analítica mediante una reseña histórica.
- Resaltar el planteamiento y solución de situaciones problema como una estrategia importante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Presentar una situación problema para la enseñanza de la función cuadrática, su gráfica y su ecuación asociada

3 REFERENTE TEÓRICO

Pensar en torno a un proceso de cualificación frente a un saber como la matemática, implica elaborar estrategias de intervención orientadas por una metodología activa y participativa que integre opciones diferentes a la presentación formalista de contenidos matemáticos. En los lineamientos curriculares se insiste en el replanteamiento de los programas de matemáticas para la educación básica bajo los principios de la pedagogía activa. Esta metodología está basada en el trabajo por procesos, en los que la presentación lineal de contenidos carece de sentido, dado que lo importante es desarrollar ideas matemáticas en los estudiantes. La presentación de los conceptos a través de las múltiples relaciones posibles, le da definitivamente a la matemática el carácter estructurante, que propicia un mayor acercamiento a nuevas maneras de expresión frente a los conceptos matemáticos.

Para precisar el significado de una intervención pedagógica desde un enfoque participativo, acudiremos a las interpretaciones de Orlando Mesa (1993), al respecto:

*“Las interacciones entre el estudiante, el objeto a conocer y el docente deben ser fuertemente participativas: el estudiante deseando conocer por él mismo, anticipando respuestas, aplicando esquemas de solución, verificando procesos, confrontando resultados, buscando alternativas, planteando otros interrogantes. El docente, integrando significativamente el objeto de estudio según los significados posibles para los alumnos, respetando estados lingüísticos, culturales y cognitivos de sus estudiantes, acompañando oportunamente las respuestas y las inquietudes y sobre todo planteando nuevas preguntas que le permitan al estudiante descubrir contradicciones en sus respuestas o abrirse a otros interrogantes”.*¹⁰

¹⁰ MESA, Orlando y otros. La intervención pedagógica en la construcción de conceptos matemáticos. Tercer coloquio regional de matemáticas. Universidad de Antioquia, septiembre de 1993

Las situaciones problema cobran importancia en la medida que son facilitadores del aprendizaje significativo, pues permiten la interacción entre los conocimientos disciplinar y didáctico. Pero ¿qué significa construir significados o aprender significativamente? En el texto *Significado y sentido en el aprendizaje escolar*, César Coll plantea que para Piaget construimos significados cuando integramos el nuevo aprendizaje a los esquemas que ya poseemos de comprensión de la realidad. En el mismo texto plantea que para Ausubel, la construcción de significados está relacionada directamente con contenidos que sean potencialmente significativos, es decir, contenidos estructurados que se relacionen de modo no arbitrario con los conocimientos previos de los alumnos. Sin embargo, el aprender significativamente para Ausubel, no depende sólo de los conocimientos previos y de la estructura interna del contenido, sino también de la manera como éste sea presentado al alumno, es decir, del sentido que atribuye a éste y a la actividad de aprendizaje.

Lograr develar el aprendizaje significativo es una tarea compleja. Ausubel propone para ello la formulación de tareas poco familiares donde se requiera transferencia de conocimiento y que envuelvan procesos en cadena y en dependencia unos de otros, análisis comparativos de conceptos similares para tratar de establecer en que difieren, situaciones problema en contexto. En general podemos considerar una situación problema como un espacio de informaciones e interrogantes que convocan a un sujeto, a buscar respuestas a partir de actividades que promueven la matematización. Es decir, una situación problema es un espacio en el que se generan y movilizan procesos de pensamiento que permiten la construcción de aprendizajes matemáticos. Por tanto el diseño de situaciones problema se convierte en una alternativa para vincular al estudiante a procesos de modelación y para facilitar el aprendizaje de conceptos matemáticos de manera significativa. En una situación problema, la modelación permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden

hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonables son éstos respecto a las condiciones iniciales¹¹.

3.1 Consideraciones para el diseño de una situación problema

Ya se había definido una situación problemática como un espacio de interrogantes que posibilita, tanto la conceptualización como la simbolización y aplicación significativa de los conceptos para plantear y resolver problemas de tipo matemático. En la orientación piagetiana, estar frente a una situación problemática significa encontrarse en estado de desequilibrio. Cada problema, teórico o práctico, pone de manifiesto la existencia de una laguna o de una perturbación. Resolver la situación problemática es lograr un nuevo estado de equilibrio.

Crear situaciones problema desde esta perspectiva significa: Conocer el saber específico que se propone enseñar, recontextualizarlo de acuerdo con los saberes previos de los educandos y finalmente elaborar sistemáticamente las actividades que hacen posible la interacción entre el estudiante, el profesor y los conocimientos matemáticos.

En estos espacios de interacción, el alumno va cambiando sus comportamientos e ideas frente al objeto en cuestión y el profesor a su vez va propiciando niveles de complejidad y confrontación cada vez superiores. Las situaciones problema contribuyen en gran medida al desarrollo de las competencias lógico-matemáticas del estudiante, lo que se manifiesta cuando antes de actuar, anticipa las consecuencias de sus actos; estructura y sistematiza sus labores; busca ordenada y selectivamente la solución a sus problemas; intenta más de un camino para llegar a una respuesta o encuentra varias respuestas utilizando un mismo procedimiento; encuentra hipótesis o teorías para explicar las relaciones entre objetos y fenómenos; y reflexiona intensamente.

¹¹ Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Ministerio de Educación Nacional, 2006, pág. 53.

Las situaciones problema, como espacios donde es posible aplicar los procesos de matematización, contienen en términos generales tres ejes fundamentales:

- La selección de un gran tema para la situación problema de modo que muchos contenidos específicos puedan ser tratados a partir de él.
- La reorganización de esos contenidos específicos por grados de complejidad y extensión, y el planteamiento de preguntas y problemas que respondan, lo más aproximadamente posible a esa gradación.
- La posibilidad de derivar de cada logro en el aprendizaje, nuevas preguntas y problemas que respondan a las necesidades culturales exigidas.

3.2 Proceso para el diseño de situaciones problema

Se sugiere el siguiente proceso para el diseño de situaciones problema en matemáticas:

1. Definir una red conceptual básica con referentes en el saber formal, pero de acuerdo con las condiciones individuales de los estudiantes y su contexto sociocultural.
2. Seleccionar un motivo que facilite las actividades y el planteamiento de interrogantes.
3. Establecer varios estados de complejidad conceptual, en las actividades y en las preguntas.
4. Precisar la estrategia para la intervención didáctica, en la que deben diferenciarse los momentos de la enseñanza y los de los aprendizajes creativos.
5. Escoger los ejercicios y problemas prototipo que deben comprender los estudiantes.

6. Señalar posibilidades para la ampliación, cualificación y desarrollo de los conceptos tratados.
7. Acoger un proceso para la evaluación de los logros.

3.2.1 El diseño de redes conceptuales

Una red conceptual es una estructuración de conceptos que puedan ser considerados según diferentes estados de complejidad y variabilidad. Las redes tienen inicialmente una urdimbre básica que se diseña con los contenidos temáticos considerados como fundamentales para el sector del conocimiento que se quiere tratar pero una vez se ponen en contexto requieren de la flexibilidad, la elasticidad y la posibilidad de cambio. La flexibilidad, para que los diferentes conceptos y sus relaciones puedan ser representados según estados variables de complejidad y de representación; la elasticidad, para facilitar la extensión de conceptos y su vinculación con otros saberes; y las posibilidades de cambio, para incitar a la asimilación de nuevos conocimientos.

3.2.2 La selección de los motivos

Un motivo es cualquier fenómeno, real o imaginado, que origine una situación problemática y que permita que alguien haga suyo el problema que hasta el momento le era ajeno. Puede nacer de necesidades inmediatas, de experiencias con objetos o símbolos, del análisis de los datos históricos o del planteamiento de posibles relaciones entre conceptos.

En el caso de las matemáticas, la historia provee de motivos fácilmente interesantes para los estudiantes. Conocer algunos de los conceptos y métodos utilizados para crear nuevos conocimientos, no sólo da sentido al saber matemático actual sino que posibilita otras preguntas y el descubrimiento de otras relaciones. En palabras de Miguel de Guzmán:

“La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento buscadas ansiosamente y en muchas ocasiones con genuina pasión por hombres de carne y hueso que se alegraron inmensamente cuando por primera vez dieron con ellas. Cuántos de esos teoremas, que en nuestros días de estudiantes nos han aparecido como verdades que salen de la oscuridad y se dirigen hacia la nada, han cambiado de aspecto para nosotros al adquirir un perfecto sentido dentro de la teoría, después de haberla estudiado más a fondo, incluido su contexto histórico y biográfico”¹²

3.2.3 Los estados de complejidad

En el diseño de una situación problema es preciso establecer categorías para la construcción, la comunicación, la explicación o el uso de conceptos. Las categorías epistemológicas son de gran ayuda para efectuar este proceso. Partiendo del hecho de que en cualquier área de acción pedagógica se pueden señalar seis espacios de reflexión: el heurístico, el sistémico, el de validación, el estructural, el de aplicación y el de explicación, el currículo deberá orientar los contenidos temáticos hacia la comprensión de estos espacios. En el espacio heurístico se tratará el proceso de búsqueda y verificación de relaciones matemáticas; en el espacio sistémico se dará cuenta de los objetos, las operaciones y las relaciones; en el espacio de validación se tratarán los métodos para aceptar o rechazar proposiciones y teorías; en el espacio estructural se analizarán las propiedades generales comunes a varios sistemas; en el espacio de de aplicación se recurrirá a las prácticas y solución de problemas; y en el espacio explicativo se analizarán los significados que tienen las estructuras desde una o varias teorías más generales.

¹² Tomado de De Guzmán O. Miguel. Enseñanza de las ciencias y las Matemáticas. Tendencias e innovaciones. IBER-CIMA. Ed. Popular. S.A. Madrid. 1993.

3.2.4 Las estrategias de intervención

Las estrategias de intervención se relacionan con los procedimientos utilizados para interactuar con los estudiantes. En ellas se concretan las concepciones del docente sobre cómo se comprende y cómo se enseña, el tipo de preguntas que hace el docente y el manejo de las respuestas y preguntas de los estudiantes, las actividades individuales y colectivas, la orientación hacia nuevos aprendizajes, el tratamiento de las dificultades, la promoción de actitudes positivas para aprender, el uso de los materiales de apoyo y el tiempo dedicado al estudio de un tema.

La intervención en la acción educativa debe ser integral e integradora. Integral en cuanto que la variedad y complejidad de los elementos y las variables, que participan en el acompañamiento para la formación y los aprendizajes de los estudiantes, imponen que se asuma una búsqueda de informaciones convergentes, en vez de aceptar los diseños curriculares de una sola escuela o posición pedagógica. Integradora porque la intervención obliga a reconceptualizar informaciones diferentes de manera coherente y con sentido dentro de las particularidades de los diferentes contextos educativos.

3.2.5 Los problemas y ejercicios prototipo

Partiendo de la necesidad de unos saberes básicos, en la enseñanza de las matemáticas es fundamental seleccionar cierto tipo de problemas y ejercicios que faciliten su comprensión y dominio en la aplicación de algoritmos, para propiciar el mejoramiento de las competencias cognoscitivas y de las adquisiciones formativas. En una situación problema deben incluirse:

- Problemas abiertos en los que se encuentren libremente las respuestas y problemas cerrados en los que las respuestas están fijamente determinadas por los datos del problema.
- Problemas de procedimiento rígido en cuya solución se aplica un algoritmo aceptado como el más eficiente y problemas de procedimiento libre en los

que se puede escoger o crear más de un algoritmo para resolver el problema.

- Problemas de referente infralógico en los que se considera simultáneamente el todo y sus partes constituyentes y problemas de referente lógico basados en relaciones cuantitativas aritméticas o algebraicas o en relaciones de inferencia a partir de proposiciones iniciales.

3.2.6 Posibilidades para la ampliación, cualificación y desarrollo de los conceptos tratados

En el diseño de una situación problema se busca la funcionalidad de los aprendizajes para la aplicación práctica del conocimiento. Una situación problema verdaderamente interesante, debe ofrecer posibilidades para crear nuevos centros de interés y desencadenar búsquedas de otros aprendizajes o formulación de nuevos problemas vinculados con la matemática o con otras áreas del saber.

3.2.7 La evaluación durante el acompañamiento

El trabajo con situaciones problema posibilita una evaluación que regula permanentemente los procesos de enseñanza con los procesos de aprendizaje. Pero esta evaluación no debería limitarse a describir y analizar las carencias frente a un saber, sino también a dar cuenta de todos los elementos positivos que muestra el estudiante, en cada sector del conocimiento y en cada temática tratada. Por esto en la evaluación debe tenerse en cuenta:

- Las concepciones de los alumnos sobre los conceptos y los cambios que se presentan en ellas mediante la participación activa de los estudiantes.
- La comprensión de los contenidos temáticos básicos.

- El estado de conceptualización alcanzado frente a los saberes formales.
- La adquisición de destrezas.
- La participación individual en tareas colectivas.
- El interés por ampliar los conocimientos discutidos en el aula.
- La capacidad de lectura y escritura de temas relacionados con el área.
- La capacidad de reflexionar críticamente sobre lo que se le enseña, lee o escribe.

Otro aspecto importante de la evaluación es que debe relacionar las actividades de su diseño con los tipos de problemas que caracterizan el hacer matemático, es decir, los problemas abiertos, cerrados, de respuesta única, de respuesta múltiple, de procedimiento rígido, de procedimiento libre, de referente lógico y de referente infralógico expuestos anteriormente.

4 REFERENTE DISCIPLINAR

En el año de 1637 publicó René Descartes (1596–1650) su “*Geometría*”, dividida en tres libros, de los cuales dedica el segundo a lo que se ha llamado *Geometría Analítica*. Este hecho hace que para el público en general se considere la geometría analítica como un invento del filósofo francés desconociendo el aporte de brillantes matemáticos que a lo largo de la historia realizaron la transformación del álgebra geométrica de los griegos en la geometría analítica tal y como la conocemos actualmente.

De manera muy general puede afirmarse que la geometría analítica es la parte de la matemática que resuelve problemas geométricos bajo el concurso del álgebra mediante el uso de sistemas de coordenadas. Una relación entre las coordenadas determina, en general, una figura formada por un conjunto de puntos que se llama un lugar geométrico. La introducción de las coordenadas permite realizar una transferencia desde el ámbito geométrico de puntos y figuras al ámbito algebraico de números y ecuaciones, de modo que los problemas de la geometría se pueden plantear en términos algebraicos, donde la resolución es más operativa debido a los instrumentos del cálculo analítico. La ecuación de un lugar geométrico se convierte en un ente algebraico íntima y unívocamente vinculado a la figura, de modo que las características geométricas de la figura se pueden descubrir a partir de la naturaleza de su ecuación. Las relaciones entre dos lugares geométricos se pueden determinar a través de la comparación de sus ecuaciones, y en particular sus puntos comunes resultan de la solución de un sistema de ecuaciones.

La geometría analítica es un poderoso instrumento para resolver problemas geométricos que utiliza como herramienta básica el álgebra. La esencia de su aplicación en el plano es el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales, es decir, un sistema de coordenadas, lo que posibilita una asociación entre curvas del plano y ecuaciones en dos variables, de modo que cada curva del plano tiene asociada una ecuación $f(x, y) = 0$ y, recíprocamente, para cada ecuación en dos variables está definida

una curva que determina un conjunto de puntos en el plano, siempre respecto a un sistema de coordenadas.

La geometría analítica cubre una serie de aspectos esenciales como:

1. La introducción de coordenadas.
2. El trazado de una curva construyendo ordenadas a partir de abscisas.
3. La aplicación del álgebra simbólica a los problemas geométricos.
4. La derivación de ecuaciones de los lugares geométricos y la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones.
5. El estudio de las curvas dadas por sus ecuaciones lineales y cuadráticas.
6. La representación gráfica de una curva dada mediante la expresión analítica funcional.
7. La derivación de fórmulas fundamentales para resolver problemas sobre puntos notables, rectas, planos, ángulos, paralelismo, perpendicularidad, distancias, áreas, etc.
8. La clasificación general de curvas y superficies de segundo orden.

Pero la geometría analítica es algo más que una simple combinación de álgebra y geometría, sus orígenes se remontan por tanto a las raíces históricas de la geometría y del álgebra. Para poder circular del álgebra a la geometría y de la geometría al álgebra se requiere de manera ineludible no sólo el carácter algorítmico operatorio del álgebra simbólica sino también el uso de las coordenadas. Una aproximación al uso de éstas ya tuvo lugar en la geometría griega, pero el álgebra simbólica no se desarrolla de forma satisfactoria hasta los trabajos de Vieta. Al vincular ambos elementos en los desarrollos de Fermat y Descartes, emerge la geometría analítica de forma inexorable:

“La Geometría publicada en 1637 por Descartes y el envío al Padre Mersenne, el mismo año, por parte de Fermat de sus investigaciones de alrededor de 1629 contenidas en la memoria: Introducción a los Lugares Planos y Sólidos (Ad Locos Planos et Solidos Isagoge) contienen los fundamentos de la llamada más tarde Geometría Analítica. Estos matemáticos encontraron un terreno muy abonado por

el Análisis Algebraico en que Vieta había transformado el Análisis Geométrico de los griegos con la intervención de su incipiente Álgebra simbólica. Así pues, a pesar de la gran aportación de Fermat y Descartes a la Geometría Analítica, con gran reconocimiento por parte del primero y algo menos en el caso del segundo, su pensamiento geométrico es tributario de casi todo el desarrollo matemático anterior, en especial de la Geometría griega –y en particular de Menecmo, Apolonio y Pappus–, y del llamado Arte Analítica de Vieta. Además, hay dos eslabones intermedios importantes: el Álgebra sincopada de Diofanto y la Latitud de las formas de Oresme.”¹³

4.1 ANTES DE FERMAT Y DESCARTES

4.1.1 El Álgebra Geométrica de Los Elementos de Euclides

Los *Elementos* son una compilación enciclopédica de la geometría elemental griega en la que Euclides establece un estilo axiomático-deductivo de exposición y de demostración en matemáticas, a base de ordenar en una secuencia jerárquica lógica los resultados geométricos de sus antecesores. La parte más importante del *Álgebra Geométrica* de los griegos se encuentra en el Libro II de *Los Elementos de Euclides*. Tras la aparición de las magnitudes inconmensurables, los griegos no podían admitir la existencia de números irracionales y por tanto no había trato numérico de longitudes y áreas. Esta situación impedía asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes o áreas, de modo que no era factible someterlas a manipulaciones algebraicas, como se hace con los números, así que había que operar directamente con las figuras que se trataban como magnitudes.

El *Álgebra Geométrica*, denominación acuñada por el historiador de la matemática H.G. Zeuthen hacia 1886, puede entenderse como una geometrización de los

¹³ GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 10 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

métodos algebraicos practicados por los babilónicos, una especie de geometría algebraica, en la que los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas que obligan a mantener escrupulosamente la homogeneidad de los términos¹⁴. Esta teoría constituye una potente técnica de resolución de ecuaciones denominada método de Aplicación de las Áreas.

En el álgebra geométrica, por ejemplo, la suma de dos números se realiza yuxtaponiendo segmentos, el producto se convierte en el área del rectángulo de lados iguales a las longitudes de esos números y la extracción de una raíz cuadrada es equivalente a la construcción de un cuadrado cuya área es igual a la de un rectángulo dado. La Aplicación de las Áreas se convirtió para los griegos en una de las técnicas más importantes en geometría como útil instrumento de Álgebra Geométrica para la resolución de ecuaciones. Además, desde el punto de vista histórico la Aplicación de las Áreas está en el punto de partida de la teoría de Apolonio (hacia 200 a.C.) de las secciones cónicas.

4.1.2 Las cónicas de Menecmo y Apolonio

Las cónicas se definen ahora, en términos de la geometría analítica, como lugares de puntos en el plano para los que las distancias a una recta (directriz) y a un punto (foco) están en una determinada razón denominada excentricidad. Se atribuye a Menecmo (hacia 350 a.C.) la introducción de las secciones cónicas, es decir, el descubrimiento de las curvas que después recibieron el nombre de elipse, parábola e hipérbola. El descubrimiento fue un hallazgo en relación con el problema de la duplicación del cubo. Menecmo detectó que para la resolución del problema había una familia de curvas adecuadas y durante más de cien años, las curvas introducidas por Menecmo se llamarían a partir de la descripción trivial de la forma cómo habían sido descubiertas, es decir, mediante las perífrasis: sección

¹⁴ GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 13 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

(perpendicular a una generatriz) de cono acutángulo, rectángulo y obtusángulo. Mostró además que las secciones de los conos tenían importantes propiedades como lugares planos, traducibles en básicas expresiones geométricas que permitían deducir, a su vez, otras innumerables propiedades de las cónicas, que serían plasmadas por Apolonio de Perga (262 a.C.) en los primeros libros de *Las Cónicas*, una de las obras cumbres de la matemática griega, que le valió a Apolonio el nombre de “el gran geómetra”. Esta importante obra contiene muchos aspectos que anticipan elementos de las geometrías analíticas de Fermat y Descartes.

Fue Apolonio en *Las Cónicas* quien no sólo demostró que de un cono único pueden obtenerse los tres tipos de secciones, variando la inclinación del plano que corta al cono, sino que demostró que el cono no necesita ser recto y consideró, asimismo, el cono con dos hojas, con lo que identifica además las dos ramas de la hipérbola. Además Apolonio acuñó para la posteridad los nombres de elipse, parábola e hipérbola para las secciones cónicas que procedían del método de Aplicación de las Áreas para la solución de ecuaciones cuadráticas, a saber: Elipse significa deficiencia; Hipérbola significa exceso y por último Parábola significa equiparación. La utilización de estos nombres permite la definición de las cónicas mediante relaciones de áreas y longitudes expresadas en forma de proporción que daban retóricamente la propiedad característica de la curva y que en términos de Fermat, se convertiría en la propiedad específica de la curva:

“Como harán Descartes y Fermat, Apolonio considera ciertas líneas de referencia –diámetros conjugados o diámetro-tangente–, que jugando un papel de coordenadas, asocia a la curva dada, de modo que mediante Álgebra retórica son expresadas en función de esas líneas las propiedades geométricas de la curva equivalentes a su definición como lugares geométricos.”¹⁵

¹⁵ GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 31 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

4.1.3 La Colección Matemática de Pappus y La Aritmética de Diofanto

Pappus de Alejandría fue un importante matemático griego que nació en el 290 a.C. en Alejandría y que murió en el 350 a.C. En su obra principal *La Colección Matemática*, escrita hacia el 340 a.C., realiza una encomiable labor de compilación, comentario, restauración, organización, clasificación y generalización del conocimiento matemático de la antigüedad griega no incluido en *Los Elementos* de Euclides:

*"El conjunto de la Colección Matemática es un tesoro y, hasta cierto punto, la culminación de las matemáticas griegas. Poco se añadió a ella en la época bizantina, y el mundo occidental, habiendo perdido el conocimiento del griego, y el interés por las matemáticas superiores, no pudo aprovechar la riqueza que Pappus había acumulado. Las ideas recogidas o inventadas por él no sirvieron de estímulo a los matemáticos occidentales hasta mucho más tarde, pero cuando al fin lo hicieron, dieron origen a las matemáticas modernas: geometría analítica, geometría proyectiva, método centrobárico. Este nacimiento o renacimiento, surgido de las cenizas de Pappus, se llevó a cabo en un lapso de cuatro años (1637-40). De este modo, la geometría moderna quedó inmediatamente conectada con la antigua, como si nada hubiera acontecido entre tanto". (Sarton, George: *Ciencia antigua y civilización moderna*, pp. 98-99)¹⁶*

La *Colección Matemática*, compuesta por ocho libros, contiene una serie de problemas que introducen nociones geométricas importantes, como el foco de una parábola o la directriz de una cónica, y los enunciados de muchos teoremas, entre ellos, el que expresa la superficie y el volumen de las figuras de revolución.

La obra de Pappus es una gigantesca colección bibliográfica esencial para el estudio de la historia de la geometría griega porque preserva para la posteridad buena parte de la geometría superior de los griegos evitando no sólo su desaparición sino convirtiéndose en una de las principales fuentes de información

¹⁶ Citado por Ángel Ruiz en Historia y Filosofía de las matemáticas pág 110 en <http://www.centroedumatematica.com/arui/libros/Historia%20y%20filosofia%20de%20las%20matematicas.pdf>

sobre los trabajos de geometría griega perdidos de Arquímedes, Apolonio, Aristeo y Eratóstenes. Además de aportar muchos resultados originales de su propio trabajo, Pappus relata las vías que seguía la investigación geométrica, oculta en los grandes tratados clásicos debido a su estilo sintético, es decir, lo que los antiguos geómetras entendían por Análisis y Síntesis:

“La obra de Pappus –una de las principales fuentes de información e inspiración matemática a partir del Renacimiento– contiene soluciones nuevas a numerosos problemas clásicos, la clasificación definitiva de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales, estudios definitivos de las cónicas como lugares geométricos y una visión más general del famoso Problema de Pappus del Libro VII –auténtico bautismo de fuego que puso a prueba la superioridad de los métodos analíticos cartesianos– todas ellas cuestiones de trascendental influencia sobre el advenimiento de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes.”¹⁷

A Diofanto de Alejandría (hacia 250 d.C.) con su obra *La Aritmética* se le reconoce, a veces, como el padre del Álgebra, ya que su trabajo representa un avance considerable con respecto al farragoso lenguaje del álgebra geométrica de Euclides. *La Aritmética* inaugura lo que se conoce con el nombre de Álgebra Sincopada con la que a base de adoptar ciertas letras o expresiones como abreviaturas para las cantidades indeterminadas y sus potencias y para las operaciones más habituales, Diofanto fragua un incipiente simbolismo antecedente de la notación algebraica.

La Aritmética no es sólo un trabajo teórico en la tradición pitagórica, es un trabajo de logística o de cálculo aritmético cuyos fundamentos se alimentan más del antiguo Egipto, de Babilonia y de la India, que de la antigua Grecia. El primer libro pretende determinar ecuaciones algebraicas. Los libros II al V contienen principalmente problemas indeterminados, que consistían en expresiones de dos o más variables elevadas a la segunda o tercera potencia, que debían ser igualadas a otro cuadrado o cubo. El libro VI se centra en triángulos rectángulos tratados

¹⁷ GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 36 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

aritméticamente con una función lineal o cuadrática de sus lados, cuya solución implicaba a su vez cuadrados o cubos.¹⁸

En la obra de Diofanto, que representa la primera aritmetización de la matemática, la clásica solución gráfico-geométrica de las ecuaciones del álgebra geométrica clásica euclídea, es sustituida por los antiguos métodos aritméticos de los babilonios, como consecuencia de que los símbolos que utiliza ya no son pensados como segmentos de línea, sino que realmente son números. Al ser el álgebra simbólica un instrumento algorítmico ineludible de la geometría analítica, y Diofanto el primer iniciador de esta utilidad, es preciso situar su obra, *La Aritmética*, en una dirección conveniente hacia la generación de la geometría analítica:

“Pero, como quiera que la principal deficiencia que tuvo la Geometría griega para alcanzar la Geometría Analítica fue la ausencia del Álgebra simbólica como aparato algorítmico independiente, y el trabajo de Diofanto inicia la construcción de este instrumento, podemos afirmar que la labor de Diofanto es un eslabón importante en la cadena que une la Aritmética y el Álgebra de los babilonios con la empresa de Fermat y Descartes.”¹⁹

4.1.4 El *Tractatus Latitudinibus Formarum* de Oresme

Nicolás de Oresme (1323-1382) es considerado uno de los principales artífices de la renovación medieval, previa a la revolución científica moderna que es heredera del Renacimiento. Una de sus principales obras es *El Tractatus Latitudinibus Formarum* donde las funciones aparecen por primera vez dibujadas. Según Oresme todo lo que varía podía ser imaginado como una cantidad continua representada mediante un segmento rectilíneo. Por tanto trasladó al plano lo que hasta entonces habían hecho los geógrafos sobre la esfera. Mantuvo incluso los

¹⁸ HAWKING, Stephen. Dios creó los números. Ed Crítica, 2006, pág. 205

¹⁹ GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 33 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

nombres, y llamó longitud y latitud a los antepasados de lo que actualmente se denomina abscisa y ordenada. Pero la consideración de estas coordenadas denominadas por Oresme longitud y latitud, no es en realidad una innovación ya que Apolonio y otros matemáticos y geógrafos griegos habían utilizado algún sistema de coordenadas. La verdadera innovación de Oresme es la representación gráfica de una cantidad variable mediante coordenadas, aunque esta variación no se refleja, como en la geometría analítica, por la curva descrita por los puntos de longitud y latitud dadas, sino por la figura total, es decir el área que determina esa curva. Oresme considera varios géneros de formas, a saber: En primer lugar las “formas uniformes” correspondientes a nuestras funciones constantes y cuya representación gráfica da un rectángulo, luego están las “formas uniformemente diformes” que se corresponden con funciones afines y cuya representación gráfica es un trapecio y las “formas diformemente diformes” como las que no corresponden a los géneros anteriores.

Pero Oresme no recorre el otro sentido de la geometría analítica, es decir, no desarrolla el principio de que toda curva plana puede ser representada, con respecto a un sistema de coordenadas, como una función:

“Es interesante analizar en qué sentido se halla en Oresme un incipiente desarrollo de Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal. Oresme está más bien interesado por las cuestiones de la variación de las formas –es decir, por los aspectos diferenciales–, así como por la variación del área bajo la curva –es decir, los aspectos integrales–, más que por el estudio analítico de la curva. En este sentido podemos decir que Oresme se acercó más al Cálculo Infinitesimal que a la Geometría Analítica. En resumen, Nicolas de Oresme introduce al menos implícitamente cuatro ideas matemáticas innovadoras: La medida de diversas variables físicas por medio de segmentos; algún tipo de relación funcional entre variables; una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante la representación gráfica de relaciones funcionales; y una especie de integración o

*sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el gráfico velocidad-tiempo.*²⁰

4.1.5 El Arte Analítica de Vieta

El matemático francés François Viète, o Vieta (1540- 1603) fue uno de los principales precursores del álgebra y una de las figuras más importantes de la transición del Renacimiento al mundo moderno. Como parte de la recuperación del legado griego clásico, en el Renacimiento se emprende la restauración de la antigua tradición matemática griega basada en el *Método de Análisis*, en cuya acción la importancia de la naciente álgebra simbólica, como una poderosa técnica algorítmica, será decisiva. Vieta y otros matemáticos, movidos por la idea de crear un arte simbólico de razonamiento como instrumento fundamental de investigación matemática, llegan a recorrer gran parte del camino que media entre la incipiente Álgebra Sincopada de Diofanto y el Álgebra Simbólica de Descartes. La gran novedad de Vieta estriba en la aplicación a problemas geométricos de todo el simbolismo literal con el potencial de la mecánica algorítmica operatoria de cálculo, manipulación y simplificación, es decir, la traslación de un problema de geometría al álgebra para su resolución, un aspecto esencial de la futura geometría analítica.

Su obra *El Arte Analítica* está inspirada profundamente en la obra de Diofanto y Pappus. En ella Vieta fundamenta los principios y las reglas del cálculo algebraico literal. La pretensión de Vieta en esta obra era el proveer de los instrumentos para resolver con toda generalidad ya no problemas concretos, donde se recurría a trucos como lo hacía Diofanto o los algebristas italianos, sino clases de problemas, donde se emplea una forma de razonamiento a base de ideas generales y se fija la atención en la estructura intrínseca de las cuestiones y de las ecuaciones que se derivan de ellas, para su aplicación a casos análogos. Como explica Vieta:

²⁰ GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 45 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

“La debilidad del antiguo Análisis residía en que se aplicaba sólo a los números, es decir, era una Logística numerosa. Pero el Álgebra permite razonar sobre cualquier tipo de magnitud –número, segmento, ángulo, figura,...– de modo que lo que hay que hacer es considerar una Logística speciosa, aplicable a cualquier especie de cantidad, que se podrá expresar de una manera genérica mediante letras, tanto si es una magnitud desconocida (incógnita) como conocida (parámetro), ya que no hago diferencia entre ellas. Es más, consideraré las magnitudes desconocidas como si se conocieran y operando según las reglas del Arte Analítica, las desconocidas con las conocidas, obtendré aquellas en función de éstas. He aquí el fundamento de la obtención de soluciones generales de los problemas donde los antiguos sólo obtenían soluciones particulares.”²¹

Probablemente fue Vieta quien realizó el salto más relevante en el simbolismo para el álgebra. Introdujo letras para designar números de manera sistemática y consistente. Usó consonantes para las cantidades conocidas y vocales para las desconocidas. Su conciencia del papel del simbolismo lo condujo a separar aritmética y álgebra mediante la distinción entre logística numerosa que se refería a los números y logística speciosa que daba cuenta de un método de operar sobre formas de cosas o especies.

Hay otro aspecto en Vieta, en relación con el uso que hace del término análisis, de una gran incidencia sobre la historia de la geometría analítica. El análisis es la descomposición en elementos más simples que se hace en el camino de la investigación mientras que la síntesis es la composición o reordenación que se hace en la exposición. Para Vieta el *Arte Analítica* consta de tres partes: *zetetic* donde se determinan las propiedades de los elementos que pide el problema a partir de las propiedades de los datos; *poristic* que es el proceso de verificación; y *exegetic* que es la demostración de la proposición. Vieta aplicará el término análisis en la geometría algebraica, a la que mira como una nueva forma de análisis matemático y usa el término bajo el significado de los griegos, es decir,

²¹ GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 49 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

haciendo referencia al orden de las ideas en una demostración. Así pues, para Vieta, el álgebra se convierte en el instrumento adecuado para emprender el camino analítico en geometría, a base de la aplicación de las técnicas simbólicas sobre la *Logística speciosa* liberando de la necesidad de tratar casos particulares y ejemplos concretos para obtener formulaciones generales.

Por la naturaleza del *Arte Analítica*, el análisis algebraico-geométrico de Vieta es un estadio intermedio esencial en el camino que arranca del álgebra geométrica de los griegos y confluye en las geometrías analíticas de Fermat y Descartes. Pero en la aplicación que hace Vieta del álgebra a la geometría no se encuentra el uso de coordenadas, así que el trabajo de Vieta representa un resurgimiento de la geometría clásica griega bajo el amparo de la nueva álgebra simbólica, más que geometría analítica propiamente dicha:

“La obra de Vieta tuvo una contribución decisiva en la generación de las Geometrías Analíticas de Fermat y Descartes, pero ella misma es un claro ejemplo de que la Geometría Analítica es algo más que una mera combinación de Álgebra y Geometría, es decir, necesita como elementos imprescindibles para poder circular del Álgebra a la Geometría y de la Geometría al Álgebra no sólo el Álgebra simbólica sino también el uso de las coordenadas. Menecmo, Apolonio y Pappus utilizaron el equivalente de un sistema de coordenadas pero carecieron del Álgebra simbólica, mientras que, inversamente, Vieta pudo disponer del instrumento algorítmico del Álgebra simbólica pero no llegó a utilizar coordenadas. El descubrimiento de la Geometría Analítica por parte de Fermat y Descartes tendrá lugar al aunar ambos aspectos en el estudio de las curvas: la introducción de coordenadas y la mecánica operatoria del Álgebra simbólica en la aplicación a los lugares definidos por una ecuación en dos incógnitas. Por eso Fermat y Descartes son tributarios tanto de Apolonio y Pappus como de Vieta.”²²

²² GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 51 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

4.2 FERMAT Y DESCARTES

La geometría analítica fue un descubrimiento independiente de dos ilustres personajes, ninguno de los cuales era matemático profesional. Fermat era un jurista con un gran interés y conocimiento sobre las obras matemáticas de Grecia clásica. Descartes era un militar y filósofo que encontró en la matemática la base racional de su pensamiento. Ambos iniciaron sus estudios y descubrimientos matemáticos allí donde Vieta había llegado, pero ambos continuaron la labor de Vieta por caminos diferentes. Bajo la inspiración de Vieta, la gran visión que tuvieron Descartes y Fermat fue la de apreciar que la aplicación del álgebra como instrumento algorítmico por excelencia incrementaría aún más la capacidad heurística del análisis.

Las visiones de Descartes y Fermat son, en cierto modo, complementarias, estableciendo cada una de ellas el nexo entre álgebra y geometría en sentidos opuestos. Descartes estudia ecuaciones por medio de curvas, mientras Fermat estudia curvas definidas por ecuaciones. La geometría analítica que desarrollan Fermat y Descartes, estudia dos tópicos fundamentales: la derivación de las ecuaciones de los lugares geométricos y las propiedades de las curvas, sobre todo de las definidas por ecuaciones lineales y cuadráticas. Puede afirmarse entonces que Descartes se ocupó ampliamente del primer tópico y consideró brevemente algunos aspectos del segundo, mientras que Fermat desarrolló el segundo tópico y prestó menos atención al primero:

“Mientras que Fermat creía en una continuidad con la tradición griega y pensaba que su propio trabajo era una simple reformulación de la obra de Apolonio, Descartes proponía una ruptura. Aun si es posible caracterizar el tratamiento de las ecuaciones de Fermat como mucho más claro y moderno que el de Descartes, es la mentalidad cartesiana la que entendía mejor el nuevo sentido del álgebra. Descartes era consciente de que se trataba de un método universal que debía sustituir aquellos métodos de los antiguos.”²³

²³ Ángel Ruiz Historia y Filosofía de las matemáticas pág 263 en <http://www.centroedumatematica.com/arui/libros/Historia%20y%20filosofia%20de%20las%20matematicas.pdf>

4.2.1 Pierre de Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665) era un respetado juez francés y un gran aficionado a las matemáticas. La figura de Fermat está en el origen de casi todas las disciplinas matemáticas que aparecen a lo largo del siglo XVII: el Cálculo Infinitesimal, la Geometría Analítica y El Cálculo de Probabilidades. Sin embargo, es más conocido por sus aportes a la Teoría de Números, en especial por el conocido como *Último Teorema de Fermat*, que preocupó a los matemáticos durante aproximadamente 350 años, hasta que fue demostrado en 1995.

Fermat poseía una prodigiosa erudición matemática, obtenida del meticuloso estudio de las obras de Diofanto, Apolonio, Arquímedes y Pappus, lo que propició su irrefrenable afición a la matemática. Sin embargo no redactó casi nada de sus descubrimientos y rehusó su publicación, de modo que lo esencial de su obra fue desarrollada en los márgenes de sus libros y en su correspondencia, en la que se evidencia una inteligencia poderosamente sintética y una contundencia argumental impecable en la defensa de sus ideas matemáticas.

En 1637 Descartes publica su *Geometría* y en este mismo año Fermat envía a sus colegas de París sus investigaciones de alrededor de 1629, que surgen a propósito de su reconstrucción de *Los Lugares Planos* de Apolonio, realizada con base en las referencias que da Pappus de la obra perdida de Apolonio en *La Colección Matemática*. Estos estudios de Fermat están contenidos en la memoria *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos (Ad Locos Planos et Solidos Isagoge)*, que no se publica hasta que su hijo Samuel de Fermat edita en 1679 las *Varia Opera Mathematica*. Las obras citadas de Descartes y Fermat contienen los fundamentos de la llamada más tarde geometría analítica.

Fermat parte de su profundo conocimiento de la matemática griega y por tanto de la debilidad misma de los métodos griegos que eran básicamente métodos de demostración no de descubrimiento. No eran métodos generales ni heurísticos,

precisaban conocer previamente la solución del problema, aplicándose entonces a obtener una demostración rigurosa. Era por tanto, necesario obtener otros métodos que además de ser más generales, garantizaran no sólo la rigurosa corrección de las soluciones sino el descubrimiento de las propias soluciones. Motivado por los intentos de reconstrucción de ciertas obras perdidas de Apolonio, por parte de Vieta, Fermat reconstruye los dos libros de *Los Lugares Planos* de Apolonio, en el estilo clásico griego sin referencia al *Arte Analítica* de Vieta. Cuando aplica el Análisis de Vieta a los problemas de lugares geométricos, construye los fundamentos de su geometría analítica. Al vincular los trabajos matemáticos de Vieta y Apolonio, establece un efectivo puente entre la geometría y el álgebra, que permite asociar curvas y ecuaciones, a base de aplicar el análisis algebraico de Vieta a los problemas de lugares geométricos de Apolonio y Pappus, definidos en un sistema de coordenadas, por una ecuación indeterminada en dos incógnitas.

Fermat establece un hecho fundamental de la geometría analítica afirmando que la naturaleza y la construcción de las curvas planas están determinadas por la ecuación canónica asociada, en el siguiente principio:

“Siempre que en una ecuación final se encuentran dos cantidades incógnitas, se tiene un lugar geométrico, describiendo el extremo de una de ellas una línea recta o curva. La línea recta es simple y única en su género; las especies de curvas son en número infinito, círculo, parábola, elipse, etc.”²⁴

En estas breves palabras se sintetiza uno de los principios más importantes de la historia de la matemática, que introduce no sólo la geometría analítica sino la idea fundamental de variable algebraica, básica para el desarrollo del Cálculo Infinitesimal:

“Con la Geometría Analítica de Fermat alcanzaba el máximo grado de consumación en la aplicación a los problemas geométricos del antiguo método de Análisis –de ahí procede el adjetivo Analítica que acompaña al sustantivo Geometría–, siendo el Álgebra por su carácter algorítmico el principal instrumento

²⁴ GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 56 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

de la aplicación de ese Análisis. Lo que importa a Fermat es la obtención de métodos que permitan resolver de forma directa y operativa los problemas y escribirlos formalmente siguiendo la línea de la propia investigación geométrica, es decir, métodos que al describir el proceso inventivo enseñen a descubrir y rompan la clásica dualidad helénica invención–demostración –«ars inveniendi»– versus «ars disserendi» que tiene lugar en dos estadios de tiempo y espacio diferentes. Fermat pondera la heurística y se busca afanosamente la fusión, en un solo acto matemático, del descubrimiento y de la demostración. En todo este panorama juega un papel programático esencial la intervención del Álgebra como instrumento inherente a la Geometría Analítica que convierte a ésta en una poderosa herramienta de investigación y exploración científica, en el más útil instrumento para resolver con elegancia, rapidez y plenitud heurística las cuestiones geométricas.»²⁵

4.2.2 René Descartes

René Descartes nació en Francia en 1596 y murió en Suecia en 1650. Obtuvo el título de bachiller y de licenciado en derecho por la facultad de Poitiers (1616), y a los veintidós años se enroló en el ejército y continuó su carrera militar hasta 1626. Pero aun en esta época su interés por la matemática era evidente como se muestra en el siguiente fragmento escrito a su amigo Isaac Beeckman en 1619:

“... De hecho, espero demostrar que cierto tipo de cuestiones pueden ser resueltas solamente de un modo y no de otro, de manera que no quede casi nada por descubrir en geometría. La tarea es infinita y no puede ser acabada por una única persona. Es tan increíble como ambicioso. Pero yo mismo he visto un poco de luz entre el oscuro caos de esta ciencia, gracias a lo cual incluso las nubes más espesas podrán ser disipadas.»²⁶

²⁵ GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 66 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

²⁶ HAWKING, Stephen. Dios creó los números. Ed Crítica, 2006, pág. 256

Las geometrías analíticas de Fermat y Descartes tienen su anclaje en la preocupación por la metodología de la geometría griega por lo que ambos se plantean como tarea esencial encontrar nuevos métodos más simples, más operativos, más resolutivos, más heurísticos y sobre todo más generales. Así concibe Descartes una ciencia matemática que se convierte en un saber más fácil, simple, generalizable y válido para todo el ámbito de la cantidad. Para Descartes el modo de proceder y el espíritu de esta verdadera ciencia, experimentado y cultivado en el quehacer y en la investigación matemática, es lo que inspira las reglas del método y el método mismo.

La geometría de Descartes no puede entenderse de forma aislada ya que forma parte indisoluble de un proyecto metodológico general de alcanzar la unidad de la ciencia que Descartes intenta fijar en las *Reglas para la dirección del espíritu* de 1628 y en *El Discurso del Método* de 1637. Descartes se propone con *El Discurso del Método* y los tres ensayos que lo acompañan *La Dióptrica*, *Los Meteoros* y *La Geometría*, demostrar que ha alcanzado un nuevo método de especulación sobre la verdad científica mejor que todo método anterior y que precisamente *La Geometría* demuestra este logro. Mediante el uso del álgebra como herramienta algorítmica esencial, Descartes da una nueva lectura a la geometría de los griegos, que supera sus limitaciones y trasciende sus conquistas geométricas a base de elaborar un magnífico instrumento de ataque de los problemas geométricos antiguos y modernos que libera a la geometría de la dependencia de la figura y su representación espacial. Propone una forma de solución de los problemas basada en la aplicación del análisis mediante la actuación del álgebra, que supone el problema resuelto y establece una ordenada dependencia entre lo conocido y lo desconocido, hasta hallar el resultado buscado, de modo que las reglas del método cartesiano adquieren el sentido matemático de normas para la solución de los problemas geométricos mediante ecuaciones. *La Geometría* de Descartes establece el análisis algebraico no sólo como un instrumento que aplicado a la geometría creará la geometría analítica sino como algo mucho más universal todavía, el lenguaje de expresión y por tanto la clave de todas las ciencias.

La *Geometría* se compone de tres libros a saber: En el *Libro Primero* titulado *De los Problemas que pueden construirse sin emplear más que círculos y líneas rectas*, Descartes fija la metodología cartesiana que aplicará a la traducción algebraica de los problemas geométricos clásicos, de modo que el libro contiene el núcleo de toda la formulación cartesiana de *La Geometría*. En este libro Descartes realiza una interpretación geométrico-algebraica de las operaciones aritméticas y las utiliza para resolver problemas geométricos, es decir, para hacer geometría mediante el álgebra. El *Libro Segundo* titulado *De la naturaleza de las líneas curvas* consta de cuatro partes bien diferenciadas: La naturaleza geométrica de las líneas curvas, el Problema general de Pappus, la construcción y propiedades de tangentes y normales a una curva geométrica y finalmente el estudio de los óvalos como curvas especiales que responden a consideraciones fijadas de las tangentes o normales. El *Libro Tercero* trata *De la construcción de los problemas que son sólidos o más que sólidos* mediante el estudio de la resolución de ecuaciones, discusión de sus raíces, y relaciones entre los coeficientes para ofrecer un método de resolución de cualquier ecuación algebraica.

Aunque nunca reconocerá la paternidad de Vieta en algunas de sus ideas fundamentales²⁷, Descartes debió inspirarse en él, en la introducción del uso de letras para designar no sólo las cantidades desconocidas (incógnitas o variables) sino incluso las conocidas (parámetros) que le permite obtener la solución general de los problemas mediante fórmulas que expresan las incógnitas en función de los parámetros. Será Descartes quien introduzca en la Regla XVI la convención actual para la codificación de los símbolos de incógnitas y potencias, que por primera vez en la historia de la matemática serán símbolos artificiales y arbitrarios. Con sus radicales reformas, Descartes habría superado la esclavitud a la dependencia de las figuras en la geometría de los antiguos y la falta de transparencia del álgebra de los modernos:

²⁷ De hecho en el texto *Historia de las Ciencias* (1989, pág. 304), Michel Serres afirma que: "Descartes, en su discurso octavo sobre *Los Meteoros*, segundo ensayo del *Discurso del Método*, se "atribuye conocimientos que aquellos cuyos escritos poseemos no alcanzaron jamás". Esta actitud del filósofo, que consiste en ocultar los descubrimientos que le preceden, se manifiesta a lo largo de toda su obra".

“El simbolismo algebraico, que apuntaba a convertirse en el lenguaje universal traería simplificación, generalización, mecanización y unificación en la notación, entrañando economía de pensamiento y difusión rápida. Después de Descartes, el Álgebra es uno de los más potentes lenguajes creados por el hombre, un instrumento para la expresión breve, intuitiva y mecánica de relaciones enormemente complicadas que puedan tener entre sí objetos abstractos cualesquiera, y en su aplicación a la Geometría, el ingenio que exigía la lectura y comprensión de la obra de Euclides quedaría eliminado y reemplazado por procedimientos algorítmicos automáticos. Aparte de su ingente contribución al nacimiento de la Geometría Analítica, a Descartes le cabe, pues, el mérito de haber dado los pasos más importantes en la introducción de la moderna notación simbólica de las Matemáticas, de modo que el convenio notacional cartesiano se hizo definitivo. La Geometría, es el primer texto matemático en el que un estudiante actual no encontraría dificultades con la notación”²⁸.

Con las nuevas notaciones y símbolos, Descartes realizó una importante simplificación en el lenguaje matemático. Ahora disponía de una geometría que al poderse expresar de forma algebraica permitía desarrollar procedimientos para resolver problemas geométricos a base de traducirlos al lenguaje algebraico de las ecuaciones, simplificar éstas y finalmente construir las soluciones.

La Geometría de Descartes transforma los antiguos instrumentos de la geometría griega, el álgebra geométrica y el análisis geométrico, en la geometría analítica cartesiana, mediante la intervención del álgebra literal a la que el propio Descartes contribuyó de forma definitiva con la contundente y eficaz reforma y simplificación de la notación algebraica.

²⁸ GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 82 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

4.3 DESPUÉS DE FERMAT Y DESCARTES

En las dos centurias siguientes a la de Fermat y Descartes, matemáticos de la talla de Euler, Monge, Lagrange, y Lacroix imprimirán a la geometría analítica un ingente desarrollo hasta situarla en el umbral de la geometría analítica moderna, la que se imparte hoy académicamente, que la convertirá en una de las vetas más fructíferas del pensamiento matemático, en un instrumento responsable de la increíble pujanza y del impresionante progreso que ha desarrollado la matemática desde entonces. Un elemento central para la consolidación de la geometría analítica fue el mismo cálculo diferencial e integral, pues éste obligaba a una utilización sistemática de la geometría analítica para su propio desarrollo. En ese sentido, la gran condensación teórica realizada por Newton y Leibniz potenció extraordinariamente su valor y significado:

“Aunque se suele decir que el cálculo diferencial e integral es la mayor realización matemática de la revolución científica, debe subrayarse mucho el papel de la geometría de coordenadas. Esta hizo posible el conocimiento cuantitativo de las formas y curvas geométricas (ahora expresables de manera algebraica), que se requería en el nuevo escenario, con muchas demandas prácticas sociales. Con la geometría de coordenadas se abrió el camino para revertir el dominio de la geometría en las matemáticas a favor del álgebra, a pesar de las dificultades de justificación lógica que ésta exhibía.”²⁹

Leonhard Euler (1707-1783) introduce, al igual que Descartes, nuevas y definitivas notaciones. Su campo de investigación se extiende a todos los ámbitos de la matemática, donde su nombre aparece por doquier para nombrar teorías, teoremas, problemas, fórmulas, funciones, números, constantes y otros muchos objetos matemáticos. Euler explota los poderosos métodos analíticos introducidos por Fermat y Descartes y desarrollados por van Schooten, De Witt, Wallis, La Hire,

²⁹ Ángel Ruiz Historia y Filosofía de las matemáticas pág 265 en <http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20filosofia%20de%20las%20matematicas.pdf>

Newton y Leibniz. En particular la *Recta de Euler*, sobre la que se sitúan tres de los puntos notables de un triángulo, el Ortocentro, el Baricentro y el Circuncentro, fue obtenido por Euler como magistral aplicación de la geometría analítica. Euler da un paso de gigante en la aplicación del carácter algorítmico del álgebra a la sistematización de la geometría analítica de dos y de tres dimensiones, alcanzando la clasificación de las cónicas y las cuádricas.

Joseph-Louis de la Lagrange (1736-1813) realizó también importantes contribuciones a la geometría analítica, siempre bajo la filosofía de aplicar el carácter algorítmico del álgebra para superar toda representación concreta. En sus desarrollos analíticos, su formulación, de una brillante elegancia, ya está muy próxima a la escritura del álgebra lineal, en cálculos que se asemejan a aspectos matriciales y determinantes. En el artículo *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* (1775), Lagrange resolvió, de forma puramente analítica, diversas cuestiones ya conocidas sobre la geometría del tetraedro: las fórmulas, en función de las coordenadas de los vértices, del área, centro de gravedad y volumen, así como los centros y radios de las esferas inscrita y circunscrita. Estos resultados representan una auténtica revolución analítica ya que están redactados de tal forma analítica que pueden ser entendidos sin aludir a figura alguna.

Si bien Descartes y Fermat provocaron una auténtica revolución en el campo de la geometría, una ruptura radical con el pasado, históricamente la geometría analítica en sí misma (no en cuanto utilizada en otras disciplinas), tal y como la presentaron Descartes y Fermat, tuvo poca repercusión inmediata. Y ésta tendría que esperar el trabajo de Gaspard Monge (1746 - 1818), uno de los matemáticos más importantes de la época de la Revolución Francesa, y sus discípulos en la Escuela Politécnica francesa (la Polytechnique) para adquirir los alcances y fortalezas que ésta posee. En esta época en la que el nombre de geometría analítica todavía no había alcanzado un reconocimiento general, Monge impartía un curso en la Escuela Politécnica sobre *Applications de l'analyse à la géométrie*, cuya primera

parte es esencialmente una introducción a la geometría analítica. Como no se disponía de ningún libro de texto, Monge se vio forzado a escribir el contenido del curso y publica en 1795 *Feuilles d'analyse appliquée a la géométrie*, donde da una forma bastante definitiva a la geometría analítica. Otros materiales que había utilizado también en su curso son incluidos en 1802 en la memoria *Application de l'algèbre à la géométrie*, que se reeditará en 1807, 1809 y 1850.

Bajo la inspiración de Monge como maestro, algunos matemáticos coetáneos, en particular Sylvestre François Lacroix,(1765-1843) escriben numerosos libros de texto sobre geometría analítica, que se reeditan una y otra vez, y en donde se va aclarando su significado y utilidad como instrumento matemático, cada vez más próximo al uso de nuestro tiempo. Así por ejemplo, en cuanto a la propia concepción sobre la geometría analítica, Lacroix formula en su *Traité de calcul* de 1810 un punto de vista muy próximo al actual:

*“Obviando todas las construcciones geométricas se hará ver al lector que existe una manera de considerar la geometría que se podría llamar geometría analítica, y que consiste en deducir las propiedades de la extensión del mínimo número posible de principios por métodos puramente analíticos, de la misma manera que ha hecho Lagrange en su mecánica con respecto a las propiedades del equilibrio y del movimiento”.*³⁰

Lacroix fue el más prolífico escritor de libros de texto para los cursos que se impartían en la Escuela Politécnica y en la Escuela Normal Superior, ambas notables escuelas francesas. Estas obras de Lacroix, que se editaron numerosas veces, contienen una extensa y didáctica visión panorámica de la geometría analítica, tal como debía quedar formalmente, después de los numerosos problemas resueltos mediante las aplicaciones sistemáticas del cálculo algebraico a la geometría que hicieron Lagrange y Monge. Se trata de los primeros textos que, por su notación, fraseología y métodos, podrían servir perfectamente, con

³⁰ GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 139 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

pequeñas modificaciones y ligeras extensiones, como base de un curso actual de geometría analítica. Gracias a Lagrange, Monge y Lacroix, se había alcanzado la forma definitiva de uno de los instrumentos científicos más potentes que se ha elaborado en la historia del pensamiento matemático, y tan sólo ciento cincuenta años después de que Fermat y Descartes establecieran los fundamentos.

La geometría analítica goza de una serie de virtudes que hacen de ella una cómoda y didáctica herramienta matemática para el abordaje de los problemas geométricos. Por una parte permite que las cuestiones geométricas puedan formularse algebraicamente y que los objetivos geométricos puedan alcanzarse por medio del álgebra, e inversamente, facilita la interpretación geométrica de los enunciados algebraicos, lo que propicia una percepción más intuitiva de su significado, con la posible apertura a la visión de nuevos problemas y conclusiones:

*“En su forma académica actual, la Geometría cartesiana debe tanto a Fermat y Descartes como a sus propios contemporáneos y sucesores. Lo que se enseña hoy en las aulas no es Geometría Analítica en el sentido como la entendían sus creadores, ni en cuanto a los objetivos ni en cuanto a los métodos. Pero sí que hay algo importante en común, la Geometría Analítica, la de entonces y la de ahora es un potentísimo instrumento algorítmico de resolución de problemas geométricos de importancia trascendental para otras ramas de la Matemática y de las Ciencias de la Naturaleza, tal como comprobamos en nuestras aulas”.*³¹

³¹ GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. Pág. 146 en <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

5. SITUACIÓN PROBLEMA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA, SU GRÁFICA Y SU ECUACIÓN ASOCIADA.³²

Ya se había señalado que las situaciones problema cobran importancia en la medida que son facilitadores del aprendizaje significativo, pues permiten la interacción entre los conocimientos disciplinar y didáctico, y por tanto el diseño de situaciones problema se convierte en una alternativa para vincular al estudiante a procesos de modelación y para facilitar el aprendizaje de conceptos matemáticos de manera significativa. Se señaló también que la geometría analítica es innegablemente una herramienta fundamental de la matemática y a la vez de la educación matemática porque entre otros factores desarrolla elementos conceptuales comunes que permiten el diseño de situaciones de aprendizaje, y en particular de situaciones problema, que integran la mayoría de los pensamientos planteados en los lineamientos curriculares de matemáticas posibilitando a la vez que los procesos de aprendizaje de las matemáticas se den a partir de la construcción de formas generales y articuladas de esos mismos tipos de pensamiento.

La geometría analítica presenta modelos algebraicos para resolver situaciones geométricas e inversamente facilita la interpretación geométrica de los enunciados algebraicos, lo que propicia una percepción más intuitiva de su significado, con la posible apertura a la visión de nuevos problemas y conclusiones. La geometría analítica cubre una serie de aspectos esenciales en las matemáticas de la educación básica y media como: La introducción de coordenadas, el trazado de una curva construyendo ordenadas a partir de abscisas, la aplicación del álgebra simbólica a los problemas geométricos, la

³² La situación problema que se abordará es una modificación del trabajo monográfico titulado: *Red conceptual para la enseñanza de la función cuadrática* que desarrollé en 1998 junto con Liliana Cano Álvarez y José Alexander Vargas Mejía.

derivación de ecuaciones de lugares geométricos, la construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones, el estudio de las curvas dadas por sus ecuaciones lineales y cuadráticas, la representación gráfica de una curva dada mediante la expresión analítica funcional, la derivación de fórmulas fundamentales para resolver problemas y la clasificación general de curvas y superficies de segundo orden.

Para el diseño de la siguiente situación problema se optó por enfatizar, de los aspectos anteriores, en el tratamiento en particular de la función cuadrática, su gráfica y su ecuación asociada, y es por esto que se compone de tres bloques a saber: En el bloque 1, para caracterizar la función cuadrática, se propone una situación problemática que involucra áreas de figuras planas y su relación con áreas de figuras semejantes disminuidas o aumentadas en un factor K ; en el bloque 2 se plantean diversas actividades, cuyo objetivo es caracterizar la parábola como gráfica de la función cuadrática, como lugar geométrico y como sección cónica; y en el bloque 3 se compilan algunos métodos alternativos para la solución de la ecuación cuadrática. Lo que se pretende entonces es la construcción de una red conceptual que busca recoger diferentes estrategias para la enseñanza de la función cuadrática, en la que los referentes teóricos se van alternando con las actividades y éstas se presentan mediante preguntas progresivas, en el entorno de los elementos que se busca problematizar en cada situación propuesta. Destacando el estudio de la variación como una base fundamental para acceder a los procesos de generalización propios de cada uno de los pensamientos propuestos en los lineamientos curriculares.

5.1 BLOQUE 1: SITUACIÓN PROBLEMA PARA CARACTERIZAR LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Se propone la siguiente situación para acercar al alumno a la conceptualización de la función cuadrática, mediante la relación de áreas de figuras planas, aumentadas o disminuidas en un factor k .

5.1.1 ÁREA DEL CUADRADO

Si tenemos un terreno cuadrado cuyo lado tiene una longitud de 1 metro, sabemos que su área es igual a 1^2m^2 . Pero si duplicamos la longitud del lado podríamos afirmar que la medida de su área también se duplica? ¿Si lo triplicamos qué pasa con su área?

- a. Elaboremos una tabla de valores, y analicemos la variación del área con respecto a la variación del lado.

L(m)	A(m)
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
K	k^2

Duplicando a L (por ejemplo de 2 a 4) ¿Por qué factor queda multiplicada el área A?

Y al multiplicar L (por ejemplo de 2 a 6) ¿Cuántas veces se vuelve mayor el área A?

¿Qué tipo de relación existe entre A y L?

Como podemos observar la variación no es lineal, es decir, no es una proporción directa, pues el área aumenta en una proporción mayor que el lado del cuadrado. Por ejemplo, para:

$$L_1 = 1m \quad \text{entonces} \quad A_1 = 1m^2 = 1^2m^2$$

$$L_2 = 2m \quad \text{entonces} \quad A_2 = 4m^2 = 2^2 m^2$$

$$L_3 = 3m \quad \text{entonces} \quad A_3 = 9m^2 = 3^2 m^2$$

$$L_4 = 4m \quad \text{entonces} \quad A_4 = 16m^2 = 4^2 m^2$$

Por tanto podemos afirmar que:

$$L_k = km \quad \text{entonces} \quad A_k = k^2 m^2 = k^2 1^2 m^2 = k^2 A_1$$

En esta relación podemos ver que el área del cuadrado de lado k es proporcional al área del cuadrado de lado $1m$. Es decir A_k es proporcional a A_1 siendo k el factor por el que se multiplica el lado inicial, de donde: $A_k = k^2 A_1$

En este caso afirmamos que **“el área de un cuadrado es proporcional al cuadrado de su lado”**.

b. Con los valores de la tabla anterior tracemos la gráfica del área en función del lado y analicemos las siguientes preguntas:

- ¿La gráfica pasa por el origen?
- ¿Cómo es la gráfica que resulta?
- ¿Qué nombre recibe este tipo de gráfica?

5.1.2 ÁREA DEL RECTÁNGULO

¿Cómo varía el área de un rectángulo si duplicamos sus dimensiones?

¿Cómo varía el área si multiplicamos las dimensiones del rectángulo por el factor k ?

¿Se cumple la misma relación que en el cuadrado?

Tratemos de dar respuesta a los interrogantes anteriores trabajando con un rectángulo de altura h y base b . Por tanto el área de este rectángulo está dada por $A = b.h$.

Si duplicamos sus dimensiones entonces la base de este nuevo rectángulo es igual a $2b$ y su altura es igual a $2h$, y por tanto sus área está dada por:

$$A_2 = (2b)(2h) = 2^2 b.h = 2^2 A$$

Luego podemos afirmar que:

$$A_2 = 2^2 A$$

Ahora si multiplicamos los lados del rectángulo por el factor k , su base es kb y su altura kh . El área de este nuevo rectángulo sería:

$$A_k = (kb)(kh) = k^2 b.h = k^2 A$$

Es decir:

$$A_k = k^2 A$$

Observamos que la relación entre las áreas de los rectángulos también es proporcional y como en el caso del cuadrado la constante de proporcionalidad es el factor k^2

5.1.3 ÁREA DEL PARALELOGRAMO

¿Se cumplirá lo mismo para cualquier paralelogramo?

Sabemos que el área de un paralelogramo está dada por $A = b.h$ (siendo h la altura y b la base), si realizamos un tratamiento similar al del rectángulo encontramos que la proporcionalidad entre las áreas se sigue cumpliendo.

5.1.4 ÁREA DEL TRIÁNGULO

¿Qué se puede concluir con respecto al triángulo?

Construya un triángulo cualquiera, trace una altura y halle su área; a partir de la transformación de las líneas de éste, obtenga nuevos triángulos y calcule sus áreas. Con base en el análisis hecho a los triángulos, complete la siguiente tabla de valores y grafique.

k	1	2	3	4	k
A_k					

¿Pasa por el origen la curva trazada?

¿Qué clase de curva genera?

5.1.5 ÁREA DEL TRAPECIO

Sabiendo que el trapecio es la región formada por un paralelogramo y un triángulo, ¿Qué podemos decir del área de un trapecio con respecto al área de otro que resulta de multiplicar sus elementos (líneas) por un factor k ?

5.1.6 ÁREA DEL POLÍGONO REGULAR

¿Qué se puede concluir al realizar la misma actividad con un polígono regular?

Se sugiere al profesor realizar esta actividad, considerando un polígono regular como la región que resulta al agrupar varios triángulos isósceles, de esta forma se podrá verificar que la relación analizada hasta el momento se cumple también para la suma de áreas.

5.1.7 ÁREA DEL CÍRCULO

Veamos qué pasa con el círculo.

Hasta ahora hemos trabajado con figuras poligonales convexas en las cuales la variación del área depende de la variación de sus dimensiones; realicemos un análisis de la variación del área del círculo cuando varía su radio, mediante una tabla de valores.

r	$A = \pi r^2$
1	π
2	$2^2 \pi$
3	$3^2 \pi$
4	$4^2 \pi$
5	$5^2 \pi$
k	$k^2 \pi$

¿Qué relación existe entre el área y el radio?

¿Al graficar, qué relación encuentra entre esta curva y la obtenida con las áreas de cuadrado y del triángulo?

De lo anterior podemos concluir que el área de un círculo es proporcional al cuadrado de su radio ya que también se cumple que:

$A_k = k^2 A$, donde k es el factor por el cual se multiplica el radio inicial.

Realice la misma actividad para las áreas de un semicírculo, un sector circular, una corona circular y concluya.

5.1.8 ÁREA DE OTRAS FIGURAS PLANAS

A continuación sugerimos al profesor, algunas actividades para extender la relación $A_k = k^2 A$ a cualquier figura plana.

5.1.8.1 ACTIVIDADES

1. Recortar figuras para formar dos grupos. En el primero habrán triángulos y paralelogramos, círculos y semicírculos de cualquier tamaño y en el segundo, polígonos semejantes a los anteriores cuyas líneas se hayan obtenido al multiplicar las líneas de los primeros por el factor k . Elegir polígonos del primer grupo y formar figuras convexas y con los elementos correspondientes del segundo grupo construir una figura semejante a cada una de las anteriores.

Hallar las áreas de las dos nuevas figuras, comparar.

¿Por qué factor queda multiplicada la segunda área?

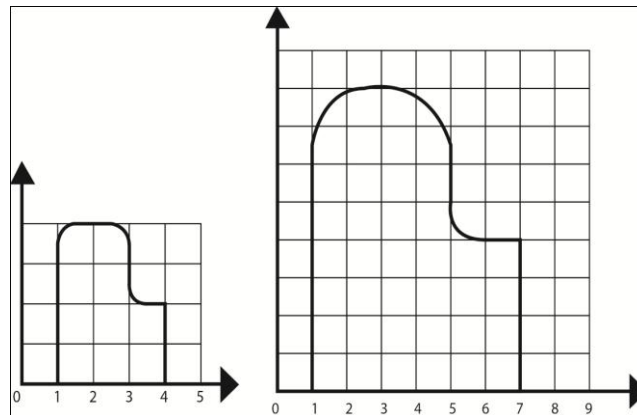
Se sugiere comparar las áreas de las figuras que resulten de la resta de sus áreas, al superponerlas.

2. Construir un polígono cualquiera, fijar el centro O y la razón de homotecia k y efectuarle una transformación (puede realizarse con ayuda del geoplano o del pantógrafo).

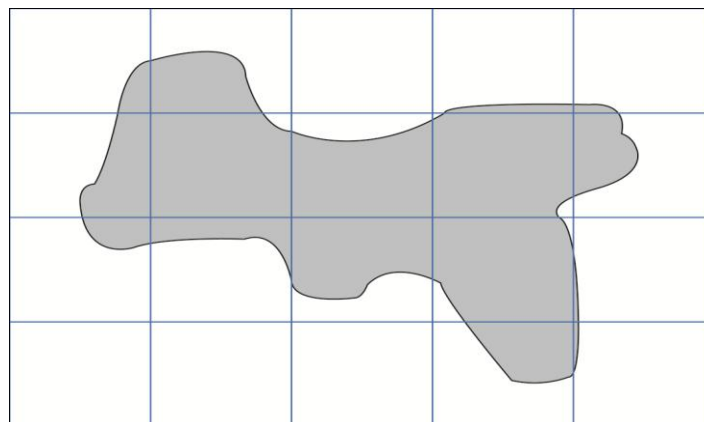
¿Cuál es la relación entre la longitud de un segmento transformado y el original?

¿Qué relación hay entre las áreas del polígono transformado y el original?

3. A continuación se presenta una región plana determinada por una curva, calcule su área, si elegimos un factor $k = 2$ y aplicamos una transformación a sus líneas, ¿cómo varían sus áreas?



4. Con ayuda del pantógrafo realizar una transformación a las líneas de la siguiente figura. Se sugiere graficar sobre una cuadrícula con el fin de facilitar el cálculo aproximado de las áreas. ¿Qué relación hay entre las áreas aproximadas de la figura transformada y la original?



5.1.9 CONCLUSIONES

Recogiendo las conclusiones de las actividades anteriores, se observa que siempre que estamos tratando con áreas, al ampliar (o reducir) una figura, o sea al multiplicar las dimensiones que originan su área por cierto factor, comprobamos que el área de la figura, queda multiplicada por el cuadrado de dicho factor. Es decir:

$$A_k = k^2 A_1$$

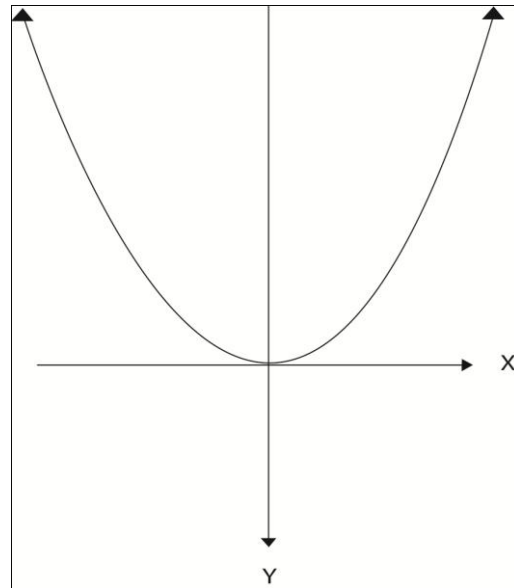
De acuerdo con las actividades anteriores, A_1 es el área de la figura inicial y por lo tanto es una constante. Así mismo k es el factor por el que se multiplican las dimensiones que originan la medida del área y es un número real positivo, es decir, k es una variable y A_k varía de acuerdo con el cuadrado de k .

En la notación utilizada en el álgebra, las variables se representan generalmente con las letras x e y , las constantes con otras letras minúsculas, así la expresión $A_k = k^2 A_1$ se transforma en:

$$y = ax^2,$$

Donde y se llama variable dependiente, puesto que depende de la variación de x a la que se denomina variable independiente y a es una constante.

Si graficamos la relación $y = ax^2$, asignando valores positivos y negativos a x y tomando $a = 1$, obtenemos una gráfica como la siguiente:



Como a cada valor de la variable “ x ”, le corresponde un solo valor de la variable “ y ”, entonces decimos que $y = ax^2$ es una función llamada *Función Cuadrática* y la curva que determina el conjunto de puntos solución de esta función recibe el nombre de *Parábola*.

Cuando graficamos las relaciones entre las áreas en las actividades anteriores, la curva descrita correspondía a una de las ramas de parábola, puesto que en problemas de áreas no tiene sentido hablar de magnitudes negativas. Pero si asignamos valores negativos a k su gráfica nos genera las dos ramas de la parábola que son simétricas con relación al eje “ y ” y se unen en un punto llamado *vértice de la parábola*.

5.2 BLOQUE 2: LA PARÁBOLA

5.2.1 LA PARÁBOLA COMO GRÁFICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La siguiente actividad tiene como propósito dar significado a las variaciones del modelo formal $y = ax^2 + bx + c$, a partir de los desplazamientos horizontales y verticales de la parábola $y = ax^2$

5.2.1.1 GRÁFICA DE $y = ax^2$

En acetatos o papel calcante, elabore las parábolas correspondientes a la función $y = ax^2$, realice las tablas de valores dando los siguientes valores a “ a ”:

- $a = 1$
- $a > 1$
- $0 < a < 1$
- $a < 0$

Superponga los acetatos en un plano cartesiano, haciendo coincidir los vértices de las parábolas con el origen de coordenadas.

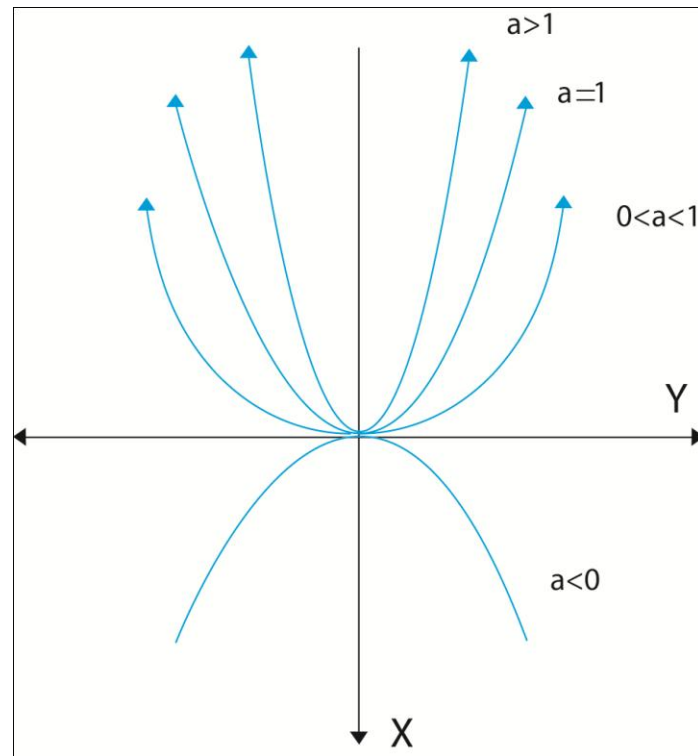
¿Cómo varía la forma de la parábola cuando “ a ” toma un valor diferente de 1?

¿Qué significa “ a ” en la función $y = ax^2$?

Al realizar la actividad se pretende que el alumno verifique que cuando “ a ” toma un valor diferente de 1 se presentan las siguientes situaciones:

- I. Cuando $a > 1$ la parábola es más angosta que la parábola $y = x^2$ (donde $a = 1$).
- II. Cuando $0 < a < 1$, la parábola es más ancha que la parábola $y = x^2$
- III. Cuando $a < 0$ la parábola abre hacia abajo.

De acuerdo con lo anterior “ a ” determina la orientación de las ramas de la parábola, es decir, su concavidad. Por tanto a partir de la gráfica de $y = x^2$ puede construirse la gráfica de las parábolas de $y = ax^2$ de la siguiente forma:



- Aumentando “ a ” veces todas las ordenadas de la función $y = x^2$, si $a > 1$.
- Reduciendo “ a ” veces todas las ordenadas de la función $y = x^2$, si $0 < a < 1$
- Para $a < 0$, es decir, cuando $y = -ax^2$ puede construirse su gráfica como la simetría de $y = ax^2$ con relación al eje x , puesto que para valores iguales de las abscisas, las ordenadas sólo se diferencian en su signo.

5.2.1.2 GRÁFICA DE $y = ax^2 + n$

Tome un acetato de los elaborados anteriormente y en una hoja cuadriculada que contenga un plano cartesiano, superponga el acetato ubicando el vértice de la parábola en el origen de coordenadas, luego traslade la figura un número “ n ” de unidades hacia arriba y realice una tabla de valores para la nueva ubicación de la parábola.

Si comparamos esta tabla de valores con la tabla de valores de la parábola del acetato:

¿Qué está variando y que permanece invariante?

¿Cómo es la variación?, ¿Varía el eje de simetría?

¿Si la traslación fuera hacia abajo, cómo sería la variación?

¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola trasladada?

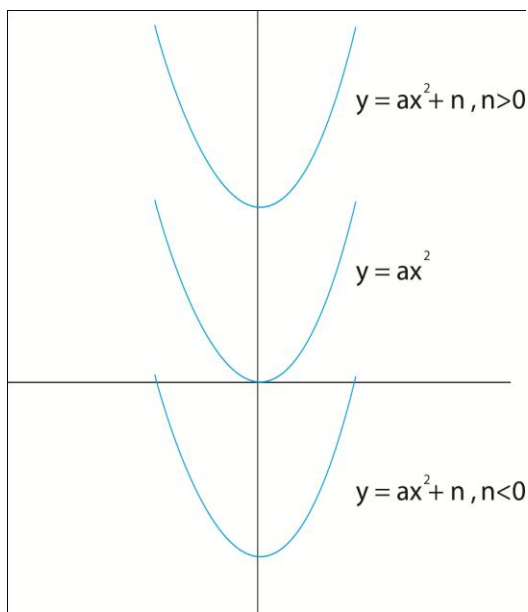
¿Cuál es la función que determina la nueva parábola?

El alumno observará, que al trasladar la parábola hacia arriba o hacia abajo, la “ x ” permanece invariante mientras que la “ y ” varía de la siguiente forma:

- I. Se aumenta en “ n ” unidades si la traslación es hacia arriba
- II. Se disminuye en “ n ” unidades si la traslación es hacia abajo.

Es decir que la función que determina esta nueva parábola está dada por $y = ax^2 + n$ y su gráfica es una parábola que puede construirse a partir de la gráfica de la función $y = ax^2$ de la siguiente forma:

- Si $n > 0$ se traslada sobre el eje y , la gráfica de $y = ax^2$ paralelamente a sí misma “ n ” unidades hacia arriba.
- Si $n < 0$ se traslada sobre el eje y , la gráfica de $y = ax^2$ paralelamente a sí misma “ n ” unidades hacia abajo.



5.2.1.3 GRÁFICA DE $y = a(x - m)^2$

Elija uno de los acetatos, ubique su vértice en el origen de coordenadas y trasládalo sobre el eje x un número “ m ” unidades hacia la derecha, realice una tabla de valores para la nueva ubicación de la parábola.

Al comparar las tablas de valores respectivas:

¿Qué varía y permanece invariante?

¿Cómo es esa variación?

Si la traslación fuera hacia la izquierda, ¿Cómo sería la variación?

¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la nueva parábola?

¿Cómo varía su eje de simetría?

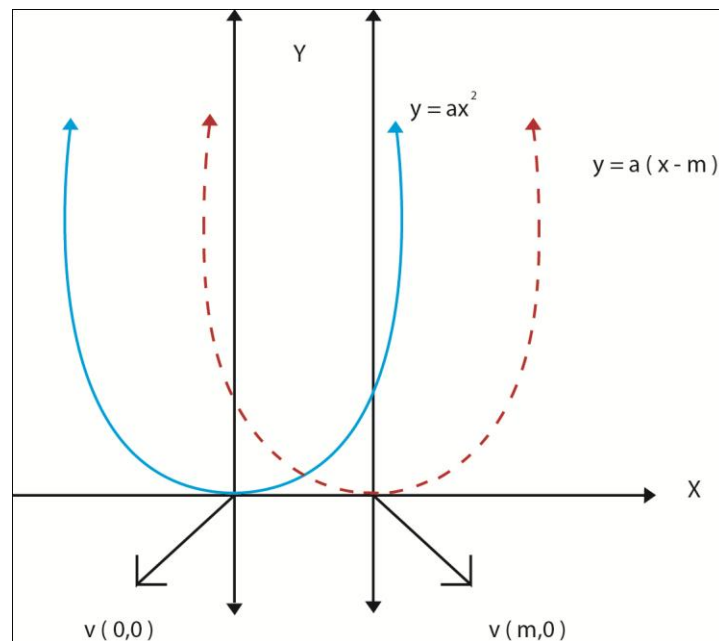
¿Cuál es la función que determina la nueva parábola?

El alumno observará que cuando traslada la parábola “ m ” unidades hacia la derecha, el vértice de la nueva parábola quedará ubicado en el punto $(m, 0)$ y si la traslada hacia la izquierda quedará en el punto $(-m, 0)$. Por tanto la función que determina la nueva parábola está dada por:

$$y = a(x - m)^2$$

En esta parábola además, el eje de simetría está dado por la recta $x = m$ ó $x = -m$, dependiendo de la traslación realizada.

Lo anterior le permite al estudiante construir la gráfica de la nueva función a partir de la gráfica de $y = ax^2$, conservando las mismas ordenadas y trasladando las abscisas sobre el eje x hacia la izquierda o hacia la derecha “ m ” unidades.



5.2.1.4 GRÁFICA DE $y = a(x - m)^2 + n$

Se le pide al alumno que utilizando uno de los acetatos, realice con él, combinaciones de translación horizontal y vertical, iniciando con su vértice en el origen de coordenadas.

¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la nueva parábola?

¿Por dónde pasa su eje de simetría?

¿Cuál es la función que determina su nueva parábola?

El alumno observará que al combinar las funciones $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$, obtendrá la función $y = a(x - m)^2 + n$, donde “ m ” y “ n ” indican el desplazamiento horizontal y vertical respectivamente. Esta nueva parábola tendrá como vértice el punto (m, n) y eje de simetría paralelo al eje y .

5.2.1.4.1 EJERCICIOS

1. Hallar las ecuaciones de las siguientes parábolas cuyas graficas son:
 - a. La gráfica de $y = x^2$ trasladada 4 unidades hacia arriba.
 - b. La gráfica de $y = -x^2$ trasladada 5 unidades hacia la izquierda.
 - c. La gráfica de $y = 2x^2$ trasladada 2 unidades hacia abajo y 3 unidades hacia la derecha.
 - d. La gráfica de $y = -\frac{3}{2}x^2$ trasladada una unidad hacia arriba y 6 unidades hacia la izquierda.

2. Indicar como hay que trasladar la parábola $y = x^2$, con respecto a los ejes coordenados, para que la nueva ecuación de la parábola sea:
 - a. $y = (x-2)^2 - 3$
 - b. $y = (x+5)^2 + 1$
 - c. $y = (x-3)^2 + 4$

3. Determinar el vértice de cada una de las parábolas de los ejercicios 1 y 2.

4. Hallar el valor de “ a ” para que la parábola $y = ax^2$ pase por el punto $(-2,5)$.

5. Determinar los valores de “ a ” y “ c ” para que la función $y = ax^2 + c$ pase por los puntos $(0,-3)$ y $(1,-2)$.

5.2.1.5 GRÁFICA DE LA FUNCIÓN $y = ax^2 + bx + c$

La siguiente actividad pretende que el estudiante transforme la función $y = a(x-m)^2 + n$ en la forma general de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ y que comprenda a la vez la equivalencia de ambos modelos.

Se le propone entonces al estudiante que retome de los numerales del ejercicio 2 propuesto anteriormente y desarrolle el binomio al cuadrado de cada uno de ellos para resolver los siguientes interrogantes:

- ¿Qué nueva forma toma la función?
- Si la función se presenta en la forma $y = ax^2 + bx + c$, ¿cómo obtener su gráfica a partir de de la gráfica de la función $y = ax^2$?

- ¿Es posible expresar las coordenadas del vértice de la parábola en términos de a , b y c ?

Es importante que el alumno reconozca que la forma general de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, siempre puede llevarse a la forma $y = a(x - m)^2 + n$, utilizando el método de completar el cuadrado y que el vértice de la parábola expresado en términos de a , b y c viene dado por el punto $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

5.2.1.5.1 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Para propiciar un acercamiento al tratamiento de máximos y mínimos de la gráfica de la función cuadrática, se propone la siguiente situación:

- Graficar las siguientes funciones y determinar su vértice:
 - $y = x^2 - 2x - 15$
 - $y = -x^2 + 6x - 8$
- De acuerdo con las gráficas anteriores responder las siguientes preguntas:
 - ¿A qué punto del plano corresponde el mayor y el menor valor de la ordenada en ambas funciones?
 - Si se comparan estos dos puntos con el vértice de cada una de las parábolas qué se concluye?
 - ¿Qué significado adquiere el vértice de acuerdo con la concavidad de la parábola?

La situación anterior permitirá concluir que el vértice de la parábola que representa la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, dado por el punto $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ es un punto mínimo de la función cuando $a > 0$ y es un punto máximo cuando $a < 0$.

Esta propiedad puede ser usada para resolver cualquier problema de máximos y mínimos que dependan de una función cuadrática en una variable, sin necesidad de utilizar los criterios empleados en el cálculo diferencial.

5.2.1.5.1.1 EJERCICIOS

1. Calcular los valores de x para los cuales la función dada es positiva, negativa, nula, máxima o mínima y comprobar gráficamente:
 - a. $y = x^2 - 6x + 5$
 - b. $y = 2x^2 + 5x + 7$
 - c. $y = -3x^2 - 4x - 2$
 - d. $y = 4x^2 + 4x + 1$

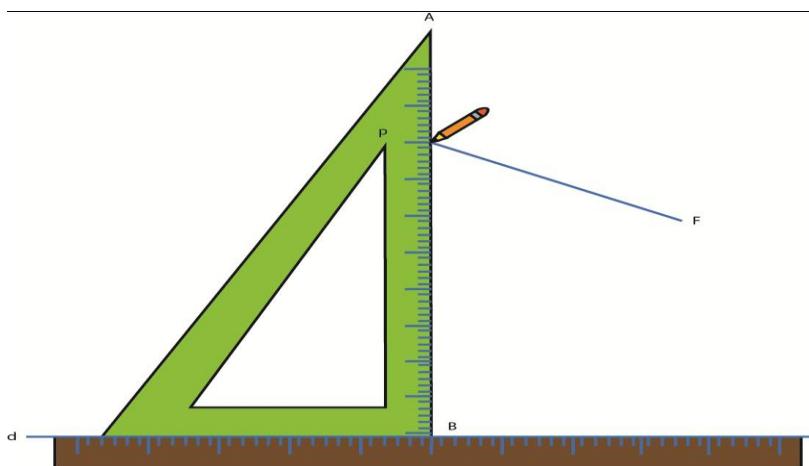
2. El perímetro de un rectángulo es 40 cm. Calcular sus dimensiones para que su área sea máxima. Entre todos los rectángulos de igual perímetro, ¿Cuál es el de mayor área?

5.2.2 LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

La siguiente sección tiene como propósito, buscar la relación entre la parábola como lugar geométrico y la gráfica de la función cuadrática.

Con el objetivo de buscar la relación entre la parábola como lugar geométrico y la gráfica de la función cuadrática, se le propone al alumno realizar la siguiente construcción:

Sobre una tabla determine un punto F y una recta d , coloque una regla a lo largo de ésta y aplique sobre la regla una escuadra como se muestra en la siguiente figura:



Tome un hilo de longitud AB y sujete sus extremos en los puntos F y A , y con un lápiz siempre apoyando en el borde AB de la escuadra mantenga dicho hilo templado y deslice la escuadra a lo largo de la recta d .

¿Qué gráfica se obtuvo?

¿Qué caracteriza la construcción de dicha gráfica?

Tome un punto cualquiera de la nueva curva construida y mida su distancia a la recta d y punto fijo F .

¿Cuál es la razón entre estas distancias?

Esta actividad pretende inducir al alumno a que:

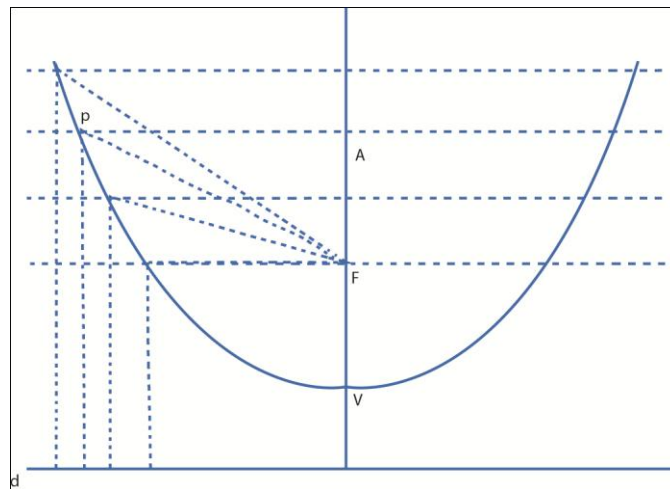
1. Defina la parábola, como el lugar geométrico de todos los puntos que están a igual distancia de una recta fija llamada “**directriz**”, y un punto fijo llamado “**foco**”.
2. Reconozca algunos elementos o propiedades de la parábola, como son: El **parámetro** definido como la distancia entre el vértice y el foco; y la **excentricidad** como la razón entre la distancia de un punto de la curva al

foco y del punto a la directriz; por la definición de la parábola esta razón es igual a 1.

5.2.2.1 CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA CON REGLA Y COMPÁS

La siguiente es una alternativa para realizar la construcción de la parábola utilizando regla y compás.

Dados el foco F y la directriz d , trazamos desde F una perpendicular a la directriz (esta perpendicular es el eje de la parábola). Por la definición de la parábola, el punto medio entre la directriz y el foco, es el vértice de ésta. Si A es un punto distinto del vértice, sobre el eje de la parábola, entonces levantamos desde A una perpendicular al eje, y tomando el compás con centro en F y radio tomado desde A hasta la directriz trazamos sobre esta perpendicular un arco que determine el punto P . Entonces P pertenece a la parábola.



Hasta ahora hemos graficado parábolas que representan funciones cuadráticas de y en x mediante tabla de valores o por traslaciones de la gráfica de la función

De acuerdo con la definición de parábola, ¿Cómo son FQ y QR ?

Al igualarlas, ¿Qué expresión se obtiene para x^2 ?

¿Cuáles son las coordenadas del foco?

¿Qué ecuación determina la directriz?

Se pretende que con el acompañamiento del profesor se llegue a las siguientes expresiones que concluyen en la ecuación de la parábola en términos de sus parámetros. Veamos:

$$(FQ)^2 = (NQ)^2 + (NF)^2 \text{ para } NF = y - p \text{ y } NQ = x$$

$$FQ = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

Pero $QR = y + p$ y además por la propiedad de la parábola $FQ = QR$, por tanto tenemos que:

$$y + p = \sqrt{x^2 + y^2 - 2py + p^2}$$

$$(y + p)^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2$$

$$y^2 + 2py + p^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2$$

$$2py = x^2 - 2py$$

$$x^2 = 4py$$

Tenemos entonces que $x^2 = 4py$ representa la ecuación de una parábola de parámetro “ p ” con las siguientes características:

- Su vértice está en el origen de coordenadas.
- Su foco es el punto $(0, p)$ y la ecuación de la directriz viene dada por $y = -p$
- Su eje de simetría es coincidente con el eje y .

Ya habíamos dicho que las parábolas con eje de simetría coincidente con el eje y son representadas por funciones cuadráticas de la forma $y = ax^2$, ¿qué relación existe entre “ p ” y “ a ”?

Sabemos que al desplazar el vértice de la parábola $y = ax^2$ al punto (m, n) esta nueva parábola toma la forma $y = a(x - m)^2 + n$. Si desplazamos el vértice de la parábola $x^2 = 4py$ al punto (m, n) que podríamos decir en cuanto a:

- La ecuación en términos de su parámetro para esta nueva parábola.
- Las coordenadas del foco
- La ecuación de la directriz

Las inquietudes anteriores pretenden que el estudiante encuentre las siguientes expresiones:

$$a = \frac{1}{4p} \quad \text{o} \quad p = \frac{1}{4a} \quad \text{o} \quad 4ap = 1$$

Ahora como las expresiones $x^2 = 4py$ y $y = ax^2$ representan la misma parábola entonces al transformar esta última en $y = a(x - m)^2 + n$ y sustituir en ella $a = \frac{1}{4p}$, la ecuación resultante representa a la parábola $x^2 = 4py$ cuando su vértice se traslada al punto (m, n) . Veamos:

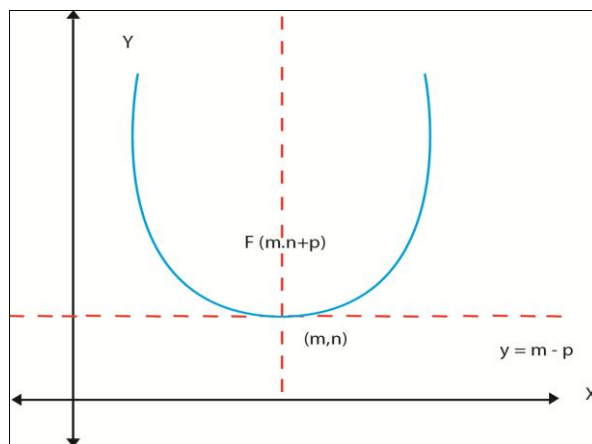
$$y = a(x - m)^2 + n$$

$$y = \frac{1}{4p}(x - m)^2 + n$$

$$y - n = \frac{1}{4p}(x - m)^2$$

$$4p(y - n) = (x - m)^2$$

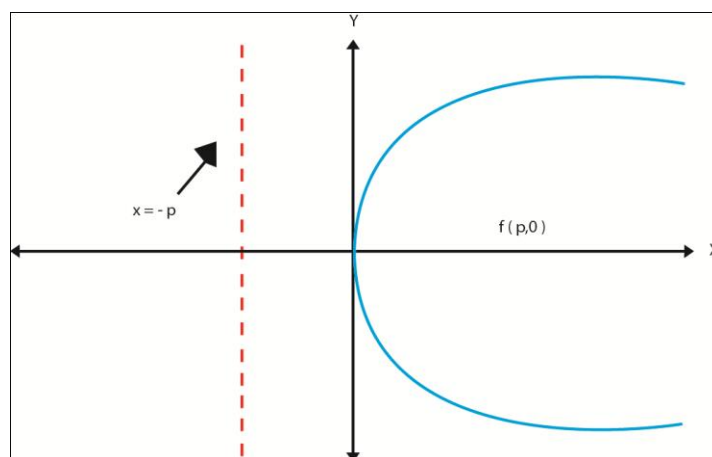
Por tanto la ecuación $(x - m)^2 = 4p(y - n)$ en términos de su parámetro “ p ” representa una parábola como la que se muestra en la figura:



En esta parábola se definen las siguientes características:

- Vértice en el punto (m, n)
- Foco ubicado en el punto $(m, n + p)$
- Ecuación de la directriz dada por $y = n - p$
- Eje de simetría paralelo al eje y.

Ahora tome uno de los acetatos iniciales, ubique el vértice de la parábola en el origen de coordenadas de un plano cartesiano, con el eje de simetría coincidente con el eje y . Determine su foco y directriz. Luego rote la figura 90° en dirección negativa.



¿Cuál es el eje de simetría de esta nueva parábola?

¿Cuáles son las coordenadas del foco?

¿Cuál es la ecuación de la directriz?

Determine la ecuación de esta parábola en términos de su parámetro.

Traslade el vértice de esta parábola al punto (m,n) y determine la nueva ecuación.

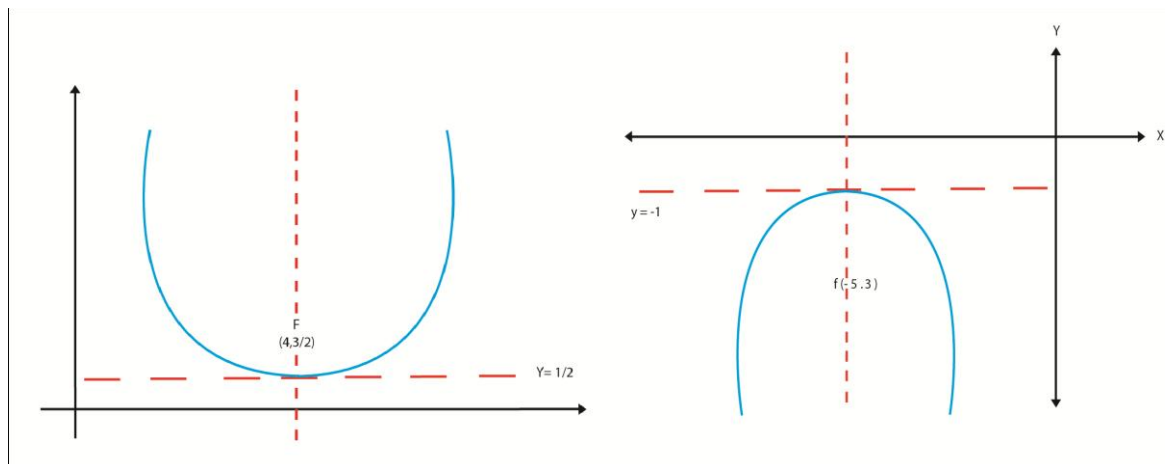
Estas parábolas cuyo eje de simetría es paralelo o coincidente con el eje x también representan funciones cuadráticas de y en x ?

Con la actividad anterior se busca que el estudiante observe que las parábolas con eje de simetría paralelo o coincidente con el eje x , son de la forma $(y-n)^2 = 4p(x-m)$ con vértice en el punto (m,n) . En consecuencia no pueden

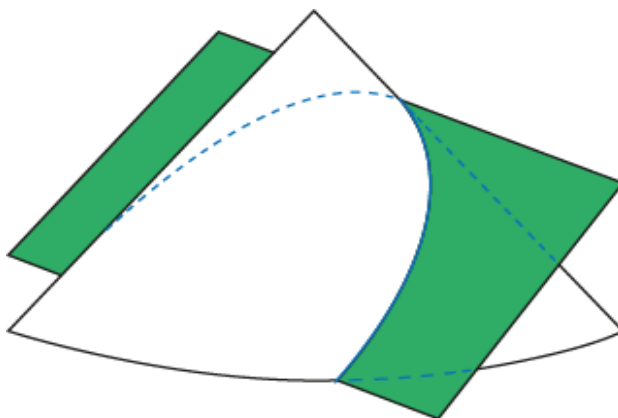
representar funciones cuadráticas de y en x , porque existen valores de x , a los que corresponden dos imágenes diferentes de y .

5.2.2.1 EJERCICIOS

- Hallar el foco y la ecuación de la directriz para la parábola determinada por la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$
- Hallar el foco, vértice y ecuación de la directriz de las parábolas determinadas por las siguientes ecuaciones:
 - $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$
 - $x^2 - 4x + y - 1 = 0$
 - $(x+3)^2 = 3(y-5)$
 - $(x-7)^2 = -9(y-9)$
- Representar gráficamente las parábolas del numeral anterior.
- Para las siguientes gráficas hallar la ecuación en términos del parámetro y la ecuación de la función cuadrática asociada a la parábola.



5.2.3 LA PARÁBOLA COMO SECCIÓN CÓNICA



Utilizando madera, arcilla, plastilina u otros materiales, construya un cono y realice un corte paralelo a una de sus generatrices.

¿Qué lugar geométrico se forma en el borde de las secciones?

¿Si el corte se hace coincidente con una de sus generatrices. Qué se obtiene?

La parábola también es conocida como una sección cónica. Se le atribuye a Apolonio de Pérga, el descubrimiento de la parábola como el resultado de la intersección de un plano con un cono circular recto; de esta forma descubrió otras secciones cónicas como la hipérbola y la elipse.

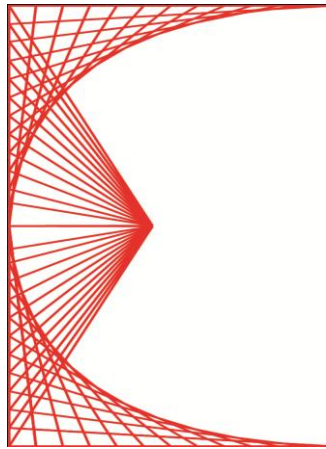
Si el corte se realiza paralelo a una de sus generatrices se forma la parábola conocida, pero si se hace coincidente, se obtiene una línea recta llamada “parábola degenerada”

5.2.3.1 PROPIEDADES DE LA PARÁBOLA

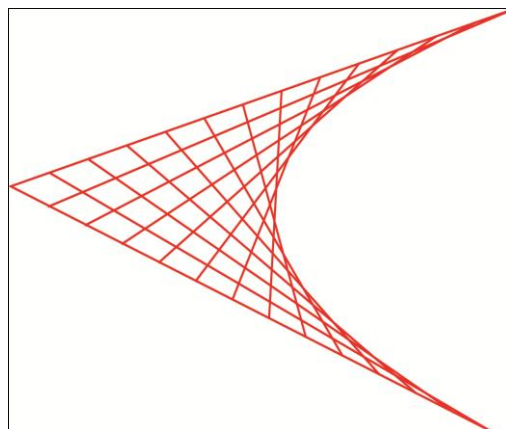
Como el interés de nuestro trabajo en esta sección, no es demostrar las propiedades de la parábola, si no mostrar la posibilidad de integración del tema con la parte lúdica y estética, las propiedades solamente serán enunciadas.

1. En una parábola la recta que es paralela a la directriz y tangente al vértice es el lugar geométrico de las proyecciones del foco sobre las tangentes. La siguiente construcción se explica por esta propiedad.

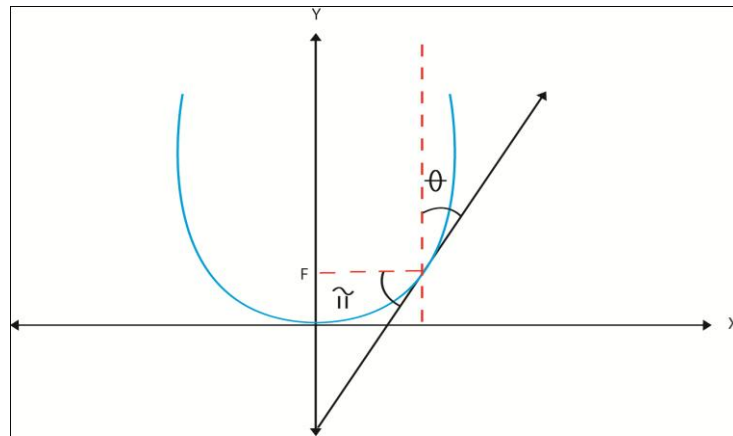
En hoja de block trace una recta y un punto exterior a ella; desde el punto trace segmentos hasta la recta y en el punto de corte levante perpendiculares en el mismo semiplano del punto inicial como se muestra en la figura. Observe que la figura que se forma es una parábola.



2. Las tangentes a la parábola determinan, sobre dos tangentes fijas, segmentos proporcional es entre sí. La siguiente figura muestra esta propiedad:

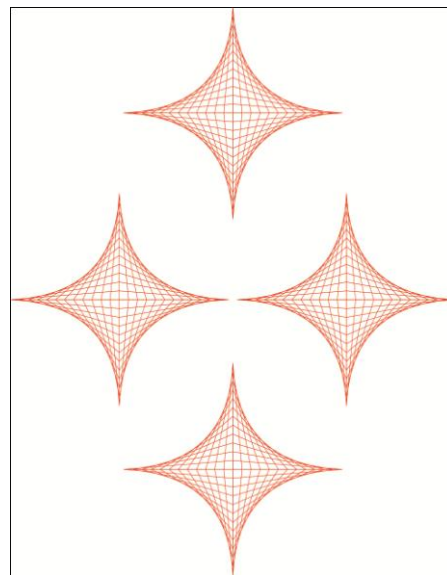


3. Si se toma un punto en una parábola y desde él se trazan dos rectas, una paralela al eje de simetría y la otra, del punto al foco, estas rectas forman ángulos iguales con la tangente a la curva en ese punto. Esta es la propiedad de reflexión de la parábola.



5.2.3.2 EJERCICIOS

Realiza construcciones más elaboradas con las propiedades enunciadas, utilizando diferentes materiales. Por ejemplo, una tabla con puntillas uniéndolas con hilo, lana o alambre de cobre. La siguiente es un ejemplo de aplicación creativa.



5.3 BLOQUE 3: LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

5.3.1 DEFINICIÓN

Cuando se realizó el desplazamiento de un acetato en las cuatro regiones determinadas por el plano cartesiano, se observó que en ocasiones la curva cortaba al eje x , y en otras ocasiones no lo cortaba.

Es oportuno sugerirle al alumno interrogantes como el siguiente:

¿Cuándo la curva toca al eje x qué valor toma la ordenada?

Se debe hacer notar que cuando la gráfica corta al eje x , la ordenada se anula; tomando la función la nueva forma $ax^2 + bx + c = 0$, llamada *ecuación cuadrática* o *ecuación de segundo grado*, asociada a la función $y = ax^2 + bx + c$. Como estos puntos hacen cero a la función, decimos que son las soluciones reales de la ecuación.

ACTIVIDAD SUGERIDA

1. Grafique las siguientes funciones cuadráticas:
 - a. $y = x^2 - 5x + 6$
 - b. $y = x^2 + 2x + 1$
 - c. $y = 4x^2 + 4x - 3$
 - d. $y = x^2 - 4x + 7$
2. De acuerdo con las gráficas anteriores:
 - a. ¿Cuál es el máximo número de puntos del eje x la parábola puede tocar?
 - b. ¿Cuáles son las soluciones reales de las ecuaciones asociadas a estas funciones?

Con la actividad anterior se pretende inicialmente que el estudiante observe que la parábola corta el eje x en 0,1 ó 2 puntos. Pero también se quiere que el estudiante reconozca además que la construcción de la gráfica no siempre es fácil y que en ciertos casos como en el literal c., se obtienen soluciones aproximadas o que en casos como los del literal d., el método gráfico es insuficiente para determinar los valores de x que hacen cero a la función. Esta situación nos lleva a buscar otros caminos diferentes al método gráficos para darle solución a la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$.

5.3.2 SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Además del método gráfico existen otros métodos para resolver la ecuación cuadrática como:

- La factorización, esto es expresando de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ como el producto de dos factores $(x + \alpha)(x + \beta) = 0$, donde $x = -\alpha$ y $x = -\beta$ son las soluciones de la ecuación.

- Utilizando la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Para llegar a esta fórmula

se propone llevar la función $y = ax^2 + bx + c$, a la forma $y = a(x - m)^2 + n$, con vértice en (m, n) . Como la ecuación cuadrática asociada es $a(x - m)^2 + n = 0$, entonces hallemos el valor de x que cumple esta igualdad, esto es:

$$a(x - m)^2 + n = 0$$

$$a(x - m)^2 = -n$$

$$(x - m)^2 = \frac{-n}{a}$$

$$x - m = \pm \sqrt{\frac{-n}{a}}$$

Pero en el bloque 2 ya habíamos determinado que para el vértice (m, n) se cumple que $m = -\frac{b}{2a}$ y $n = c - \frac{b^2}{4a}$. Sustituyendo estos dos valores tenemos que:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{-\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{-\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)}{a}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{-(4ac - b^2)}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

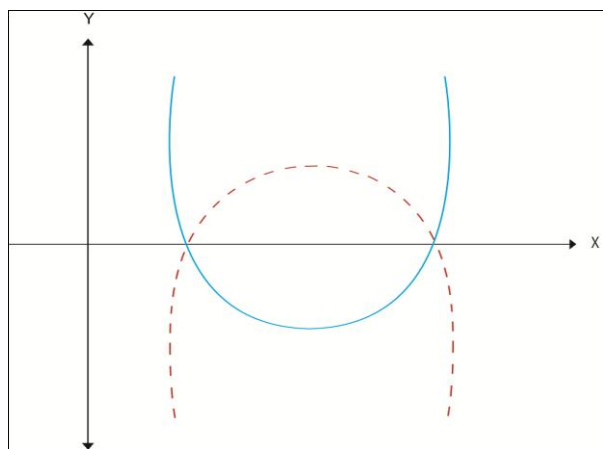
5.3.2.1 NATURALEZA DE LAS SOLUCIONES

Utilice la fórmula anterior para resolver las ecuaciones asociadas a las funciones a), b), c) y d) de la actividad sugerida inicialmente

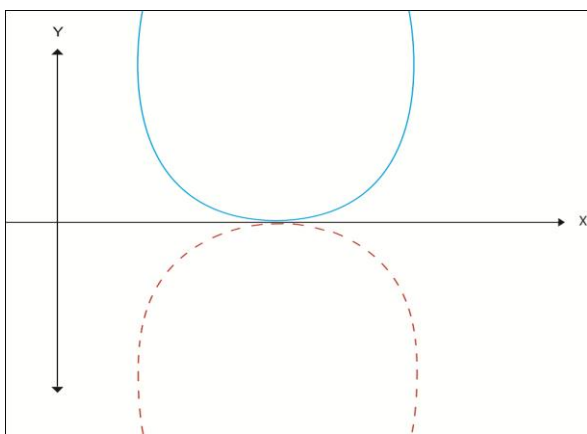
¿Cómo son las soluciones de las ecuaciones cuadráticas cuando la expresión $b^2 - 4ac$ es mayor que cero, igual a cero y menor que cero?

Se sugiere al profesor aclarar que en una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, la expresión $b^2 - 4ac$ se denomina *discriminante* y determina la naturaleza de las soluciones así:

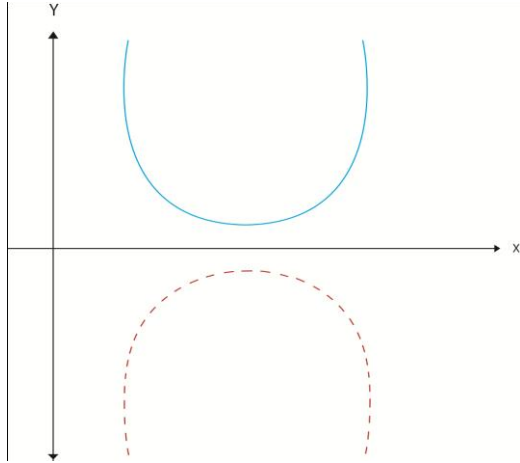
- I. Si $b^2 - 4ac > 0$ las soluciones son reales y diferentes. En este caso la gráfica de la función asociada a la ecuación cuadrática corta al eje x en dos puntos distintos.



- II. Si $b^2 - 4ac = 0$ las soluciones son reales e iguales, en cuyo caso el vértice de la gráfica de la función asociada a la ecuación cuadrática está en el eje x.



- III. Si $b^2 - 4ac < 0$ las soluciones son números complejos conjugados. En este caso la gráfica de la función asociada a la ecuación cuadrática no corta ni toca al eje x.



El numeral iii) posibilita la introducción a los números complejos, como el conjunto numérico que permite dar soluciones a ecuaciones cuadráticas que no tiene soluciones reales, es decir, aquellas cuyo discriminante es menor que cero.

De esta forma queda claro que una ecuación cuadrática de coeficientes reales siempre admite dos soluciones, aunque éstas no siempre representan valores reales.

5.3.2.1.1 EJERCICIOS

1. Encontrar la ecuación cuyas raíces son:

a. $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{2}$

b. $(a+b)$ y $(a-b)$

c. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

2. De acuerdo con la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Encontrar una expresión para:

- a. $x_1 + x_2$
 - b. $x_1 \cdot x_2$
3. Sin resolver las siguientes ecuaciones determinar la naturaleza, suma y producto de sus raíces:

a. $3x^2 - 2x + 3 = 0$

b. $\frac{1}{x} + x = 4$

c. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{3x-1}{x+1}$

5.3.3 ALGUNOS MÉTODOS ALTERNATIVOS PARA RESOLVER ECUACIONES CUADRÁTICAS

El tratamiento anterior es el más utilizado para resolver ecuaciones cuadráticas, por ello no hay un análisis riguroso del mismo, ya que nuestro interés es compilar algunos métodos algébrico – geométricos poco utilizados en la enseñanza, que pueden convertirse en una alternativa para el profesor.

5.3.3.1 EL MÉTODO DE PARTIR, CUADRAR Y RESTAR

Partiendo de un ejemplo particular explicaremos el procedimiento.

Resolvamos la ecuación $3x^2 + 6x - 24 = 0$.

- Paso 1. Primero dividamos la ecuación por 3 que es el coeficiente de x^2 con lo que obtenemos la siguiente ecuación

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

- Paso 2. Hallamos la mitad del coeficiente de x (de aquí el nombre **partir**), y lo escribimos con signo contrario. En nuestro caso sería:

$$\frac{2}{2} = 1 \quad y \quad -(1) = -1$$

- Paso 3. Este último número se eleva al cuadrado (a esto se refiere la palabra **cuadrar**):

$$(-1)^2 = 1$$

- Paso 4. A este número al cuadrado se le resta el término independiente de la ecuación cuadrática (a esto se refiere la palabra **restar**):

$$1 - (-8) = 9$$

- Paso 5. Al resultado obtenido en el paso anterior se le extrae la raíz cuadrada y se le antepone el signo \pm :

$$\pm \sqrt{9}$$

- Paso 6. El resultado del paso 2 se opera con el resultado del paso 5, es decir:

$$-1 \pm \sqrt{9}$$

De esta forma las soluciones de la ecuación cuadrática $3x^2 + 6x - 24 = 0$, están dadas por:

$$x_1 = -1 + \sqrt{9} \quad y \quad x_2 = -1 - \sqrt{9}$$

Es decir:

$$x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = -4$$

Si en la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, hacemos $a = 1$ puede encontrarse la relación entre este método y la fórmula general pues en este procedimiento se observa que “*partir*” es equivalente a escribir $-\frac{b}{2a}$ y que “*cuadrar y restar*” es igual a calcular la mitad del discriminante.

5.3.3.2 COMPLETAR EL CUADRADO GEOMÉTRICAMENTE

Este método revela la intención de los algebristas italianos del renacimiento, de combinar el álgebra y la geometría en la solución de ecuaciones cuadráticas. Para su solución solo consideraban coeficientes y soluciones positivas y por tanto para cada una de las siguientes ecuaciones, consideradas diferentes, idearon un método particular de solución:

$$x^2 = bx + c$$

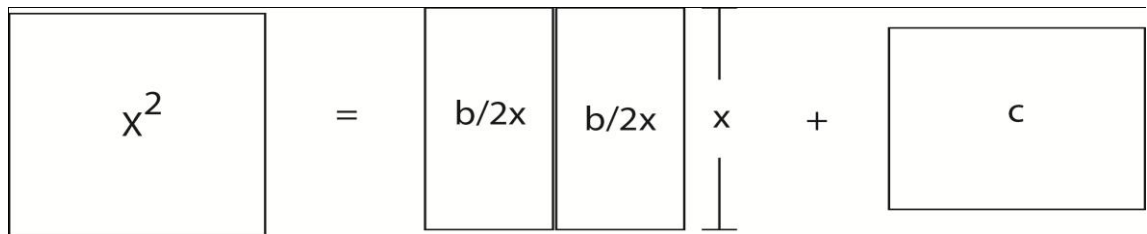
$$x^2 + bx = c$$

$$x^2 + c = bx$$

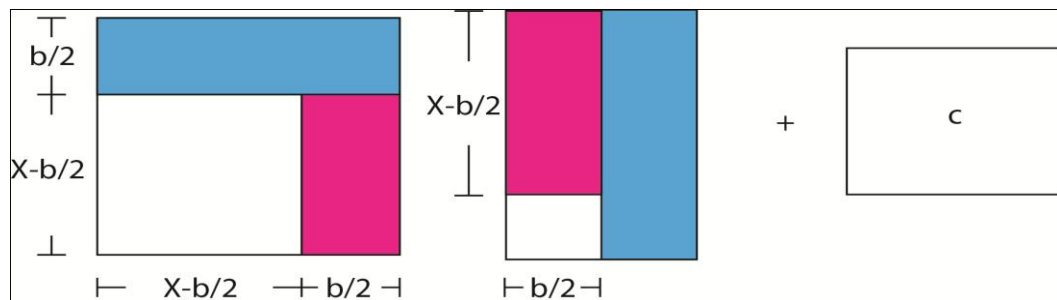
El problema de comparar áreas de terrenos nos puede llevar a la interpretación geométrica de las soluciones particulares de las ecuaciones nombradas anteriormente. Veamos:

- **CASO 1:** $x^2 = bx + c$

Tenemos un cuadrado de área x^2 y queremos que tenga la misma área que un rectángulo de largo x y de ancho b , más un cuadrado fijo de área c . Este problema se puede expresar como:



Como se trata de completar áreas, intentemos convertir el rectángulo de lados x y b , en un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$ quitándole a la vez un rectángulo cuyos lados midan $\frac{b}{2}$ y x respectivamente, y otro rectángulo de lados iguales a $\frac{b}{2}$ y $x - \frac{b}{2}$. Para compensar las áreas también se realizará con el cuadrado de lado x :



De donde:

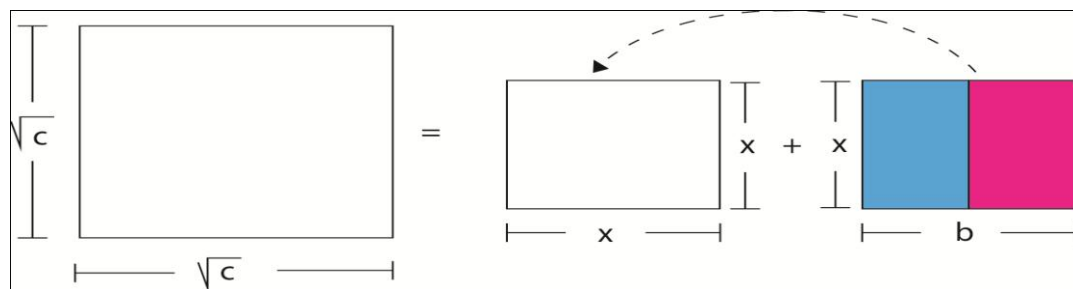
$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$x - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$$

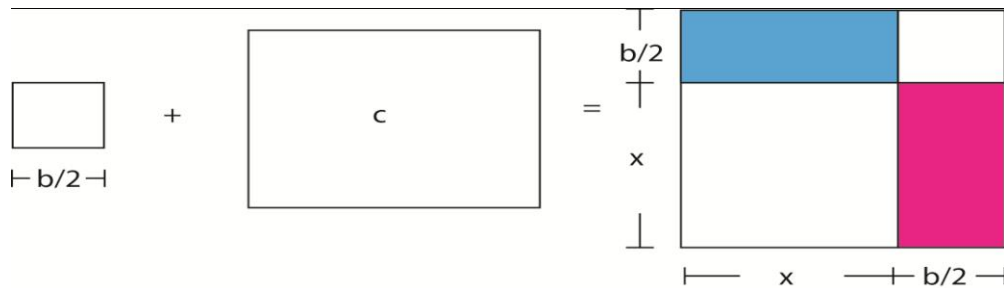
$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$$

- **CASO 2:** $x^2 + bx = c$

Se tiene un cuadrado de área c y lo queremos cambiar por un cuadrado de área x^2 , más un rectángulo de lados b y x



Dividimos el rectángulo de lado x y ancho b , en dos rectángulos del mismo largo y ancho $\frac{b}{2}$, y le pegamos uno arriba y otro a la derecha del cuadrado de lado x . Para completar este cuadrado nos queda faltando un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$, que agregamos a cada lado de la igualdad:



Luego:

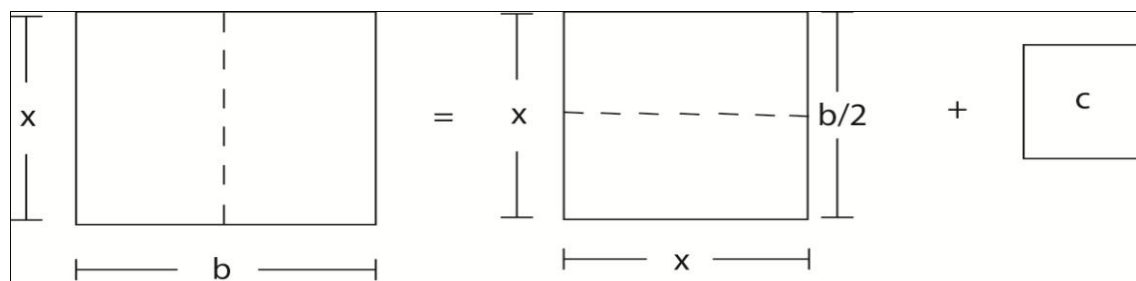
$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$$

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$$

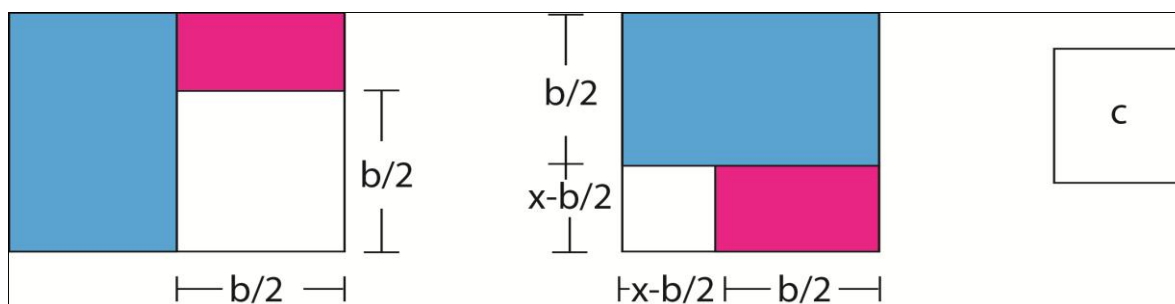
- **CASO 3:** $x^2 + c = bx$

Se tiene un rectángulo de lado x y de ancho b , y queremos que tenga la misma área que el cuadrado de lado x , más el cuadrado de área c



De forma similar al caso 1, quitamos a ambos lados rectángulos de lados $\frac{b}{2}$ y x , y

$\frac{b}{2}$ y $x - \frac{b}{2}$, resultando la siguiente igualdad:



De donde:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c$$

Ahora para que haya solución en términos de áreas físicas y reales asumimos que

$c < \frac{b^2}{4}$ y por tanto:

$$x - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$$

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$$

5.3.3.3 SOLUCIÓN CON REGLA Y COMPÁS

Apoyados en algunas construcciones geométricas realizadas con regla y compás, mostraremos a continuación la forma de resolver las ecuaciones:

$$x^2 - bx + c = 0 \quad \text{y} \quad x^2 - bx - c = 0$$

CASO 1: Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $x^2 - bx + c = 0$, entonces se cumple que $x_1 + x_2 = b$ y también que $x_1 \cdot x_2 = c$.

Lo anterior nos permite afirmar entonces que:

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$x_1 \cdot x_2 = \sqrt{c} \cdot \sqrt{c}$$

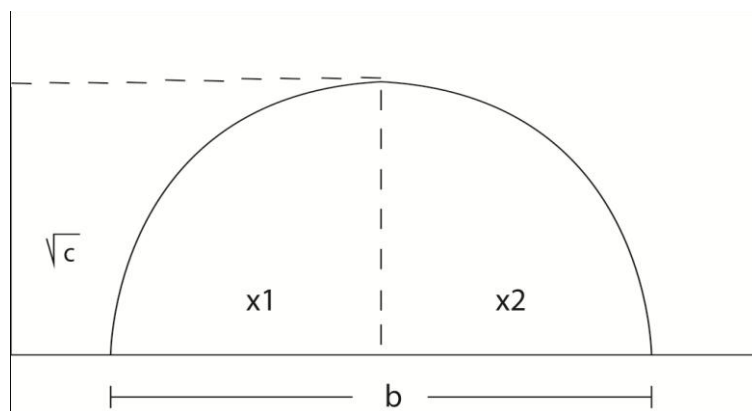
$$\frac{x_1}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{c}}{x_2}$$

Luego \sqrt{c} es media proporcional entre las soluciones de la ecuación y esta propiedad nos permite entonces realizar la siguiente construcción:

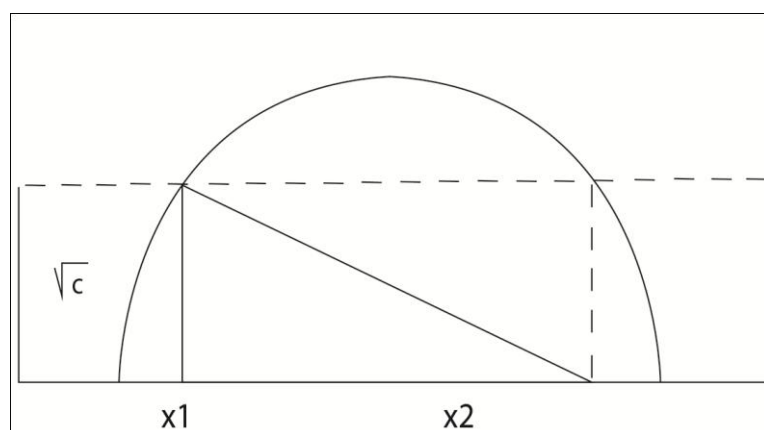
Trazamos una semicircunferencia de diámetro b y en uno de sus extremos levantamos una perpendicular de longitud \sqrt{c} . Finalmente por el extremo de esta perpendicular trazamos una paralela al diámetro de longitud b . Pueden presentarse en esta construcción dos posibilidades:

- a. **La paralela corta a la semicircunferencia:** En este caso desde los puntos de corte se trazan perpendiculares al diámetro. De donde b representa la hipotenusa del triángulo rectángulo y \sqrt{c} la altura trazada sobre la hipotenusa luego los segmentos trazados sobre ésta serán las soluciones x_1 y x_2 .

Si la paralela corta a la semicircunferencia sólo en un punto entonces x_1 y x_2 serán reales e iguales:



Si la paralela corta a la semicircunferencia en dos puntos entonces x_1 y x_2 serán reales y diferentes:

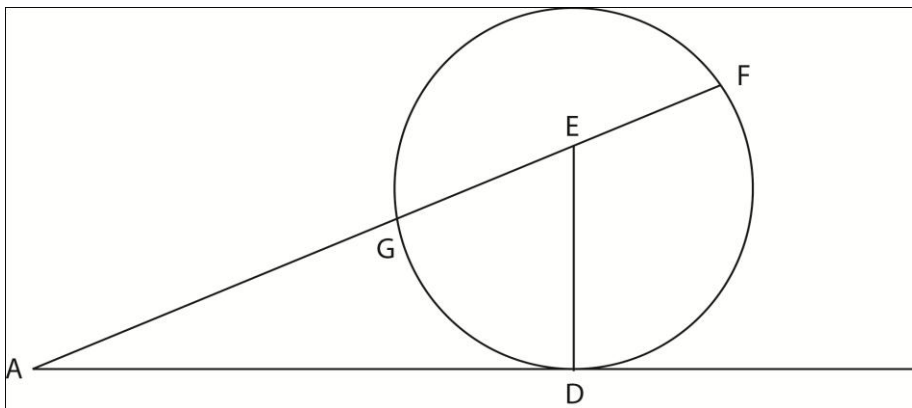


- b. **La paralela no corta a la semicircunferencia:** En este caso la ecuación no tiene soluciones reales.

CASO 2: Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $x^2 - bx - c = 0$, entonces se cumple que $x_1 + x_2 = b$ y también que $x_1 \cdot x_2 = -c$. Además $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ y $|x_1| > |x_2|$.

Realicemos la siguiente construcción:

Tracemos un segmento AD de longitud igual a \sqrt{c} y en uno de sus extremos levantamos la perpendicular DE de longitud $\frac{b}{2}$. Con esta medida como radio y haciendo una circunferencia tangente a AD en el punto D unimos los puntos A y E , y prolongamos hasta cortar la circunferencia en el punto F .



En esta construcción se cumple que la tangente AD es media proporcional entre la secante AF y su segmento exterior AG . Por tanto:

$$AD^2 = AF \cdot AG \text{ pero } AD = \sqrt{c} \text{ luego}$$

$$AD^2 = c$$

$$AF \cdot AG = c$$

Además $GF = b$ luego $AF = AG + GF = AG + b$

De donde

$$b = AF - AG$$

$$b = AF + (-AG)$$

Ahora por las propiedades enunciadas para las soluciones de la ecuación tenemos entonces que los segmentos AF y AG representan dichas soluciones.

5.3.3.4 EJERCICIOS

1. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas, utilizando el método más conveniente:
 - a. $9x^2 + 12x + 4 = 0$
 - b. $5x^2 - 7 = 2x$
 - c. $x^2 - 5x + 9 = 0$
 - d. $3x^2 + 2x + 6 = 0$
2. Resolver los siguientes problemas que conducen a ecuaciones cuadráticas:
 - a. Encontrar el área de un cuadrado cuya diagonal es 10cm mayor que el lado.
 - b. Si la suma de un número y su recíproco es igual a 1, encontrar dicho número.

BIBLIOGRAFÍA

Cano, Liliana; Soto, Aisnardi y Vargas, José Alexander. (1998). Red conceptual para la enseñanza de la función cuadrática. Monografía. Universidad de Antioquia, Medellín.

Coll, Cesar. (1988). Revista infancia y aprendizaje: Significado y sentido en el aprendizaje escolar. Reflexiones en torno al concepto de aprendizaje significativo. Medellín, Universidad de Antioquia, vol. 41

Gamboa, Ronny y Ballesteros, Esteban. Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. <Disponible en:

https://docs.google.com/a/unal.edu.co/viewer?a=v&q=cache:hrHu8z7xeSAJ:www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/download/629/608+&hl=es&gl=co&pid=bl&srcid=ADGEESjnXe9wTEpTakAIZS8nXLNdr5q3IAo29_R3ZCgzxeDI_yODWI2g9N-YhKs7smTNk-ruZ96rwe8Gw4iWqr6GhvHiErRf6sDRKcBWcNbmCLBNNwIVB3N2eOHRHBRgT0K2HWEENytZ&sig=AHIEtbQAF7_ri3G8_v7xYMMkK5JdmCQICw

González, Pedro Miguel. Los orígenes de la geometría analítica. <Disponible en: <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

González, Pedro Miguel. Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica. <Disponible en: <http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/geometriaanalitica.pdf>

Hawking, Stephen. (2006). Dios creó los números. Ed Crítica, Barcelona.

Jaramillo, Alberto; Mejía, Clara y Mesa Orlando. (2000). Modelos de razonamiento lógico-matemático implementados en situaciones problema, en algunos temas específicos de la matemática. Universidad de Antioquia. Medellín.

Mesa, Orlando. (1997). Contextos para el diseño de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas. Centro de Pedagogía Participativa., Medellín.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN) de Colombia. Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Naturales. 2004.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN) de Colombia. Lineamientos curriculares de Matemáticas. 1998.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN) de Colombia. Programa para la transformación de la calidad educativa. 2011

Moreira, Marco A. Aprendizaje significativo crítico. <Disponible en: <http://www.if.ufrgs.br/~moreira/apsigcritesp.pdf>

Ruiz, Ángel. Historia y Filosofía de las matemáticas. <Disponible en: <http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20filosofia%20de%20las%20maticas.pdf>

Serres, Michel. (1989). Historia de las ciencias. Ed. Bordas, París.