

suponerse que los extremos delgados de la placa están sellados a la transferencia.

En forma alterna, la placa o losa puede imaginarse lo suficientemente delgada como para que los efectos de borde puedan despreciarse.

a) Difusión a través de dos caras opuestas. Consideremos concentración inicial uniforme en  $C_{A0}$ , en toda la placa, concentración constante  $C_{As}$  en las dos superficies mayores, difusión ocurriendo solo normal a las dos superficies mayores las cuales son permeables al soluto A, propiedades físicas constantes.

Se toma el origen de coordenadas en el plano central o de simetría el cual tiene área  $S$  normal a  $z$ .

La ecuación (3.44) se reduce a

$$\frac{\delta C_A}{\delta t} + \frac{\delta N_{Az}}{\delta z} = 0 \quad (9.25)$$

$$N_{Az} = J_{Az} + c_A v_z^* \sim J_{Az} \quad (9.26)$$

O sea (9.25) se reduce a

$$\frac{\delta C_A}{\delta t} = D_{AB} \frac{\delta^2 C_A}{\delta z^2} \quad (9.27)$$

Haciendo  $Y = (C_A - C_{As})$

$$\frac{\delta Y}{\delta t} = D_{AB} \frac{\delta^2 Y}{\delta z^2} \quad (9.27 a)$$

Condiciones límite:

$$z = a, \quad \text{cualquier } t, \quad C_A = C_{As}, \quad Y = 0$$

$$\text{Cualquier } z, \quad t = 0, \quad C_A = C_{A0}, \quad Y = Y_0$$

$$z = 0, \quad \text{cualquier } t, \quad \delta C_A / \delta z = 0, \quad \delta Y / \delta z = 0$$

La última de las condiciones de frontera surge del hecho de la simetría del sistema. En el plano intermedio siempre habrá un máximo (o mínimo) de concentraciones. Esta condición equivale también a que no haya flujo a través de tal plano.

La ecuación (9.27 a) podría resolverse por el método de separación de variables de forma análoga al problema anterior. Estos resultados son útiles para tiempos largos de difusión ya que la serie converge rápidamente en tales condiciones.

Un método alternativo de solución lo da el uso de la transformada de Laplace. Este da resultados útiles para pequeños tiempos de difusión.

En general, la transformada de Laplace  $\bar{f}(s)$  de una función  $f(t)$  se define como:

$$\bar{f}(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt \quad (9.28)$$

Donde  $s$  es un número suficientemente grande para asegurar la convergencia de la integral.

La transformada inversa de Laplace se expresa como

$$f(t) = L^{-1}[\bar{f}(s)] \quad (9.28 a)$$

Para una función  $f(x,t)$  de dos variables independientes  $x$  y  $t$ , la transformada de Laplace (parcial) de  $f(x,t)$  con respecto a  $t$  es definida por:

$$\bar{f}(x,s) = L_t[f(x,t)] = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(x,t) dt \quad (9.29)$$

El subíndice  $t$  denota transformación con respecto a  $t$ . Las propiedades de la transformadas de Laplace que más nos interesan para el problema son:

$$L_t \left[ \frac{\delta f(x,t)}{\delta t} \right] = s \bar{f}(x,s) - f(x,0) \quad (9.30)$$

$$L_t \left[ \frac{\delta f(x,t)}{\delta x} \right] = \frac{\delta \bar{f}(x,s)}{\delta x} \quad (9.30 a)$$

Hemos supuesto que el orden de diferenciación y de integración con respecto a  $x$  pueden intercambiarse.

Tomemos ahora transformadas de Laplace a ambos lados de la ecuación (9.27a) con respecto a  $t$ :

$$L_t \left[ \frac{\delta y}{\delta t} \right] = s \bar{y} - y_0 = D_{AB} L_t \left[ \frac{\delta^2 y}{\delta z^2} \right] \quad (9.31)$$

donde  $\bar{y} = L_t(y,t) = \bar{y}(z,s)$ . Reorganizando (9.31)

$$\frac{d^2\bar{y}}{dz^2} - \frac{s\bar{y}}{D_{AB}} = -\frac{y_0}{D_{AB}} \quad (9.32)$$

aquí  $s$  se mira como un parámetro. Esta ecuación tiene por solución ( métodos generales ):

$$\bar{y} = C_1 \exp(-mz) + C_2 \exp(mz) + y_0/s \quad (9.33)$$

con  $m^2 = s/D_{AB}$

condiciones límite:

$$\frac{d\bar{y}}{dz} = -C_1 m \exp(-mz) + C_2 m \exp(mz) = 0$$

para  $z = 0$ , entonces  $C_1 = C_2$

ahora:

$$\bar{y} = C_1 \left[ \exp(-mz) + \exp(mz) \right] + \frac{y_0}{s} = 0 \quad \text{para } z = a$$

$$C_1 = \frac{-y_0}{s [\exp(-ma) + \exp(ma)]}$$

o sea:

$$\bar{y} = -\frac{y_0}{s} \left[ \frac{\exp(-mz) + \exp(mz)}{\exp(-ma) + \exp(ma)} \right] + \frac{y_0}{s}$$

Dividiendo numerador y denominador por  $\exp(ma)$ :

$$\bar{y} = -\frac{y_0}{s} \left[ \frac{\exp[-m(a+z)] + \exp[-m(a-z)]}{\exp(-2ma) + 1} \right] + \frac{y_0}{s}$$

apliquemos ahora el teorema del binomio al denominador del término entre paréntesis:

$$\left[ 1 + \exp(-2ma) \right]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp(-2nma)$$

por lo cual

$$\bar{y} = y_0 \left[ \frac{1}{s} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s} \exp\{-m[(2n+1)a-z]\} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{s} \exp\{-m[(2n+1)a+z]\} \right]$$

La transformada inversa de cada término en estas dos series se encuentra en tablas; por ejemplo, el ítem 8 en la tabla de transformadas de Laplace dada por Crank. El resultado puede escribirse como:

$$\frac{C_A - C_{A0}}{C_{As} - C_{A0}} = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)a-z}{2(D_{AB}t)^{1/2}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \frac{(2n+1)a+z}{2(D_{AB}t)^{1/2}} \right] \quad (9.34)$$

Esta serie converge rápidamente para todos menos, valores grandes de  $D_{AB}t/a^2$ . Por ejemplo, para la concentración en el centro,  $z = 0$ , cuando  $D_{AB}t/a^2 = 1$ :

$$\frac{C_A - C_{A0}}{C_{As} - C_{A0}} = 0.9590 - 0.0678 + 0.0008 = 0.8920$$

y cuando  $\frac{Dt}{a^2} = 0.25$

$$\frac{C_A - C_{A0}}{C_{As} - C_{A0}} = 0.3146 - 0.0001 = 0.3145$$

La velocidad de transferencia de materia a través de la superficie de la placa, en el momento  $t$  será:

$$2SN_{Az}(t) = 2SD_{AB} \left[ \frac{\delta C_A}{\delta z} \right]_{z=0} = \frac{m}{A}(t)$$

La masa total transferida hasta el tiempo  $t$ :

$$m_A = \int_0^t m_A(t) dt = (C_{A0} - \bar{C}_A)(S)(2a)$$

Donde  $\bar{C}_A$  es la concentración promedio a través de toda la placa en el instante  $t$ . La extracción promedio desde la placa puede definirse como:

$$\frac{\bar{C}_A - C_{A0}}{C_{A2} - C_{A0}} = \frac{M_A}{2aS(C_{A0} - C_{A2})}$$

La expresión pues para la concentración promedio  $\bar{C}_A$  a través de la placa en el tiempo  $t$  es :

$$\frac{C_{A0} - \bar{C}_A}{C_{A0} - C_{A2}} = 2(D_{AB}t/a^2)^{-1/2} \left[ \frac{1}{\pi^{1/2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{ierfc} \frac{na}{(D_{AB}t)^{1/2}} \right] \quad (9.35)$$

(ver apéndice A.9.1)

Para valores grandes de  $\tau = D_{AB}t/a^2$ , una solución que converge más rápidamente es obtenida por el método de separación de variables:

$$\frac{C_A - C_{A2}}{C_{A0} - C_{A2}} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \left[ \frac{(2n+1)\pi z}{2a} \right] \exp \left[ \frac{-D_{AB}(2n+1)^2\pi^2 t}{4a^2} \right] \quad (9.36)$$

Para la concentración promedio  $\bar{C}_A$  a través de la placa en el tiempo  $t$ ,

$$\frac{\bar{C}_A - C_{A0}}{C_{A2} - C_{A0}} = 1 - \frac{C_A - C_{A2}}{C_{A0} - C_{A2}} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left[ \frac{-D_{AB}(2n+1)^2\pi^2 t}{4a^2} \right] \quad (9.37)$$

Algunas veces se encuentra difusión en una placa en la que las dos caras opuestas se mantienen a sus respectivas constantes pero diferentes concentraciones  $C_{A1}$  y  $C_{A2}$ . El interior de la placa se encontraba inicialmente a concentración  $C_{A0}$ . Es el caso de difusión a través de una membrana. La distribución de concentraciones cuando  $C_{A2} = C_{A0}$  está dada por la ecuación (9.21) ó (9.21a). La concentración promedio en cualquier tiempo

$$\frac{C_{A0} - \bar{C}_A}{C_{A0} - 0.5(C_{A1} + C_{A2})} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left[ \frac{-D_{AB}(2n+1)^2\pi^2 t}{4a^2} \right] \quad (9.38)$$

Donde  $2a = b$  es el espesor de la placa. Para cálculos rápidos esta función como las de esferas y cilindros se hallan graficadas por Newman.

## DIFUSION A TRAVES DE UNA SOLA SUPERFICIE DE UNA PLACA.

La difusión puede ocurrir a través de sólo una de las superficies mayores de una placa, siendo la otra impermeable a la transferencia. Esta situación surge por ejemplo en los secadores de bandejas. El gradiente de concentración  $\delta c_A / \delta z$  es cero en una superficie impermeable, lo que coincide también para el plano central de la placa estudiada anteriormente. O sea que la cara impermeable equivale al plano medio de la placa y por lo tanto la solución para el caso de la difusión simétrica se aplica en este caso en la superficie permeable en  $z = a$  y la impermeable en  $z = 0$ .

## DIFUSION EN ESTADO TRANSITORIO EN UN CILINDRO

Se sellan los extremos planos del cilindro para que la difusión ocurra sólo en dirección radial, lo que ocurriría también si el cilindro fuera de longitud infinita. La ecuación (3.44) escrita en coordenadas cilíndricas con ayuda de (3.32 a), teniendo presente que  $N_{A1}$  y  $N_{Az}$  son cero, no hay reacción, y despreciando el término de arrastre se reduce a :

$$\frac{\delta c_A}{\delta t} = D_{AB} \left[ \frac{\delta^2 c_A}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta c_A}{\delta r} \right] \quad (9.39)$$

$$c_A = c_{A0} \quad \text{para } t = 0 \quad \text{todo } r$$

$$c_A = c_{As} \quad \text{todo } t \quad r = R$$

$$\delta c_A / \delta r = 0 \quad \text{todo } t \quad r = 0$$

La ecuación ( 9.39 ) guarda similitud con la que se obtiene para flujo pistón de un fluido a lo largo de un conducto circular :

$$\frac{\delta c_A}{\delta z} = \frac{D_{AB}}{V} \left[ \frac{\delta^2 c_A}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta c_A}{\delta r} \right] \quad (9.40)$$

pues, en la ecuación ( 8.0 ),  $v_z$  se reduce a  $v_m = V$ , constante. La ecuación ( 9.39 ) da :

$$\frac{c_A - c_{As}}{c_{A0} - c_{As}} = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(b_n r)}{b_n J_1(b_n R)} \exp(- D_{AB} b_n^2 t) \quad (9.41)$$

donde  $b_n$  son las raíces de  $J_0(b_n R) = 0$ , y  $J_1(b_n r)$  es la función de Bessel de primera clase y orden cero.

Las cinco primeras raíces son:

$$a_1 = 2.405 \quad a_2 = 5.520 \quad a_3 = 8.654$$

$a_4 = 11.792 \quad a_5 = 14.931 \quad Jo(a_1) = 0.0$

Para la concentración promedio en el tiempo t:

$$\frac{\bar{C}_A - C_{A0}}{C_{A0} - C_{A0}} = 1 - \frac{\bar{C}_A - C_{As}}{C_{A0} - C_{As}} = 1 - \frac{4}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n^2} \exp(-D_{AB} b_n^2 t) \quad (9.42)$$

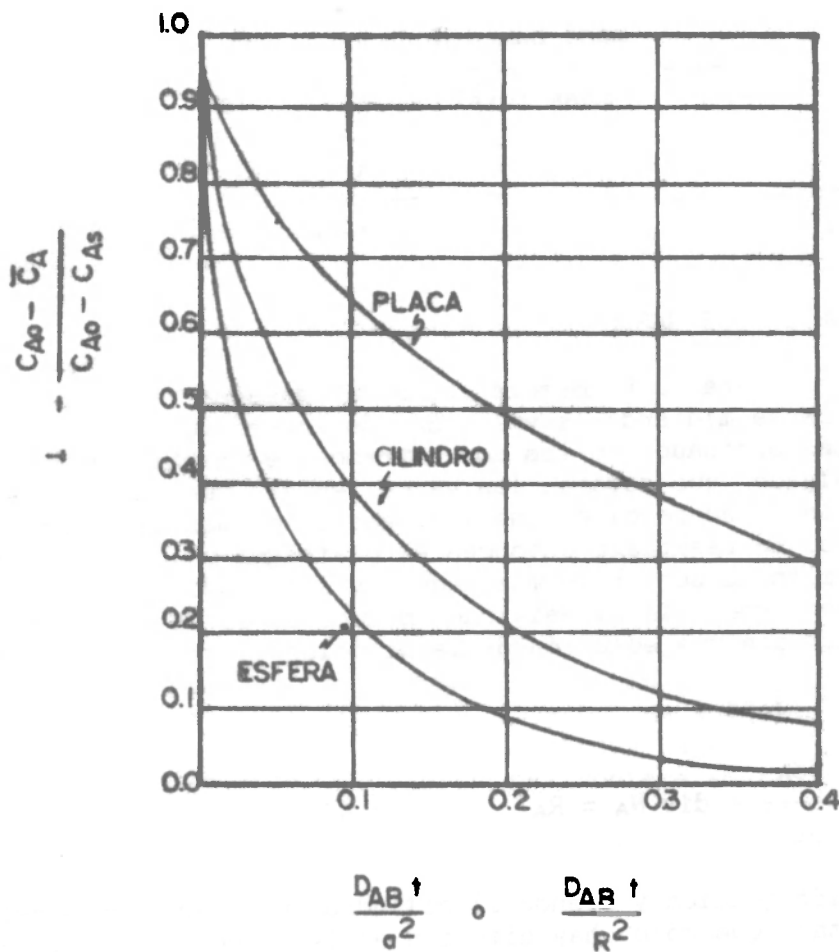


FIGURA 9.3. Difusión molecular transitoria (Newman, 1931)

Para el uso de las gráficas de Newman o las de Gurney Lurie o similares observe que la ordenada presenta una concentración adimensional.

$$\frac{\bar{C}_A - C_{As}}{C_{A0} - C_{As}} = \frac{\bar{f}_A - f_{As}}{f_{A0} - f_{As}} = \frac{\bar{W}_A - W_{As}}{W_{A0} - W_{As}} \quad (9.43)$$

$W_A$  = relación en peso de A en el sólido.

Para la última igualdad se supone que el volumen del sólido no se altera durante el proceso y por tal la densidad del sólido seco,  $\rho_{ss}$ , puede considerarse constante, y basta dividir numerador y denominador del segundo término por  $\rho_{ss}$  para obtener el último donde

$$W_A = \frac{\text{masa de humedad}}{\text{masa de sólido seco}}$$

diferente de la fracción en peso

$$W_A = \frac{\text{masa humedad}}{\text{masa total}}$$

$$W_A = \frac{W_A}{1 - W_A}$$

$$W_A = \frac{W_A}{1 + W_A}$$

#### INTERDIFUSION DE DOS GASES

La difusividad para una mezcla binaria gaseosa se ha obtenido experimentalmente midiendo la velocidad de interdifusión de dos gases originalmente confinados en los dos extremos de un cilindro hueco. Un diafragma delgado que separa los gases en el centro, se remueve repentinamente y se permite que los gases se mezclen durante un tiempo medido. Se reemplaza entonces el diafragma y los gases de cada mitad del cilindro son bien mezclados y analizados. En ausencia de efectos convectivos, la difusividad molecular se obtiene comparando los resultados con una solución de la ecuación diferencial básica.

Partiendo de ( 3.44 )

$$\frac{\delta c_A}{\delta t} + \text{div } N_A = R_A \quad ( 3.44 )$$

no hay reacción química y siendo el cilindro suficientemente estrecho podemos aceptar que sólo hay difusión en la dirección axial. Por lo tanto tenemos:

$$\frac{\delta c_A}{\delta t} + \frac{\delta N_{Az}}{\delta z} = 0$$

$$N_{Az} = J_{Az} + y_A(N_A + N_B)$$

$y_A$  = fracción molar de A.

Según la descripción de la situación, es claro que habrá contradifusión equimolecular pues la presión total sobre el sistema

y su temperatura permanecen constantes, es decir,  $N_A = -$ ,  $N_B$ . Así que finalmente llegamos a la expresión:

$$\frac{\delta c_A}{\delta t} = D_{AB} \frac{\delta^2 c_A}{\delta z^2}$$

Sabemos que  $c_A = p_A/RT$ , donde  $p_A$  es la presión parcial ejercida por el gas A en la mezcla:  $p_A + p_B = P_T$ .

Usando presiones parciales como medida de concentración:

$$\frac{\delta p_A}{\delta t} = D_{AB} \frac{\delta^2 p_A}{\delta z^2} \quad ( 9.44 )$$

Para substituir  $p_A$  por una variable que varíe de 1 a 0 mientras  $z$  aumenta de cero a infinito, consideramos que si las dos mitades del cilindro son iguales,  $p_A$  variará entre  $p_0$  y  $p_0/2$ . Escogemos una nueva variable  $X$ , tal que:

$$X = 2 \left[ \frac{p_A}{P_T} - \frac{1}{2} \right] \quad ( 9.45 )$$

La constante desaparece en la diferenciación y ( 9.44 ) queda:

$$\frac{\delta X}{\delta t} = D_{AB} \frac{\delta^2 X}{\delta z^2} \quad ( 9.46 )$$

Siendo los gases puros y a la misma presión  $P_T$ , en las dos mitades al comenzar, entonces las concentraciones serán simétricas al rededor del punto medio y será necesario obtener una solución sólo para la mitad. Coloquemos el origen en el centro y hagamos que la longitud del cilindro sea  $2a$ . Las condiciones de frontera son:

$$t = 0 \quad p_A = P_T \quad X = 1 \quad 0 \leq z \leq a$$

$$t \rightarrow \infty \quad p_A = 0.5 P_T \quad X = 0 \quad 0 \leq z \leq a$$

$$\text{todo } t \quad p_A = 0.5 P_T \quad X = 0 \quad z = 0$$

$$\text{todo } t \quad \delta X / \delta z = 0 \quad z = a$$

Esta última indica que no habrá flujo a través de la pared ubicada en  $z = a$ . Como antes por separación de variables obtenemos:

$$X = C_3 \exp(-m^2 t) \left[ C_1 \cos(mz) + C_2 \sin(mz) \right]$$

$$\text{Como } X = 0 \text{ en } z = 0 \quad C_1 = 0$$

De la última condición, para  $t$  infinito,  $\cos(ma) = 0$  y

$$a = \frac{(2n - 1)\pi}{2a}$$

Sumando soluciones para valores enteros de  $n$  y sabiendo que  $X = 1$  para  $t = 0$

$$1 = A_1 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2a} + A_2 \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{2a} + A_3 \operatorname{sen} \frac{5\pi z}{2a} + \dots \quad (9.47)$$

La serie de senos de Fourier para 1 en el intervalo de 0 a  $2a$  es:

$$1 = \frac{4}{\pi} \left[ \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2a} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{2a} + \frac{1}{5} \operatorname{sen} \frac{5\pi z}{2a} + \dots \right] \quad (9.48)$$

Comparando ( 9.47 ) y ( 9.48 ) término por término obtenemos:

$$A_n = \frac{4}{\pi(2n - 1)}$$

La serie de coeficientes también está dada por:

$$A_n = \left[ 1 - (-1)^n \right] \frac{2}{n\pi}$$

La solución resultante es:

$$X = \frac{4}{\pi} \left[ \exp\left[-\frac{\pi^2}{4}\tau\right] \operatorname{sen} \frac{\pi z}{2a} + \frac{1}{3} \exp\left[-\frac{9\pi^2}{4}\tau\right] \operatorname{sen} \frac{3\pi z}{2a} + \frac{1}{5} \exp\left[-\frac{25\pi^2}{4}\tau\right] \operatorname{sen} \frac{5\pi z}{2a} + \dots \right] \quad (9.49)$$

$$\tau = D_{AB} t/a^2$$

Esta expresión es idéntica a la que se obtiene para la difusión en una placa infinita enfriada (o calentada) desde sus caras si el origen se coloca en una de sus caras de tal manera que la otra está en  $z = 2a$ . O sea, que en esas condiciones reemplazaría la ecuación ( 9.36 ).

Si  $F$  representa la fracción de gas original que aún permanece en la mitad del cilindro,

$$F = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^a X dz$$

$$F = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left[ \exp[-(\pi/2)^2\tau] + \frac{1}{9} \exp[-9(\pi/2)^2\tau] + \frac{1}{25} \exp[-25(\pi/2)^2\tau] + \dots \right] \quad (9.50)$$

Esta función puede graficarse para usarla en la estimación del tiempo de residencia necesario para preparar una mezcla gaseosa en un cilindro a presión para obtener diversos grados de uniformidad.

ESFERA CON TEMPERATURA INICIAL CONSTANTE.

Consideremos un cuerpo esférico de radio R con temperatura inicial constante  $T_0$  y sin fuentes de calor. Para  $t > 0$  la temperatura en la superficie se mantiene a una temperatura constante  $T_s > T_0$ .

Problemas de conducción radial en cuerpos esféricos pueden reducirse a problemas de flujo lineal en placas haciendo la transformación  $u = Tr$ .

La ecuación (3.41) sin generación escrita en coordenadas esféricas con la ayuda de la ecuación (3.41.d) y sabiendo que T sólo depende de r, la ecuación gobernante

$$\rho C_p \frac{\delta T}{\delta t} = k \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} \left[ r^2 \frac{\delta T}{\delta r} \right] \right] \quad (9.51)$$

ó haciendo  $Y = T - T_0$

$$\frac{\delta Y}{\delta t} = \alpha \left[ \frac{\delta^2 Y}{\delta r^2} + \frac{2}{r} \frac{\delta Y}{\delta r} \right] \quad (9.52)$$

Condiciones de frontera :

$$T = T_0 \quad Y = 0 \quad 0 \leq r \leq R \quad t < 0$$

$$T = T_s \quad Y = Y_s = T_s - T_0 \quad r = R \quad t \geq 0$$

Haciendo  $\theta = Yr$ , obtenemos :

$$\frac{\delta \theta}{\delta t} = \alpha \frac{\delta^2 \theta}{\delta r^2} \quad (9.53)$$

$$\theta = 0 \quad 0 \leq r \leq R \quad t < 0$$

$$\theta = Y_s R = \theta_s \quad r = R \quad t \geq 0,$$

La transformada de Laplace y las condiciones límite son

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dr^2} - \frac{s}{\alpha} \bar{\theta} = 0 \quad (9.54)$$

$$\bar{\theta} = \theta_{\infty}/s \quad r = R$$

$$\bar{\theta} = 0 \quad r = 0$$

La solución a ( 9.54 ) es :

$$\bar{\theta} = C_1 \exp[-(s/\alpha)^{1/2} r] + C_2 \exp[(s/\alpha)^{1/2} r]$$

y al evaluar las constantes :

$$\bar{\theta} = \frac{\theta_{\infty}}{s} \frac{\sinh[(s/\alpha)^{1/2} r]}{\sinh[(s/\alpha)^{1/2} R]} \quad (9.55)$$

$$\bar{Y} = \frac{Y_{\infty} R}{s r} \frac{\sinh[(s/\alpha)^{1/2} r]}{\sinh[(s/\alpha)^{1/2} R]} \quad (9.56)$$

La transformada inversa de ( 9.56 ) es :

$$\frac{T - T_0}{T_{\infty} - T_0} = \frac{R}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \operatorname{erf} \frac{(2n+1)R + r}{(4at)^{1/2}} - \operatorname{erf} \frac{(2n+1)R - r}{(4at)^{1/2}} \right] \quad (9.57)$$

El flujo de calor hacia la esfera es el flujo de calor a través de la superficie  $r = R$ , ó

$$Q = 4\pi R^2 k \left[ \frac{\delta Y}{\delta r} \right]$$

obtenemos :

$$\frac{Q}{Q_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\alpha}{R} \left[ \operatorname{erf} \frac{nR}{(at)^{1/2}} - \operatorname{erf} \frac{(n+1)R}{(at)^{1/2}} \right] + (\alpha/\pi t)^{1/2} \left[ \exp \frac{-(n+1)^2 R^2}{\alpha t} + \exp \frac{-n^2 R^2}{\alpha t} \right] \right] \quad (9.58)$$

donde  $Q_0 = 4\pi R^2 \rho C_p (T_{\infty} - T_0)$ , es el contenido inicial de calor de la esfera.

La situación análoga en transferencia de masa, pero resuelta por separación de variables es :

$$\frac{CA - CA_{\infty}}{CA_0 - CA_{\infty}} = \frac{2R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{1}{r} \operatorname{sen} \left[ \frac{n\pi r}{R} \right] \exp \left[ \frac{-D_{AB} n^2 \pi^2 t}{R^2} \right] \quad (9.59)$$

Esta converge rápidamente sólo para altos valores de  $D_{AB}t/R^2$  (ó  $at/R^2$  si es transferencia de calor ).

La concentración promedio con el tiempo es :

$$\frac{\bar{CA} - CA_{\infty}}{CA_0 - CA_{\infty}} = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left[ \frac{-D_{AB} n^2 \pi^2 t}{R^2} \right] \quad (9.60)$$

A partir de la ecuación ( 9.57 ) podemos obtener una expresión que converge rápidamente para bajos valores de  $\tau$  :

$$\frac{\bar{CA} - CA_{\infty}}{CA_0 - CA_{\infty}} = 6 \left[ \frac{D_{AB} t}{R^2} \right]^{1/2} \left[ \frac{1}{\pi^{3/2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ierfc} \frac{nR}{(D_{AB} t)^{1/2}} \right] - 3 \frac{D_{AB} t}{R^2} \quad (9.61)$$

(ver apéndice A.9.1)

#### SISTEMAS CON BAJA RESISTENCIA INTERNA Y ALTA RESISTENCIA EXTERNA.

Al analizar los diagramas de  $\theta$  contra  $\tau$ , con parámetro  $Bi^{-1}$  (diagramas de Gurney Lurie, Heisler ó Gröber-Erk) se observa que para valores del parámetro  $Bi = hL/k_s$  ( $k_s$  conductividad térmica del sólido) menores de 0.1 ( para el inverso mayor que 10 ), la temperatura en el medio es esencialmente uniforme en cualquier instante (diferencias de temperatura menores al 5%). En tales casos se puede despreciar la variación de la temperatura con la posición considerando que ésta sólo varía con el tiempo. Como la forma geométrica no tiene importancia el análisis se simplifica.

Consideremos un sólido de forma arbitraria, volumen  $V$ , área superficial total  $S$ , conductividad térmica  $k$ , densidad  $\rho$ , calor específico  $C_p$  y temperatura uniforme  $T_0$  que en el instante  $t = 0$  se sumerge en un fluido bien agitado que se mantiene a temperatura  $T_{\infty}$ . Hay transferencia de calor por convección entre el sólido y el líquido con coeficiente de transferencia de calor  $h$ . Se supone que en cualquier instante la distribución de temperatura dentro del sólido es suficientemente uniforme, de tal modo que se puede considerar que la temperatura del sólido es función solamente del tiempo.

Definimos la longitud característica  $L$  del sólido como el volumen dividido por el área superficial, o sea  $L = V/S$ . Si el sólido está siendo enfriado  $T > T_{\infty}$  y el balance macroscópico da :

$$-\rho C_p V \frac{dT}{dt} = h (T - T_{\infty}) \quad (9.62)$$

- 1 - Velocidad de disminución de entalpía.
- 2 - Velocidad de pérdida de calor en la superficie.

Reorganizando e integrando con  $T = T_0$  en  $t = 0$  :

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp \left[ - \frac{hSt}{\rho C_p V} \right] = \exp [-t/t_0] \quad (9.63)$$

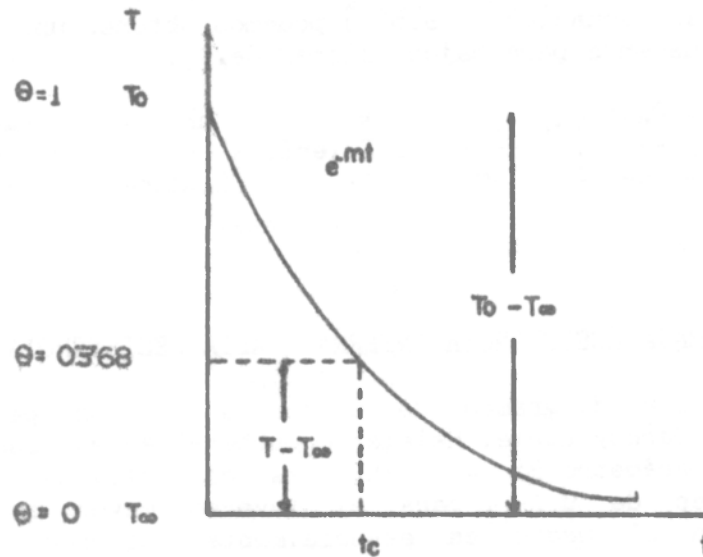


FIGURA 9.4. Variación de la temperatura con el tiempo para pequeños números de Bi ( $Bi < 1/6$ )

El grupo  $(\rho C_p V / hS)$  es una constante de tiempo  $t_0$ . Se define como el tiempo necesario para que  $\theta$  valga  $\exp(-1) = 0.368$  ó  $1 - \theta$  valga  $0.632$

$$1 - \theta = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}$$

O sea es el tiempo necesario para que ocurra el 63.2 % del cambio de temperatura total.

Observando la figura 9.4 vemos que la temperatura decrece exponencialmente con el tiempo y el valor de  $m$  en el exponente determina la forma de la curva. Observemos que la cantidad

$$\frac{hSt}{V \rho C_p} = (hL/k) \frac{kt}{\rho C_p L^2} = Bi Fo = Bi \tau$$

La longitud característica para una esfera se convierte en  $R/3$ , para un cilindro infinito es  $R/2$  y para una placa infinita de espesor  $2a$  es  $a$ . El equivalente al número de Bi en transferencia de masa es :

$$Bi_D = (k_f a / D_{AB}) \quad \text{ó} \quad (k_f R / D_{AB}) \quad \text{según el caso;}$$

$k_f$  es el coeficiente de transferencia de masa.  $D_{AB}$  es la difusividad dentro del sistema.

**EJEMPLO 9.1.**

Si se desea medir una temperatura inestable con un termómetro es importante conocer la velocidad con la cual el termómetro sigue el proceso. El "tiempo del valor medio" es el tiempo dentro del cual la diferencia inicial entre la temperatura verdadera y la temperatura indicada por el termómetro, se reduce a la mitad después de un cambio repentino de la temperatura verdadera.

Debemos calcular este tiempo de valor medio para un termómetro de mercurio que está instalado en una corriente de aire. El bulbo de mercurio tiene forma cilíndrica de 0.01 pie de radio. La conductividad térmica del mercurio es  $k = 5 \text{ Btu/h.pie.F}$  ; su difusividad térmica es  $\alpha = 0.178 \text{ pie}^2/\text{h}$ . Despreciamos la resistencia térmica de la pequeña pared de vidrio. El coeficiente de transferencia de calor en la corriente de aire se estima en  $h = 10 \text{ Btu/h.pie}^2.\text{F}$ .

Con estos datos  $Bi = hL/k = (10)(0.01)/((5)(2)) = 0.01$ .

La relación de temperatura en la ecuación ( 9.63 ) es 0.5 cuando el exponente vale 0.693. Entonces la ecuación para la determinación del tiempo de valor medio  $t_m$  es :

$$(\alpha t_m / L^2)(hL/k) = 0.693$$

$$(\alpha t_m / L^2) = 0.693 / 0.01 = 69.3$$

$$t_m = \frac{(1.0 \times 10^{-4})(69.3)}{(4)(0.178)} \text{ hr} = (0.0098)(3600) = 35 \text{ seg.}$$

Solamente para cambios inestables de temperatura mucho más lentos (por ejemplo si el cambio de temperatura es de forma sinusoidal, la duración del período debe ser del orden de diez veces mayor), podemos esperar que el termómetro indique la marcha de la temperatura en forma adecuada.

**CONDICIONES LIMITE EN FUNCION DEL TIEMPO.**

Supongamos que el sólido que analizamos está sumergido en un fluido cuya temperatura cambia linealmente con el tiempo, o sea la temperatura del fluido obedece a la siguiente expresión :

$$T_{\infty} = Bt$$

La ecuación ( 3.41 ) queda de la forma :

$$\int C_p \frac{\delta T}{\delta t} = \dot{Q}_H$$

donde :

$$\dot{Q}_H = \frac{hS (T - T_{\infty})}{V} = \frac{hS (T - Bt)}{V}$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{hS}{\int C_p V} T = \frac{hSB}{\int C_p V} t$$

haciendo :

$$\frac{hS}{\int C_p V} = m ; \text{ entonces :}$$

$$\frac{dT}{dt} + mT = mBt \quad ( 9.64 )$$

La solución particular tiene la forma:  $T = A_1 t + A_0$ . Reemplazando en ( 9.64 ),

$$A_1 + m(A_1 t + A_0) = mBt$$

Para que se cumpla esta igualdad :

$$A_1 + mA_0 = 0 ; A_0 = -B/m$$

$$A_1 m t = mBt ; A_1 = B$$

La solución de la ecuación reducida

$$\frac{dT}{dt} + mT = 0$$

es :

$$T = C_1 \exp(- mt)$$

La solución general es :

$$T = Bt - (B/m) + C_1 \exp(- mt)$$

Para evaluar  $C_1$  aplicamos la condición límite :

$$t = 0 ; T = 0 \quad \text{--->} \quad C_1 = B/m$$

O sea :

$$T = Bt - \frac{\int C_p V}{hS} B \left[ 1 - \exp\left[-\frac{hSt}{\int C_p V}\right] \right] \quad (9.65)$$

La ecuación ( 9.65 ) se grafica en la figura 9.5.

Se puede observar que la temperatura del sólido siempre está resagada con respecto a la temperatura del fluido. Tan pronto como la

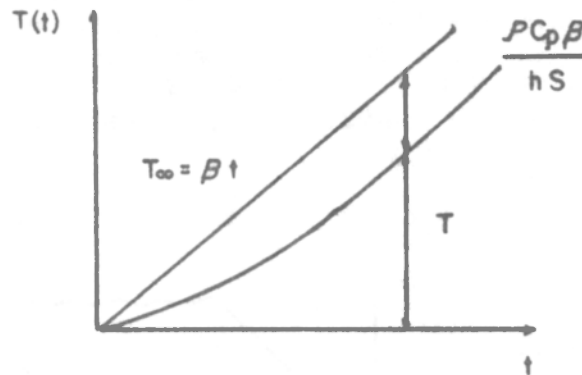


FIGURA 9.5. Historia de la temperatura en un sólido de pequeño Bi sometido a condiciones límite variables.

transición inicial termina, el retraso permanece constante. Su valor se obtiene de la ecuación ( 9.65 ) para un tiempo t suficientemente grande.

#### EJEMPLO 9.2.

Si el termómetro que se usó en el ejemplo 9.1 se emplea para monitorear la temperatura de un horno de cocina, es interesante calcular el retraso del termómetro mientras el horno se calienta a una velocidad de 400 F/h. Supongamos que el coeficiente de transferencia de calor vale  $h = 2 \text{ Btu/h.pie}^2 \cdot ^\circ\text{F}$ .

$$\frac{\int C_p V}{hS} = \frac{Rk}{2ah} = \frac{(0.01)(5)}{(2)(0.178)(2)} = 0.0705 \text{ h.}$$

$$\Delta T_{\text{retraso}} = (0.0705)(400) = 28.2 \text{ } ^\circ\text{F} = 15.7 \text{ } ^\circ\text{C}$$

#### CILINDROS Y PLACAS FINITAS.

Analizamos el caso presentado en la figura 9.6 , donde tenemos un paralelepípedo rectangular de lados  $2a$ ,  $2b$  y  $2c$ . Sin embargo, los extremos en  $z = \pm c$  están sellados a la transferencia lo que es equivalente a tener un paralelepípedo de longitud infinita, y sólo habrá gradiente en las direcciones  $x$  e  $Y$ . La ecuación ( 3.41 ) se reduce en esta ocasión a:

$$\left[ C_p \frac{\delta T}{\delta t} = k \left[ \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} \right] \right. \quad ( 9.66 )$$

Condiciones de frontera :

$$t < 0 \quad T = T_0 \quad - a < x < a \quad - b < y < b$$

$$t \geq 0 \quad T = T_s \quad x = \pm a \quad y = \pm b$$

$$\frac{\delta T}{\delta x} = 0 \quad x = 0 ; \quad \frac{\delta T}{\delta y} = 0 \quad y = 0$$

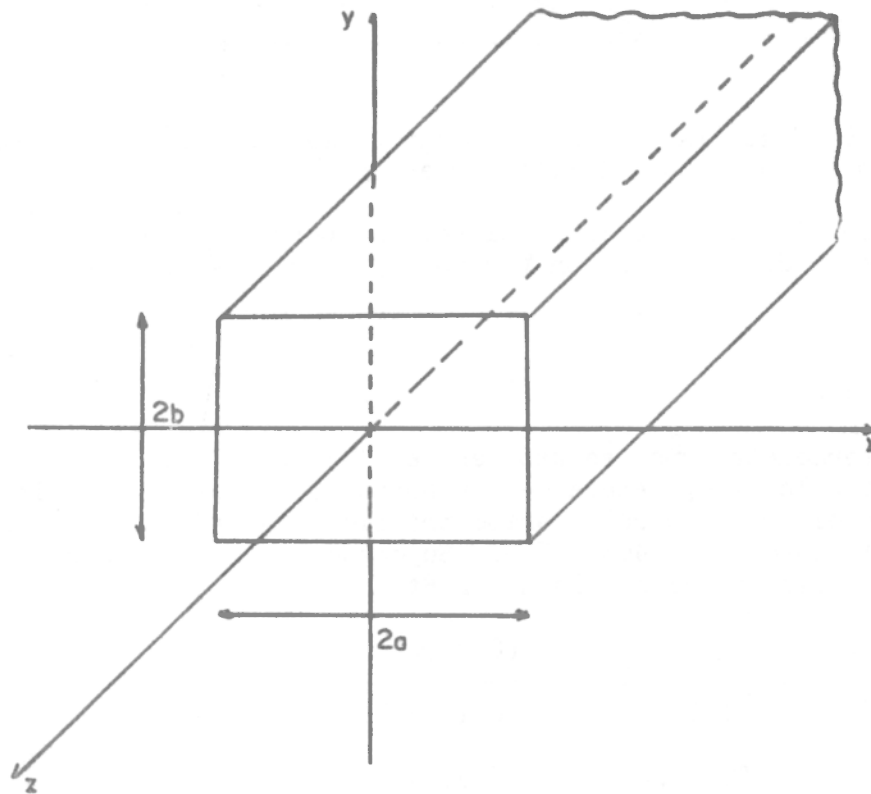


FIGURA 9.6. Paralelepípedo infinito de sección transversal rectangular.

Para resolver este problema consideremos que la barra rectangular infinita de la figura 9.6 está formada por la intersección de dos placas infinitas de espesor  $2a$  y  $2b$ . Para usar el método de separación de variables para solucionar la ecuación ( 9.66 ) suponemos una solución producto de la forma :

$$T(x,y,z) = X(x) Y(y) z(t)$$

Newman demostró ( 1931 ) que es posible expresar la distribución de temperatura adimensional como un producto de las soluciones para las dos placas de espesor 2a y 2b respectivamente :

$$\left[ \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{barra}} = \left[ \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{placa 2a}} \left[ \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} \right]_{\text{placa 2b}} \quad ( 9.67 )$$

Donde  $T_0$  es la temperatura inicial de la barra y  $T_{\infty}$  es la temperatura ambiente que para  $h$  tendiendo a infinito se convierte en  $T_s$ .

Para placas infinitas las ecuaciones diferenciales respectivas serian:

$$\alpha \frac{\delta^2 T_a}{\delta x^2} = \frac{\delta T_a}{\delta t} ; \quad \alpha \frac{\delta^2 T_b}{\delta y^2} = \frac{\delta T_b}{\delta t} \quad ( 9.68 )$$

Suponiendo soluciones  $T_a = F(x,t)$  ;  $T_b = G(y,t)$  , Se podrá escribir :

$$T(x,y,t) = F(x,t).G(y,t) \quad ( 9.69 )$$

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} = G \frac{\delta^2 F}{\delta x^2} ; \quad \frac{\delta^2 T}{\delta y^2} = F \frac{\delta^2 G}{\delta y^2}$$

$$\frac{\delta T}{\delta t} = F \frac{\delta G}{\delta t} + G \frac{\delta F}{\delta t}$$

Usando ( 9.68 )

$$\frac{\delta T}{\delta t} = F\alpha \frac{\delta^2 T_b}{\delta y^2} + G\alpha \frac{\delta^2 T_a}{\delta x^2}$$

Reemplazando en ( 9.66 ) :

$$\alpha \left[ F \frac{\delta^2 T_b}{\delta y^2} + G \frac{\delta^2 T_a}{\delta x^2} \right] = \alpha \left[ G \frac{\delta^2 T_a}{\delta x^2} + F \frac{\delta^2 T_b}{\delta y^2} \right]$$

Esto significa que la distribución de temperatura adimensional para la barra rectangular infinita puede expresarse como un producto de las soluciones para las dos placas de espesor 2a y 2b como se indica en ( 9.67 ).

En forma semejante, la solución para un bloque tridimensional (como por ejemplo un ladrillo) puede expresarse como un producto de las soluciones de las tres placas infinitas que tienen por espesores las tres aristas del bloque. Así mismo una solución para un cilindro de

longitud finita podría expresarse como un producto de soluciones de un cilindro infinito y una placa infinita de espesor igual a la longitud del cilindro. Podrían combinarse las soluciones de cilindro infinito y el sólido semiinfinito para obtener distribuciones de temperatura en cilindros y barras semiinfinitos.

### EJEMPLO 9.3.

Un procedimiento experimental común para la medición de la difusividad en sistemas gaseosos binarios emplea una cavidad cilíndrica dividida por una separación que puede removerse.

Un gas A llena inicialmente la cavidad del lado de la partición y un gas B el otro lado. Se remueve el separador y se permite que ocurra la difusión a temperatura y presión constantes, sin convección tal como se especifica en la sección "Interdifusión de Gases".

Si esto ocurre en un cilindro de 120 cm de longitud, con helio en un compartimento y metano en el otro, a presión total de 5 atm y 20 °C de temperatura, se requieren 2.5 hr para que la concentración media del helio baje a 0.7  $c_0$  en una mitad y aumente a 0.3  $c_0$  en la otra. calcule la difusividad para este sistema.

Solución.

La situación encaja exactamente en el desarrollo seguido para obtener la ecuación ( 9.50 ). Tomando solamente el primer término de la serie.

$$y_{Af} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \exp(-b) \quad ; \quad b = (\pi/2)^2(Dt/a^2)$$

$$\exp(-b) = \frac{\pi^2}{4} (y_{Af} - 1/2)$$

$$(\pi^2/4)(D_{AB}t/a^2) = \ln \frac{8}{\pi^2(2y_{Af} - 1)}$$

$$D_{AB} = \frac{4a^2}{\pi^2 t} \ln \left[ \frac{8}{\pi^2(2y_{Af} - 1)} \right]$$

Los valores de los parámetros son :

$$a = 60 \text{ cm} ; p = 5 \text{ atm.} ; T = 293 \text{ K} ; t = (2.5)(3600)\text{s} ; y_{Af} = 0.7$$

Reemplazando obtenemos :  $D_{AB} = 0.1145 \text{ cm}^2/\text{s}$

El término siguiente de la expresión ( 9.50 ) es :

$$\frac{4}{\pi^2} \left[ \frac{1}{9} \exp \left[ - \frac{9\pi^2}{4} (D_{AB}t/a^2) \right] \right] =$$

$$\frac{4}{9 \pi^2} \exp \left[ \frac{9\pi^2}{4} \frac{(0.1145)(2.5)(3600)}{(60)^2} \right] = 4.08 \times 10^{-13}$$

Cantidad suficientemente pequeña como para justificar el que en el paso inicial hubiéramos tomado sólo el primer término de la serie en ( 9.50 ).

Para cálculos rápidos comparando la ecuación (9.50) con la ecuación (9.37), observamos que la ordenada de la figura 9.3 (ó 4.2 de Treybal) vale  $Y = (2F - 1)$ . Para  $F = 0.7 = y_{Af}$ ,  $Y = 0.4$ ;  $D_{AB}t/a^2 = 0.28$  (de la gráfica) y  $D_{AB} = 0.112 \text{ cm}^2/\text{s}$ .

Sherwood, Pigford y Wilke dan un valor experimental para la difusividad Helio - Metano a 298 K ( $D_{ABP}$ ) =  $0.675 \text{ cm}^2/\text{s}$

Corrigiéndola para las condiciones del experimento tenemos :

$$D_{AB} = (0.675/5)(293/298)^{1.81} = 0.1309 \text{ cm}^2/\text{s}$$

#### TRANSPORTE AL INTERIOR DE UN MEDIO SEMIINFINITO.

Reconsideremos el problema del transporte en estado transitorio en la placa de espesor  $b$ , calentada por un sólo lado, tratada al comienzo de éste capítulo. ya sea porque el espesor  $b$  sea grande o porque el tiempo de contacto real o adimensional,  $\tau$ , sean pequeños, el calor que entra por la superficie inferior de la placa, en  $z=0$  no alcanza la superficie ubicada en  $z = b$  durante el proceso. Desde este punto de vista la placa puede considerarse de extensión infinita en la dirección  $z$ , y ser denominada cuerpo semiinfinito, entendiéndose pues por esto un cuerpo en el cual siempre existe una parte en la que no ocurre cambio de temperatura aunque en una de sus fronteras lo haya ocurrido.

Podemos usar las condiciones :

$T$  tiende a  $T_2$   $z$  tiende a  $\infty$  (en lugar de  $T = T_2$  para  $z = b$ ). Las condiciones iniciales se mantienen, es decir :

$$T = T_2 \quad x > 0 \quad t = 0 ; \quad T = T_1 \quad x = 0 \quad t > 0$$

Si analizamos la figura 9.7 observamos que las curvas para  $\theta$  contra  $z$  en  $t_1$  y  $t_2$  muestran similitud en la forma, pero difieren en que en  $t_2$  el calor ha penetrado más profundamente en la pared que en  $t_1$ . Así parece que cada curva puede caracterizarse por un espesor de penetración  $\delta(t)$  diferente, y podemos preguntarnos si existe una variable, digamos  $n = z/\delta(t)$ , que pueda unificar todas las curvas en una sólo.

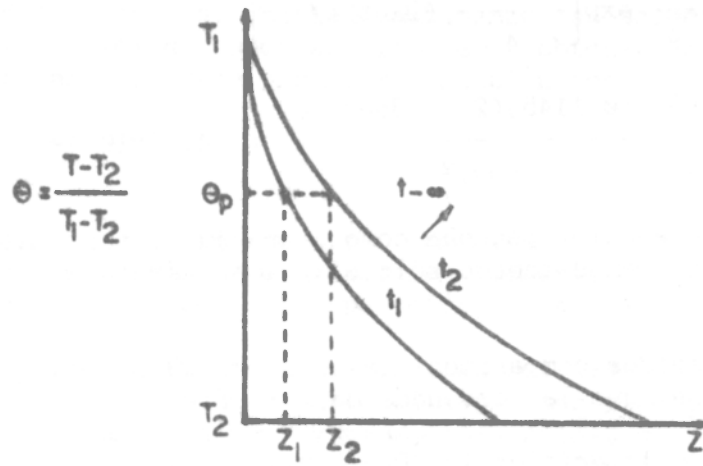


FIGURA 9.7. Perfiles de temperatura para dos tiempos pequeños.

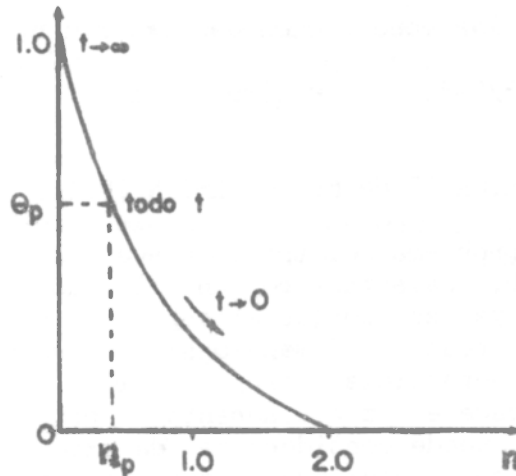


FIGURA 9.8. Similitud de los perfiles luego de la transformación.

Analicemos que la temperatura  $T_p$  correspondiente al punto  $\theta_p$  se alcanza a la profundidad  $z_1$ , después de un tiempo  $t_1$ , pero a la profundidad  $z_2$  sólo se alcanza después de un tiempo  $t_2$ . Si definimos  $\delta(t)$  de manera tal que

$$\frac{z_1}{\delta_1(t_1)} = \frac{z_2}{\delta_2(t_2)} = \eta_p$$

ambos puntos ( y todos los puntos en los que se tiene  $T_p$  o  $\theta_p$  ) como se muestra en la figura 9.8 coincidirán. En ese caso, de la ecuación diferencial parcial que describe el fenómeno :

$$\alpha \frac{\delta^2 \theta}{\delta z^2} = \frac{\delta \theta}{\delta t} \quad ( 9.70 )$$

se podrán eliminar  $z$  y  $t$ , reduciéndola a una ecuación diferencial ordinaria de la forma  $\theta(\eta)$ , donde :

$$\theta = \frac{T - T_2}{T_1 - T_2}$$

es la temperatura adimensional.

Para determinar si la transformación es posible reemplazamos  $\eta$  en la ecuación diferencial usando la regla de la cadena :

$$\frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\delta\eta}{\delta t} = \frac{d\theta}{d\eta} \left[ -\frac{z}{\delta^2} \frac{d\delta}{dt} \right]$$

$$\frac{\delta\theta}{\delta z} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\delta\eta}{\delta z} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{1}{\delta}$$

$$\frac{\delta^2\theta}{\delta z^2} = \left[ \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{\delta\theta}{\delta z} \right] \right] \frac{\delta\eta}{\delta z} = \left[ \frac{d^2\theta}{d\eta^2} \frac{1}{\delta} \right] \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta^2} \frac{d^2\theta}{d\eta^2}$$

La ecuación ( 9.70 ) se convierte en :

$$\frac{\alpha}{\delta^2} \frac{d^2\theta}{d\eta^2} = -\frac{z}{\delta^2} \frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\delta}{dt}$$

Usando la definición de  $\eta$  para eliminar  $z$  :

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{n\delta}{\alpha} \frac{d\delta}{dt} \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad ( 9.71 )$$

Esta ecuación todavía contiene  $t$ , pero si hacemos

$$\frac{\delta}{\alpha} \frac{d\delta}{dt} = \text{constante} = a \quad ( 9.72 )$$

Como  $\delta = 0$  en  $t = 0$  (por principios físicos)

$$\int_0^\delta \delta d\delta = a \alpha \int_0^t dt ; \delta = (2a\alpha t)^{\frac{1}{2}}$$

La ecuación diferencial ordinaria ( 9.71 ) se transforma en :

$$\frac{d^2\theta}{dn^2} + a\theta \frac{d\theta}{dn} = 0 \quad (9.73)$$

con :  $\theta = 0$  para  $n = \infty$   
 $\theta = 1$  para  $n = 0$

Esta ecuación es la misma ecuación ( 8.31 ) si  $a = 2$  en la ecuación (9.72 ), así  $\delta = (4\alpha t)^{1/2}$  por conveniencia, y

$$\theta = 1 - \text{erf}(n) = \text{erfc}(n)$$

$$\frac{T - T_2}{T_1 - T_2} = \frac{T - T_0}{T_s - T_0} = \text{erfc} \left[ \frac{z}{2(\alpha t)^{1/2}} \right] \quad (9.74)$$

Significando por  $T_0$  la temperatura uniforme inicial del cuerpo y  $T_s$  la temperatura a la que se somete su superficie a partir de  $t = 0$ .

De las tablas de función de error observamos que,  $\theta = 0.005$ ,  $\text{erf}n = 0.995$ ,  $n = 2.0 = z_p/\delta$ ,  $z_p = 2\delta = 4(\alpha t)^{1/2}$  es la distancia a la cual el cambio de temperatura  $T - T_0$  es 0.5 % del cambio total  $T_s - T_0$ . Esta cantidad se conoce como la profundidad de penetración. Obsérvese que no podemos definir esta distancia como aquella a la cual  $T = T_0$  puesto que, según nuestro modelo, sería infinita.

Es de importancia calcular la velocidad de transporte dentro del medio. Usando la ley de Fourier :

$$q_s = q_s \Big|_{z=0} = -k \frac{\delta T}{\delta z} \Big|_{z=0} = -k (T_s - T_0) \frac{d\theta}{dn} \Big|_{n=0} \left[ \frac{dn}{dz} \right]_{z=0}$$

$$q_s = \frac{-k (T_s - T_0) d\theta}{(4\alpha t)^{1/2} dn} \Big|_{n=0}$$

$$\frac{d\theta}{dn} \Big|_{n=0} = \frac{-2\exp(-n^2)}{\sqrt{\pi}} \Big|_{n=0} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$q_s = \frac{k (T_s - T_0)}{(\pi\alpha t)^{1/2}} \quad (9.75)$$

La cantidad  $(\pi\alpha t)^{1/2}$  se toma con frecuencia como la profundidad de penetración ( en lugar de  $z_p = 2(4\alpha t)^{1/2}$  ) pues al reemplazarla en (9.74) se encuentra que es la distancia a la cual la diferencia de temperatura ha disminuido al 20 % de su valor total  $T_s - T_0$  (  $\text{erfc}(0.9) = 0.20$  ). Sin embargo, para determinar cuando el espesor de un objeto finito permite hacer el análisis de cuerpo semiinfinito, considerando como criterio el que  $b \geq z_p$ , parece más conservador  $z_p = 4(\alpha t)^{1/2}$  que  $z_p = (\pi\alpha t)^{1/2}$ .

Para el caso en el cual en la superficie  $z = 0$  hay una resistencia finita,  $T_s$  ya no es constante sino que varía con el tiempo y la temperatura del medio,  $T_\infty$  es la que se considera constante. La solución es entonces :

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \text{erf} \left[ \frac{z}{2(at)^{1/2}} \right] + \exp \left[ -\frac{hz}{k} + \frac{h^2at}{k^2} \right] \left[ 1 - \text{erf} \left[ \frac{h(at)^{1/2}}{k} + \frac{z}{2(at)^{1/2}} \right] \right] \quad ( 9.76 )$$

La temperatura de la superficie la encontramos para  $z = 0$  y la densidad de flujo de calor puede determinarse como  $q = h(T_s - T_\infty)$  donde  $h$  es el coeficiente convectivo calculado para las condiciones del fluido circundante. El fenómeno puede analizarse como si se agregara un espesor adicional de sólido del tamaño  $k/h = \Delta z^*$ .

**SOLUCION GRAFICA PARA EL TRANSPORTE INESTABLE UNIDIRECCIONAL GRAFICO DE SCHMIDT**

En muchos procesos que dependen del tiempo, las condiciones de operación actual no corresponden a las condiciones límite e iniciales estipuladas en las soluciones analíticas analizadas con anterioridad.

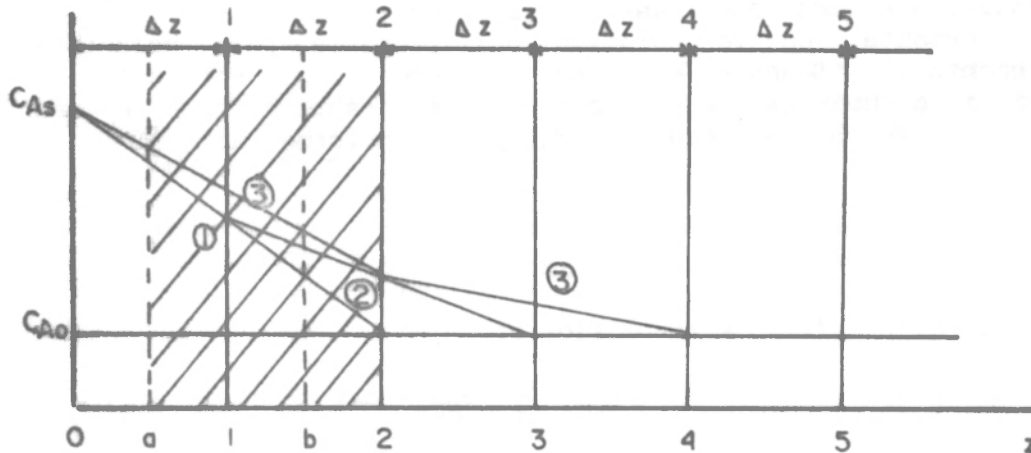


FIGURA 9.9. Gráfico de Schmidt para una pared que se extiende hasta el infinito en la dirección  $z$  y no presenta resistencia convectiva en la superficie ubicada en  $z=0$  ( $C_{A\infty} = C_{As} = \text{constante}$ )

La distribución inicial de concentraciones (o de temperaturas) puede presentar características no uniformes, o la temperatura ambiente,

los coeficientes convectivos o las difusividades pueden variar. Estos casos complejos pueden evaluarse empleando técnicas numéricas.

Consideremos una pared de espesor infinito en cuya superficie la concentración del componente A es  $c_{A_s}$ . La concentración inicial dentro de la pared es  $c_{A_0}$ . Dividimos la pared en capas, cada una de ellas de espesor  $\Delta z$ . Cada división se numera a partir de la superficie. Estas son líneas de referencia de concentración. Luego de un corto intervalo de tiempo  $\Delta t_1$ , fluirá masa hacia el plano 1 debido a la fuerza guía de concentraciones ( $c_{A_s} - c_{A_0}$ ). Si en este intervalo la fuerza guía entre los planos 1 y 2 permanece en cero ( $c_{A_0} - c_{A_0}$ ), habrá acumulación de masa en la capa ab, la que se extiende  $\Delta z/2$  a izquierda y derecha del plano 1. Escribiendo un balance de masa para el intervalo  $\Delta t_1$  con base en que el área perpendicular a la dirección z es S:

$$\frac{D_{AB}S(c_{A_1}^t - c_{A_2}^t)}{\Delta z} - \frac{D_{AB}S(c_{A_s}^t - c_{A_2}^t)}{\Delta z} + \frac{\Delta z S(c_{A_1}^{t+\Delta t} - c_{A_1}^t)}{\Delta t_1} = 0$$

Donde  $c_{A_1}^{t+\Delta t}$  es la nueva concentración en el plano de referencia -1- al fin del intervalo de tiempo  $\Delta t_1$ . Dividiendo todos los términos entre  $D_{AB}S/\Delta z$  y reorganizando

$$c_{A_1}^{t+\Delta t} = c_{A_1}^t + \frac{D_{AB}\Delta t}{\Delta z^2} (c_{A_s}^t - 2c_{A_1}^t + c_{A_2}^t) \quad (9.77)$$

La relación adimensional  $D_{AB}\Delta t / \Delta z^2$  recuerda el número de Fourier y es importante en la solución del problema pues relaciona el incremento de tiempo y el tamaño del nodo  $\Delta z$ . Por estudios de estabilidad numérica se demuestra que esta cantidad debe ser menor o igual que 1/2. Si seleccionamos  $\Delta z$  y  $\Delta t$  en forma tal que:

$$\frac{D_{AB} \Delta t}{(\Delta z)^2} = \frac{1}{2} \quad (9.78)$$

La ecuación (9.77) se simplifica a:

$$c_{A_1}^{t+\Delta t} = \frac{c_{A_s}^t + c_{A_2}^t}{2} \quad (9.79)$$

Al seleccionar en esta forma  $\Delta t$  y  $\Delta z$ , eliminamos  $c_{A_1}$ , y la nueva concentración  $c_{A_1}^{t+\Delta t}$ , es simplemente el promedio aritmético de la concentración en el momento t en los planos adyacentes. La línea recta - 1 - que conecta  $c_{A_s}$  y  $c_{A_2}$  localiza  $c_{A_1}^{t+\Delta t}$  en el punto donde la línea intersecta al plano 1.

De la misma manera se puede demostrar que la concentración en cualquier plano de referencia en el tiempo  $(n + 1)\Delta t$  es el promedio aritmético de las concentraciones de los planos adyacentes en el tiempo  $n\Delta t$ , o :

$$C_{A1}^{(n+1)\Delta t} = \frac{C_{A1-1}^{n\Delta t} + C_{A1+1}^{n\Delta t}}{2} \quad ( 9.80 )$$

Refiriéndonos a la Figura 9.9, la línea - 2 - se dibuja entre  $C_{A1}^{t+\Delta t}$  en la línea de referencia - 1 - y  $C_{A0}$  en la línea de referencia - 3 -. Esta línea intersecta la línea de referencia - 2 - en la concentración  $C_{A2}^{t+2\Delta t}$  para después de dos intervalos de tiempo. Para el tercer intervalo de tiempo  $\Delta t_3$  se dibujan dos líneas - 3 -. una entre  $C_{A0}$ , que no varía con el tiempo, y el nuevo  $C_{A2}^{t+2\Delta t}$  de la línea de referencia - 2 -, y una entre este punto y  $C_{A0}$  en la línea de referencia - 4 - (hasta el momento no se ha cambiado la concentración en este plano de referencia). Estas líneas indican que las concentraciones en las líneas - 1 - y - 3 - pueden ser  $C_{A1}^{t+3\Delta t}$  y  $C_{A3}^{t+3\Delta t}$  al final del tercer intervalo de tiempo. El mismo procedimiento puede continuarse para intervalos de tiempo adicionales. Es importante que valores constantes de  $\Delta z$  y  $\Delta t$  se usen a lo largo de la solución.

La velocidad de flujo másico por unidad de área dentro de la pared en cualquier instante  $N_{Az}^n$  puede obtenerse a partir de la pendiente del perfil de concentraciones entre la superficie y la línea de referencia - 1 -. La expresión algebraica es:

$$N_{Az}^n = \frac{D_{AB} (C_{A0} - C_{A1})}{\Delta z} \quad ( 9.81 )$$

Esta técnica gráfica se basa en la suposición de que el coeficiente difusional es constante, y que el cuerpo al comienzo tiene un perfil de concentraciones conocido. La precisión puede mejorarse en la medida en que  $\Delta z$  se haga más y más pequeño.

El método de Schmidt puede aplicarse a cualquier condición inicial. Cuando la concentración superficial no es constante debido a la transferencia de masa convectiva tenemos:

$$\frac{d f_A}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{f_{A\infty} - f_{A0}}{D_{AB}/k_f} = \frac{f_{A\infty} - f_{A0}}{\Delta z^*} \quad ( 9.82 )$$

Bastará entonces agregar una línea de referencia a la izquierda del plano de referencia - 0 - a una distancia  $\Delta z^*$ . Aquí la concentración que permanecerá constante será  $f_{A\infty}$ , pero partiendo de esta nueva

línea de referencia se puede efectuar el procedimiento sin más modificaciones.

#### EJEMPLO 9.4.

Una alcoba con paredes de ladrillo, cuya temperatura inicial es de cero grados centígrados, se calienta a velocidad constante por una unidad térmica. Se desea determinar cuanto tiempo es necesario para establecer una distribución de temperaturas de estado estable en la pared y en el cuarto, así como la velocidad de calentamiento de la unidad térmica. La temperatura final del cuarto deberá ser 20 °C. El coeficiente de transferencia en el interior de la pared es  $h_1 = 6.8 \text{ W/m}^2\text{.K}$ , el coeficiente de transferencia en el exterior,  $h_o = 17 \text{ W/m}^2\text{.K}$ , la difusividad térmica  $\alpha = 0.00112 \text{ m}^2/\text{h}$ , la conductividad térmica de la pared es  $0.45 \text{ W/m.K}$  y su espesor  $0.4 \text{ m}$ . La temperatura de estado estable en la pared está dada por una línea recta conectando los dos puntos a y b, separados de las superficies de la pared por  $k/h_1$  y  $k/h_o$ , respectivamente, y temperaturas de 20 y 0 °C. Como la velocidad de transferencia de calor hacia la superficie interna de la pared es constante, todos los gradientes de temperatura en la pared durante el proceso de calentamiento deben tener la misma inclinación ( dada por la línea ab en estado estable ) hacia la superficie interna. Para comenzar, la pared se divide en seis capas cada una de  $\Delta z = 0.0665 \text{ m}$ . El intervalo de tiempo vale entonces:

$$\Delta t = \frac{(\Delta z)^2}{2\alpha} = \frac{(0.0665)^2}{2(0.00112)} = 1.97 \text{ hr}$$

La construcción gráfica se hace en la figura 9.10.

Una vez calculados  $k/h_1 = 0.0665 \text{ m} = \Delta z_1^*$ ;  $k/h_o = 0.0264 \text{ m} = \Delta z_o^*$ , se determina la pendiente ab como:

$$\frac{-20}{0.4 + 0.0665 + 0.0264} = -40.576 \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}} = \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0}$$

Velocidad de Calentamiento.

$$q_s = -k \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=0} = (0.45)(40.576) = 18 \text{ W/m}^2$$

Trazando una línea con esta pendiente, por la base de la línea de referencia - 1 -, hallamos la temperatura de la superficie interna luego de un  $\Delta t$  (marcado como 1). Desde allí y de la base de la línea de referencia - 2 -, trazamos una línea (punteada) que intercepta la línea de referencia - 1 - en la temperatura de este plano luego de  $2 \Delta t$ . Desde allí, con pendiente - 40.576 hallamos la temperatura de la superficie luego de  $2 \Delta t$ . También desde allí y la base de la línea de referencia - 3 -, hallamos la temperatura del plano 2 luego de  $3 \Delta t$ . Los perfiles de temperatura para cada  $n \Delta t$  se

marcan con líneas sólidas en el gráfico 9.10. Se observa que son necesarias más de 80 horas. (4 días), antes de alcanzar condiciones de estado estable. Luego de  $5\Delta t$ , el intervalo de longitud se hizo  $2\Delta z$ , por lo tanto el intervalo de tiempo nuevo se hace  $4(1.97) = 7.89$  h.

Analíticamente (Cranck, p-49) el estado estable se alcanzaría para

$$\frac{at}{b^2} \approx 0.45 = \frac{(0.00112 \text{ m}^2/\text{h})t}{0.4929 \text{ m}}$$

$$t \approx 97.6 \text{ h} \approx 4 \text{ días.}$$

El calor total transferido durante este tiempo será:

$$(18 \text{ W/m}^2)(97.6 \text{ h}/1000) \approx 1.757 \text{ Kw.h/m}^2$$

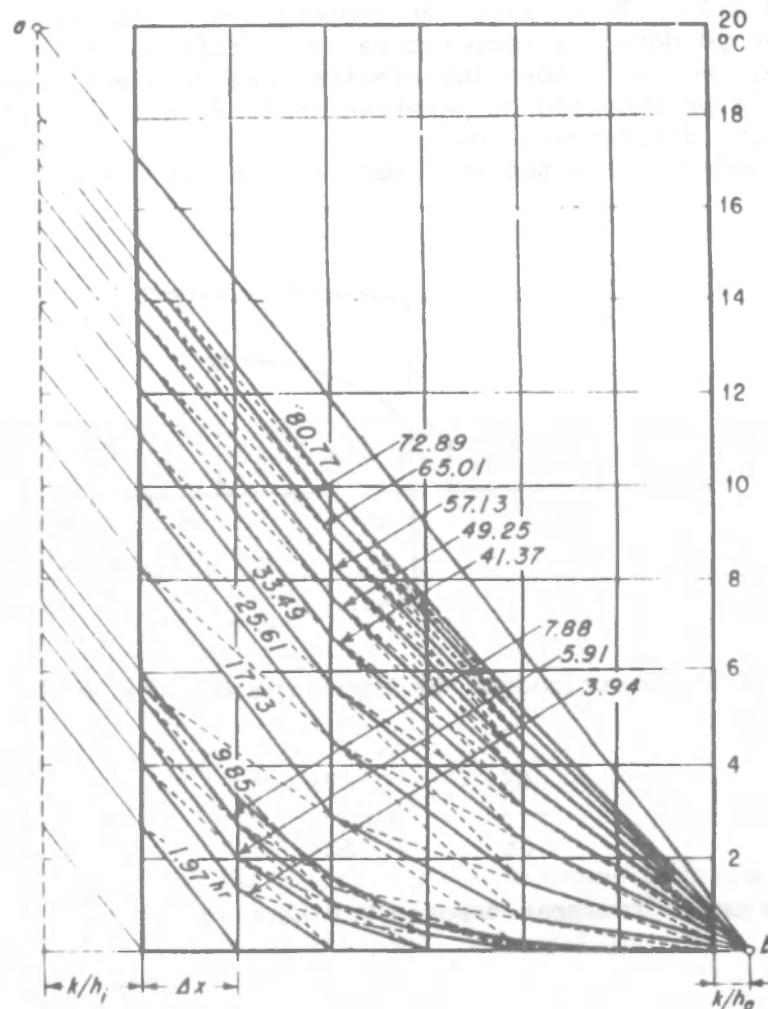


FIGURA 9.10.

## CONDUCCION DE CALOR EN ESTADO TRANSITORIO. METODOS APROXIMADOS.

Para problemas de geometría compleja o con condiciones límite no lineales o con otras complicaciones, se puede recurrir a formulaciones aproximadas de las ecuaciones de conducción de calor. Una de estas aproximaciones es la forma integrada de la ecuación de conducción de calor presentada por Goodman en 1958. La técnica y las ecuaciones resultantes son similares a las de Von Karmán usadas en la capa límite térmica e hidrodinámica. Estas ecuaciones son aproximadas en el sentido de que no dan el perfil real de temperaturas o los flujos de calor locales exactos, pero satisfacen exactamente el balance de energía. El método tiene la virtud de ser simple, rápido, y su precisión es razonable, comparada con las soluciones exactas.

Haremos el análisis para el caso de estado transitorio en una dimensión en un cuerpo semiinfinito:

Cuando un cuerpo semiinfinito el cual se halla inicialmente a una temperatura  $T_0$ , pierde calor (o gana) desde la superficie libre, un gradiente de temperatura aparece, tal como se esquematiza en la figura 9.11. Este campo de temperaturas comprende la región dentro del cuerpo donde la temperatura local difiere de  $T_0$ . La profundidad a la cual son sentidos los efectos del gradiente de temperatura se llama la profundidad de penetración  $\delta$ . Esta es función del tiempo. La ecuación diferencial para el caso del sólido semiinfinito con propiedades constantes es, como ya lo hemos visto

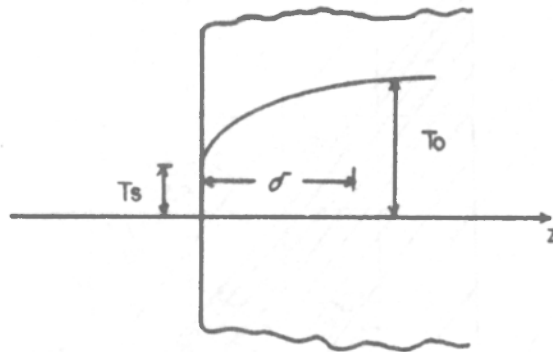


FIGURA 9.11. Distribución de temperaturas en un sólido semiinfinito.

$$\frac{\delta T}{\delta t} = \alpha \frac{\delta^2 T}{\delta z^2} \quad (9.1)$$

Esta se puede integrar desde  $z = 0$  hasta  $z = \delta$ :

$$\int_0^{\delta} \frac{\delta T}{\delta t} dz = \int_0^{\delta} \alpha \frac{\delta^2 T}{\delta z^2} dz \quad (9.83)$$

Sabiendo que :

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x,y) dx = f(b,y) \frac{db}{dy} - f(a,y) \frac{da}{dy} + \int_a^b \frac{\delta f}{\delta y} dx \quad (9.84)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_0^{\delta} T(z,t) dz \right] - T(\delta,t) \frac{d\delta}{dt} = \alpha \left[ \frac{\delta T}{\delta z} (\delta,t) - \frac{\delta}{\delta z} (\theta,t) \right] \quad (9.85)$$

En esta ecuación  $T(\delta,t) = T_0$  que es constante. Por lo tanto:

$$\frac{\delta T}{\delta z} (\delta,t) = 0$$

y la ecuación ( 9.85 ) se transforma en

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_0^{\delta} T(z,t) dz - T_0 \delta(t) \right] = - \alpha \frac{\delta T}{\delta z} (\theta,t) \quad (9.86)$$

En el caso en el que se deba tener presente el cambio de las propiedades físicas con la temperatura,

$$\int_{Cp} \frac{\delta T}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta z} \left[ k \frac{\delta T}{\delta z} \right] \quad (9.87)$$

Se sugiere transformar la variable independiente:

$$\theta = \int_0^T Cp dT$$

Lo que cambia ( 9.87 ) a:

$$\frac{\delta \theta}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta z} \left[ \alpha(\theta) \frac{\delta \theta}{\delta z} \right] \quad (9.88)$$

que al ser integrada entre  $z = 0$  y  $z = \delta(t)$  da:

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_0^{\delta} \theta dz - \theta_0 \delta \right] = - \alpha(\theta_0) \frac{\delta \theta}{\delta z} (\theta,t) \quad (9.89)$$

Tanto ( 9.86 ) como ( 9.89 ) producen soluciones aproximadas para conducción en estado transitorio en cuerpos semiinfinitos y placas teniendo propiedades físicas constantes o variables. En la forma integrada de la ecuación de conducción de calor es necesario describir la distribución de temperatura por medio de una expresión analítica apropiada para evaluar las integrales y derivadas de (9.86) o (9.89).

El perfil analítico de temperaturas así seleccionando debe, no sólo ser físicamente representativo del perfil real de temperatura (o concentración) sino además satisfacer las condiciones límite bajo consideración.

### SOLIDO SEMIINFINITO CON PROPIEDADES FISICAS CONSTANTES.

Consideremos el caso de un sólido semiinfinito de propiedades físicas constantes. Este se tiene inicialmente a temperatura uniforme  $T_0$ . En el tiempo cero, la temperatura superficial se reduce a una nueva temperatura  $T_s$  que se mantiene constante de allí en adelante. En términos de la variable  $\theta = T - T_s$ , la ecuación diferencial y las condiciones límite que describen el problema son:

$$\frac{\delta\theta}{\delta t} = \alpha \frac{\delta^2\theta}{\delta z^2} \quad (9.96)$$

$$t \leq 0 \quad \theta(z,0) = T_0 - T_s = \theta_0 ; \quad t > 0 \quad \theta(0,t) = 0$$

La forma integrada de ( 9.90 ), es comparable ( 9.86 ):

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_0^{\delta} \theta(z,t) dz - \theta_0 \delta(t) \right] = -\alpha \frac{\delta\theta}{\delta z} (0,t) \quad (9.91)$$

Suponiendo que  $\theta(z,t)$  puede representarse por un polinomio de segundo grado, :

$$\theta(z,t) = a + bx + cx^2 \quad (9.92)$$

sujeta a las condiciones físicas:

$$z = 0 \quad \theta(0,t) = 0 ; \quad z = \delta(t) \quad \theta = \theta_0 \quad \delta\theta/\delta z = 0$$

La expresión resultante para la distribución asumida es:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 2 \frac{z}{\delta} - \left[ \frac{z}{\delta} \right]^2 \quad (9.93)$$

haciendo:  $z/\delta = \eta$  y reemplazando en ( 9.91 ):

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_0^1 \theta_0(2\eta - \eta^2) d\eta - \theta_0\delta \right] = \frac{2\alpha\theta_0}{\delta} \quad (9.94)$$

Resolviendo:

$$\frac{d\delta^2}{dt} - 12\alpha = 0$$

$$\text{para } t = 0, \quad \delta = 0 ; \quad \delta = (12\alpha t)^{1/2} \quad (9.95)$$

La distribución de temperaturas se obtiene reemplazando en ( 9.93 )

$$\frac{T - T_s}{T_o - T_s} = \frac{2z}{(12\alpha t)^{1/2}} - \frac{z^2}{12\alpha t} \quad ( 9.96 )$$

La solución exacta para este problema fué ( ver ecuación 9.74 ) :

$$\frac{T - T_s}{T_o - T_s} = \text{erf} \frac{z}{2(\alpha t)^{1/2}}$$

En  $\delta = (12\alpha t)^{1/2}$  , la diferencia (  $T_o - T$  ) es 1.45 % de la máxima diferencia (  $T_o - T_s$  ).

El flujo de calor en la superficie se obtiene como :

$$q_s = k \left[ \frac{\delta\theta}{\delta z} \right]_{z=0} = \frac{k\theta_o}{(3\alpha t)^{1/2}} \quad ( 9.97 )$$

al comparar ( 9.97 ) con

$$q_s = \frac{k\theta_o}{(\pi\alpha t)^{1/2}} \quad ( 9.75 )$$

se puede observar que existe una muy pequeña diferencia entre los resultados de la solución exacta y la solución aproximada.

#### SOLIDO SEMIINFINITO CON TEMPERATURA DE SUPERFICIE VARIABLE CON EL TIEMPO.

Consideremos nuevamente un sólido semiinfinito, con propiedades físicas constantes, pero donde el flujo de calor en la superficie puede variar arbitrariamente con el tiempo. Supongamos que el cuerpo está inicialmente a una temperatura  $T_o$  constante, luego a partir de un momento dado, la superficie,  $z = 0$  se somete a un flujo de calor variable con el tiempo.

Si  $\theta = T - T_o$

$$\frac{\delta\theta}{\delta t} = \alpha \frac{\delta^2\theta}{\delta z^2}$$

$z = 0 \quad t > 0 \quad q = q_s(t) \quad \text{varía con el tiempo.}$

$z > 0 \quad t \leq 0 \quad \theta = 0$

Assumimos perfil de temperatura cúbico :

$$\theta(z,t) = az^3 + bz^2 + cz + d \quad ( 9.98 )$$

Son cuatro constantes. Requerimos cuatro condiciones límite a saber :

$$z = 0 ; \quad \frac{\delta\theta}{\delta z} = - \frac{q_s}{k}$$

$$z = \delta ; \quad \theta(\delta, t) = 0 ; \quad \frac{\delta\theta}{\delta z} = 0 ; \quad \frac{\delta^2\theta}{\delta z^2} = 0$$

Resolviendo:

$$a = - \frac{q_s}{3k\delta^2} ; \quad b = \frac{q_s}{k\delta} ; \quad c = - \frac{q_s}{k} ; \quad d = \frac{q_s\delta}{3k}$$

Haciendo  $\eta = z/\delta$  :

$$\theta = \frac{q_s\delta}{3k} (1 - 3\eta + 3\eta^2 - \eta^3) = \frac{q_s\delta}{3k} (1 - \eta^3) \quad (9.99)$$

Al reemplazar en la ecuación ( 9.91 ) o ( 9.86 ) obtenemos una ecuación diferencial ordinaria.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{12} q_s \delta^2 \right] = \alpha q_s \quad (9.100)$$

Así cuando se resuelve suponiendo  $q_s$  como constante,

$$\delta = (12\alpha t)^{\frac{1}{2}} \quad (9.101)$$

$$\theta(z, t) = \frac{q_s}{k} \left[ \frac{4}{3} \alpha t \right]^{\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{z}{(12\alpha t)^{\frac{1}{2}}} \right]^3 \quad (9.102)$$

para  $z = 0$ ,

$$\theta_s = \frac{q_s}{k} \left[ \frac{4}{3} \alpha t \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.103)$$

La solución exacta dada por Carslaw y Jaeger (p-75) es:

$$\theta_s = \frac{q_s}{k} \left[ \frac{4\alpha t}{\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9.104)$$

El resultado ( 9.103 ) es sólo 2.33 % mayor

SOLIDO SEMIINFINITO CON PERDIDAS CONVECTIVAS DE CALOR EN LA SUPERFICIE.

Se pueden usar los resultados anteriores para determinar el flujo de calor en la superficie por pérdidas convectivas hacia un fluido. Nuevamente consideremos que el sólido se encuentra inicialmente a temperatura uniforme  $T_0$ . La superficie libre en  $z = 0$  está en contacto con un fluido a temperatura constante  $T_\infty$ . Sea  $\theta = (T - T_0)$ . El problema queda descrito por las siguientes ecuaciones y condiciones límite:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

$$\left[ -\frac{\partial \theta}{\partial z} \right]_{z=0} = -\frac{q_s}{k} = \frac{h}{k} [\theta(0,t) - \theta_\infty] \quad (9.105)$$

Donde  $\theta_\infty = (T_\infty - T_0)$  es constante y  $q_s$  es función del tiempo. Tomando el mismo perfil de temperatura (9.99), evaluado en  $z = 0$ , nos da:

$$\delta = \frac{3k\theta_s}{q_s} \quad (9.106)$$

donde  $\theta_s = \theta(0,t) = (T_s - T_0)$  es función del tiempo. Introduciendo (9.105) en (9.100) obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{k\theta_s^2}{q_s} \right] = \frac{4}{3} \alpha \frac{q_s}{k} \quad (9.107)$$

como  $q_s/k$  es función de  $\theta_s$  por (9.100), es posible separar las variables para obtener una solución analítica.

Podemos reescribir (9.107) como:

$$\frac{1}{f(\theta_s)} d \frac{\theta_s^2}{f(\theta_s)} = \frac{4}{3} \alpha dt$$

que se puede expandir como:

$$\frac{2\theta_s f(\theta_s) - \theta_s^2 f'(\theta_s)}{f^3(\theta_s)} d\theta_s = \frac{4}{3} \alpha dt$$

Goodman halló la solución para la variación de la temperatura en la superficie  $z = 0$ :

$$\frac{4}{3} \left[ \frac{h}{k} \right]^2 \alpha t = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1 - \theta_s/\theta_\infty)^2} - 1 \right] + \ln \left[ 1 - \frac{\theta_s}{\theta_\infty} \right] \quad (9.108)$$

Carslaw y Jaeger dan la solución exacta (p-72):

$$\frac{\theta}{\theta_{\infty}} = \operatorname{erfc} \left[ \frac{z}{2(at)^{1/2}} \right] - \exp \left[ \frac{hz}{k} + \frac{h^2 at}{k^2} \right] \operatorname{erfc} \left[ \frac{z}{2(at)^{1/2}} + \frac{h}{k} (at)^{1/2} \right] \quad (9.109)$$

Evaluando esta expresión para  $z = 0$  y graficando  $\theta_0/\theta_{\infty}$  en las ordenadas contra  $\ln [(h/k)(at)^{1/2}]$  en las abscisas, no se aprecia diferencia entre ambas curvas.

## APENDICE A.9.1

### LA FUNCION ERROR Y OTRAS FUNCIONES RELACIONADAS.

Escribimos :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\beta^2) d\beta \quad (A)$$

o sea que  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ ;  $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$ ,  $\operatorname{erf}(0) = 0$ . (B)

También se usa :

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-\beta^2) d\beta \quad (C)$$

Se pueden obtener aproximaciones para valores grandes y pequeños de  $x$ . Para valores pequeños de  $x$  se usa la serie para  $\exp(-\beta^2)$  en (A) y obtenemos :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\beta^2) d\beta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x d\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^{2n}}{n!} \quad (D)$$

Como la serie es convergente uniformemente puede integrarse término a término y así :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} \right] \quad (D.1)$$

Para valores grandes de  $x$  se procede así: Una integración por partes da :

$$\int_x^\infty \exp(-\beta^2) d\beta = \frac{\exp(-x^2)}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{\exp(-\beta^2) d\beta}{\beta^2}$$

Y repitiendo el proceso  $n$  veces, encontramos :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(x) &= \int_x^\infty \exp(-\beta^2) d\beta = \\ &= \frac{1}{2} \exp(-x^2) \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^{n-1} x^{2n-1}} \right] + \end{aligned}$$

$$+ (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \int_x^\infty \frac{\exp(-\beta^2) d\beta}{\beta^{2n}}$$

Esta serie no converge porque la relación entre el término  $n$  a el término  $(n - 1)$  no se mantiene menor que la unidad cuando  $n$  aumenta. Sin embargo, si se toman  $n$  términos de la serie, los restantes, o sea:

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \int_x^\infty \frac{\exp(-\beta^2) d\beta}{\beta^{2n}}$$

es menor que el término enésimo puesto que

$$\int_x^\infty \frac{\exp(-\beta^2) d\beta}{\beta^{2n}} < \exp(-x) \int_x^\infty \frac{d\beta}{\beta^{2n}}$$

Podemos de esta manera parar en cualquier término y tomar la suma de los términos hasta allí como una aproximación para la función, siendo el error en valor absoluto, menor que el último término que retuvimos. De esta forma,  $\text{erfc}(x)$  puede calcularse, numéricamente, para valores grandes de  $x$ , a partir de la fórmula

$$\text{erfc}(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \dots \right] \quad (D.2)$$

La función  $\text{erf}(x)$ , que aparece en esta discusión, surge frecuentemente en problemas de conducción de calor y difusión molecular.

Otras integrales importantes que llevan a funciones de error son :

$$\int_0^\infty \exp(-\beta^2) \frac{\text{sen}(2\beta y)}{\beta} d\beta = \frac{\pi}{2} \text{erf}(y)$$

$$\int_0^\infty \exp(-\beta^2) \text{sen}(2\beta y) d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-y^2) \text{erf}(y)$$

#### DERIVADAS E INTEGRALES DE LAS FUNCIONES DE ERROR.

Por derivación sucesiva de la función de error :

$$\Phi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \text{erf}(x)$$

así :

$$\Phi_1(x) = \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right] \exp(-x^2)$$

$$\Phi_2(x) = \left[ -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \right] x \exp(-x^2), \text{ etc.}$$

En problemas de conducción de calor y transferencia de masa difusional, son más importantes las integrales repetidas de la función de error.

Escribimos :

$$i^n \operatorname{erfc}(x) = \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc}(\beta) d\beta, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

donde  $i^0 \operatorname{erfc}(x) = \operatorname{erfc}(x)$

También se abrevia  $i \operatorname{erfc}(x)$  en lugar de  $i^1 \operatorname{erfc}(x)$ .

Integrando por partes tenemos :

$$i \operatorname{erfc}(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{\pi}} - x \operatorname{erfc}(x)$$

También :

$$\begin{aligned} i^2 \operatorname{erfc}(x) &= \frac{1}{4} \left[ (1+2x^2) \operatorname{erfc}(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x \exp(-x^2) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[ \operatorname{erfc}(x) - 2xi \operatorname{erfc}(x) \right] \quad (E) \end{aligned}$$

y por inducción la formula de recurrencia general es entonces:

$$2ni^n \operatorname{erfc}(x) = i^{n-2} \operatorname{erfc}(x) - 2xi^{n-1} \operatorname{erfc}(x) \quad (F)$$

de la que (E) es el caso para  $n = 2$ .

De (F) se deduce que :

$$i^n \operatorname{erfc}(0) = \frac{1}{2^n \Gamma(\frac{1}{2}n + 1)}$$

Así mismo sigue de (F) que  $y = i^n \operatorname{erfc}(x)$  satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2ny = 0$$

#### FUNCION DE ERROR DEL ARGUMENTO COMPLEJO.

Esta función, que es de gran importancia en conducción de calor, está definida por :

$$w(z) = u(x,y) + i v(x,y) = \exp(-z^2) \left[ 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(t^2) dt \right]$$

donde  $z = x + iy$ , o sea  $w(iz) = \exp(z^2) \operatorname{erfc}(z)$ .

Los resultados ( D.1 ) y ( D.2 ), demostrados para  $z$  real, se cumplen también si  $z$  es complejo.

#### FUNCION GAMMA.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-t) dt = k^z \int_0^{\infty} t^{z-1} \exp(-kt) dt ; z, k > 0$$

Llamada Integral de Euler

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}$$

Llamada Fórmula de Euler. Aquí  $z$  es distinto de  $0, -1, -2, \dots$ .

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \exp(rz) \prod_{n=1}^{\infty} \left[ (1 + z/n) \exp(-z/n) \right] ; |z| < \infty$$

Llamada Producto Infinito de Euler.

$$r = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/m - \ln m \right] = 0.5772156649$$

Llamada Constante de Euler.

$$\pi(z) = z! = \Gamma(z+1)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z! = z(z-1)!$$

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi} = (-1/2)!$$