

**CÁLCULO DE ÓRBITAS INESTABLES EN CONVERTIDORES DC-DC CON  
MATLAB**

Jesús Perea Sandoval

Director:  
Gerard Olivar, PhD.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA  
SEDE MANIZALES  
2007

**A la memoria de  
ISABEL  
mi madre.**

Cuando uno trata de describir la figura formada por estas tres curvas y sus infinitas intersecciones... [ uno descubre que ] estas intersecciones forman una especie de red, trama o malla infinitamente espesa; ninguna de las curvas puede cruzarse a sí misma, pero se repliega de un modo muy complejo para pasar por los nudos de la red un número infinito de veces. Uno queda sorprendido ante la complejidad de esta figura que no puedo ni siquiera intentar dibujar.

Jules Henri Poincaré.

(El problema de los tres cuerpos en mecánica celeste.)

**RESUMEN****CÁLCULO DE ÓRBITAS INESTABLES EN CONVERTIDORES DC-DC CON  
MATLAB**

Por

JESUS PEREA SANDOVAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Director: Gerard Olivar, PhD

El objetivo de éste trabajo es el manejo de las funciones del toolbox de Continuación en Matlab. Este Toolbox es nuevo al igual que Matcont; y es usado para desarrollar los cálculos de las orbitas inestables y los cálculos de los ciclos limites en el convertidor Buck.

**ABSTRACT**

CALCULATION OF THE UNSTABLE ORBITS WITH CONVERTER DC-DC  
WHIT MATLAB

By

JESUS PEREA SANDOVAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Advisor: Gerard Olivar, PhD

The objective of this work, is to manage the functions of the toolbox of Continuation in Matlab. This Toolbox is known as Matcont; and is used in this research for the calculations of the unstable orbits and the calculations of Limits Cycles in the Buck Converter.

## **AGRADECIMIENTOS**

Deseo expresar mi profundo agradecimiento al Doctor Gerard Olivar por su valiosa colaboración en lo científico; como guía y asesor, por sus correcciones y sugerencias.

Deseo expresar mi agradecimiento a la Universidad Nacional de Colombia Sede Manizales y a la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Gracias especiales a todos mis familiares por su valiosa colaboración en el desarrollo de ésta investigación.

## TABLA DE CONTENIDOS.

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
<b>CAPITULO I.....</b>	<b>2</b>
1. 1 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS DINÁMICOS, CICLOS LÍMITE Y CONTINUACIÓN NUMÉRICA. ....	2
1.1.1 Sistema Dinámico .....	2
1.1.2 El mapa de Poincaré.....	5
1.1.3 Comportamiento Cualitativo de los sistemas dinámicos .....	7
1.1.4. Exponentes de Lyapunov.....	9
1.1.5. Métodos de Continuación. ....	9
1. 2 LOCALIZACIÓN DE CICLOS LÍMITE.....	11
1. 3 BIFURCACIONES.....	12
<b>CAPÍTULO II.....</b>	<b>13</b>
2.1 SELECCIÓN DEL CONVERTIDOR BUCK PARA EL CÁLCULO DE CICLOS LÍMITE .....	13
2.1.1 Electrónica de Potencia.....	13
2.1.2 Control en modo de tensión. ....	14
2.2 SUAVIZACIÓN DE LOS CONVERTIDORES. ....	16
2.2.1 Suavización del convertidor Buck.....	16
2.2.2 Suavización del convertidor Boost.....	21
2.2.3 Suavización del convertidor Buck-Boost. ....	23
2.2.4 Órbitas del convertidor Buck en Matcont.....	26
<b>CAPITULO III.....</b>	<b>32</b>
3. 1 APLICACIÓN DE MATCONT PARA EL CÁLCULO DE ÓRBITAS EN EL CONVERTIDOR BUCK.....	32
3.1.1 Continuación de ciclos límite.....	32
3. 2 GRAFICAS DE LAS ORBITAS CALCULADAS CON LA SERIE SUAVIZADA DE FOURIER CON OCHO TÉRMINOS.....	33
3. 3 OTRO MODELO PARA EL CONVERTIDOR BUCK .....	35
3. 4 LOS ARCHIVOS-MEX. ....	36
3.5 APLICACIÓN DE MATCONT PARA EL CÁLCULO DE CICLOS LÍMITE EN EL CONVERTIDOR BUCK UTILIZANDO ARCHIVOS MEX. ....	40
3.5 1 Voltaje de entrada 12 voltios. ....	40
3.5 2 Voltaje de entrada 21 voltios .....	41
3.5 3 Voltaje de entrada 28 voltios .....	42
3.5 4 Voltaje de entrada 32 voltios .....	43
<b>CAPITULO IV.....</b>	<b>44</b>
4.1 APLICACIÓN DE MATCONT PARA EL CÁLCULO DE CICLOS LÍMITE EN EL CONVERTIDOR BUCK, SERIE DE FOURIER UTILIZANDO SOLO UN TÉRMINO .....	44
4.1.1 Voltaje de entrada 12V.....	46
4.1.2 Voltaje de entrada 21V.....	49
4.1.3 Voltaje de entrada 28V.....	52
4.1. 4 Voltaje de entrada 32V .....	55
<b>5. CONCLUSIONES.....</b>	<b>58</b>
<b>6. BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>59</b>

## TABLA DE FIGURAS

Figura 1. 1 Mapa de Poincaré para un sistema autónomo tridimensional.....	5
Figura 1. 2 Construcción práctica de un mapa de Poincaré para un sistema autónomo...	6
Figura 1. 3 Mapa de Poincaré de un sistema autónomo uno-dimensional .....	7
Figura 1. 4 Órbita periódica o ciclo límite. ....	8
Figura 1. 5 Atractor caótico.....	8
Figura 1. 6 Órbita cuasi periódica. ....	8
Figura 1. 7 Método de Continuación Corrector Predictor.....	10
Figura 2. 1 Control en modo de tensión en el convertidor Buck. (a) Diagrama esquemático. (b) Operación de la onda. ....	15
Figura 2. 2 Convertidor Buck controlado por PWM.....	16
Figura 2. 3 Ingresando el sistema .....	27
Figura 2. 4 Ventanas Starter e Integrator.....	28
Figura 2. 5 Primera órbita en el Plano de Fase.....	28
Figura 2. 6 Órbita en el Plano de Fase Para $V_{in}=12V$ .....	29
Figura 2. 7 Órbita en el Plano de Fase Para $V_{in}=21V$ .....	30
Figura 2. 8 Órbita en el Plano de Fase Para $V_{in}=28V$ .....	30
Figura 2. 9 Órbita en el Plano de Fase Para $V_{in}=32V$ .....	31
Figura 2. 10 Órbita en el Plano de Fase Para $V_{in}=32.35V$ .....	31
Figura 3. 1 Ventana Continuer.....	32
Figura 3. 2 Ventana System que muestra la serie de Fourier suavizada utilizando ocho términos. ....	33
Figura 3. 3 Orbita cerrada para 12 voltios. ....	34
Figura 3. 4 Orbita cerrada para 21 voltios. ....	34
Figura 3. 5 Orbita cerrada para 28 voltios. ....	35
Figura 3. 6 Orbita cerrada para 32 voltios. ....	35
Figura 3. 7 Modelo del convertidor Buck utilizando archivos Mex.....	39
Figura 3. 8 Órbita cerrada para $V_{in} 12V$ utilizando archivos Mex.....	40
Figura 3. 9 Ventanas Starter e Integrador. La órbita no converge. No se puede hacer la Continuación.....	40
Figura 3. 10 Órbita cerrada para $V_{in} 21V$ utilizando archivos Mex. ....	41
Figura 3. 11 Ventanas Numérica y Starter. La órbita no converge. No se puede hacer la continuación. ....	41
Figura 3. 12 Órbita cerrada para $V_{in} 28V$ utilizando archivos Mex. ....	42
Figura 3. 13 Ventanas Integrador y Starter para $V_{in} 28V$ . La órbita no converge. No se puede hacer la Continuación.....	42
Figura 3. 14 Órbita cerrada para $V_{in} 32V$ utilizando archivos Mex. ....	43
Figura 3. 15 Ventanas Integrador y Starter para $V_{in} 32V$ . La órbita no converge. No se puede hacer la Continuación.....	43
Figura 4. 1 Ventana del Matcont. ....	44
Figura 4. 2 Ventana System para la serie de Fourier truncada a un término.....	45
Figura 4. 3 Órbita cerrada para 12 voltios. ....	46
Figura 4. 4 Ventanas Starter y Continuador con los valores para obtener la órbita. ....	46
Figura 4. 5 Ventanas de valores Numéricos, Iniciador y Continuador para 12 voltios..	47
Figura 4. 6 Ciclo límite encontrado, en el modo forward; aparece un período doble. .	47
Figura 4. 7 Ciclo límite calculado para 12 voltios. En el modo backward.....	48

Figura 4. 8 Ventanas Starter y Continuador con las que se obtuvo el Ciclo Límite.....	48
Figura 4. 9 Órbita cerrada para $V_{in} = 21\text{ V}$ .....	49
Figura 4. 10 Ventanas Starter e Integrador con los valores con los que se obtuvo la órbita.....	49
Figura 4. 11 Ventanas Numérica, Starter y Continuador, con los valores con los cuales se graficó el ciclo límite.....	50
Figura 4. 12 Ciclo límite para $V_{in} = 21\text{V}$ calculado en modo forward.....	50
Figura 4. 13 Ventana numérica en donde se muestra el valor para el periodo doble.....	51
Figura 4. 14 Ciclo límite calculado para 21 voltios en modo backward.....	51
Figura 4. 15 Órbita cerrada para $V_{in} 28\text{V}$ .....	52
Figura 4. 16 Ventanas Starter, Numérica y Matcont para la obtención de la órbita.....	52
Figura 4. 17 Ciclo límite para 28 voltios en modo forward.....	53
Figura 4. 18 Ventanas Numérica y Starter para obtención del ciclo límite.....	53
Figura 4. 19 Ciclo límite para voltaje 28 en modo backward. Aparece periodo doble..	54
Figura 4. 20 Órbita cerrada para $V_{in} 32\text{V}$ .....	55
Figura 4. 21 Ventanas Starter, Numérica e Integrador para cálculo de la órbita.....	55
Figura 4. 22 Ventanas Starter, Numérica y Continuador para cálculo de ciclo límite..	56
Figura 4. 23 Ciclo límite para voltaje 32 en modo forward.....	56
Figura 4. 24 Ventanas Starter, Continuador y Numérica para cálculo del ciclo límite..	57
Figura 4. 25 Ciclo límite para voltaje 32 en modo backward.....	57

# INTRODUCCIÓN

## Objetivos del trabajo de investigación

Entre otros, el objetivo de este trabajo, es manejar las funciones diseñadas en el paquete de herramientas de Continuación en Matlab; conocido como Matcont, para calcular órbitas inestables y los ciclos límite en el convertidor DC/DC Buck.

El estudio de las ecuaciones diferenciales requiere un buen y poderoso software matemático. También un paquete flexible y expandible. Matcont es un paquete gráfico de Matlab para el estudio numérico de sistemas dinámicos, que calcula curvas de equilibrio, puntos límite, ciclos límite, Fold, bifurcaciones flip y torus y puntos de ciclo límite.

Además calcula continuación de bifurcaciones flip, fold y torus de soluciones periódicas. Estas son algunas de las muchas aplicaciones que se pueden manejar con Matcont.

La mayoría de los circuitos electrónicos de potencia se hacen considerando una elemental y conveniente conexión de sus componentes. Estos componentes pueden ser agrupados en tres clases principales: fuentes (fuentes de voltaje y de corriente), componentes pasivos (resistencias, inductancias, capacitores) y elementos de switcheo (diodos, thyristores).

Los convertidores DC/DC tienen componentes no lineales (Capacitores, Inductores, y Resistencias), el valor de estos componentes cambia no linealmente si el convertidor es perturbado; o también si los valores de estos componentes cambian con el tiempo.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales que definen los convertidores DC/DC, presentan la aparición de ciclos límite y bifurcaciones los cuales definen la estabilidad del sistema. El propósito de trabajar el convertidor Buck, es analizar estos comportamientos. Los convertidores Boost y Buck-Boost se suavizan, pero no son trabajados en Matcont en ésta tesis.

En el trabajo de investigación se desarrolló la siguiente secuencia lógica:

- Fundamentos matemáticos de los sistemas dinámicos no lineales, ciclos límite y continuación numérica.
- Suavización de los convertidores Buck, Boost, Buck-Boost.
- Selección del convertidor Buck para calcular las órbitas inestables y los ciclos límite.
- Aplicación de archivos mex al cálculo de órbitas inestables.
- Aplicación de Matcont para el cálculo de órbitas inestables y ciclos límite en el convertidor Buck.

## CAPITULO I

### 1. 1 Fundamentos matemáticos de Sistemas Dinámicos, Ciclos Limite y Continuación Numérica.

#### 1.1.1 Sistema Dinámico

En un proceso determinístico, Cualquier estado futuro de un sistema puede predecirse conociendo su estado actual y las leyes que gobiernan su evolución. Si se representa por  $x$  un estado del sistema, el conjunto  $X$  que contiene todos los posibles estados se llamará espacio de estados.

$$X = \{x : x \text{ es un estado del sistema dinámico}\}$$

La evolución de un sistema dinámico significa un cambio en su estado en un tiempo  $t$  ( $t \in T$ ).

La ley de evolución determina el estado  $x_t$  de un sistema en un tiempo  $t$ , dado por su estado inicial  $x_0$ . La forma más general de definir la evolución es asumir que para cada tiempo  $t > 0$  se define la relación  $\varphi^t$  en el espacio de estados  $X$ , que aplica cada estado actual  $x_0$  en un único estado futuro  $\varphi^t x_0$ .

La relación  $\varphi^t$  se conoce como operador de evolución del sistema dinámico.

La forma más común de definir el operador de evolución de un sistema dinámico continuo es mediante ecuaciones diferenciales. Si suponemos el espacio de estados de un sistema es  $X = R^n$  con coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ; el operador de evolución se encuentra implícito en términos de las velocidades de cambio  $\dot{x}_i$  de las variables  $x_i$ . En forma vectorial esto es:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

Donde  $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$  y  $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))$  y la función vectorial  $f$  se supone que es suave es decir, diferenciable un número suficiente de veces [1].

Ahora consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad x(t_0) = x_0 \quad x \in D \subset R^n, \quad t \in R^+ \quad (1.2)$$

Si la parte derecha de la ecuación (1.1) depende explícitamente del tiempo, esto define un sistema no autónomo. Si se tiene un  $T > 0$  tal que

$$f(x, t) = f(x, t + T) \quad (1.3)$$

Existe, para todo  $x$  y  $t$ , entonces se dice que el sistema es periódico en el tiempo con período  $T$ .

Un sistema periódico no autónomo con período  $T$  se puede siempre convertir en un sistema autónomo de orden  $(n + 1)$  agregando una variable extra.

$$\Theta = \frac{2\pi t}{T} \quad (1.4)$$

El sistema autónomo está definido por

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \Theta), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.5)$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{2\pi}{T} \quad \Theta(t_0) = \frac{2\pi t_0}{T} \quad (1.6)$$

El *Espacio de fase* es llamado conjunto  $D$ . El sistema dinámico es mapeado como:

$$\Phi : R^+ \times D \rightarrow R^n$$

Definido por la solución de  $x(t)$ .

El espacio de fase de un sistema dinámico es un espacio matemático con coordenadas ortogonales que representan cada una de las variables necesarias para especificar el estado instantáneo del sistema.

En el sistema autónomo de la ecuación (1.1), descrita por sus componentes así:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x) \quad i = 1, n \quad (1.7)$$

Donde  $f_i$  son funciones suaves. Para encontrar una solución se debe integrar la ecuación

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x), \dots, \frac{dx_n}{dt} = f_n(x) \quad (1.8)$$

Se utiliza una de las componentes de  $x$ , por ejemplo  $x_1$  como una nueva variable independiente. Esto requiere que  $f_1(x) \neq 0$ . Aplicando la regla de la cadena se obtienen  $(n - 1)$  ecuaciones:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}, \dots, \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{f_n(x)}{f_1(x)}. \quad (1.9)$$

Entonces, las soluciones en el espacio de fase de (1.9) son llamadas *órbitas*. El teorema de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria dice que las órbitas en el plano de fase no se intersectan. Para obtener (1.1) se asume que  $f_1(x) \neq 0$ . Si  $f_1 = 0$  y  $f_2$  no desaparece en estos ceros, se puede tomar  $x_2$  como variable independiente, intercambiando  $f_1$  y  $f_2$ . Si los ceros de  $f_1$  y  $f_2$  coinciden, podemos tomar  $x_3$  como variable independiente, y así sucesivamente.

Esta construcción es imposible en puntos  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  donde

$$f_1(x^*) = f_2(x^*) = \dots = f_n(x^*) = 0. \quad (1.10)$$

El punto  $x^* \in R^n$  donde  $f(x^*) = 0$  es llamado *punto fijo* de  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ .

Una solución de la ecuación autónoma  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  corresponde a una órbita cerrada en el espacio de fase y una órbita cerrada corresponde a una solución periódica. Una solución periódica puede también ser un ciclo límite. Si  $\Phi(t)x_0$  es una solución de la ecuación diferencial  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ,  $x \in D \in R^n$  y se supone que existe un valor positivo  $T$  tal que  $\Phi(t+T) = \Phi(t)$  para todo  $t \in R^+$ , entonces  $\Phi(t)$  es una solución periódica de periodo  $T$ . Si un ciclo límite se extiende asintóticamente para  $t \rightarrow \infty$ , él es estable, este es un ejemplo de atractor. Si se tiene esta propiedad para  $t \rightarrow -\infty$ , el ciclo límite es inestable, este es un ejemplo de repelente.

**Teorema:** Supóngase que la trayectoria  $\Phi_t(x_0)$  de la ecuación diferencial  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ ,  $x \in R^2$  con  $\Phi_t$  contenida en una región  $D$  del espacio de fase para  $t \geq 0$ . Entonces los únicos atractores posibles para  $\Phi_t(x_0)$  son un punto fijo o un ciclo límite.

**Definición:** Supóngase que se tiene una matriz  $A(n,n)$  que tiene  $k$  eigenvalores con parte real negativa  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  y  $(n-k)$  eigenvalores con parte real positiva  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$  y que estos eigenvalores son diferentes. Tomemos  $\{v_1, \dots, v_n\}$  como un correspondiente conjunto de eigenvectores. Entonces los subespacios estables e inestables del sistema lineal  $\frac{dy}{dt} = Ay$ ,  $E^s$  y  $E^u$ , son los subespacios lineales: [2].

$$E^s = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\} \quad (1.11)$$

$$E^u = \text{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\} \quad (1.12)$$

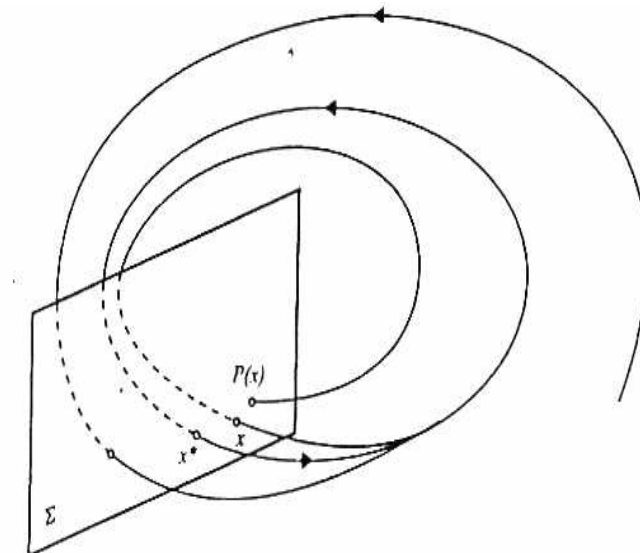
### 1.1.2 El mapa de Poincaré.

Un mapa de Poincaré es un dibujo clásico para el análisis de sistemas dinámicos. Es debido a Henri Poincaré y su principal idea es reemplazar el flujo de  $n$ -ésimo orden de un sistema de tiempo continuo por un sistema de tiempo discreto de  $(n-1)$  orden. El es construido por una vista del espacio de fase diagramado estroboscópicamente de tal forma que su movimiento se pueda observar periódicamente.

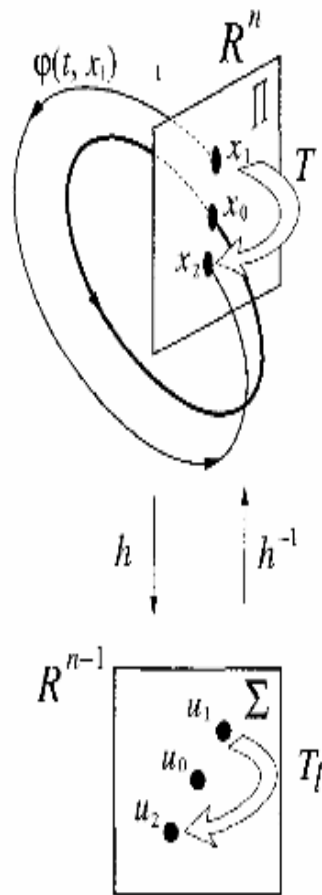
La definición del mapa de Poincaré es diferente para sistemas autónomos y no autónomos. Primero, consideremos un sistema autónomo de orden  $n$ , y asumimos que tiene un ciclo límite  $\Gamma$  como se muestra en la figura (1.1).

Tomamos  $u^*$  un punto sobre el ciclo límite. Tomamos  $E$  como una superficie  $(n-1)$  dimensional transversal a  $\Gamma$  y  $u^*$ . La órbita inicia en  $u^*$  y atraviesa  $E$  en  $x^*$  después de un período  $T$  de un ciclo límite. Las trayectorias inician sobre  $E$  y estarán en una vecindad suficientemente pequeña de  $u^*$ , después de un período  $T$ , interceptan  $E$  en la vecindad de  $u^*$ . Así se define un mapeo  $P$  de algunas vecindades  $U \subset E$  de  $u^*$  sobre otra vecindad  $V \subset E$  de  $u^*$ .  $P$  es un mapa de Poincaré de un sistema autónomo.

Esta definición de mapa de Poincaré es raramente utilizada en simulaciones y experimentos porque requiere un conocimiento profundo de la posición del ciclo límite. En la práctica se escoge una superficie  $(n-1)$  dimensional  $E$ , la cual divide  $R^n$  en dos regiones. Si  $E$  se escoge apropiadamente, la trayectoria en observación pasará repetidamente a través de  $E$ , como se muestra en la figura (1.1) el conjunto de estos puntos de cruce es un mapa de Poincaré.



**Figura 1. 1** Mapa de Poincaré para un sistema autónomo tridimensional



**Figura 1. 2** Construcción práctica de un mapa de Poincaré para un sistema autónomo.

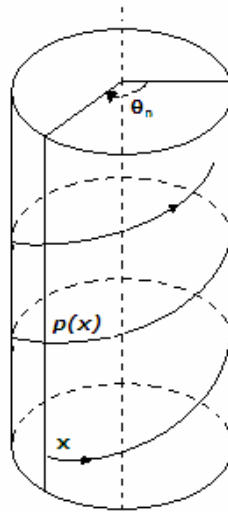
Consideremos ahora un sistema no autónomo de orden  $n$ . Un sistema no autónomo periódico en el tiempo con período  $T$  se puede transformar dentro de un sistema no autónomo de orden  $(n-1)$  en el espacio de fase cilíndrico  $R^n \times S^1$ , el mapa de Poincaré se puede definir de la siguiente forma. Considerar la superficie  $n$ -dimensional  $E \in R^n \times S^1$ :

$$E := \{(u, \theta) \in R^n \times S^1 : \theta = \theta_0\}. \quad (1.3)$$

Después de cada periodo  $T$ , la órbita  $u(t)$  intercepta  $E$  (figura 1.3). El mapa resultante

$$P: E \rightarrow E, \quad (R^n \rightarrow R^n),$$

El cual mapea  $u(t) \rightarrow u(t + T)$ , es un mapa de Poincaré [2].



**Figura 1. 3** Mapa de Poincaré de un sistema autónomo uno-dimensional

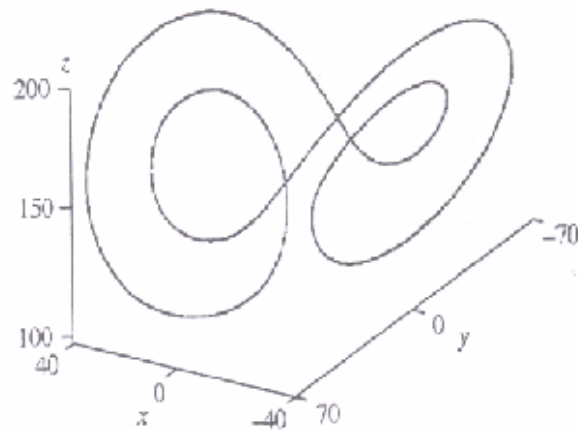
### 1.1.3 Comportamiento Cualitativo de los sistemas dinámicos

Los sistemas anteriormente descritos son llamados a menudo sistemas determinísticos, en el sentido que la forma en que ellos evolucionan con el tiempo está completamente determinado por las ecuaciones diferenciales que lo describen. Precisamente, dado una condición inicial, la solución del sistema es conocida como la trayectoria y está completamente determinada. Para sistemas lineales, se sabe que las soluciones de forma cerrada se pueden encontrar. Pero para sistemas no lineales, las soluciones son la mayoría de las veces imposibles de evaluar, y entonces las soluciones deben ser encontradas, aplicando métodos numéricos. Después de un período de transición inicial, el sistema rápidamente entra a su régimen permanente, la solución en régimen estacionario es conocida como una solución de equilibrio, en el sentido que si el sistema inicia en un punto de esta solución él está permanentemente en esa solución. La solución de equilibrio para la cual el sistema converge es llamada *atractor*. En sistemas no lineales, el comportamiento futuro es complicado porque la convergencia a un punto de equilibrio depende del punto inicial. En otras palabras, puede haber dos o más atractores compitiendo, y dependiendo de la condición inicial, el sistema converge a uno de ellos. Así, para determinar el comportamiento del régimen estacionario de un sistema, se deben conocer los posibles atractores como sus respectivas cuencas de atracción. En términos generales un conjunto de atracción para un sistema dinámico es un subconjunto cerrado de su espacio de fase tal que para todo punto inicial el sistema evolucionará hacia este subconjunto. Para un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales, en tiempo continuo el caso más sencillo de atracción son los atractores de punto de equilibrio.

En general los atractores se pueden clasificar en las siguientes categorías: [3] [4].

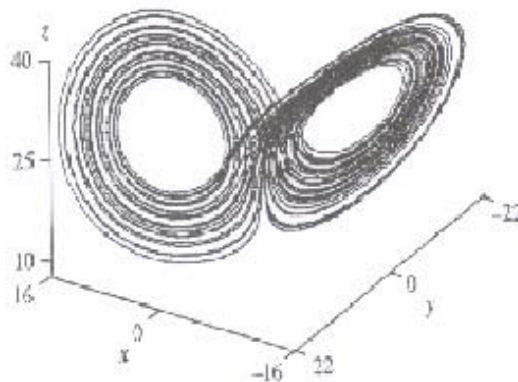
- Punto fijo: La solución es un punto en el espacio de estado.

- Ciclo límite u órbita periódica: La trayectoria se mueve a lo largo de una órbita cerrada en el espacio de estado. El movimiento es periódico



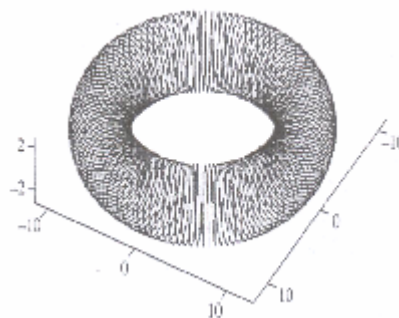
**Figura 1. 4** Órbita periódica o ciclo límite.

- Atractor caótico: La trayectoria aparece moviéndose aleatoriamente en el espacio de estado. Sin embargo, la trayectoria está limitada y su movimiento no es periódico.



**Figura 1. 5** Atractor caótico.

- Órbita cuasi-periódica: La trayectoria se mueve sobre la superficie de un Torus.



**Figura 1. 6** Órbita cuasi periódica.

### 1.1.4. Exponentes de Lyapunov

El caos se caracteriza por la divergencia de trayectorias cercanas. Supongamos que dos trayectorias cercanas están separadas por una distancia  $\varepsilon_0$  inicialmente. Entonces, si esta distancia se expande o se contrae exponencialmente a medida que el tiempo transcurre, esta se puede expresar como:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{\lambda t} \quad (1.14)$$

Donde el signo de  $\lambda$  determina si la separación es de expansión o contracción. Específicamente, si  $\lambda > 0$ , las dos trayectorias divergen exponencialmente en el tiempo. Como la razón de divergencia de trayectorias cercanas medida de esta forma puede variar a lo largo de la trayectoria, se necesita tomar el promedio de la razón de divergencia en un segmento largo de la trayectoria. También, la escogencia del punto inicial puede afectar el resultado. Entonces, se necesita tomar un gran número de medidas y evaluar el promedio  $\lambda$ . Nos referimos entonces a este promedio como el promedio de los exponentes de Lyapunov o simplemente como los *exponentes de Lyapunov*.

Los exponentes de Lyapunov se utilizan para obtener una medida de la dependencia sensible de la solución de

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in D \subset R^n \quad (1.15)$$

Sobre la condición inicial. Los exponentes de Lyapunov son una generalización de los eigenvalores de un punto fijo.

Los exponentes de Lyapunov son una ayuda en la caracterización de diferentes tipos de atractores de los sistemas dinámicos. Para sistemas disipativos en el espacio de fase de dos dimensiones se deben considerar dos exponentes de Lyapunov. La combinación  $(\lambda_1, \lambda_2) = (-, -)$  corresponde a un punto de equilibrio estable y la combinación  $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, -)$  esta representada por un ciclo límite en el espacio de fase, el cual corresponde a una solución periódica.

Cuando el atractor es cuasi-periódico entonces  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , y los demás  $\lambda_i$  cumplen con  $0 > \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$

Si las trayectorias del sistema tiene al menos un exponente de Lyapunov positivo, entonces estas trayectorias son una u otra inestables o caóticas [5].

### 1.1.5. Métodos de Continuación.

Los métodos de continuación se utilizan para el trazado de curvas unidimensionales definidas por  $n$  ecuaciones en espacios de dimensión  $n+1$ . En particular se han utilizado para identificar la curva de equilibrios definida por el sistema de  $n$  ecuaciones

$$\dot{x} = f(x, p) = 0, x \in R^n, p \in R^m \quad (1.16)$$

La ecuación (1.16) define curvas con soluciones que se supone existen. Se supone además que al menos una de esas soluciones es conocida, es decir, se conoce un punto de equilibrio  $(x^1, p_1)$ . El problema de continuación consiste en calcular el resto de la curva, es decir, identificar los demás puntos de equilibrio

$$(x^2, p_2), (x^3, p_3), \dots$$

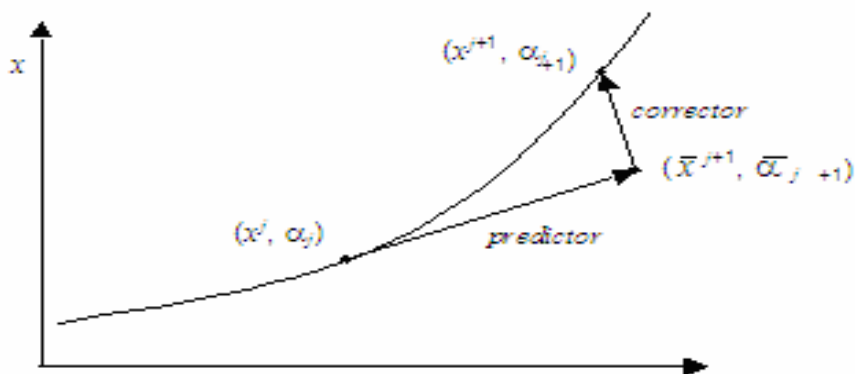
Hasta localizar el punto deseado. El paso  $j$ -ésimo del proceso de continuación se inicia desde una solución  $(x^j, p_j)$  de la ecuación (1.16) para un valor del parámetro  $p_j$ , y entonces el objetivo es calcular la solución  $(x^{j+1}, p_{j+1})$  para el siguiente valor del parámetro  $p_{j+1}$

$$(x^j, p_j) \rightarrow (x^{j+1}, p_{j+1}) \quad (1.17)$$

Empleando los métodos de continuación de predictor-corrector, el paso de  $j$  a  $j+1$  se divide en dos etapas:

$$(x^j, p_j) \rightarrow (\bar{x}^{j+1}, \bar{p}_{j+1}) \rightarrow (x^{j+1}, p_{j+1})$$

Tal como se muestra en la figura 1.7.



**Figura 1.7** Método de Continuación Corrector Predictor.

En general la predicción  $(\bar{x}, \bar{p})$  no es una solución de la ecuación (1.16). El predictor simplemente identifica un punto que el corrector toma como inicio de sus iteraciones para encontrar finalmente la solución. La distancia entre las dos soluciones consecutivas  $(x^j, p_j)$  y  $(x^{j+1}, p_{j+1})$  es llamado *tamaño de paso*. La mayoría de algoritmos que implementan métodos de continuación basados en predictor-corrector para detección de bifurcaciones, incluyen tres pasos que se ejecutan en cada iteración:

- Predicción.
- Corrección.
- Control de paso [1] [6].

### 1.1.6 Continuación de ciclo límite

#### 1.1.6.1. Definición Matemática de ciclo límite.

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (1.18)$$

Con  $x \in R^n$  y  $t \in R$ . Una solución periódica con período  $T$  satisface el siguiente sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (1.19)$$

$$x(0) = x(T) \quad (1.20)$$

Por simplicidad el período  $T$  es tratado como un parámetro. Con un cambio de variable en el tiempo  $t$ , podemos obtener el sistema.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= T_0 f(x, t) \\ x(0) &= x(1) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Si  $x(\tau)$  es una solución, entonces  $x(\tau + s)$  es también una solución de la ecuación anterior para cualquier valor de  $s$ . La solución completa es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} - T_0 f(x, t) &= 0 \\ x(0) - x(1) &= 0 \\ \int_0^1 \langle x(t), x'_{old}(t) \rangle dt &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Donde  $x'_{old}(t)$  es la derivada de la solución previa [7] [8] [9].

Un ciclo límite es una órbita cerrada que corresponde a esta solución periódica, entendida como un tipo especial de solución para un sistema dinámico, la cual se repite en el tiempo.

## 1. 2 Localización de ciclos límite.

En términos generales, el procedimiento para la localización de los ciclos puede plantearse localmente suponiendo que la posición del ciclo se conoce aproximadamente para luego intentar localizarlo con mayor precisión. Si en un sistema parámetro-dependiente se conoce la posición del ciclo para un cierto valor del parámetro, se puede realizar un proceso de continuación respecto a ese parámetro dando pequeños saltos y

así identificar el ciclo para cualquier valor. La posición del ciclo para la posición del anterior valor es una aproximación para el ciclo en el siguiente valor. [1].

### 1.3 Bifurcaciones.

Como se ha mencionado antes, un sistema dinámico puede tener múltiples soluciones de equilibrio. Para un conjunto dado de parámetros y una condición inicial, el sistema converge a una solución de equilibrio. Esta solución de equilibrio es el atractor. Si los parámetros se permiten variar, el sistema puede abandonar esta solución y recobrar otra solución de equilibrio. Por ejemplo, si se varían los parámetros, la posible solución de equilibrio llega a ser inestable y el sistema es atraído a otra solución de equilibrio estable. Este fenómeno es una *bifurcación*.

Una bifurcación en el sentido matemático es una orquilla en cierto tipo de gráfica y corresponde a un cambio cualitativo en el sistema.

Considérese un sistema dinámico continuo no lineal que depende de un parámetro.

$$\dot{x} = f(x, p) \quad x \in R^n, \quad p \in R^m \quad (1.23)$$

Un valor del parámetro  $p = p_0$  en el cual el campo vectorial pierde su estabilidad estructural es un punto de bifurcación.

Sobre una curva de ciclo límite las siguientes bifurcaciones pueden ocurrir

- Punto de bifurcación de ciclo (BPC)
- Período doble (PD)
- Fold, conocida como punto de ciclo límite (LPC)
- Neimar-Sacker, (NS)

Las bifurcaciones pueden algunas veces ser catastróficas. Por ejemplo, un convertidor puede operar sutilmente cuando un parámetro se toma cerca de cierto umbral. Mas allá de este umbral, un atractor caótico puede tomarlo lentamente, con esta trayectoria se puede alcanzar un voltaje y corriente muy grandes causando daño a los equipos. Así pues entonces, el estudio de las bifurcaciones es relevante no únicamente en cuanto a su funcionalidad sino también en cuanto a seguridad [4].

## CAPÍTULO II

### 2.1 Selección del convertidor Buck para el cálculo de ciclos límite

#### 2.1.1 Electrónica de Potencia

La mayoría de las diferentes ramas de la electrónica están relacionadas con el procesamiento de información o de señales; en contraposición, la electrónica de potencia trabaja con el procesamiento de energía eléctrica. Los convertidores de potencia son un intermediario entre un productor de energía y un consumidor de energía. La electrónica de potencia tiene tres objetivos principales:

- Convertir energía eléctrica de una forma a otra, facilitando su regulación y control.
- Lograr una alta eficiencia de conversión y por consiguiente un bajo calor disipado.
- Minimizar el tamaño de los convertidores de potencia

La tecnología de la electrónica de potencia ha encontrado su incremento en el espacio casero. En los computadores personales, balastos electrónicos para lámparas fluorescentes, cargadores de baterías, etc.

Alta eficiencia es necesaria para reducir costos de energía, pero también se reduce la cantidad de calor disipado que se debe remover del convertidor de potencia. Una eficiencia mayor que 99% se puede obtener con grandes convertidores de potencia, mientras que con pequeños sistemas de convertidores de potencia baja se puede obtener eficiencias de 80%.

Switches, capacitores, inductores y transformadores son por tanto, los componentes típicos en un convertidor de electrónica de potencia.

El campo de los sistemas de potencia eléctrica trata con la generación, transmisión y distribución de potencia de 50/60 Hz. La teoría de la bifurcación, ha sido aplicada sucesivamente a modelos simples de sistemas de potencia, y se ha demostrado que la teoría de sistemas dinámicos no lineales se puede usar para explicar las indeseables oscilaciones de baja frecuencia y colapsos de voltaje.

Un ejemplo concreto de un convertidor de potencia, el convertidor DC/DC Buck, es trabajado ahora:

El convertidor Buck es uno de los más simples pero uno de los más usados: un circuito cortador que convierte una entrada DC a una salida DC a bajo voltaje. Muchos suministradores de potencia emplean circuitos cerrados relacionados. Una aplicación importante es la conversión de los 5 voltios estándar de suministro usados en los computadores a los 3.3 voltios o menos, necesarios para el procesador de la familia de los Pentium. Un convertidor Buck puede lograr una eficiencia de 92%, mientras que un regulador lineal llegaría únicamente a un 66% de eficiencia [11].

### 2.1.2 Control en modo de tensión.

Un típico convertidor Buck controlado por modo en tensión es el mostrado en la figura (2.1a). La principal característica de este control es la presencia de un ciclo de retroalimentación el cual toma las variaciones del voltaje de salida y las ajusta de acuerdo al ciclo de trabajo. Precisamente, en este esquema de control, la diferencia entre el voltaje de salida  $v_c$  y la señal de referencia,  $V_{ref}$ , es procesada por una red de compensación la cual genera una señal de control,  $v_{cont}$ , por ejemplo,

$$v_{cont}(t) = g(V_{ref} - v_c) \quad (2.1)$$

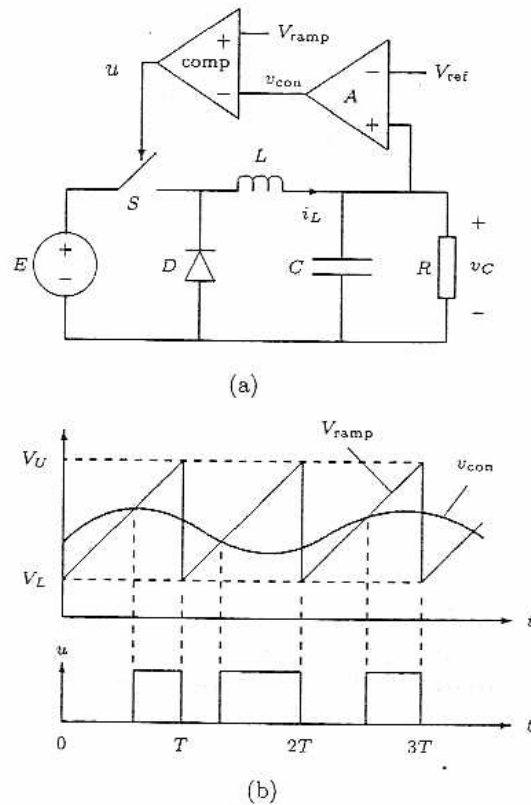
Donde  $g(\cdot)$  es una función determinada por la red de compensación. Esta señal de control dice efectivamente como el ciclo de trabajo cambia para dar la mejor dinámica de corriente instantánea para el voltaje de salida. En una implementación típica, esta señal es comparada con una señal periódica rampa  $V_{ramp}(t)$ , y genera una señal de pulso con modulación la cual maneja el switch. La señal rampa toma la forma:

$$V_{ramp}(t) = V_l + (V_u - V_l) \left( \frac{t}{T} \bmod 1 \right) \quad (2.2)$$

Donde  $V_L$  y  $V_U$  son el límite superior e inferior de la señal rampa. La figura (2.1b) muestra la interacción entre la señal de control y la señal rampa. Suponga que la señal de control se mueve en dirección contraria al voltaje de salida, por ejemplo,  $v_{cont}$  aumenta cuando el voltaje de salida disminuye, y viceversa. Entonces, el voltaje de salida puede regularse con la siguiente regla de switcheo:

$$Switch = \begin{cases} on, si V_{ramp}(t) \leq v_{cont}(t) \\ of, si V_{ramp}(t) > v_{cont}(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

El cual se puede implementar fácilmente por un comparador.



**Figura 2. 1** Control en modo de tensión en el convertidor Buck. (a) Diagrama esquemático. (b) Operación de la onda.

La base experimental del presente estudio es un convertidor DC/DC Buck cuyo voltaje de salida es controlada por un PWM con muestreo natural y frecuencia constante, trabajando en modo continuo de conducción. El circuito que estudiamos es de segundo orden y su diagrama de bloque es el de la figura (2.2).

Un sistema dinámico se puede describir por un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (2.4)$$

Donde  $f(x, t)$  es un vector de campo n-dimensional y  $x = x(t)$  representa el estado del sistema. Tenemos que  $x = (v, i)$ , donde  $i$  es la intensidad de corriente en la inductancia y  $v$  es el voltaje a través del capacitor. En nuestro caso la función  $f$  es discontinua, y para el circuito tiene un switcheo conmutado entre dos topologías, dependiendo de el estado  $x$  de el sistema.

Tomando la notación de [Deane and Hamill,1992], los parámetros del circuito son:  $R, C,$  y  $L$ , la resistencia, la capacitancia y la inductancia del circuito;  $V_l$  y  $V_u$ , los voltajes inferior y superior de la rampa y  $T$ , es el período;  $a$  es la ganancia del amplificador;  $V_{ref}$ , el voltaje de referencia, y  $V_{in}$ , el voltaje de entrada. Se asume que los switches son ideales. El convertidor se estudia trabajando como sigue: el voltaje  $v$  del capacitor es aplicado al polo positivo del amplificador con ganancia  $a$ , y el voltaje de referencia

$V_{ref}$ , al polo negativo. El voltaje de salida, el cual será comparado con el voltaje de control  $v_{co}(t)$ , es

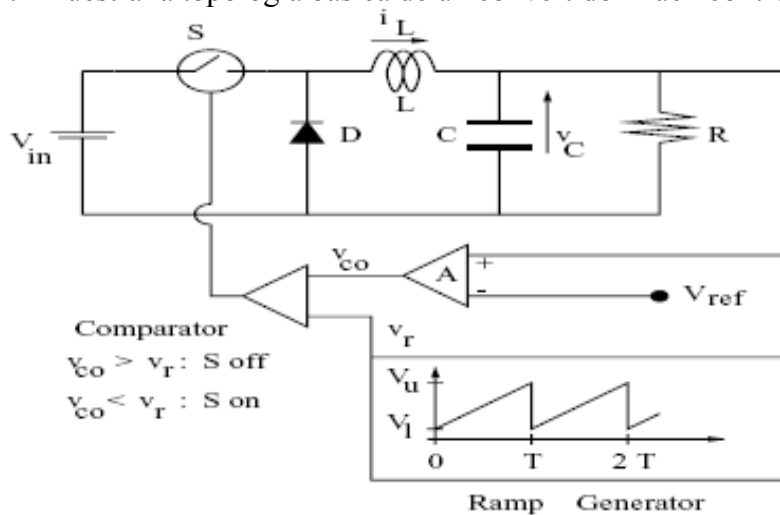
$$v_{co}(t) = a(v(t) - V_{ref}) \quad (2.5)$$

Entonces, ambos  $v_{co}$  y  $V_r$ , el voltaje de la rampa son aplicados al comparador, y cada vez que la salida cambia de signo, la posición del switch  $S$  es conmutada de tal forma que se abre cuando el voltaje de control excede el voltaje de la rampa y se cierra en caso contrario. Así entonces el circuito presenta dos topologías las cuales simulan el efecto del diodo. Esta operación descrita es conocida como modo de conducción continua (CCM), puesto que el inductor pasa corriente sin interrupción. [5] [11].

## 2.2 Suavización de los convertidores.

### 2.2.1 Suavización del convertidor Buck.

La figura 2.2 muestra la topología básica de un convertidor Buck controlado por PWM.



**Figura 2. 2** Convertidor Buck controlado por PWM

Partiendo de la figura, se obtienen las ecuaciones de estado para el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dv_c}{dt} &= \frac{i_l}{C} - \frac{v_c}{RC} \\ \frac{di_l}{dt} &= -\frac{v_c}{L} + \frac{V_{in}}{L}u \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{Siendo } u = \begin{cases} 1 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) < V_L + (V_U - V_L)\text{Fract}(t/T) \\ 0 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) > V_L + (V_U - V_L)\text{Fract}(t/T) \end{cases}$$

Acá  $\text{Fract}(x)$  denota la parte fraccionaria de  $x$ . Por ejemplo,  $\text{Fract}(1.25) = \text{Fract}(0.25) = 0.25$ . Resulta evidente que  $0 \leq \text{Fract}(x) < 1$ .

Las variables y parámetros definidos son:

- $i_l, v_c$ : Corriente en la bobina y tensión en el condensador, variables de estado.
- $R, L, C$ : Elementos del circuito.
- $V_U, V_L, T$ : Voltaje mínimo, voltaje máximo y período de la rampa de control.
- $V_{REF}, V_{in}$ : Voltaje de referencia del comparador y de entrada al circuito.
- $A$ : Ganancia del amplificador de error.

La transformación que debe realizarse al modelo debe cumplir tres objetivos:

- Independizar el modelo del tiempo, es decir, convertir el sistema en uno autónomo.
- Transformar las variables, de manera que los parámetros se vuelvan adimensionales y el modelo sea más general y pueda ser aplicado a sistemas físicos con comportamientos similares.
- Suavizar las variaciones debidas a la acción del interruptor para convertirlo en un modelo diferenciable y así poder utilizar Matcont para realizar las simulaciones.

El segundo objetivo es el primero en tratarse. Si se define una nueva variable independiente así:

$$s = \frac{t}{T} \quad \therefore \quad t = sT \quad (2.7)$$

Para reemplazar en las ecuaciones de estado del sistema, se tendrá en cuenta que:

$$\frac{dv_c}{ds} = \frac{dv_c}{dt} \frac{dt}{ds} \quad y \quad \frac{di_l}{ds} = \frac{di_l}{dt} \frac{dt}{ds} \quad (2.8)$$

Puesto que  $\frac{dt}{ds} = T$ , se llega a un nuevo conjunto de ecuaciones de estado para el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dv_c}{ds} &= \frac{Ti_l}{C} - \frac{Tv_c}{RC} \\ \frac{di_l}{ds} &= -\frac{Tv_c}{L} + \frac{TV_{in}}{L}u \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\text{Siendo } u = \begin{cases} 1 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) < V_L + (V_U - V_L)\text{Fract}(s) \\ 0 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) > V_L + (V_U - V_L)\text{Fract}(s) \end{cases}$$

Una vez transformada la variable independiente, se procede a hallar dos variables dependientes adimensionales adecuadas. Con la idea de simplificar la señal de entrada, se define la primera nueva variable de estado a partir de ella:

$$u = \begin{cases} 1 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) < V_L + (V_U - V_L)\text{Fract}(s) \\ 0 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) > V_L + (V_U - V_L)\text{Fract}(s) \end{cases}$$

$$u = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{A(v_c - V_{REF})}{V_L + (V_U - V_L)} < \text{Fract}(s) \\ 0 & \text{si } \frac{A(v_c - V_{REF})}{V_L + (V_U - V_L)} > \text{Fract}(s) \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\text{Haciendo } x = \frac{A(v_c - V_{REF}) - V_L}{V_U - V_L}, \text{ se tendrá } u = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \text{Fract}(s) \\ 0 & \text{si } x > \text{Fract}(s) \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\text{De lo anterior puede verse que } \frac{dx}{dv_c} = \frac{A}{V_U - V_L}, \text{ y sabiendo que } \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dv_c} \frac{dv_c}{ds} \quad (2.12)$$

La primera ecuación de estado del sistema toma la forma:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{ATi_l}{C(V_U - V_L)} - x \frac{T}{RC} - \frac{V_L T}{RC(V_U - V_L)} - \frac{ATV_{REF}}{RC(V_U - V_L)} \quad (2.13)$$

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{T}{RC} \left( x - \frac{ARi_l - (AV_{REF} + V_L)}{V_U - V_L} \right)$$

A partir de la última ecuación, se define la segunda variable de estado así:

$$y = \frac{ARi_l - (AV_{REF} + V_L)}{V_U - V_L} \quad (2.14)$$

$$\text{Así, se llega a } \frac{dx}{ds} = -k_1(x - y), \text{ siendo } k_1 = \frac{T}{RC}. \quad (2.15)$$

Para la segunda ecuación de estado, se parte de la definición de la primera nueva variable:

$$x = \frac{A(v_c - V_{REF}) - V_L}{V_U - V_L} \quad \therefore \quad v_c = \frac{x}{A}(V_U - V_L) + \frac{V_L}{A} + V_{REF} \quad (2.16)$$

Y, reemplazando en la segunda ecuación original:

$$\frac{di_l}{ds} = -\frac{Tx}{AL}(V_U - V_L) - \frac{V_L T}{AL} - \frac{V_{REF}}{L} + \frac{V_{in} T}{L} u \quad (2.17)$$

Recordando que  $y = \frac{ARi_l - (AV_{REF} + V_L)}{V_U - V_L}$  y, por lo tanto  $\frac{dy}{di_l} = \frac{A}{V_U - V_L}$ , se aplica la regla de la cadena para llegar a:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{dy}{di_l} \frac{di_l}{ds} = -\frac{RT}{L}x - \frac{RV_L T}{(V_U - V_L)} - \frac{TV_{REF} AR}{L(V_U - V_L)} + \frac{V_{in} TAR}{L(V_U - V_L)}u \\ \frac{dy}{ds} &= -\frac{TR}{L} \left( x + \frac{V_L}{(V_U - V_L)} + \frac{AV_{REF}}{(V_U - V_L)} - \frac{AV_{in}}{(V_U - V_L)}u \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Así, se llega al nuevo conjunto de ecuaciones de estado para el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -k_1(x - y) \\ \frac{dy}{ds} &= -k_2(x + \alpha - \beta u) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\text{Con } u = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \text{Fract}(s) \\ 0 & \text{si } x > \text{Fract}(s) \end{cases}$$

Los parámetros del nuevo modelo se relacionan con los anteriores así:

$$k_1 = \frac{T}{RC} \quad k_2 = \frac{TR}{L} \quad \alpha = \frac{V_L + AV_{REF}}{V_U - V_L} \quad \beta = \frac{AV_{in}}{V_U - V_L} \quad (2.20)$$

Es claro que, una vez fijos los parámetros del voltaje de control ( $V_U$ ,  $V_L$ ,  $T$ ), los parámetros  $k_1$  y  $k_2$  están relacionados con las constantes de tiempo del circuito,  $\alpha$  se relaciona con el voltaje de referencia y  $\beta$  con el voltaje de entrada.

Con la idea de suavizar la acción de control se plantea la siguiente forma de aproximar una discontinuidad de tipo:

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } g(x) > 0 \\ -h(x) & \text{si } g(x) < 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

utilizando la función  $k(x) = h(x) \frac{2}{\pi} \lim_{c \rightarrow \infty} \arctan(cg(x))$ , siendo  $c$  una constante de suavizado cuyo valor debe ser suficientemente alto.

Para el convertidor Buck, se tiene  $g(x) = -(x - \text{Fract}(s))$ , de manera que la aproximación suavizada de la discontinuidad será:

$$k(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(-c(x - \text{Fract}(s))) \quad (2.22)$$

Esta función, sin embargo, se aproxima a -1 y 1. Para obtener los valores necesarios, 0 y 1, la señal de control aproximada será:

$$u \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-c(x - \text{Fract}(s))) \quad (2.23)$$

El sistema suavizado y con parámetros adimensionales será entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -k_1(x - y) \\ \frac{dy}{ds} &= -k_2 \left( x + \alpha - \beta \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-c(x - \text{Fract}(s))) \right] \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ahora solo hace falta convertir el sistema en uno autónomo. Para esto, lo que usualmente se hace es agregar una nueva ecuación al sistema:  $t = I$  sin embargo, aunque esto es correcto desde el punto de vista teórico, no es lo más conveniente en este caso. Cuando se trabaja con sistemas cuya función de entrada es periódica, el procedimiento a seguir es agregar dos nuevas ecuaciones, de manera que éstas formen un oscilador cuya solución converja rápidamente a una solución estable del tipo  $z = \sin(\omega t)$  y  $w = \cos(\omega t)$ .

Puesto que en este sistema se ha cambiado la variable independiente, se tiene siempre  $\omega = 2\pi$  (Recuérdese que la frecuencia es  $2\pi$  veces el período y, debido al cambio  $s = \frac{t}{T}$ , el período de la rampa, en el dominio de  $s$ , será 1).

Las ecuaciones que se agregan para generar el oscilador serán:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= z + 2\pi w - z(z^2 + w^2) \\ \frac{dw}{ds} &= -2\pi z + w - w(z^2 + w^2) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Éstas tienen como solución estable  $z = \sin(2\pi t)$  y  $w = \cos(2\pi t)$  dada la condición inicial  $z(0)=0$  y  $w(1)=1$ .

Ahora, la función de entrada del sistema, en este caso, no es una simple función trigonométrica, sino una rampa periódica. Sin embargo, toda función periódica, bajo ciertas condiciones, puede aproximarse utilizando series de Fourier.

Para este caso  $\text{Fract}(s) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi k} \sin(2\pi k s)$ . Evidentemente, deberá escogerse un valor para  $n$ , puesto que la serie debe truncarse. Éste valor no debe ser muy pequeño, pues la aproximación no sería adecuada, ni muy grande, ya que los cálculos se harían muy complejos.

Elijiendo para  $n$  un valor de 8, el desarrollo de la serie puede expresarse en términos de las soluciones del oscilador añadido, de manera que:

$$\begin{aligned} \text{Fract}(s) = & \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left[ z \left( 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 + w^7 \right) \right] - \frac{1}{3} \left[ z^3 \left( 1 + 3w + 6w^2 + 10w^3 + 15w^4 + 21w^5 \right) \right] \\ & + \frac{1}{5} \left[ z^5 \left( 1 + 5w + 15w^2 + 35w^3 \right) \right] - \frac{1}{7} z^7 (1 + 7w) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Así, el modelo del convertidor Buck queda listo para ser ingresado a Matcont. Las ecuaciones finales serán: [11].

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -k_1 (x - y) \\ \frac{dy}{ds} &= -k_2 \left( x + \alpha - \beta \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-c(x - \text{Fract}(s))) \right] \right) \\ \frac{dz}{ds} &= z + 2\pi w - z(z^2 + w^2) \\ \frac{dw}{ds} &= -2\pi z + w - w(z^2 + w^2) \end{aligned}$$

Siendo

$$\begin{aligned} \text{Fract}(s) = & \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left[ z \left( 1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 + w^7 \right) \right] - \frac{1}{3} \left[ z^3 \left( 1 + 3w + 6w^2 + 10w^3 + 15w^4 + 21w^5 \right) \right] \\ & + \frac{1}{5} \left[ z^5 \left( 1 + 5w + 15w^2 + 35w^3 \right) \right] - \frac{1}{7} z^7 (1 + 7w) \end{aligned}$$

## 2.2.2 Suavización del convertidor Boost.

Las ecuaciones de estado del convertidor Boost controlado por PWM se listan a continuación. Las variables y parámetros serán los mismos que aquellos definidos para el convertidor Buck.

$$\begin{aligned} \frac{dv_c}{dt} &= \frac{i_l}{C} - \frac{v_c}{RC} - \frac{i_l}{C} u \\ \frac{di_l}{dt} &= -\frac{v_c}{L} + \frac{v_c}{L} u + \frac{V_{in}}{L} u \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\text{Siendo } u = \begin{cases} 1 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) < V_L + (V_U - V_L) \text{Fract}(t/T) \\ 0 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) > V_L + (V_U - V_L) \text{Fract}(t/T) \end{cases}$$

El cambio de la variable independiente será idéntico  $s = \frac{t}{T}$ , y el sistema toma la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dv_c}{dt} &= \frac{Ti_l}{C} - \frac{Tv_c}{RC} - \frac{Ti_l}{C}u \\ \frac{di_l}{dt} &= -\frac{Tv_c}{L} + \frac{Tv_c}{L}u + \frac{TV_{in}}{L}u\end{aligned}\quad (2.28)$$

$$\text{Siendo } u = \begin{cases} 1 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) < V_L + (V_U - V_L)\text{Fract}(s) \\ 0 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) > V_L + (V_U - V_L)\text{Fract}(s) \end{cases}$$

Una vez más, se hace  $x = \frac{A(v_c - V_{REF}) - V_L}{V_U - V_L}$  para tener  $u = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \text{Fract}(s) \\ 0 & \text{si } x > \text{Fract}(s) \end{cases}$  y la primera ecuación del sistema se convierte en:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \frac{dx}{dv_c} \frac{dv_c}{ds} = \frac{A}{V_U - V_L} \frac{dv_c}{ds} \\ \frac{dx}{ds} &= \frac{TA}{(V_U - V_L)C} i_l - \frac{TA}{(V_U - V_L)RC} v_c - \frac{TA}{(V_U - V_L)C} i_l u\end{aligned}\quad (2.29)$$

Pero como  $v_c = \frac{x}{A}(V_U - V_L) + \frac{V_L}{A} + V_{REF}$ , quedará:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \frac{TA}{(V_U - V_L)C} i_l (1 - u) - \frac{Tx}{RC} - \frac{TV_{in}}{RC(V_U - V_L)} - \frac{TAV_{REF}}{RC(V_U - V_L)} \\ \frac{dx}{ds} &= -\frac{T}{RC} \left( x + \frac{V_{in}}{V_U - V_L} + \frac{AV_{REF}}{V_U - V_L} - \frac{AR}{V_U - V_L} i_l (u - 1) \right)\end{aligned}\quad (2.30)$$

Definiendo la segunda nueva variable de estado como  $y = \frac{ARi_l}{V_U - V_L}$ , la primera ecuación de estado será:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds} = -\frac{T}{RC} \left( x + \frac{V_{in}}{V_U - V_L} + \frac{AV_{REF}}{V_U - V_L} - y(u - 1) \right)\quad (2.31)$$

Y, haciendo  $\alpha = \frac{V_{in}}{V_U - V_L} + \frac{AV_{REF}}{V_U - V_L}$ , se tiene entonces:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds} = -\frac{T}{RC} (x + \alpha - y(u - 1))\quad (2.32)$$

Ahora, para la segunda ecuación, se parte de  $\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{di_l} \frac{di_l}{ds} = \frac{AR}{V_U - V_L} \frac{di_l}{ds}$ . Esto lleva a:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{AR}{V_U - V_L} \left( -\frac{Tv_c}{L} + \frac{Tv_c}{L}u - \frac{TV_{in}}{L}u \right) \quad (2.33)$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{ART}{(V_U - V_L)L} (v_c(u-1) - V_{in}u)$$

Reemplazando  $v_c$  se tiene:

$$\frac{dy}{ds} = \frac{ART}{(V_U - V_L)L} \left( \left( -\frac{x}{A}(V_U - V_L) - \frac{V_L}{A} - V_{REF} \right) (u-1) - V_{in}u \right)$$

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{RT}{L} \left( \left( x + \frac{V_L}{(V_U - V_L)} + \frac{AV_{REF}}{(V_U - V_L)} \right) (u-1) - \frac{AV_{in}}{(V_U - V_L)}u \right) \quad (2.34)$$

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{RT}{L} ((x + \alpha)(u-1) - \beta u)$$

En la última ecuación se hizo  $\beta = \frac{V_{in}}{(V_U - V_L)}$ . (2.35)

Incluyendo el mismo oscilador que se agregó al convertidor Buck para suavizar la acción de control, el modelo ajustado del convertidor Boost toma la forma:

$$\frac{dx}{ds} = -k_1 \left( x + \alpha - y \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-c(x - \text{Fract}(s))) - 1 \right] \right)$$

$$\frac{dx}{ds} = -k_2 \left( (x + \alpha) \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-c(x - \text{Fract}(s))) - 1 \right] - \beta \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-c(x - \text{Fract}(s))) - 1 \right] \right) \quad (2.36)$$

$$\frac{dz}{ds} = z + 2\pi w - z(z^2 + w^2)$$

$$\frac{dw}{ds} = -2\pi w + w - w(z^2 + w^2)$$

Siendo:

$$k_1 = \frac{T}{RC} \quad k_2 = \frac{RT}{L} \quad \alpha = \frac{V_{in} + AV_{REF}}{V_U - V_L} \quad \beta = \frac{AV_{in}}{V_U - V_L} \quad (2.37)$$

$$\text{Fract}(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left[ z(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 + w^7) \right] - \frac{1}{3} \left[ z^3(1 + 3w + 6w^2 + 10w^3 + 15w^4 + 21w^5) \right]$$

$$+ \frac{1}{5} \left[ z^5(1 + 5w + 15w^2 + 35w^3) \right] - \frac{1}{7} z^7(1 + 7w)$$

### 2.2.3 Suavización del convertidor Buck-Boost.

Las ecuaciones de estado del convertidor Buck-Boost controlado por PWM son similares a las del convertidor boost. Se parte de:

$$\begin{aligned}\frac{dv_c}{dt} &= -\frac{i_l}{C} - \frac{v_c}{RC} + \frac{i_l}{C}u \\ \frac{di_l}{dt} &= \frac{v_c}{L} - \frac{v_c}{L}u + \frac{V_{in}}{L}u\end{aligned}\quad (2.38)$$

$$\text{Siendo } u = \begin{cases} 1 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) < V_L + (V_U - V_L)\text{Fract}(t/T) \\ 0 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) > V_L + (V_U - V_L)\text{Fract}(t/T) \end{cases}$$

Realizando el cambio de la variable independiente  $s = \frac{t}{T}$ , el sistema toma la forma:

$$\begin{aligned}\frac{dv_c}{ds} &= -\frac{Ti_l}{C} + \frac{Tv_c}{RC} + \frac{Ti_l}{C}u \\ \frac{di_l}{ds} &= \frac{Tv_c}{L} - \frac{Tv_c}{L}u + \frac{TV_{in}}{L}u\end{aligned}\quad (2.39)$$

$$\text{Siendo } u = \begin{cases} 1 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) < V_L + (V_U - V_L)\text{Fract}(s) \\ 0 & \text{si } A(v_c - V_{REF}) > V_L + (V_U - V_L)\text{Fract}(s) \end{cases}$$

Ahora, si  $x = \frac{A(v_c - V_{REF}) - V_L}{V_U - V_L}$  para tener  $u = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \text{Fract}(s) \\ 0 & \text{si } x > \text{Fract}(s) \end{cases}$  la primera

ecuación del sistema se convierte en:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \frac{dx}{dv_c} \frac{dv_c}{ds} = \frac{A}{V_U - V_L} \frac{dv_c}{ds} \\ \frac{dx}{ds} &= -\frac{TA}{(V_U - V_L)C}i_l + \frac{TA}{(V_U - V_L)RC}v_c + \frac{TA}{(V_U - V_L)C}i_lu\end{aligned}\quad (2.40)$$

Y reemplazando  $v_c = \frac{x}{A}(V_U - V_L) + \frac{V_L}{A} + V_{REF}$ , queda:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \frac{TA}{(V_U - V_L)C}i_l(u-1) + \frac{Tx}{RC} + \frac{TV_{in}}{RC(V_U - V_L)} + \frac{TAV_{REF}}{RC(V_U - V_L)} \\ \frac{dx}{ds} &= \frac{T}{RC} \left( x + \frac{V_{in}}{V_U - V_L} + \frac{AV_{REF}}{V_U - V_L} + \frac{AR}{V_U - V_L}i_l(u-1) \right)\end{aligned}\quad (2.41)$$

Si la segunda nueva variable de estado se define como  $y = \frac{ARi_l}{V_U - V_L}$ , la primera ecuación de estado será:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds} = \frac{T}{RC} \left( x + \frac{V_{in}}{V_U - V_L} + \frac{AV_{REF}}{V_U - V_L} + y(u-1) \right)\quad (2.42)$$

Si se agrupan los términos independientes en un solo parámetro  $\alpha = \frac{V_{in}}{V_U - V_L} + \frac{AV_{REF}}{V_U - V_L}$ ,

se tiene:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{ds} = \frac{T}{RC}(x + \alpha + y(u-1)) \quad (2.43)$$

Partiendo de  $\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{di_l} \frac{di_l}{ds} = \frac{AR}{V_U - V_L} \frac{di_l}{ds}$ , se puede llevar la segunda ecuación a la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{AR}{V_U - V_L} \left( \frac{Tv_c}{L} - \frac{Tv_c}{L}u + \frac{TV_{in}}{L}u \right) \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{ART}{(V_U - V_L)L} (v_c(1-u) + V_{in}u) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Que al reemplazar  $v_c$  se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{ART}{(V_U - V_L)L} \left( \left( \frac{x}{A}(V_U - V_L) + \frac{V_L}{A} + V_{REF} \right) (1-u) + V_{in}u \right) \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{RT}{L} \left( \left( x + \frac{V_L}{(V_U - V_L)} + \frac{AV_{REF}}{(V_U - V_L)} \right) (1-u) + \frac{AV_{in}}{(V_U - V_L)}u \right) \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{RT}{L} ((x + \alpha)(1-u) + \beta u) \end{aligned} \quad (2.45)$$

El parámetro extra incluido en la última ecuación se define según  $\beta = \frac{V_{in}}{(V_U - V_L)}$ .

El modelo final del convertidor buck-boost, incluyendo el mismo oscilador que se utiliza para suavizar la acción de control, será:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= k_1 \left( x + \alpha + y \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-c(x - \text{Fract}(s))) - 1 \right] \right) \\ \frac{dx}{ds} &= k_2 \left( (x + \alpha) \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-c(x - \text{Fract}(s))) - 1 \right] + \beta \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-c(x - \text{Fract}(s))) - 1 \right] \right) \\ \frac{dz}{ds} &= z + 2\pi w - z(z^2 + w^2) \\ \frac{dz}{ds} &= -2\pi w + w - w(z^2 + w^2) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Siendo:

$$k_1 = \frac{T}{RC} \quad k_2 = \frac{RT}{L} \quad \alpha = \frac{V_{in} + AV_{REF}}{V_U - V_L} \quad \beta = \frac{AV_{in}}{V_U - V_L} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \text{Fract}(s) = & \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left[ z(1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6+w^7) \right] - \frac{1}{3} \left[ z^3(1+3w+6w^2+10w^3+15w^4+21w^5) \right] \\ & + \frac{1}{5} \left[ z^5(1+5w+15w^2+35w^3) \right] - \frac{1}{7} z^7(1+7w) \end{aligned} \quad (2.48)$$

## 2.2.4 Órbitas del convertidor Buck en Matcont

El modelo suavizado del convertidor Buck es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -k_1(x-y) \\ \frac{dy}{ds} &= -k_2 \left( x + \alpha - \beta \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(-c(x - \text{Fract}(s))) \right] \right) \\ \frac{dz}{ds} &= z + 2\pi w - z(z^2 + w^2) \\ \frac{dw}{ds} &= -2\pi z + w - w(z^2 + w^2) \end{aligned}$$

Siendo

$$\begin{aligned} \text{Fract}(s) = & \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left[ z(1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6+w^7) \right] - \frac{1}{3} \left[ z^3(1+3w+6w^2+10w^3+15w^4+21w^5) \right] \\ & + \frac{1}{5} \left[ z^5(1+5w+15w^2+35w^3) \right] - \frac{1}{7} z^7(1+7w) \end{aligned}$$

En donde los parámetros adimensionales del modelo se relacionan con los parámetros del circuito de la siguiente manera:

$$k_1 = \frac{T}{RC} \quad k_2 = \frac{TR}{L} \quad \alpha = \frac{V_L + AV_{REF}}{V_U - V_L} \quad \beta = \frac{AV_{in}}{V_U - V_L} \quad (2.49)$$

Y las variables de estado  $x$  e  $y$  se relacionan con la corriente y el voltaje así:

$$x = \frac{A(v_c - V_{REF}) - V_L}{V_U - V_L} \quad y = \frac{ARi_l - (AV_{REF} + V_L)}{V_U - V_L} \quad (2.50)$$

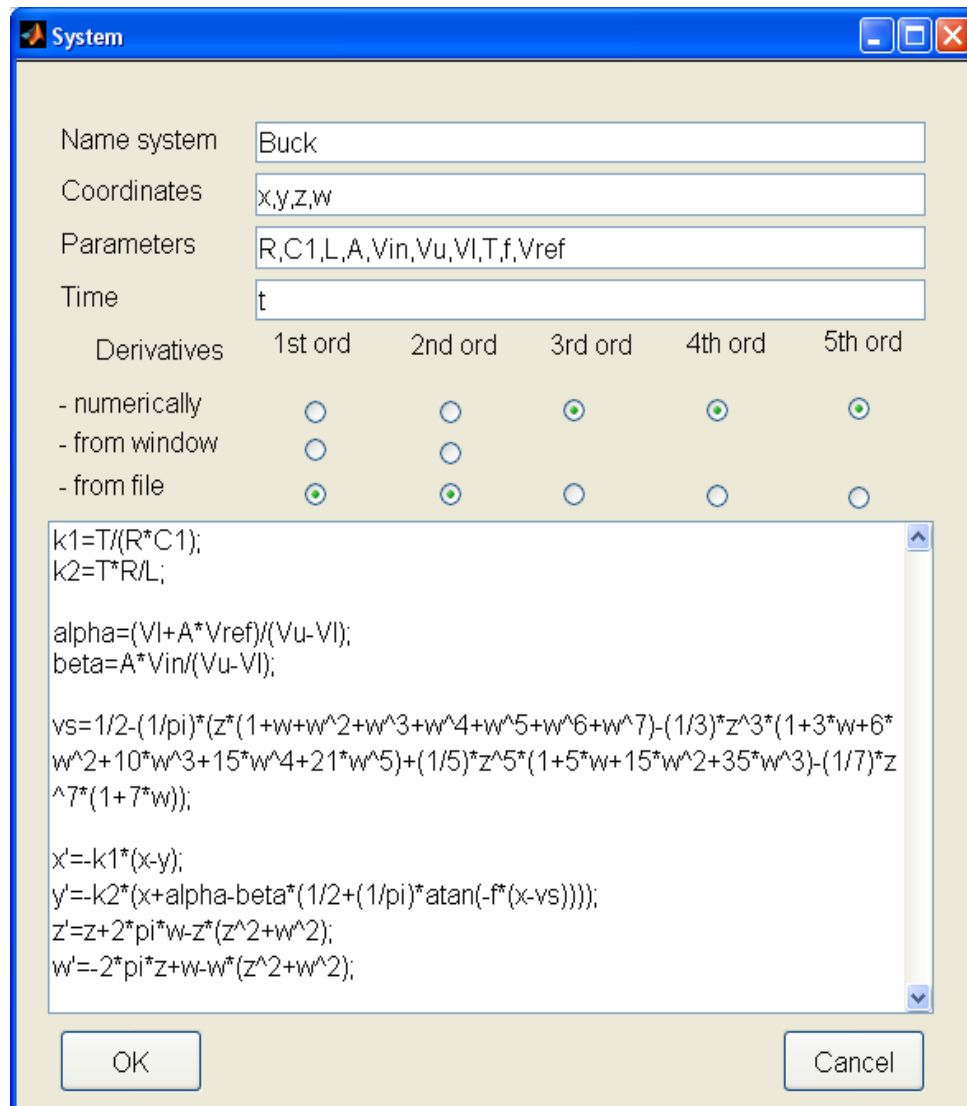
Este modelo se introduce en Matcont haciendo utilizando el menú select/system/new e ingresando las variables, parámetros y ecuaciones en el cuadro de dialogo que se abre, según se ve en la figura 2.3.

Después de pulsar O.K. se debe ir al menú type/initial poitin, con el fin de selccionar “point” como punto inicial para trazar órbitas del sistema en el plano de fase. Tras hacer esto, se abren dos ventanas, “Starter” e “Integrator”. La primera permite ajustar los valores de los parámetros que se utilizarán en las simulaciones, mientras la otra ajusta los parámetros del programa para el cálculo de la órbita [7][8][9] [10] [11].

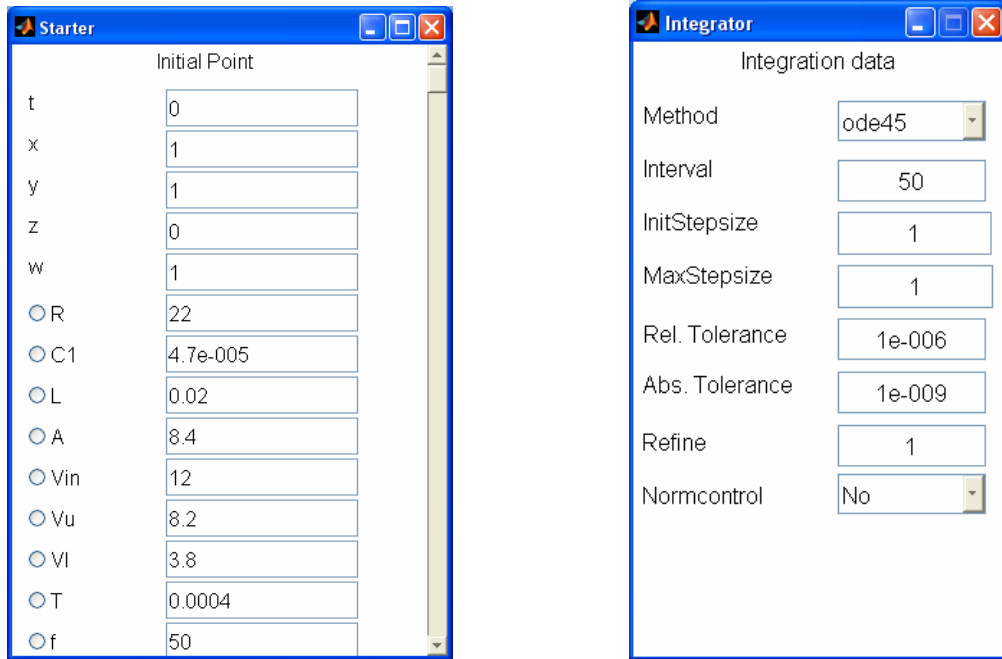
Los valores de los parámetros del circuito que se utilizarán serán los mismos empleados por Deane y Hamill, los cuales son:

$$\begin{aligned}
 R &= 22\Omega & L &= 20\text{mH} & C &= 47\mu\text{F} & A &= 8.4 \\
 V_{REF} &= 11.3\text{V} & V_L &= 3.8\text{V} & V_U &= 8.2\text{V} & T &= 400\mu\text{s}
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

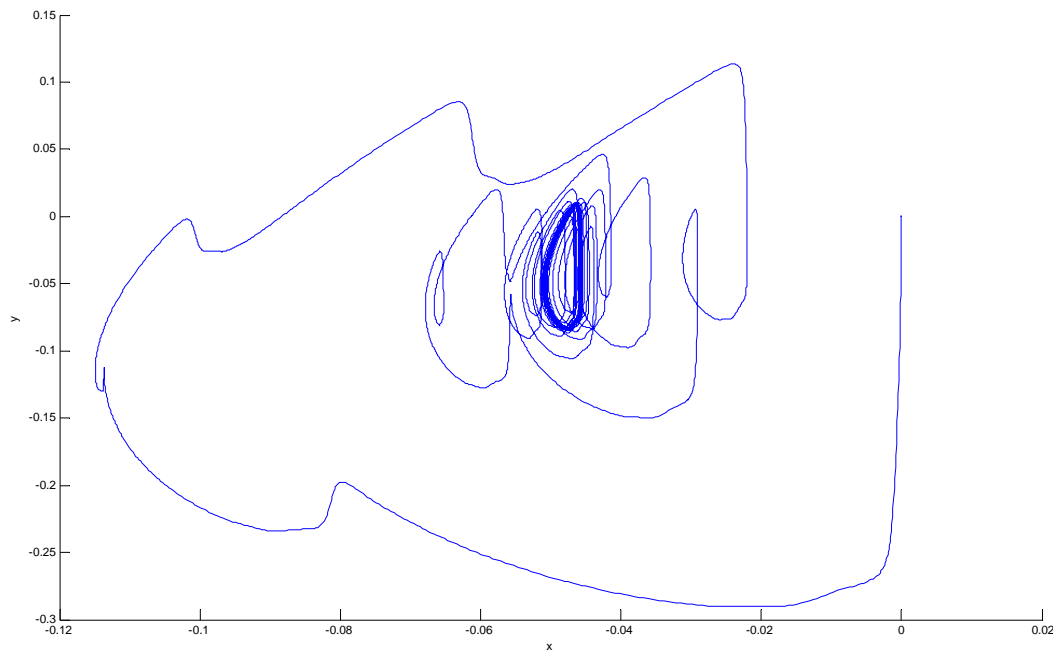
El comportamiento del sistema se estudia para diferentes valores del parámetro faltante, el voltaje de entrada  $V_{in}$ . En la figura 2.4 se muestran las dos ventanas con los parámetros ajustados.



**Figura 2. 3** Ingresando el sistema



**Figura 2. 4** Ventanas Starter e Integrator



**Figura 2. 5** Primera órbita en el Plano de Fase

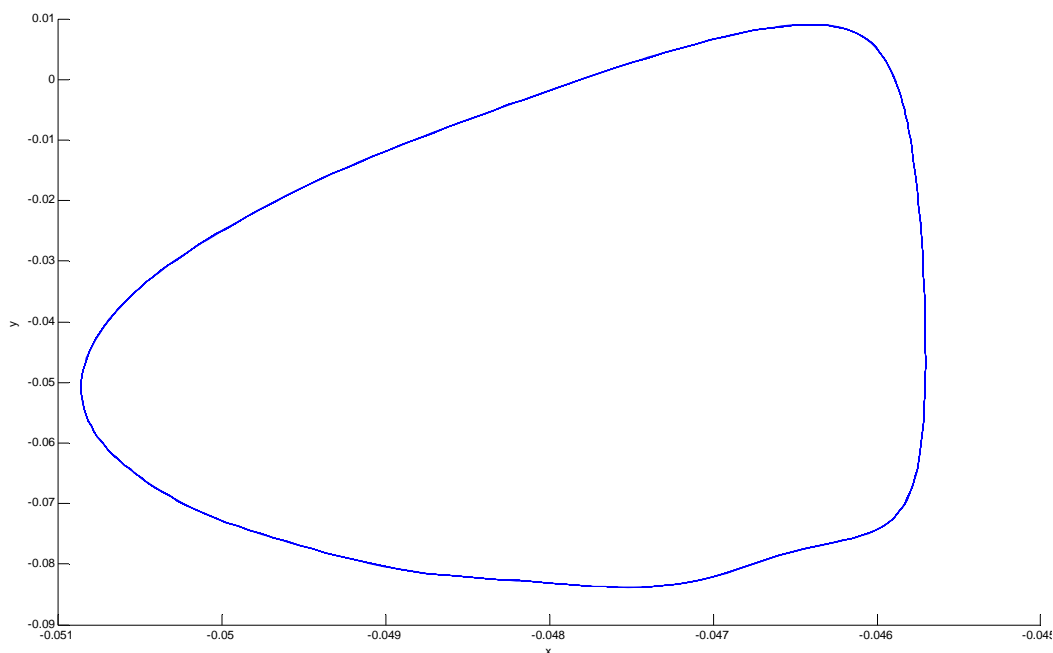
Los parámetros más importantes a ajustar en la ventana del integrador son las tolerancias y el intervalo. Si las tolerancias son muy altas (valores por defecto) el programa no alcanza a cerrar bien las órbitas, de manera que nunca se llegará a encontrar un ciclo límite. El intervalo indica cuantos puntos se van a calcular. Al principio es conveniente darle un valor grande a éste parámetro, de manera que se pueda observar la dinámica del sistema hasta que se entre a un ciclo límite. Se iniciará con un valor no tan grande, de manera que se puedan estudiar los resultados rápidamente.

Las condiciones iniciales se seleccionan de manera un poco arbitraria, sin embargo sin importar las condiciones iniciales, el sistema tiende al mismo ciclo límite.

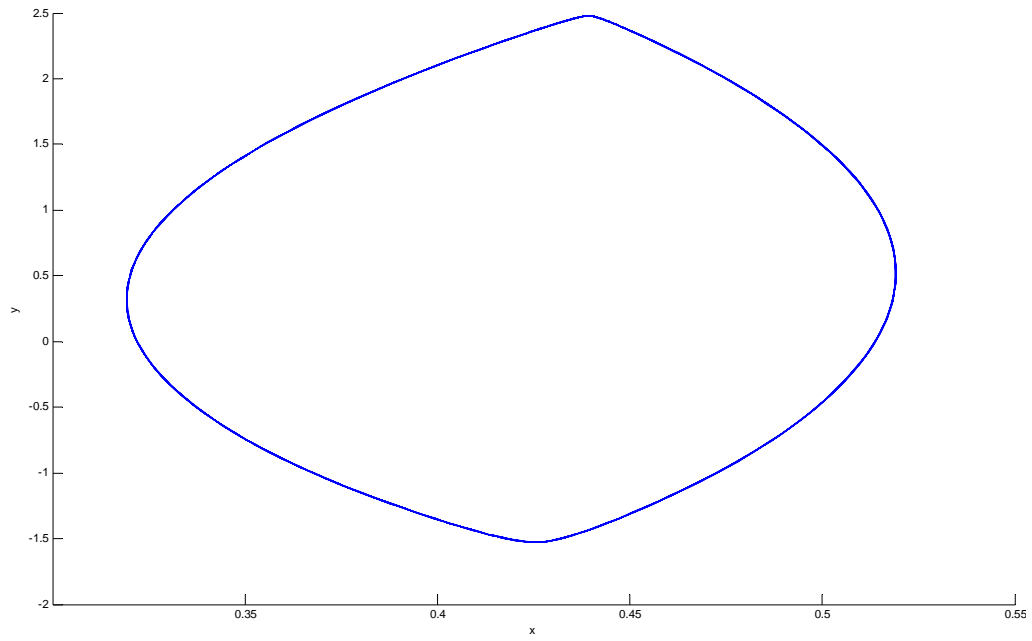
Para iniciar la simulación se va a `compute/forward`. Los resultados se pueden observar gráficamente al finalizar el cálculo yendo a `window/plot/2d plot`. Acomodando la variable  $x$  en la abscisa e  $y$  en la ordenada aparecerá la gráfica de la órbita. Como los límites de los ejes no se ajustan a la curva, es conveniente ir a `edit/axes properties` en la ventana de la figura y ajustar los límites en “auto” para cada eje. Al realizar el primer cálculo, se obtiene una curva como la de la figura 2.6.

En la figura 2.5 se aprecia que, en los últimos puntos, la órbita parece cerrarse. A partir de ese instante, puede, en la ventana del integrador, reducirse el número de puntos a calcular a 10. Haciendo clic en `plot/clear` se despeja la ventana de la gráfica. Luego se hace `compute/extend` para continuar con el trazado de la trayectoria a desde el último punto obtenido. Volviendo a ajustar los ejes cada vez que se trace una gráfica (yendo a `edit/axes properties` en la ventana de la figura) y repitiendo la extensión de la curva cuántas veces sea necesario, se llega, finalmente, a una órbita cerrada, que se observa en la figura 2.6.

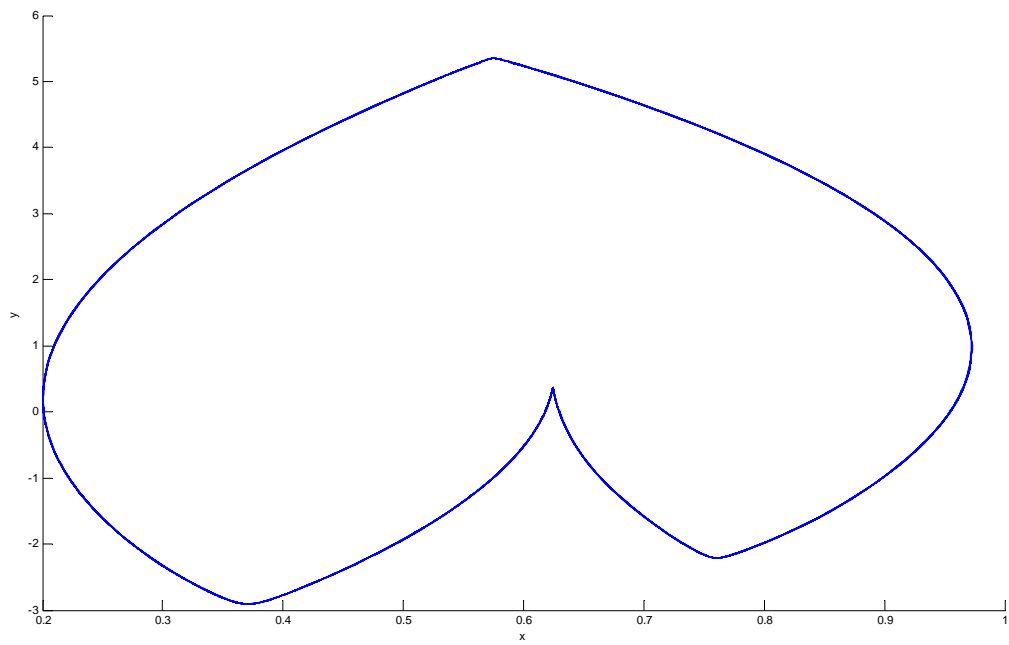
La curva de la figura 2.6 muestra la órbita cerrada que resulta al utilizar un valor de 12 Volts para el voltaje de entrada. En las siguientes figuras, se presentan órbitas para diferentes valores de este mismo parámetro, obtenidas todas con un procedimiento similar al ya descrito.



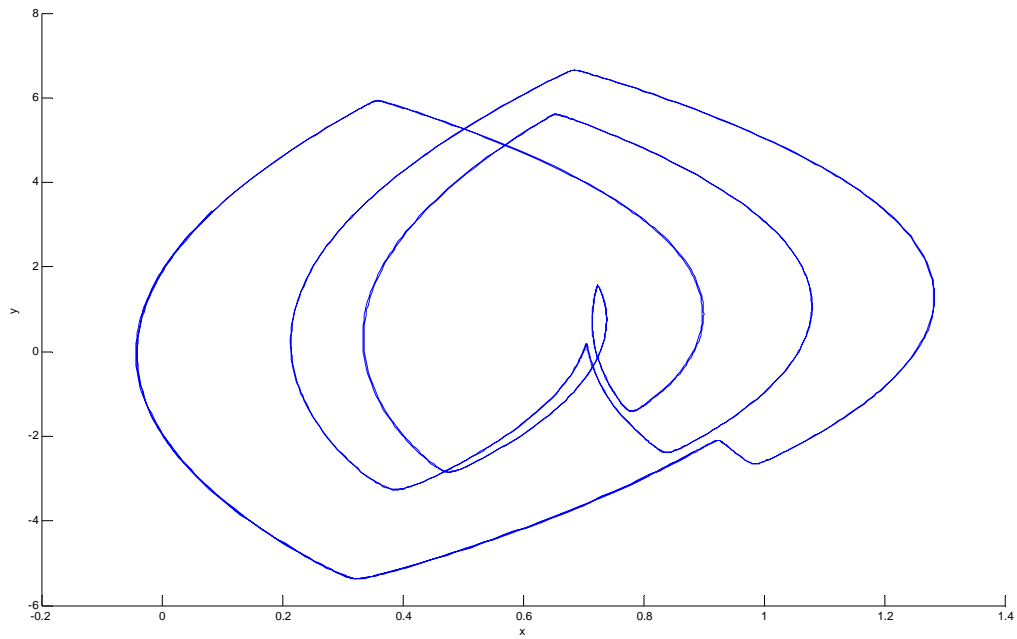
**Figura 2. 6** Órbita en el Plano de Fase Para  $V_{in}=12V$



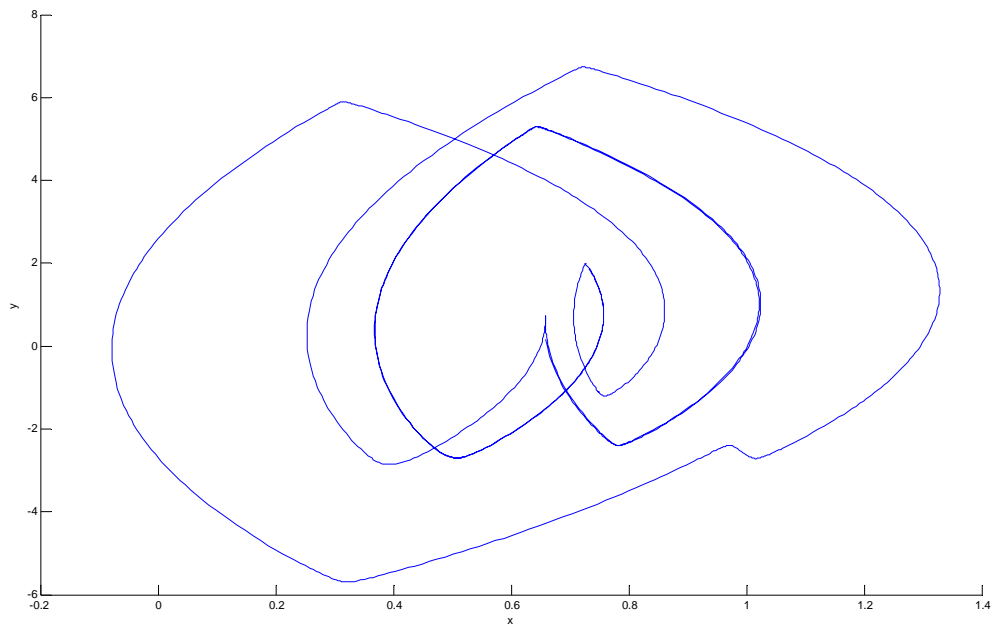
**Figura 2. 7** Órbita en el Plano de Fase Para  $V_{in}=21V$



**Figura 2. 8** Órbita en el Plano de Fase Para  $V_{in}=28V$



**Figura 2. 9** Órbita en el Plano de Fase Para  $V_{in}=32V$



**Figura 2. 10** Órbita en el Plano de Fase Para  $V_{in}=32.35V$

Los resultados de las figuras 2.6 a 2.10 pueden compararse con los que se muestran en Deane Hamill Esto comprueba la validez de la aproximación que se hizo al suavizar el modelo.

Este es el método gráfico del cálculo de orbitas que se aplicara al convertidor Buck.

## CAPITULO III

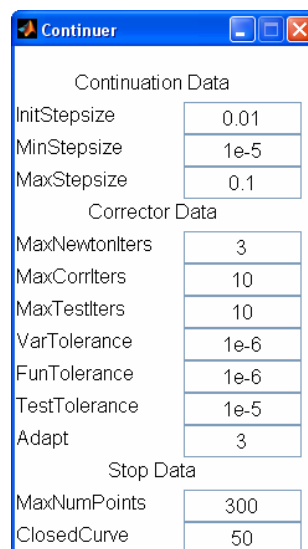
### 3. 1 Aplicación de Matcont para el cálculo de órbitas en el convertidor Buck

Tomando el modelo suavizado del convertidor Buck, se trabaja inicialmente con la serie de Fourier de ocho términos. Las gráficas de las órbitas correspondientes a diferentes valores del voltaje se obtienen, pero al intentar calcular el ciclo límite para valores de 12V, 28V y 32V se presenta un problema de convergencia

#### 3.1.1 Continuación de ciclos límite

Existen dos procedimientos para realizar el estudio de los ciclos límite de un sistema en Matcont. El primero de ellos consiste en partir de un punto de equilibrio y encontrar una bifurcación de tipo *Hopf* a partir de la cual nacen los ciclos límite, el segundo consiste en hallar el ciclo límite por integración, llegándose a una órbita cerrada a partir de la extensión continua del cálculo de una órbita en el plano de fase, procedimiento realizado en este caso.

Al lograr una órbita cerrada, como la que se ve en las figuras 2.6 a 2.10, se da clic en el botón *Select Cycle* de la ventana *Starter*. Tras ajustar la tolerancia y el número de intervalos de prueba para la búsqueda de la órbita, se abrirá entonces una nueva ventana, llamada *Continuer*, en la que se pueden ajustar los parámetros para la continuación de los ciclos límite.

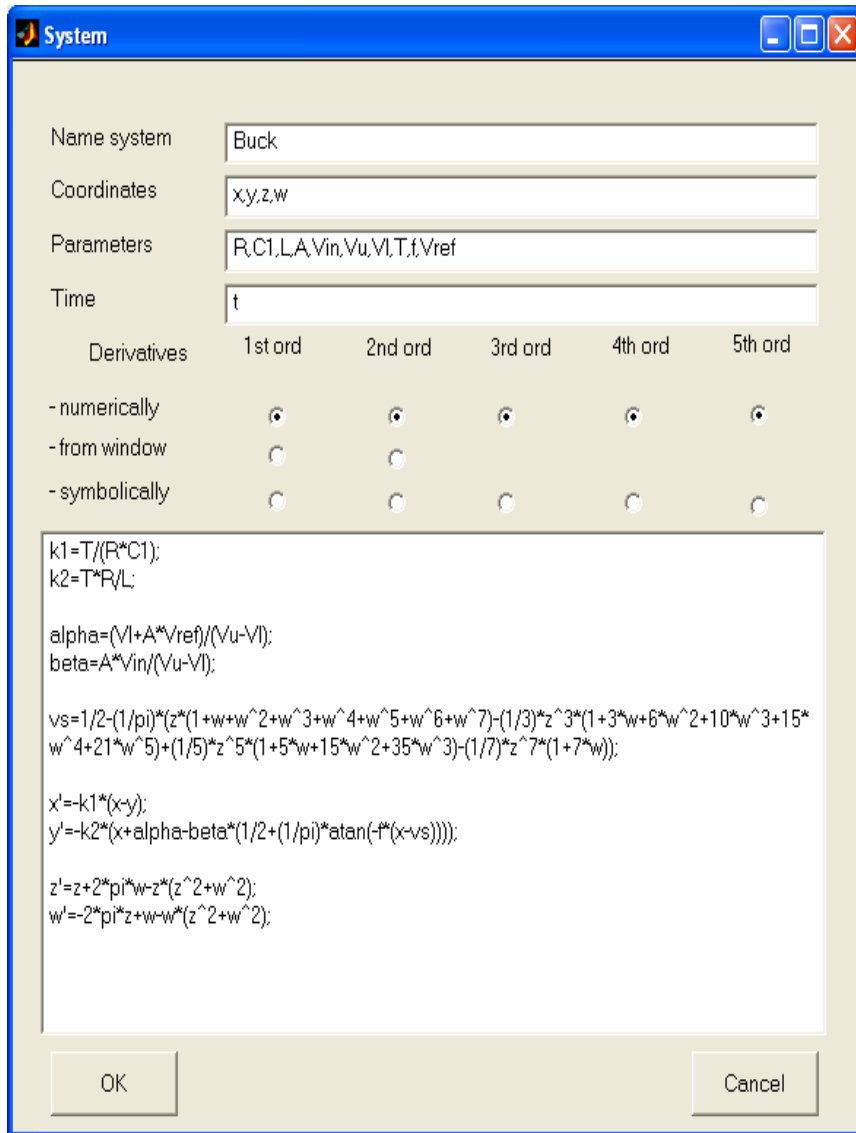


**Figura 3. 1** Ventana Continuer

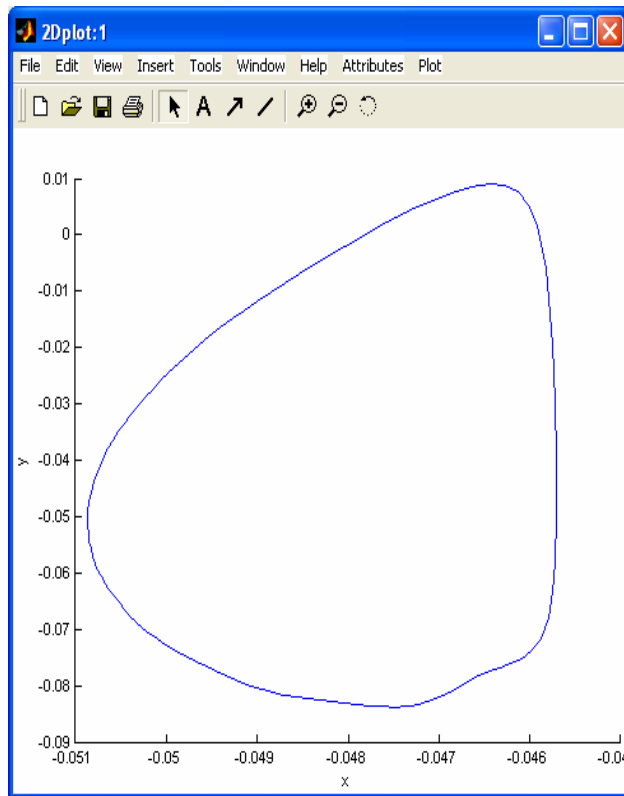
Primero se intentó realizar la continuación de ciclos límite utilizando el modelo suavizado con la serie de Fourier. Para ello se liberaron los parámetros  $V_{in}$  y el Período del ciclo en la ventana *Starter*. Al iniciar el cómputo, el programa

aparentemente inicia bien la continuación, pero se detiene tras el cálculo de unos cuantos puntos e indica que el actual tamaño de paso es muy pequeño. A pesar de que se ubicaron valores exageradamente grandes en el tamaño máximo y mínimo del paso no se consiguió que el programa realizara la continuación, para los valores de 12V,28V,32V.

### 3. 2 Graficas de las orbitas calculadas con la serie suavizada de Fourier con ocho términos

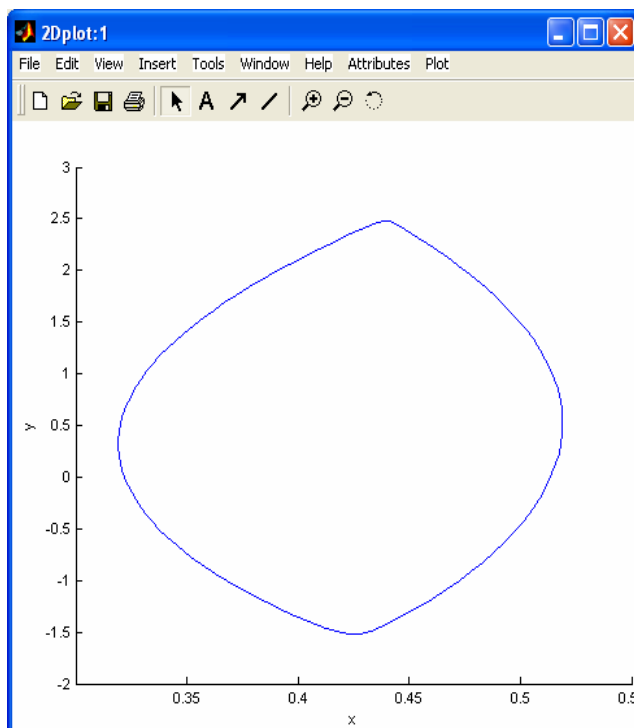


**Figura 3. 2** Ventana System que muestra la serie de Fourier suavizada utilizando ocho términos.



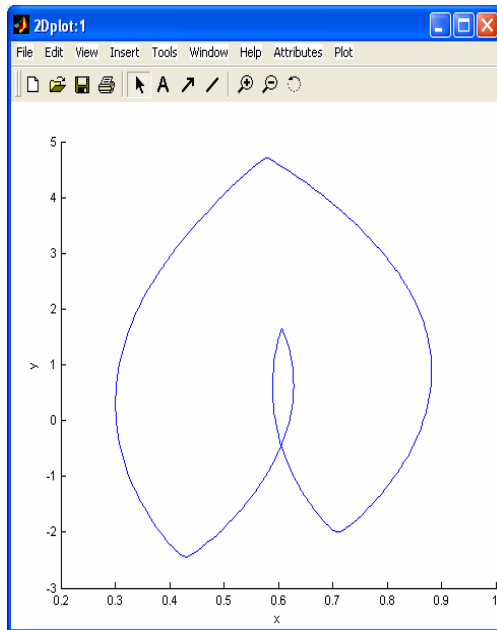
La órbita este caso no converge; se presenta un comportamiento caótico y no se puede hacer la continuación para el cálculo del ciclo límite.

**Figura 3. 3** Órbita cerrada para 12 voltios.



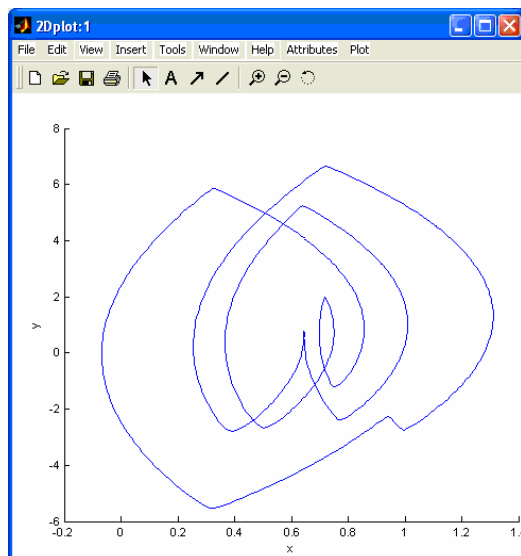
La órbita converge y se puede hacer la continuación del ciclo límite.

**Figura 3. 4** Órbita cerrada para 21 voltios.



La órbita para este caso no converge; se presenta un comportamiento caótico y no se puede hacer la continuación para el cálculo del ciclo límite.

**Figura 3. 5** Órbita cerrada para 28 voltios.



La órbita para este caso no converge; se presenta un comportamiento caótico y no se puede hacer la continuación para el cálculo del ciclo límite.

**Figura 3. 6** Órbita cerrada para 32 voltios.

### 3. 3 Otro modelo para el convertidor Buck

Al intentar realizar este mismo procedimiento con el modelo ajustado con la función valor absoluto, se registró un error en el que indicaba que la función abs de Matlab no permite más de un argumento de entrada, de manera que se escribieron funciones en lenguaje C (Archivos Mex) para implementar tanto la función valor absoluto, como la función parte entera. El modelo así trabajado, produjo buenos resultados en el cálculo de las órbitas, sin embargo, al intentar realizar la

continuación de los ciclos límite, Matcont no consiguió hallar convergencia en el punto inicial.

El siguiente es el conjunto de ecuaciones, con parámetros y variables adimensionales, que modela el comportamiento del convertidor Buck de forma que se obtenga el mismo comportamiento que la función escalón. Una vez más, el sistema deberá volverse autónomo, para lo cual se agrega una tercera variable de estado  $z$ , tal que  $z=1$ .

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= -k_1(x - y) \\ \frac{dy}{ds} &= -k_2(x + \alpha - \beta u)\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\text{Con } u = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \text{Fract}(s) \\ 0 & \text{si } x > \text{Fract}(s) \end{cases}$$

En los intentos anteriores, se buscó suavizar la acción de control *on-off* aproximando la rampa de entrada mediante una serie de Fourier truncada a ocho términos. Ahora se busca realizar las simulaciones utilizando un modelo más exacto de la función escalón.

Para evaluar la función **Fract**( $s$ ), se utiliza la función parte entera:

$$\text{Fract}(s) = S - \lfloor S \rfloor\tag{3.2}$$

De la misma manera, el estado de la variable de control  $u$  se puede definir así:

$$u = \frac{(x - \text{Fract}(s)) - |x - \text{Fract}(s)|}{2 * (x - \text{frac}(s))}\tag{3.3}$$

El modelo se introdujo en Matcont, donde se trazaron las órbitas que se observan en las figuras siguientes. La tolerancia, se redujo hasta  $10^{-12}$  para poder obtener resultados similares a los obtenidos con el modelo anterior y presentados también en el artículo de Deane y Hamill [12].

A continuación se definen las órbitas para los valores de  $V_{in}$  calculados en la sección anterior, pero en este caso utilizando archivos Mex en el cálculo de la serie de Fourier.

### 3.4 Los Archivos-Mex.

Los archivos Mex son una manera de llamar rutinas de C o de Fortran directamente de matlab como si fueran funciones del built-in de matlab. Los archivos Mex son subprogramas dinámicamente ligados producidos en código fuente de C o del Fortran.

Los dos componentes de un archivo-Mex pueden estar separados o combinados. En cualquier caso, los archivos deben contener la librería: `#include "mex.h"` como librería

para que de esta manera se declaren el punto de la entrada y las rutinas de la interfase propiamente. El nombre de la rutina de la entrada siempre debe ser *mexFunction* y debe contener los siguientes parámetros.

*mexFunction ( int nlhs , mxArray \*plhs[ ] , int nrhs , const mxArray \*prhs [ ] )*

Donde *nlhs* y *plhs* son llamados parámetros de izquierda (l = left) - y argumentos diestros *nrhs* y *prhs* (r= righth) con que el archivo-mex se invoca. La sintaxis en el lenguaje de MATLAB, poseen la forma general de funciones:

[ X , Y , Z ... ] = 'función'( a , b , c , ... )

Donde (...) denota las variables adicionales del mismo formato (entrada/salida). Los argumentos a , b , c , ... denotan parámetros de izquierda; por lo tanto los X , Y , Z ... son los argumentos diestros. Los parámetros *plhs* y *prhs* son vectores que contienen los indicadores a la izquierda y argumentos diestros del archivo-Mex. Note que los dos se declaran conteniendo *mxArray* del tipo \* que indican que las variables apuntan son las cadenas de Matlab. Además *nrhs* representan el tamaño de los argumentos de entrada laterales diestros al archivo-mex, y el *nlhs* representa el valor de posiciones de *plhs* que el archivo-mex (función) genera.

Los argumentos son:

- *Nlhs*, el número de posiciones de los indicadores de izquierda (los argumentos del retorno que se pone a MATLAB con el número de *mxArrays* esperado).
- *plhs [ ]*, un vector de indicadores a los argumentos del retorno. (que al iniciar el programa se leen como una serie de indicadores NULOS.)
- *nrhs*, el número de posiciones de los argumentos diestros (los argumentos entrada que se adquiere de MATLAB con número de *mxArrays* de la entrada).
- *prhs [ ]* un vector de indicadores a los argumentos de la entrada (se adquieren de MATLAB como una serie de indicadores de entrada .Estos *mxArrays* se declaran como constantes; estos sólo se leen y no deben modificarse por el archivo-mex. Cambiando los datos en estos *mxArrays* pueden producir el error).

En el caso de estudio del convertidor Buck, no se puede utilizar en el system instrucciones como valor absoluto o parte entera de un número; entonces se debe programar en C y trabajarlas como archivos mex. El código en C para estos dos casos es el siguiente:

```
#include "mex.h"
//Función que calcula el valor absoluto de un número
double absoluto(double x){
    double y;
    if(x<0){
        y=-x;
    }
}
```

```

else{
    y=x;
}
return y;
}
//Funcion de intercambio (Gateway function)
void mexFunction(int nlhs, mxArray *plhs[], int nrhs,const mxArray *prhs[]){
    double *x,*y;
    //Verificar cantidad correcta default:argumentos de entrada y salida
    if(nrhs!=1){
        mexErrMsgTxt("Se necesita una sola entrada.");
    }
    if(nlhs>1){
        mexErrMsgTxt("Muchos argumentos de salida.");
    }
    //Verificar que la entrada sea un escalar real de tipo doble
    if(mxIsComplex(prhs[0])||!(mxGetM(prhs[0])&&mxGetN(prhs[0]))) {
        mexErrMsgTxt("La entrada debe ser un escalar real.");
    }
    //Se crea la variable default:salida
    plhs[0] = mxCreateDoubleMatrix(1,1,mxREAL);
    //Se asignan los punteros
    x = mxGetPr(prhs[0]);
    y = mxGetPr(plhs[0]);
    //Llamada a la función
    *y=absoluto(*x);
}

```

*Código en C++ del programa para el cálculo del valor absoluto*

```

#include "mex.h"
//Función que calcula la parte entera de un número
int partente(double x){
    int y;
    y=100*x;
    y=y/100;
}
//Funcion de intercambio (Gateway function)
void mexFunction(int nlhs, mxArray *plhs[], int nrhs,const mxArray *prhs[]){
    double *x,*y;
    //Verificar cantidad correcta default:argumentos de entrada y salida
    if(nrhs!=1){
        mexErrMsgTxt("Se necesita una sola entrada.");
    }
    if(nlhs>1){
        mexErrMsgTxt("Muchos argumentos de salida.");
    }
    //Verificar que la entrada sea un escalar real de tipo doble

```

```

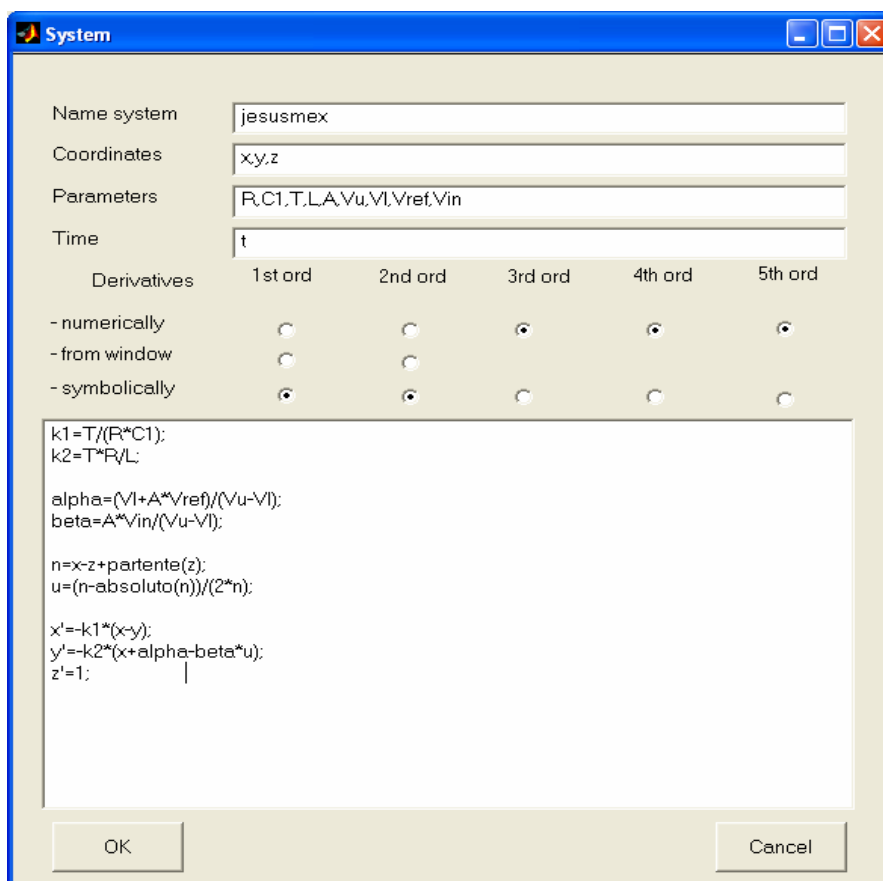
if(mxIsComplex(prhs[0])||(mxGetM(prhs[0])&&mxGetN(prhs[0]))) {
    mexErrMsgTxt("La entrada debe ser un escalar real.");
}
//Se crea la variable default:salida
plhs[0] = mxCreateDoubleMatrix(1,1,mxREAL);
//Se asignan los punteros
x = mxGetPr(prhs[0]);
y = mxGetPr(plhs[0]);
//Llamada a la función
*y=partente(*x);
}

```

*Código en C++ del programa para el cálculo de la parte entera de un número.*

Estos dos programas se guardan en la carpeta work de Matlab; en este momento se pueden utilizar para los cálculos necesarios en Matcont.

Para el caso del cálculo de las órbitas para valores del voltaje de 12, 21, 28 y 32 el System utilizando archivos Mex, el System que define el convertidor es el siguiente:



**Figura 3. 7** Modelo del convertidor Buck utilizando archivos Mex

En todos los casos en que se calcula las órbitas utilizando archivos Mex estas no convergen; se observa la falta de diferenciabilidad cuando se dan las conmutaciones.

Todas son órbitas inestables. Por lo que se puede apreciar que se presenta un comportamiento caótico.

### 3.5 Aplicación de Matcont para el cálculo de ciclos límite en el convertidor Buck utilizando archivos Mex.

#### 3.5.1 Voltaje de entrada 12 voltios.

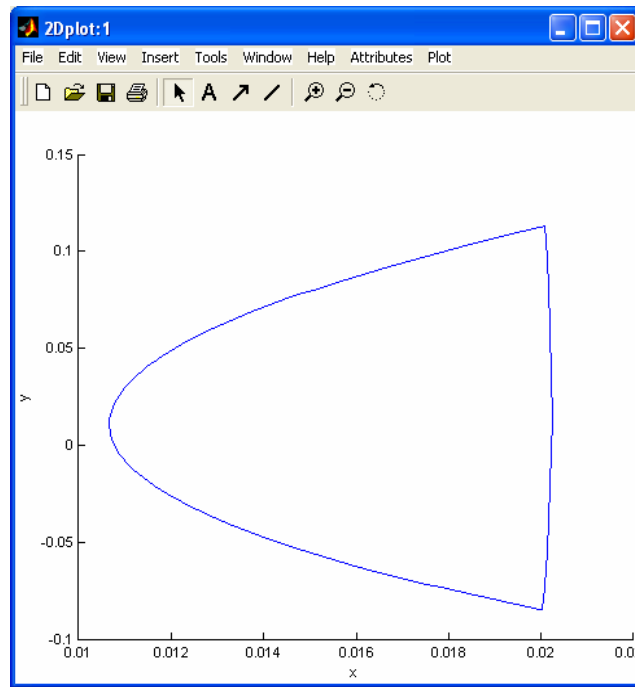


Figura 3. 8 Órbita cerrada para  $V_{in}$  12V utilizando archivos Mex.

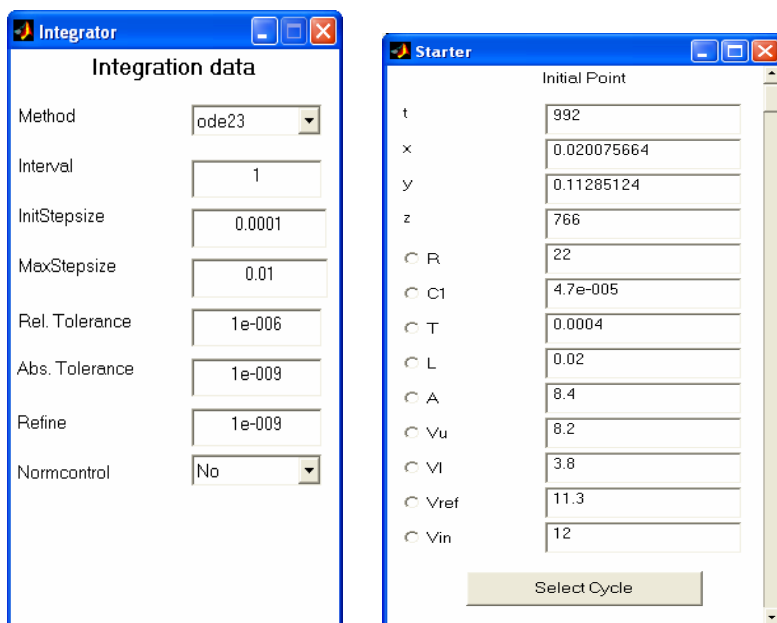


Figura 3. 9 Ventanas Starter e Integrador. La órbita no converge. No se puede hacer la Continuación.

### 3.5.2 Voltaje de entrada 21 voltios

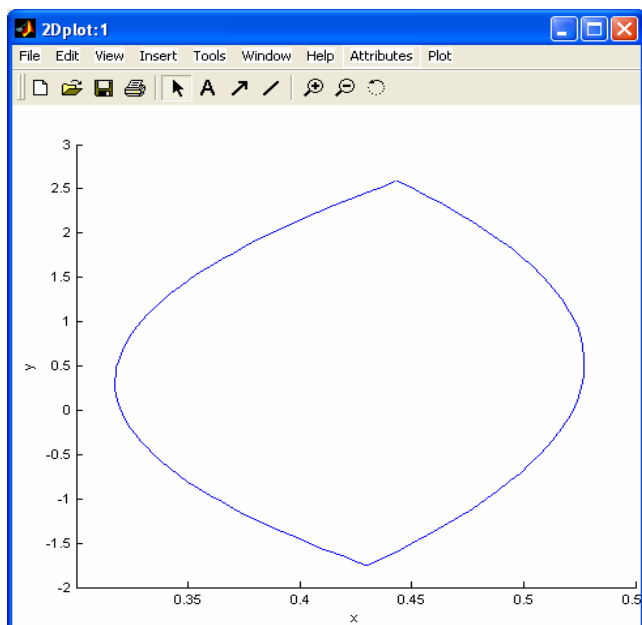


Figura 3. 10 Órbita cerrada para  $V_{in}$  21V utilizando archivos Mex.

**Integrator**

**Integration data**

Method	ode23
Interval	1
InitStepsize	0.0001
MaxStepsize	0.01
Rel. Tolerance	1e-006
Abs. Tolerance	1e-009
Refine	1e-009
Normcontrol	No

**Starter**

**Initial Point**

t	992
x	0.020075664
y	0.11285124
z	766
<input type="radio"/> R	22
<input type="radio"/> C1	4.7e-005
<input type="radio"/> T	0.0004
<input type="radio"/> L	0.02
<input type="radio"/> A	8.4
<input type="radio"/> Vu	8.2
<input type="radio"/> Vi	3.8
<input type="radio"/> Vref	11.3
<input checked="" type="radio"/> Vin	21

Select Cycle

Figura 3. 11 Ventanas Numérica y Starter. La órbita no converge. No se puede hacer la continuación.

### 3.5 3 Voltaje de entrada 28 voltios

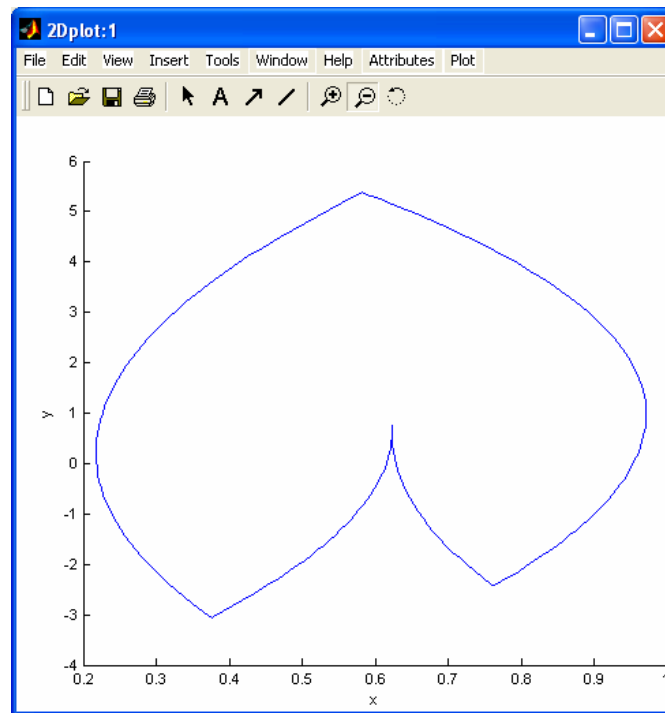


Figura 3. 12 Órbita cerrada para  $V_{in}$  28V utilizando archivos Mex.

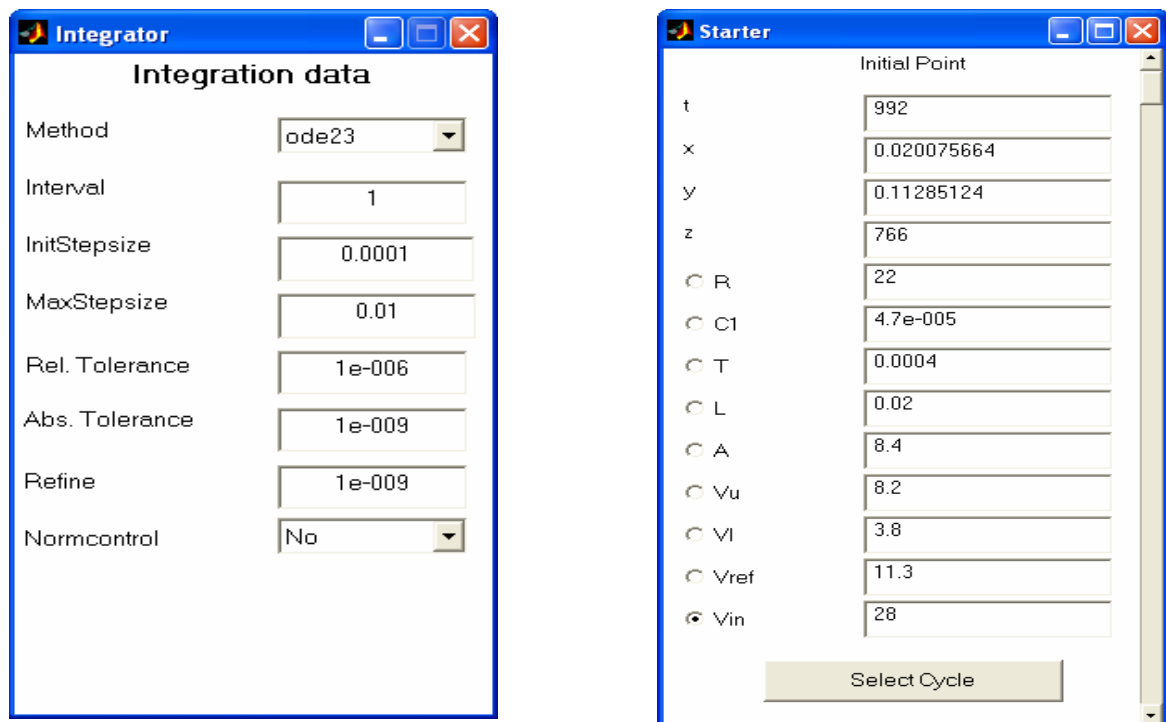


Figura 3. 13 Ventanas Integrador y Starter para  $V_{in}$  28V. La órbita no converge. No se puede hacer la Continuación.

### 3.5 4 Voltaje de entrada 32 voltios

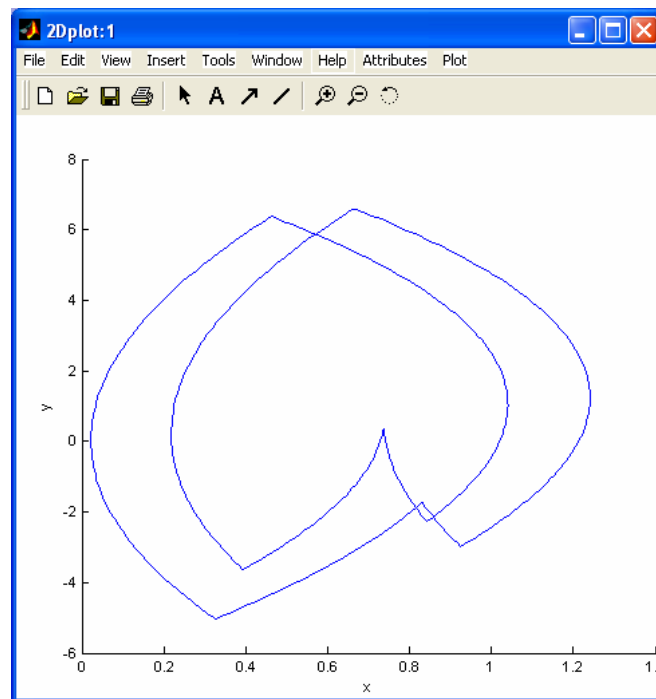


Figura 3. 14 Órbita cerrada para  $V_{in}$  32V utilizando archivos Mex.

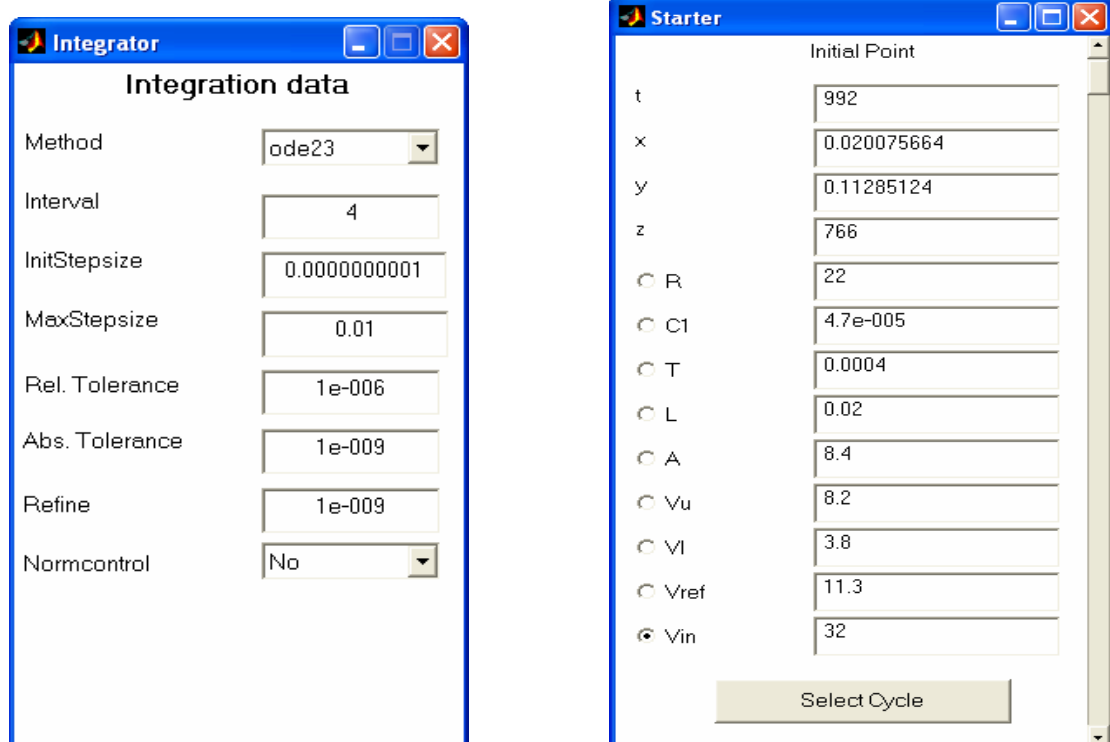


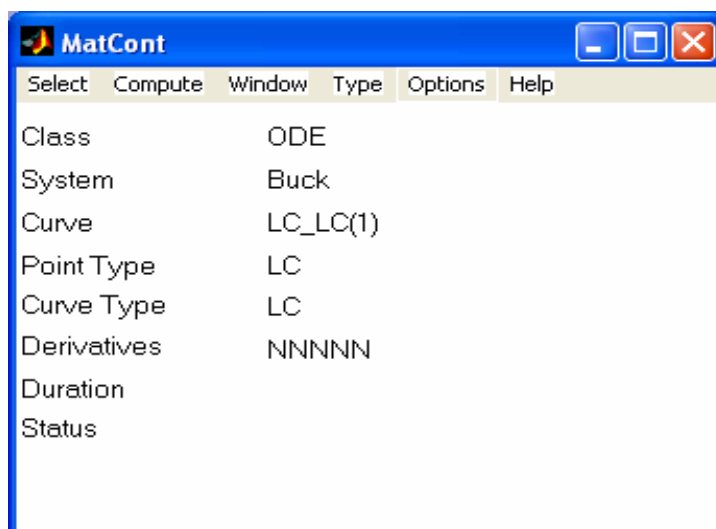
Figura 3. 15 Ventanas Integrador y Starter para  $V_{in}$  32V. La órbita no converge. No se puede hacer la Continucción.

## CAPITULO IV

### 4.1 Aplicación de Matcont para el cálculo de ciclos límite en el convertidor Buck, serie de Fourier utilizando solo un término

La serie de Fourier es llevada a un solo término, entonces el convertidor se suaviza lo suficiente para permitir la continuación, y por tanto el cálculo del ciclo límite para diferentes valores del voltaje de entrada se puede calcular.

A continuación se aplicará el toolbox de Matlab al cálculo de ciclos límite para diferentes valores de voltaje.



**Figura 4. 1** Ventana del Matcont.

Primero se calcula la órbita para un determinado voltaje de entrada, la cual puede ser 1T, 2T, 4T, según el caso. Cuando la órbita se cierra se trabaja con seletc cycle y se selecciona uno de los parámetros por ejemplo  $V_{in} = 12$ . Se calculó luego el ciclo límite hacia adelante, y luego hacia atrás, para los diferentes valores del Voltaje.

**System**

Name system: Buck|1 termino

Coordinates: x,y,z,w

Parameters: R,C1,L,A,T,f,Vref,Vin,Vu,VI

Time: t

Derivatives	1st ord	2nd ord	3rd ord	4th ord	5th ord
- numerically	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>
- from window	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
- symbolically	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

```

k1=T/(R*C1);
k2=T*R/L;

alpha=(VI+A*Vref)/(Vu-VI);
beta=A*Vin/(Vu-VI);

vs=1/2-(1/pi)*z;

x'=-k1*(x-y);
y'=-k2*(x+alpha-beta*(1/2+(1/pi)*atan(-f*(x-vs))));

z'=z+2*pi*w-z*(z^2+w^2);
w'=-2*pi*z+w-w*(z^2+w^2);

```

OK Cancel

**Figura 4. 2** Ventana System para la serie de Fourier truncada a un término.

### 4.1.1 Voltaje de entrada 12V

Inicialmente tomamos como voltaje de entrada  $V_{in} = 12$  voltios.

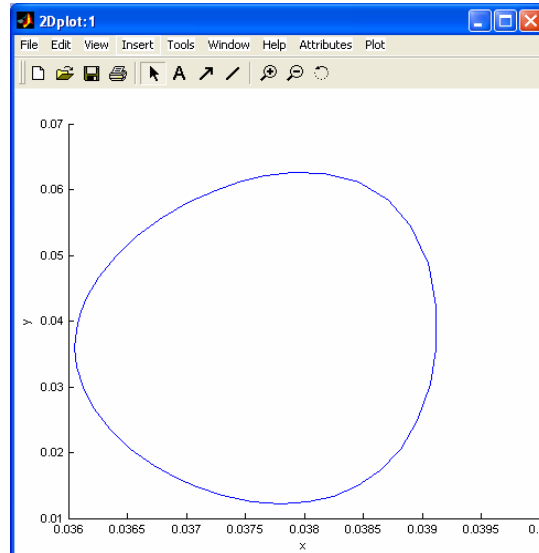


Figura 4. 3 Órbita cerrada para 12 voltios.

**Starter**

Initial Point

R: 22

C1: 4.7e-005

L: 0.02

A: 8.4

T: 0.0004

f: 50

Vref: 11.3

Vin: 12

Vu: 8.2

V: 3.8

Period: 0.973997

Jacobian Data

increment: 1e-005

Discretization Data

ntst: 20

ncol: 4

Monitor Singularities

Branching: yes

**Continuer**

Continuation Data

InitStepsize: 0.01

MinStepsize: 1e-5

MaxStepsize: 0.1

Corrector Data

MaxNewtonIters: 3

MaxCorrIters: 10

MaxTestIters: 10

VarTolerance: 1e-6

FunTolerance: 1e-6

TestTolerance: 1e-5

Adapt: 3

Stop Data

MaxNumPoints: 300

ClosedCurve: 50

Figura 4. 4 Ventanas Starter y Continuator con los valores para obtener la órbita.

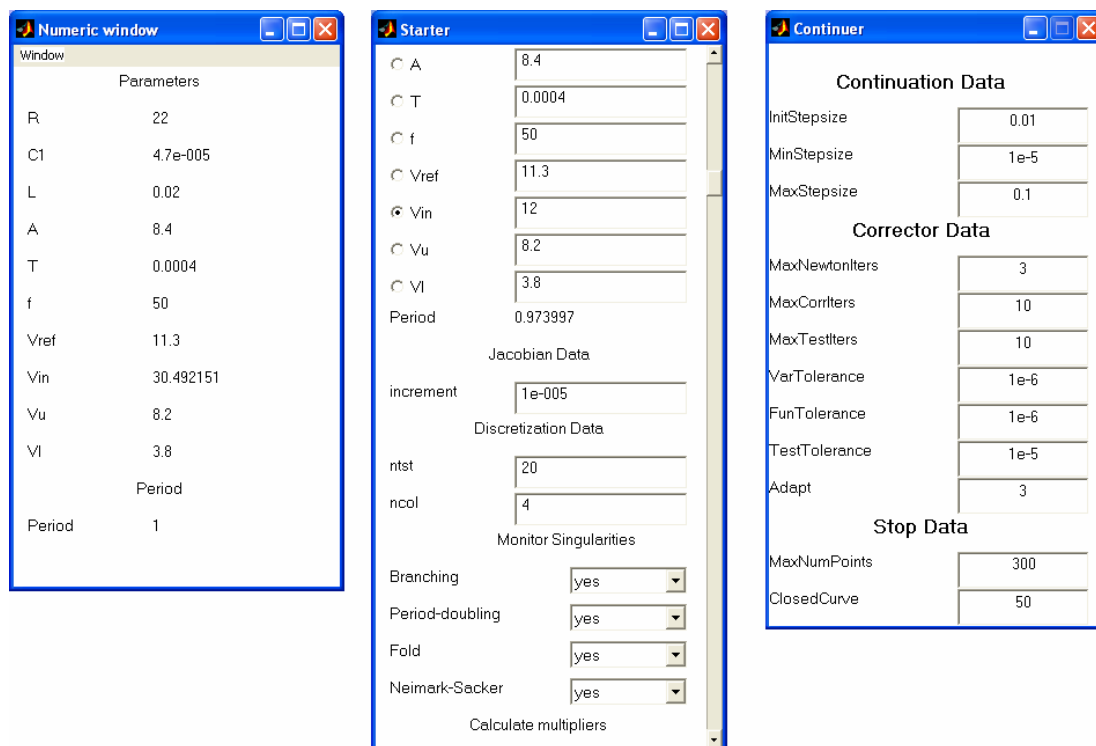


Figura 4. 5 Ventanas de valores Numéricos, Iniciador y Continuator para 12 voltios.

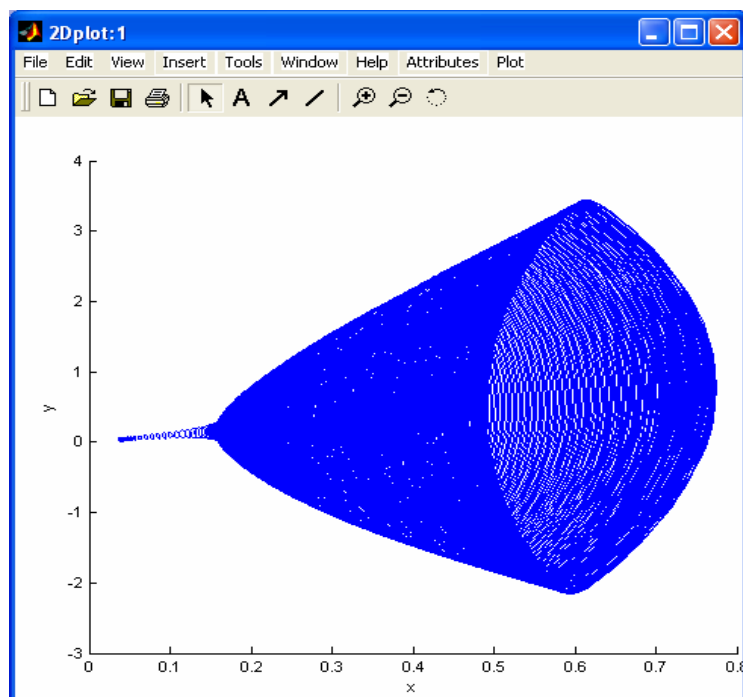


Figura 4. 6 Ciclo límite encontrado, en el modo forward; aparece un período doble.

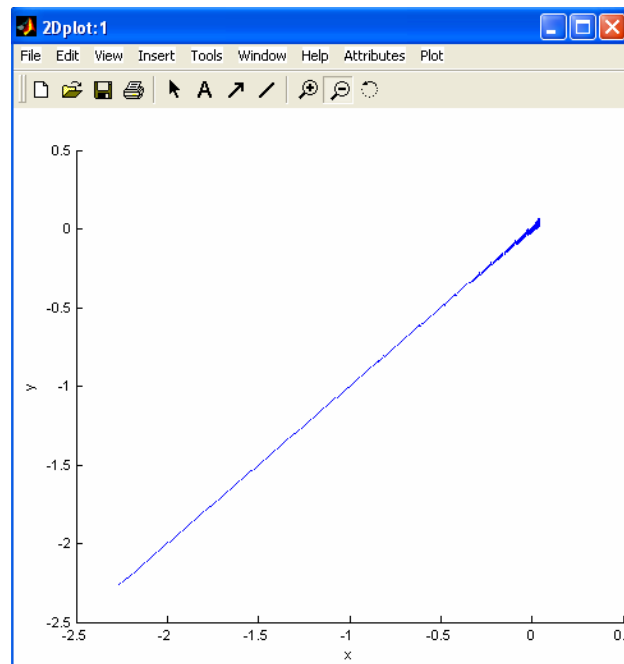


Figura 4. 7 Ciclo límite calculado para 12 voltios. En el modo backward.

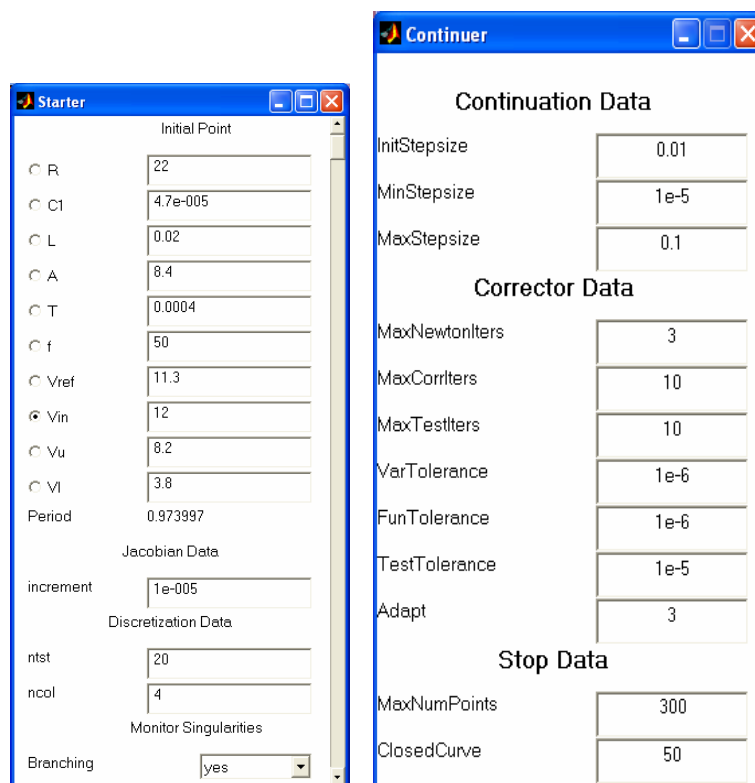


Figura 4. 8 Ventanas Starter y Continuator con las que es obtuvo el Ciclo Límite.

### 4.1.2 Voltaje de entrada 21V

Ahora tomamos como voltaje de entrada  $V_{in} = 21$  voltios.

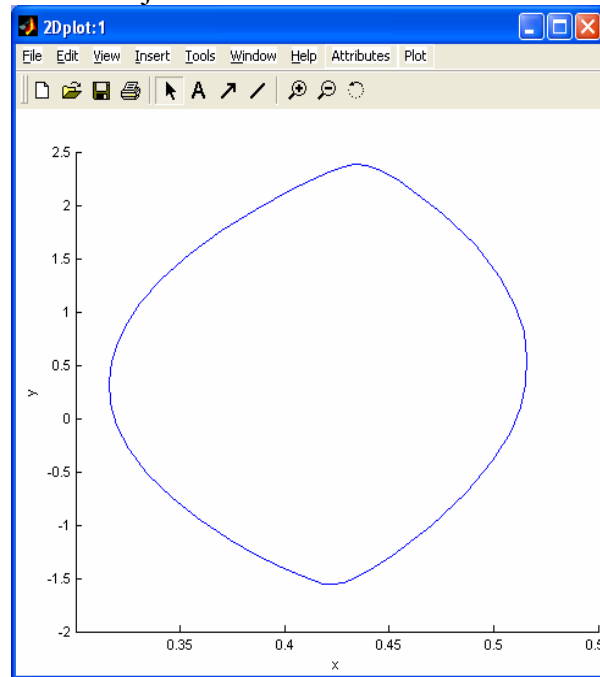


Figura 4. 9 Órbita cerrada para  $V_{in} = 21$  V

**Starter**

Initial Point

t	1243
x	0.51370584
y	0.86665703
z	0.95120236
w	0.30856775
<input type="radio"/> R	22
<input type="radio"/> C1	4.7e-005
<input type="radio"/> L	0.02
<input type="radio"/> A	8.4
<input type="radio"/> T	0.0004
<input type="radio"/> f	50
<input type="radio"/> Vref	11.3
<input type="radio"/> $V_{in}$	21
<input type="radio"/> $V_u$	8.2
<input type="radio"/> $V_l$	3.8

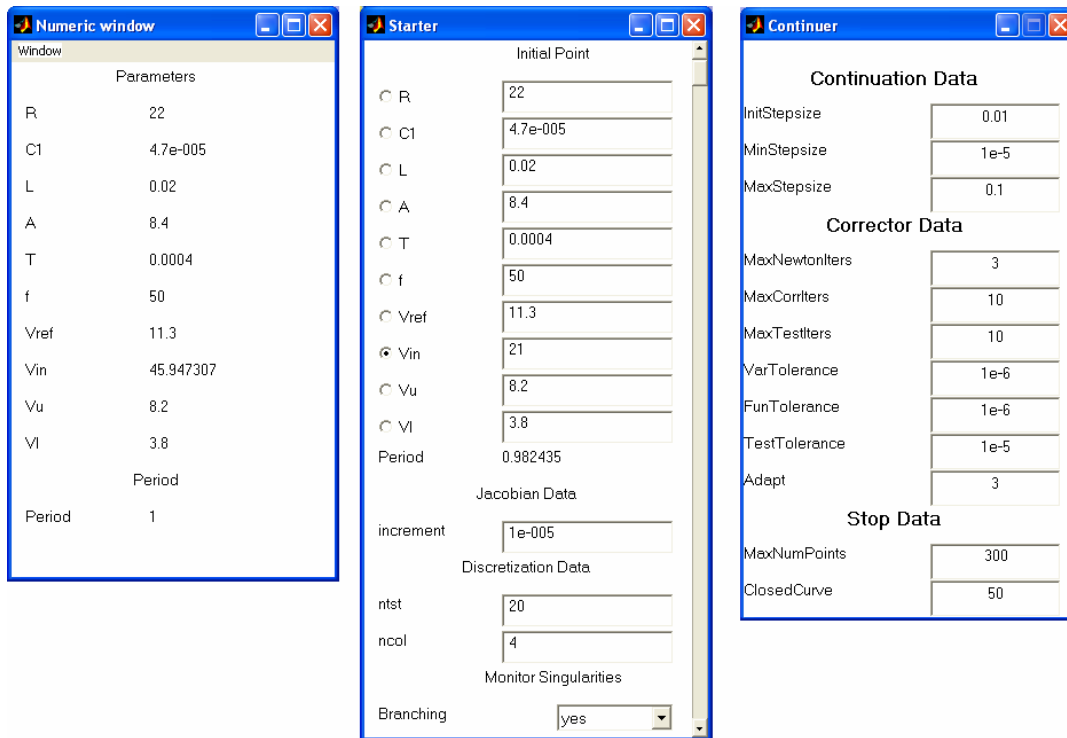
Select Cycle

**Integrator**

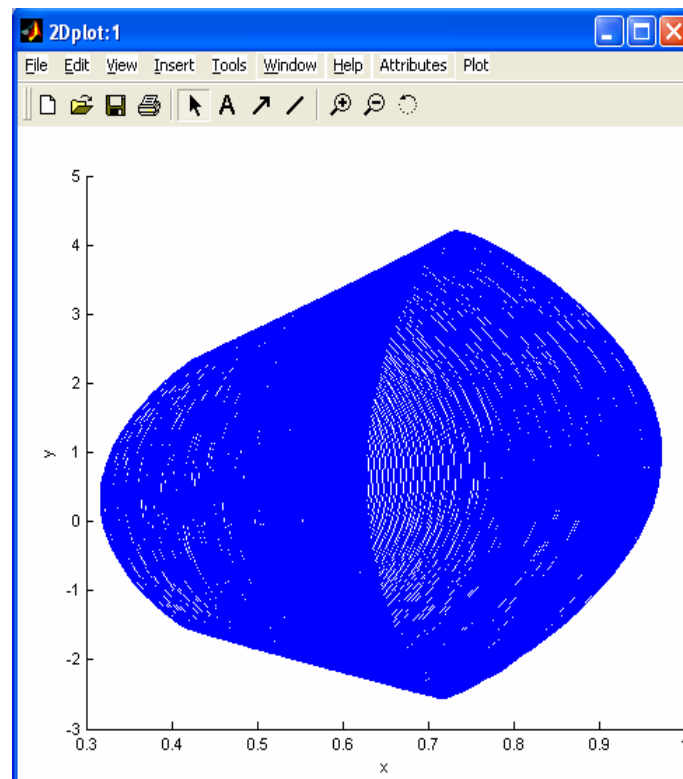
Integration data

Method	ode45
Interval	1
InitStepsize	0.001
MaxStepsize	0.1
Rel. Tolerance	1e-006
Abs. Tolerance	1e-009
Refine	1e-009
Normcontrol	No

Figura 4. 10 Ventanas Starter e Integrador con los valores con los que se obtuvo la órbita.



**Figura 4. 11** Ventanas Numérica, Starter y Continuator, con los valores con los cuales se graficó el ciclo límite.



**Figura 4. 12** Ciclo límite para  $V_{in} = 21V$  calculado en modo forward.

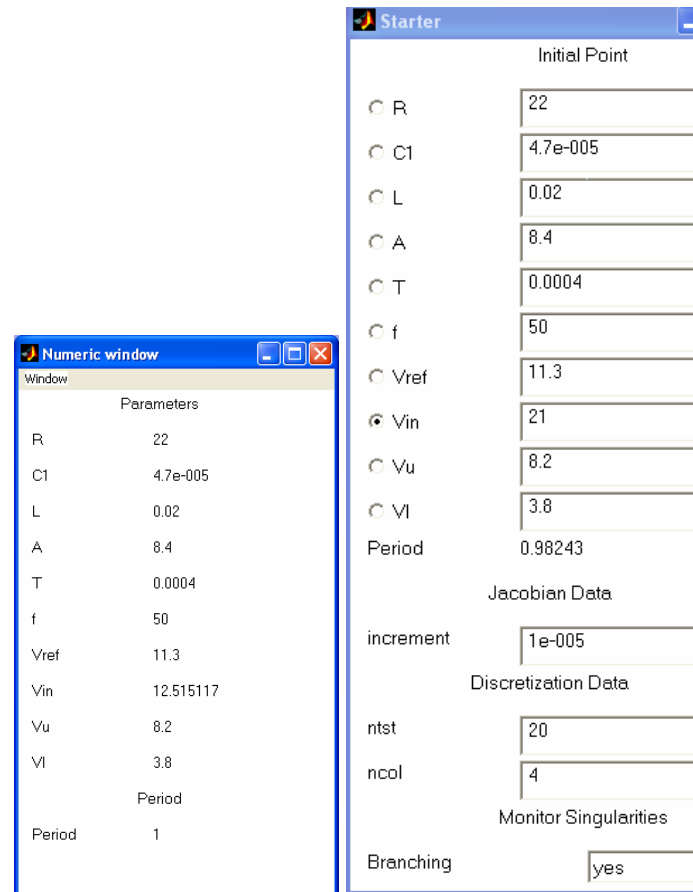


Figura 4. 13 Ventana numérica en donde se muestra el valor para el periodo doble.

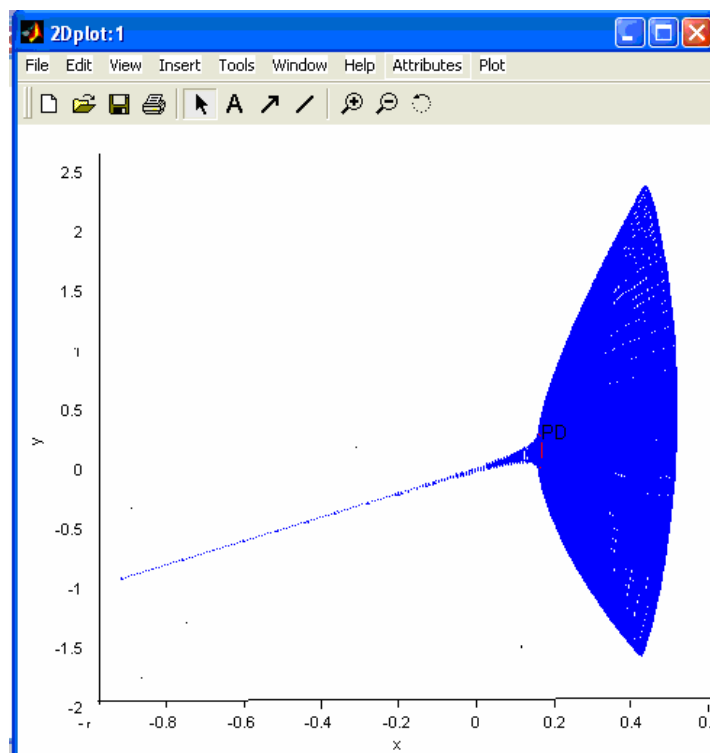


Figura 4. 14 Ciclo limite calculado para 21 voltios en modo backward.

### 4.1.3 Voltaje de entrada 28V

Ahora tomamos como voltaje de entrada  $V_{in} = 28$  voltios.

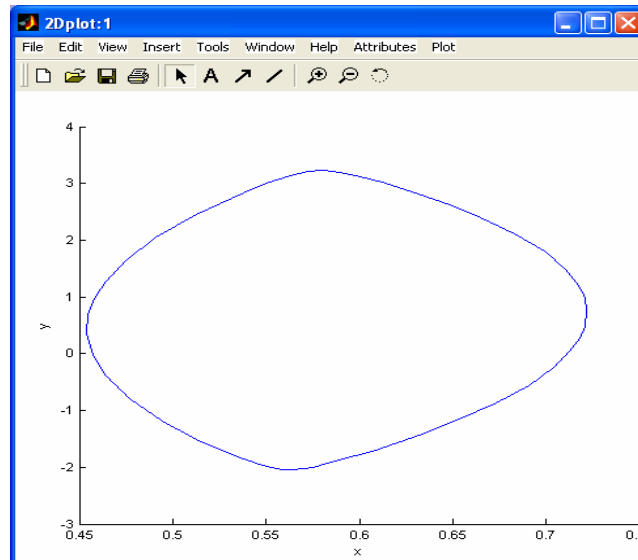


Figura 4. 15 Órbita cerrada para  $V_{in} 28V$

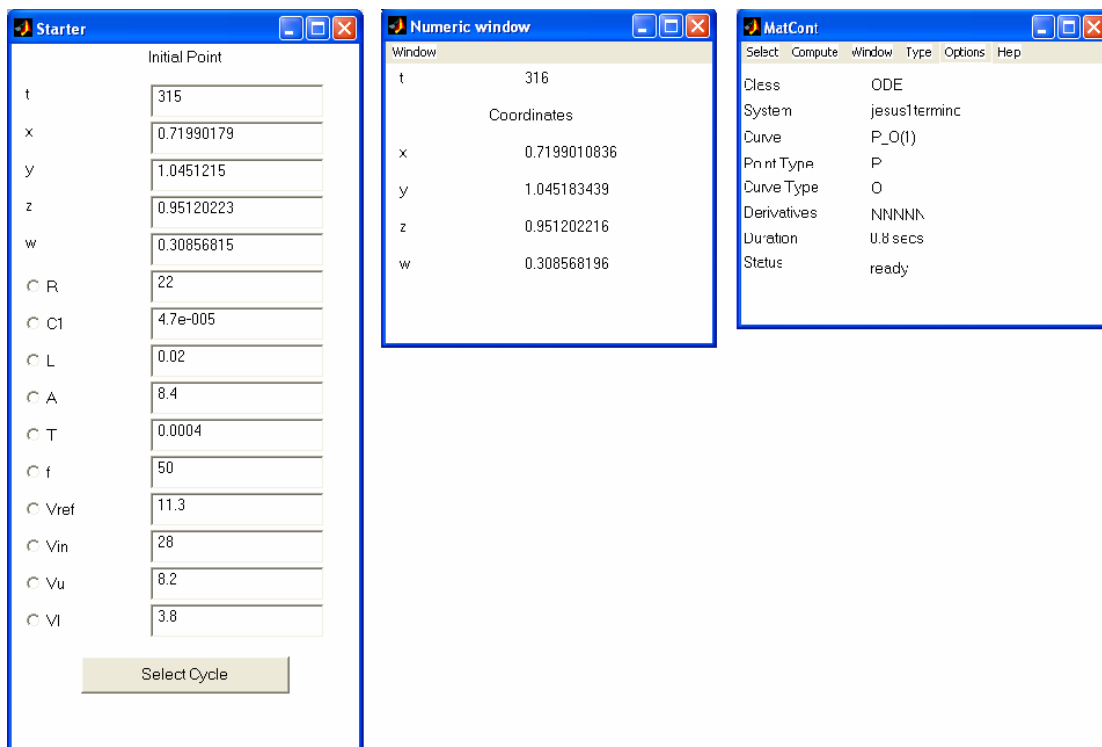
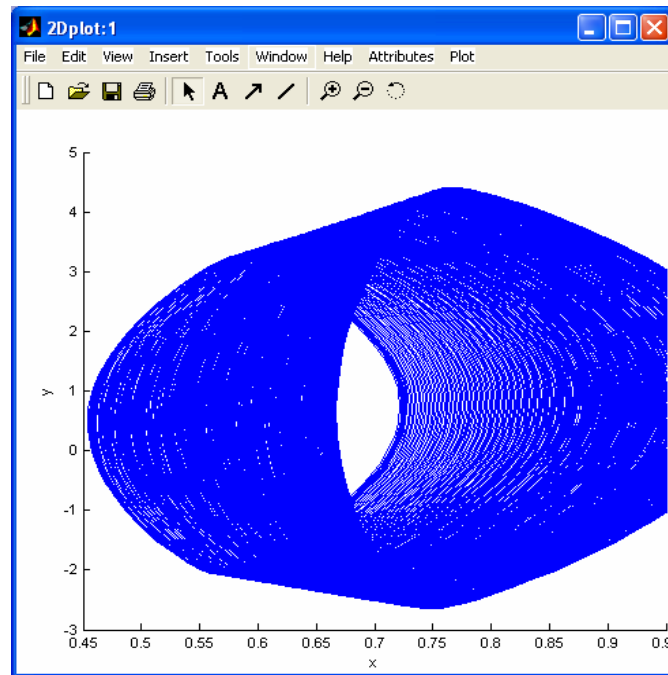
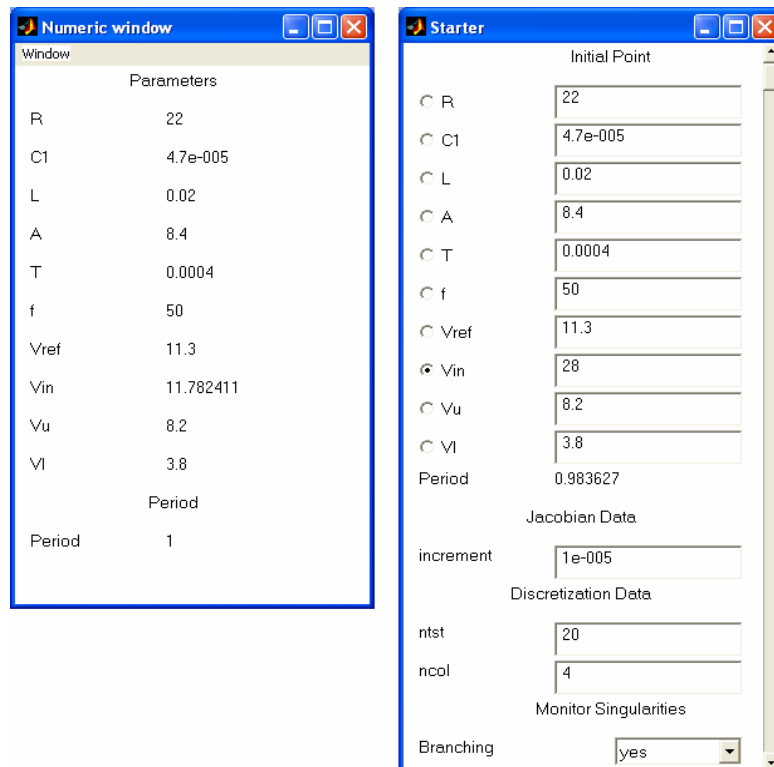


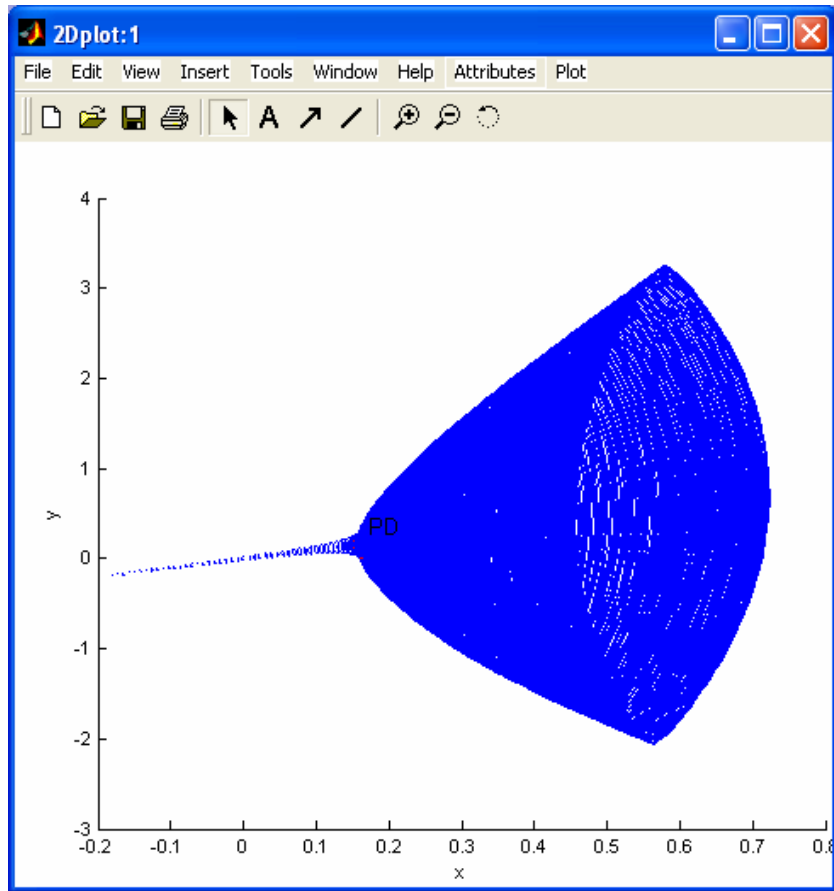
Figura 4. 16 Ventanas Starter, Numérica y Matcont para la obtención de la órbita.



**Figura 4. 17** Ciclo limite para 28 voltios en modo forward.



**Figura 4. 18** Ventanas Numérica y Starter para obtención del ciclo limite.



**Figura 4. 19** Ciclo limite para voltaje 28 en modo backward. Aparece periodo doble.

#### 4.1. 4 Voltaje de entrada 32V

Ahora tomamos como voltaje de entrada  $V_{in} = 32$  voltios.

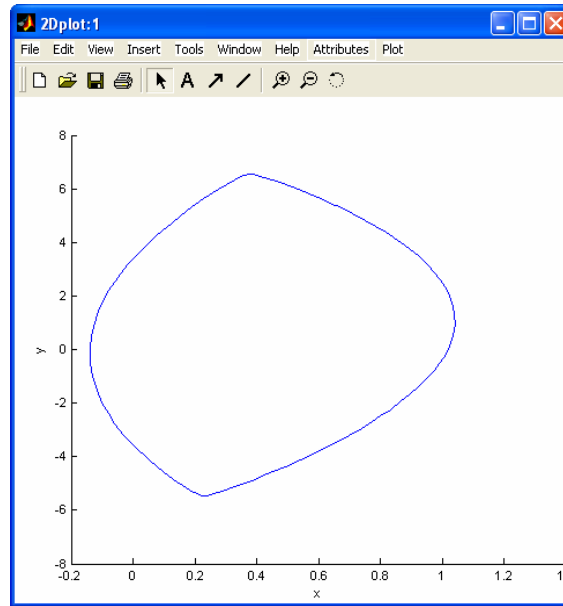


Figura 4. 20 Órbita cerrada para  $V_{in} 32V$

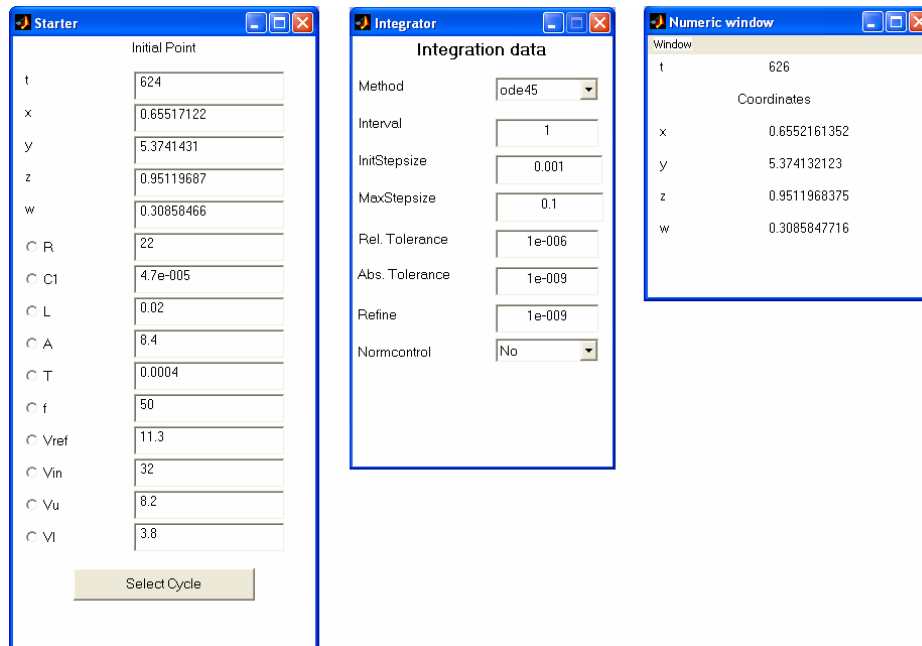
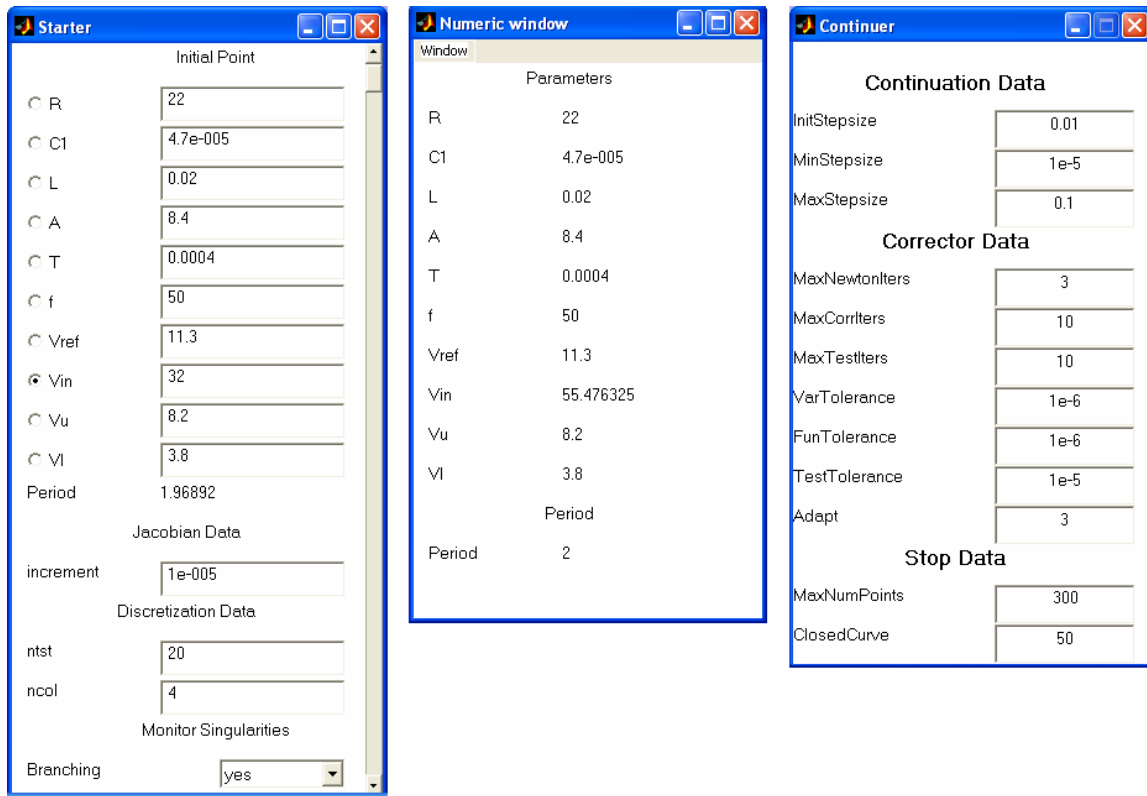
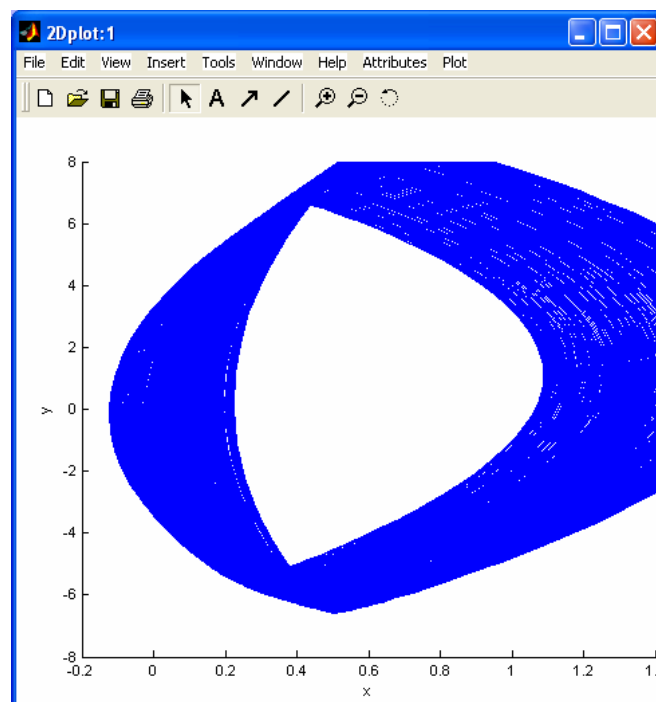


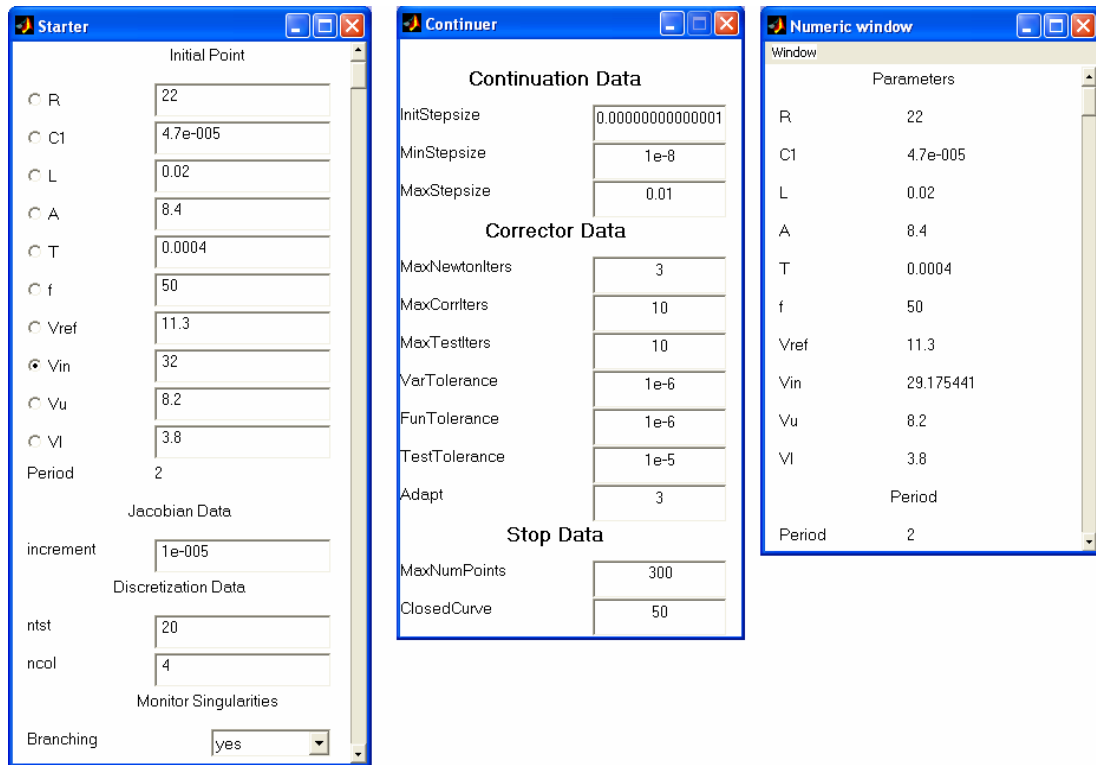
Figura 4. 21 Ventanas Starter, Numérica e Integrador para calculo de la orbita.



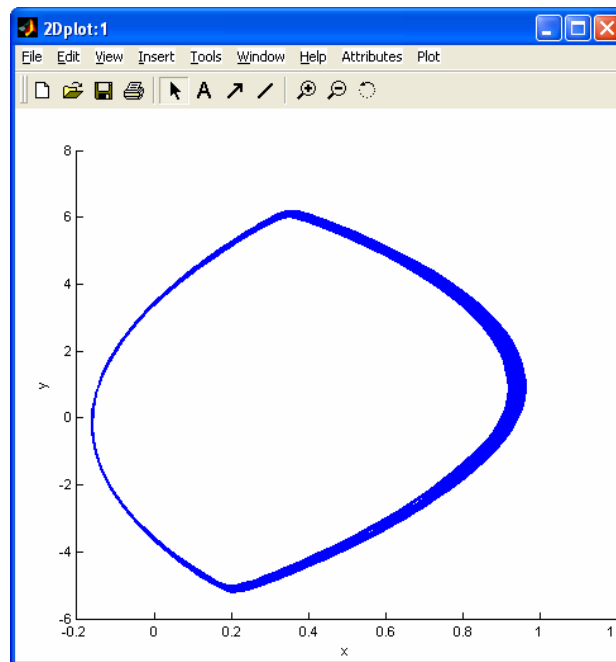
**Figura 4. 22** Ventanas Starter, Numérica y Continuator para calculo de ciclo limite.



**Figura 4. 23** Ciclo limite para voltaje 32 en modo forward.



**Figura 4. 24** Ventanas Starter, Continuator y Numérica para calculo del ciclo limite.



**Figura 4. 25** Ciclo limite para voltaje 32 en modo backward.

## 5. CONCLUSIONES.

Cuando se utiliza la forma suavizada de Fourier con ocho términos, sólo se puede hacer la continuación para el valor de 21V, como voltaje de entrada. Las órbitas convergen para todos los demás casos, pero no se puede hacer la continuación del ciclo límite; se presenta problemas con el tamaño del paso.

Cuando se utilizan los archivos Mex con los cuales se reemplaza la función rampa por un tren de pulsos, los cortes de la órbita en la gráfica son muy acentuados. Se presenta el caso de no suavización del convertidor. La órbita presenta problemas de convergencia por tanto la continuación no se puede iniciar. El software está diseñado para trabajar con sistemas suaves y por tanto falla para sistemas no suaves.

Cuando se trabaja con la forma suavizada de Fourier de un solo término, las órbitas son más suaves. La órbita converge y la continuación del ciclo límite se puede llevar a cabo.

Para determinar la estabilidad de un ciclo límite Matcont solo da la opción de graficarlos; su manipulación es difícil

## 6. BIBLIOGRAFIA

- [1] Andres Tovar, Hernando Diaz. Herramienta Computacional para la Detección de Bifurcaciones Locales en Sistemas Dinámicos. Universidad Nacional de Colombia. 2005.
- [2] T. Kapitaniak. Chaos for Engineers. Theory, Applications and Control. Springer Berlin 1997
- [3] S.Banerjee and G. Verghese, Nonlinear Phenomena in Power Electronics. New York: IEEE Press 2001
- [4] Tetsushi Ueta, Hiroshi Kawakami, Tetsuya Yoshinaga, Yuuji Katsuta. A Computation of Bifurcation Parameter Values for Limit Cycles. Det. Of Intelligent System Engineering, Ube National College of Technology, Japan 1997.
- [5] Chi Kong Tse Complex Behavior of Switching Power Converters. CRC Press London 2004
- [6] Thomas Wagenknecht, Jan Sieber. Numérical Continuation of Bifurcations. Bristol Centre for Applied Nonlinear Mathematics October 2005.
- [7] Annick Dhooge. Matcont: A Matlab Package for Numérical Bifurcation Analysis of ODE. Ghent University 2000
- [8] Dhooge, W. Govaerts, Y.A. Kuznetsov, W. Mestron, and A.M. Riet. CL\_Matcont: A continuation toolbox in Matlab. University Gent, Utrecht University. 2004
- [9] W. Govaerts, Y.A. Kuznetsov, and Annick Dhooge. Numerical continuation of Bifurcation of Limit Cycles in Matlab. SIAM J. Sci.Comput. Vol 27, No 1, pp 321 252. 2005
- [10] Annick Dhooge., W. Govaerts, Y.A. Kuznetsov. Limit Cycles and Their Bifurcations in Matlab. 2004
- [11] Gerard Olivar. Chaos in The Buck Converter. Tesis de grado para Doctorado. Universitat Politecnica de Catalunya. 1997.
- [12] JHB. Deanne and DC. Hamil. Analysis, Simulation and Experimental Study of Chaos in the Buck Converter.