UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

El problema de Cauchy asociado a una generalización de la ecuación Zakharov-Kuznetsov

Miguel Angel Rippe Espinosa

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2020

El problema de Cauchy asociado a una generalización de la ecuación Zakharov-Kuznetsov

Miguel Angel Rippe Espinosa

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Doctor en Ciencias - Matemáticas

Director:
Guillermo Rodríguez Blanco

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá D.C., Colombia
2020

Dedicado a
A mi familia y amigos.

Agradecimientos

Agradezco enormemente al Profesor Guillermo Rodríguez Blanco quien con su acertada orientación me permitió llevar a feliz término el presente trabajo. También a los profesores del Seminario de Ecuaciones Dispersivas, por sus comentarios y apoyo.

Resumen

En el presente trabajo, se tratan cuestiones tales como el buen planteamiento local en los espacios de Sobolev, espacios anisotrópicos con pesos y la existencia de ondas solitarias para el problema de valor inicial asociado a la ecuación:

$$u_t - \partial_x \left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta} \right) u + u^p u_x = 0,$$

donde $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ y $p \in \mathbb{Z}^+$, $x, y, t \in \mathbb{R}$.

Palabras clave: EDP, Ecuación Z-K, Espacios de Sobolev,Espacios de Sobolev con pesos, Buen planteamiento local.

Title

The Cauchy problem associated to a generalization of the Zakharov-Kuznetsov equation.

Abstract

The present work, deals with issues such as the local well-posedness in the Sobolev spaces, weighted anisotropic spaces and the existence of solitary waves, for the initial value problem associated to:

$$u_t - \partial_x \left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta} \right) u + u^p u_x = 0,$$

where $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ y $p \in \mathbb{Z}^+$, $x, y, t \in \mathbb{R}$.

Keywords: PDE, Z-K equation, Sobolev's spaces, Weighted Sobolev spaces, Local well-posedness

Contenido

Introducción

Las ecuaciones no lineales de evolución, son ecuaciones diferenciales parciales, en las que una de sus variables independientes es el tiempo. Son utilizadas en gran medida para modelar fenómenos de la mecánica de fluidos (ver [57]), la fibra óptica (ver [1], [37]) y la física del estado sólido (ver [60]), entre otras. Unas de las ecuaciones más importantes, de éste tipo, en la física son: La ecuación Korteweg-de Vries (KdV) (ver [45]), la ecuación de Schrödinger (ver [32]), la ecuación de Boussinesq (ver [9], [53]), la ecuación Benjamin-Ono (BO) (ver [3], [64]) y la ecuación Benjamin-Bona-Mahony (ver [4]), debido a los fenómenos que ellas modelan. El interés que tienen dichas ecuaciones, desde el punto de vista de las matemáticas, radica en el estudio de temas tales como, el buen planteamiento local y global, existencia y estabilidad de ondas solitarias, principios de continuación única, por mencionar algunos de ellos. Tales problemas por su alta relevancia han sido abordados por diferentes autores, para la ecuación de Boussinesq (ver [7], [21], [24], [43]), para la ecuación KdV (ver [22], [31], [35], [39], [40], [41]) y para la ecuación BO (ver [23], [25], [32], [34],[76]).

En las últimas décadas la ecuación (ZK),

$$u_t + \partial_x \Delta u + u u_x = 0, \tag{0-1}$$

obtenida por Zakharov y Kuznetsov (ver [77]), en el contexto de las ondas acústicas iónicas en plasmas magnéticos, la cual es una extensión multi-dimensional de la ecuación KdV (ver [46], [47]), ha sido objeto de amplia investigación. Por ejemplo, el buen planteamiento del Problema de Valor Inicial (en adelante P.V.I) asociado a (0-1) se aborda empleando diferentes técnicas, las cuales dependen del espacio en el que se trate el problema: En [20], se prueba el buen planteamiento local y global del P.V.I asociado a (0-1) en $H^m(\mathbb{R}^2)$ para m entero y $m \geq 1$, adaptando la técnica de Kenig, Ponce y Vega para la ecuación KdV en [39] (allí se combinan el efecto regularizante tipo Kato, estimativas tipo Strichartz, estimativas de la función maximal junto con un principio de contracción). En [5], empleando un principio de contracción, se obtiene el buen planteamiento local y global en $H^1(\mathbb{R}^2)$ del P.V.I asociado a la ecuación (0-1) modificada, es decir, cuando la no linealidad es de la forma $u^2 u_x$. En [54] se trató la ecuación ZK en $H^s(\mathbb{R}^3)$, mostrando que el P.V.I asociado a ésta, está bien planteado para $s > 9/8$, adaptando la técnica de Koch y Tzvetkov en [44] para la ecuación BO (allí se emplean estimativas tipo Strichartz localizadas, junto con un argumento de compacidad). En [52] se adapta la técnica de Ionescu y Kenig desarrollada para la ecuación KP-I en [30] (Strichartz localizados en tiempo-frecuencia), para así probar que el P.V.I asociado a (0-1) es bien planteado en $H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ para $s > 3/2$; resultado que sería mejorado posteriormente en [70], ya que, combinando la técnica de Kenig, Ponce y Vega con estimativas para funciones localizadas en fase y pesos en tiempo, se establece que el problema está bien planteado localmente para $s > 1$. En [51] una adaptación de la técnica de Kenig, Ponce y Vega, permite probar que el problema generalizado (cuando la no linealidad es de la forma $u^p u_x$ y $p \in \mathbb{Z}^+$), es bien planteado localmente para $s > 3/4$ con $2 \leq p \leq 7$ y para $s > \frac{3}{2p-4}$ con $p \geq 8$, allí también se obtiene que la solución es global para $s > 53/63$ con $p = 2$ y para $s = 1$ con $p \geq 3$, ambos resultados con condiciones adicionales sobre el dato inicial. En [69] se demuestra el buen planteamiento local del problema generalizado para $s > 1/4$ con $p = 2$, para $s > 5/12$ con $p = 3$ y para $s > 1 - 2/p$ con $p \geq 4$ (empleando la técnica de Kenig, Ponce y Vega). Mientras que, en [28] y [59] obtuvieron de manera independiente que el P.V.I asociado a (0-1), es localmente bien planteado para $s > 1/2$ en $H^s(\mathbb{R}^2)$, haciendo uso de los espacios de Bourgain; además en [59] se demuestra que el problema está bien planteado globalmente para $H^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ y $H^s(\mathbb{R}^3)$ con $s > 1$. En [49] se prueba el buen planteamiento para $s > 5/3$ en $H^s(\mathbb{T}^2)$ del P.V.I asociado a la ecuación ZK, empleando estimativas tipo Strichartz localizadas en tiempo. De manera más reciente en [42] se probó que el P.V.I asociado a (0-1) está bien planteado localmente para $s > -1/4$ y globalmente en $L^2(\mathbb{R}^2)$, estos resultados fueron obtenidos haciendo uso de una versión no lineal de la desigualdad Loomis-Whitney; en el mismo trabajo se muestra que el problema está mal planteado para $s < -1/4$.

En los espacios con pesos hay diferentes aportes, por ejemplo, en [10] se demuestra el buen planteamiento local del P.V.I asociado a (0-1) en $H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1 + x^2 + y^2)^{s/2} dxdy)$, para $s > 3/4$, esto se logra adaptando las ideas de Faminskii en [20]. En [26] se establece el buen planteamiento en $H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1 + |x|^{2r_1} + |y|^{2r_2}) dxdy)$, para $s > 3/4$ y $r_1, r_2 > 0$ tales que, máx$\{r_1, r_2\} \leq s/2$, obteniendo un resultado válido para el problema general, inspirados en las ideas de Famisnskii en [20], junto con la estimativa del conmutador entre los pesos y el grupo asociado al P.V.I.

La existencia y estabilidad de ondas solitarias para la ecuación (0-1), con no linealidad generalizada, son tratadas en [15], mientras que, un interesante principio de continuación única del P.V.I asociado a (0-1) se muestra en [66].

Otra ecuación que recientemente ha despertado mucho interés, en la comunidad académica, es la ecuación con dispersión generalizada BO-ZK,

$$u_t + D_x^{1+\alpha} u_x + u_{xyy} = uu_x, \text{ con } 0 \leq \alpha \leq 1, \tag{0-2}$$

pues tiene dos casos particulares muy interesantes: Caso $\alpha = 1$, es la ya mencionada ZK. Caso $\alpha = 0$, es una ecuación que surge en el contexto de la electromigración en nanoconductores delgados sobre un sustrato dieléctrico, la cual fue introducida en [48] y [33], y recibe el nombre de BO-ZK. Para éste modelo en particular, por ejemplo, en [18] y [19], se prueba el buen planteamiento del P.V.I asociado en $H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s > 2$ (vía regularización parabólica), junto con la existencia y estabilidad de ondas solitarias. En [11], se prueba el buen planteamiento del P.V.I asociado a la ecuación BO-ZK (empleando el método de regularización parabólica) en $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ para $s_1 \geq s_2 > 2$, como también, propiedades de persistencia de la solución, buen planteamiento del P.V.I asociado a la ecuación BO-ZK, e incluso, se establecen principios de continuación única para el problema en mención, en

$H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2\left((1+x^2+y^2)^r dxdy\right)$, para $s > 2,\ r \geq 0$ y $s \geq 2r$. En [12], se adapta la técnica de Koch y Tzvetkov, para mejorar los resultados obtenidos en [11], mostrando que el buen planteamiento se tiene en $H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s > 11/8$, y en los espacios con pesos, $H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2\left((1+x^2+y^2)^r dxdy\right)$, tanto para $s > 11/8$ y $r \in [0, 11/16]$, como para $s \geq 2r$ y $r \in (11/16, 1]$. En [68] se obtiene el buen planteamiento, en los espacios con pesos antes mencionados, para $s \geq r$ y $r \in [0,3]$ ($s > 5/3$), y si $r \in [3,4)$ el buen planteamiento se tiene en el mismo espacio, siempre que $\hat{\varphi}(0,0) = 0$. En [62], gracias a un argumento de compacidad, se prueba el buen planteamiento del P.V.I asociado a la ecuación BO-ZK en $H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s > 5/4$.

Para el P.V.I asociado a (0-2), el argumento utilizado en [74] (localización en tiempo en pequeños intervalos dependientes de la frecuencia y la transversalidad), conlleva al buen planteamiento en $H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s > \frac{3}{2} - \alpha$ y $0 \leq \alpha < 1$. En [13], los autores prueban la persistencia de la solución en espacios anisotrópicos con pesos anisotrópicos de la forma $H^{(1+\alpha)s,2s}(\mathbb{R}^2) \cap L^2\left(x^{2s_1} + y^{2r_2} dxdy\right)$, y principios de continuación única, basados en los resultados de buen planteamiento obtenidos previamente en [71] (empleando estimativas bilineales y espacios de Bourgain).

La importancia de las ecuaciones ZK y BO-ZK, junto con los trabajos antes mencionados, han motivado a plantear la siguiente versión generalizada, tanto en la no linealidad, como en la dispersión, de la ecuación Zakharov - Kuznetsov,

$$u_t - \partial_x(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta})u + u^p u_x = 0, \tag{0-3}$$

con $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ y $p \in \mathbb{Z}^+$, donde $D_x^{1+\alpha}$ es la derivada homogénea, de orden $1+\alpha$ en la variable x, definida vía transformada de Fourier por: $\widehat{D_x^{1+\alpha}u}(\xi,\eta) := |\xi|^{1+\alpha}\hat{u}(\xi,\eta)$, análogamente se define $D_y^{1+\beta}$ para la variable y. Esta generalización cuenta con el signo positivo, con el cual se contemplan las ecuaciones ZK y BO-ZK, y con el signo negativo, para el cual no hay un modelo conocido en la literatura, pero genera gran interés ya que hace del modelo uno del tipo hiperbólico.

Así pues, en el trabajo se tratará el P.V.I asociado a (0-3) en diferentes espacios, para probar su buen planteamiento con técnicas "clásicas", siguiendo la noción de buen planteamiento establecida por T. Kato en [35], y que puede ser consultada en la Nota 1.1.

La estructura del trabajo es la siguiente: En el primer capítulo se enuncian las definiciones y los resultados básicos para el desarrollo del trabajo.

En el segundo capítulo, se emplean el Teorema del punto fijo de Banach y la técnica de regularización parabólica (ver [32]), obteniendo como resultados principales los dos siguientes teoremas:

Teorema 2.1.
Sean $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $p \in \mathbb{Z}^+$, $\mu > 0$ y $s > 1$. Entonces, el P.V.I (2-2) es localmente bien planteado en $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 2.7.
Sean $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $p \in \mathbb{Z}^+$ *y* $s > 2$. *Entonces, el P.V.I (2-1) es localmente bien planteado en* $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Además, se establece el buen planteamiento global del problema regularizado en espacios de Sobolev, incluso con índices negativos, para el caso $p = 1$.

En el tercer capítulo, haciendo uso de la técnica de Kenig, Ponce y Vega se establecen los siguientes resultados:

Teorema 3.4.
Sean $\beta = 1,\ 0 < \alpha \leq 1,\ p = 1$ *y* $u_0 \in H^s\left(\mathbb{R}^2\right),\ s > \frac{11-2\alpha}{12}$. *Entonces, existen* $T = T\left(||u_0||_s\right) > 0$ *y una única solución* $u \in C\left([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2)\right)$, *del P.V.I (2-1), la cual satisface (3-55) - (3-57). Además, si* $T' \in (0,T)$, *existe una vecindad* V *de* u_0 *en* $H^s(\mathbb{R}^2)$ *tal que, la aplicación dato inicial - solución de* V *a la clase definida por (3-55) - (3-57) es Lipschitz.*

Teorema 3.5.
Sean $\beta = 1,\ 0 < \alpha \leq 1,\ p = 2$ *y* $u_0 \in H^s\left(\mathbb{R}^2\right),\ s > \frac{11-2\alpha}{12}$. *Entonces, existen* $T = T\left(||u_0||_s\right) > 0$ *y una única solución* $u \in C\left([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2)\right)$, *del P.V.I (2-1), la cual satisface (3-69) - (3-71). Además, si* $T' \in (0,T)$, *existe una vecindad* V *de* u_0 *en* $H^s(\mathbb{R}^2)$ *tal que, la aplicación dato inicial - solución de* V *a la clase definida por (3-69) - (3-71) es Lipschitz.*

Además, en éste capítulo se muestra que las soluciones de P.V.I garantizadas por los Teoremas 3.4 y 3.5 pueden ser extendidas a cualquier intervalo $[0,T]$, siempre que el dato inicial sea un elemento de $H^1(\mathbb{R}^2)$.

En el cuarto capítulo, se obtiene el buen planteamiento del P.V.I asociado a (0-3) en X^s, $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ y X^{s_1,s_2} (espacios que se hallan en las Definiciones 1.7 y 1.8), siguiendo un argumento de compacidad, como en empleado por Koch y Tzvetkov en [44]. Los resultados más relevantes allí consignados son:

Teorema 4.1.
Sean $\beta = 1, 0 < \alpha \leq 1, \varphi \in X^s$, $p = 1$ *y* $s > \frac{15+7\alpha}{4(2+\alpha)}$. *Entonces, existen* $T = T(\|\varphi\|_{X^s}) > 0$ *y una única solución* u *de (2-1) tales que,* $u \in C([0,T] : X^s)$ *y* $u,\ u_x\ u_y \in L^1_T L^\infty_{xy}$. *Además, la aplicación dato inicial - solución es continua.*

Teorema 4.3.
Sean $\beta = 1,\ 0 < \alpha \leq 1,\ \varphi \in X^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, $p = 1$ *y* $r \in [15+7\alpha, 16+8\alpha]$. *Si* $s_1 > \frac{r}{4(2+\alpha)}$ *y* $s_2 > \frac{3r}{2(r-3-\alpha)}$ *, existen un tiempo* $T(\|\varphi\|_{X^{s_1,s_2}}, s_1, s_2) > 0$ *y una única solución* u *de (2-1) tales que,* $u \in C([0,T] : X^{s_1,s_2})$ *y* $u,\ u_x, u_y \in L^1_T L^\infty_{xy}$ *y la aplicación dato inicial - solución es continua.*

En el quinto capítulo, se prueba el buen planteamiento del P.V.I asociado a (0-3) en los espacios de Sobolev anisotrópicos con pesos anisotrópicos (exhibidos en la Definición 1.7), y los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Teorema 5.1.
Sean $0 < \alpha < 1,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ s_1, s_2 > 2, p \in \mathbb{Z}^+$:

1. *Si* $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}(\mathbb{R}^2)$ *y* $0 \leq r < \frac{5}{2} + \alpha$, *el P.V.I asociado a (2-1) es localmente bien planteado en* $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}(\mathbb{R}^2)$, *siempre que* $s_1 \geq r(1+\alpha)$ *y* $s_2 \geq r(1+\beta)$.
2. *Si* $\varphi \in \dot{\mathcal{F}}^{s_1,s_2}_{r,0}(\mathbb{R}^2)$ *y* $\frac{5}{2} + \alpha \leq r < \frac{7}{2} + \alpha$, *el PVI asociado a (2-1) es localmente bien planteado en* $\dot{\mathcal{F}}^{s_1,s_2}_{r,0}(\mathbb{R}^2)$, *siempre que* $s_1 \geq r(1+\alpha)$ *y* $s_2 \geq r(1+\beta)$.

Teorema 5.2.
Sean $0 < \alpha < 1,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ s_1, s_2 > 2, p \in \mathbb{Z}^+$:

1. *Si* $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}(\mathbb{R}^2)$ *y* $0 \leq r < \beta + \frac{3}{2}$, *el P.V.I asociado a (2-1) es localmente bien planteado en* $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}(\mathbb{R}^2)$, *siempre que* $s_1, s_2 \geq r(1+\beta)$.
2. *Si* $\varphi \in \dot{\mathcal{F}}^{s_1,s_2}_{0,r}(\mathbb{R}^2)$ *y* $\frac{3}{2} + \beta \leq r < \frac{5}{2} + \beta$, *el P.V.I asociado a (2-1) es localmente bien planteado en* $\dot{\mathcal{F}}^{s_1,s_2}_{0,r}(\mathbb{R}^2)$, *siempre que* $s_1, s_2 \geq r(1+\beta)$.

En el mismo capítulo, también se demuestran los siguientes principios de continuación única, del P.V.I asociado a (0-3):

Teorema 5.3.
Sean $0 < \alpha < 1,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ s_1, s_2 > 2$, $p = 1$, $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{5}{2}+\alpha,0}(\mathbb{R}^2)$, $s_1 \geq r(1+\alpha)$ *y* $s_2 \geq r(1+\beta)$, *para* $2 \leq r < \frac{5}{2} + \alpha$. *Si la solución* u *de (2-1), la cual pertenece al espacio* $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}(\mathbb{R}^2)$, *cumple para los tiempos* $t_1 < t_2 < T$ *que,* $u(t_i) \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{5}{2}+\alpha,0}(\mathbb{R}^2)$ *para* $i = 1, 2$, *entonces* $\hat{u}(0, \eta, t) = 0$ *para casi toda* $\eta \in \mathbb{R}$ *y* $t \in [0, T]$.

Teorema 5.4.
Sean $0 < \alpha < 1,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ s_1, s_2 > 2$, $p = 1$, $\varphi \in \dot{\mathcal{F}}^{s_1,s_2}_{\frac{7}{2}+\alpha,0}(\mathbb{R}^2)$ *y* $\frac{5}{2} + \alpha \leq r < \frac{7}{2} + \alpha$, *con* $s_1 \geq r(1+\alpha)$ *y* $s_2 \geq r(1+\beta)$. *Si la solución* u *de (2-1), que pertenece a* $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}(\mathbb{R}^2)$, *cumple para los tiempos* $t_1 < t_2 < t_3 < T$ *que,* $u(t_i) \in \dot{\mathcal{F}}^{s_1,s_2}_{\frac{7}{2}+\alpha,0}(\mathbb{R}^2)$ *para* $i = 1, 2, 3,$ *entonces* $u \equiv 0$.

Teorema 5.5.
Sean $0 < \alpha < 1,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ s_1, s_2 > 2$, $p = 1$, $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,\frac{3}{2}+\beta}(\mathbb{R}^2)$ *y* $1 \leq r \leq \beta + \frac{3}{2}$, *con* $s_1, s_2 \geq r(1+\beta)$. *Si la solución* u *de (2-1), quien es un elemento de* $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}(\mathbb{R}^2)$, *cumple para los tiempos* $t_1 < t_2 < T$ *que,* $u(t_i) \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,\frac{3}{2}+\beta}(\mathbb{R}^2)$ *para* $i = 1, 2$, *y además* $\int (2uu_{xx} + \varphi_x)dy \geq 0$, *entonces* $u \equiv 0$.

Y en la última sección del mismo capítulo, se emplean los resultados obtenidos en el capítulo 4, para mostrar una mejora en los teoremas de buen planteamiento enunciados para los espacios anisotrópicos con pesos anisotrópicos, como se ve en los dos siguientes teoremas:

Teorema 5.6.
Sean $\beta = 1,\ 0 < \alpha < 1,\ p = 1,\ \langle x \rangle^{\theta} \varphi \in L^2(\mathbb{R}^2),\ \varphi \in X^{s_1,s_2}$, *donde* $s_1 > \frac{r}{4(2+\alpha)}$ *y* $s_2 > \frac{3r}{2(r-3-\alpha)}$ *para* $r \in [15 + 7\alpha, 16 + 8\alpha]$.

1. *Si* $s_1 \geq 1+\alpha$*, el* P.V.I (2-1) *está localmente bien planteado en* $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\theta,0}(\mathbb{R}^2)$*, para* $0 < \theta \leq \frac{r}{8(2+\alpha)}$*.*

2. *Si* $s_1 \geq 1+\alpha$ *y* $s_2 \geq 2\theta$*, el* P.V.I (2-1) *está localmente bien planteado en* $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\theta,0}(\mathbb{R}^2)$*, para* $\frac{r}{8(2+\alpha)} < \theta \leq 1$*.*

Teorema 5.7.
Sean $\beta = 1,\ 0 < \alpha < 1,\ p = 1,\ \langle y\rangle^{\theta}\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2),\ \varphi \in X^{s_1,s_2}$ *donde* $s_1 > \frac{r}{4(2+\alpha)}$ *y* $s_2 > \frac{3r}{2(r-3-\alpha)}$ *para* $r \in [15+7\alpha, 16+8\alpha]$*. Si* $s_1 \geq 2\theta$ *y* $s_2 \geq 2\theta$*, el* P.V.I (2-1) *está localmente bien planteado en* $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,\theta}(\mathbb{R}^2)$*.*

El último capítulo está inspirado en los resultados obtenidos sobre ondas solitarias en [15], [18], [19] y [48], y el objetivo principal de éste, es probar el siguiente resultado:

Teorema 6.1.
Para $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$*, existen ondas solitarias de la forma* $u(x,y,t) = \phi(x-ct,y)$ *asociadas a la ecuación* (2-1)*, en dos casos:*

Caso 1: $0 \leq \alpha \leq 1,\ \beta = 1$ *y* $p = 1,2,3$*, si* $\phi \in H^{\frac{1+\alpha}{2},1}$*.*

Caso 2: $\alpha = \beta$*,* $0 \leq \alpha \leq 1$ *y* $p = 1,2$*, si* $\phi \in H^{\frac{1+\alpha}{2}}$*.*

1 Preliminares

En este capítulo se dan a conocer la notación, las definiciones básicas y los resultados fundamentales empleados en el presente trabajo.

Definición 1.1.
$C_\infty(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ a valor complejo, continuas, que tienden a cero en infinito, es decir,

$$C_\infty(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid f \text{ es continua y } \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \right\}$$

Definición 1.2.
El espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid ||f||_{\alpha\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| < \infty, \text{ para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}$, se conoce como el espacio de Schwartz.

Definición 1.3.
El espacio de las distribuciones temperadas, consiste en los funcionales continuos del espacio de Schwartz, es decir, es el espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.4.
Los espacios de Sobolev de tipo L^2 se definen para $s \in \mathbb{R}$ como sigue:

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n, d\xi) \right\},$$

cuya norma es dada por:

$$||f||_s^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Y la transformada de Fourier de $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ se define así:

$$\hat{\varphi}(\xi, \eta) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dxdy.$$

Lema 1.1 (Lema de Sobolev)**.**
Para $s \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$

1. *Si* $s > k + \frac{n}{2}$ *y* $C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ *es el espacio de las funciones con* k *derivadas parciales continuas, las cuales se anulan en el infinito, entonces* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *está inmerso continuamente en* $C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$*, es decir, si* $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *entonces, después de una posible modificación de* f *en un conjunto de medida cero,* $f \in C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ *y existe una constante positiva* C_s *tal que,*

$$||f||_{C^k_\infty(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha f(x)| \leq C_s||f||_s.$$

2. *Si* $s > \frac{n}{2}$*,* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *es un Álgebra de Banch, es decir, existe* $C_s > 0$ *tal que*

$$||fg||_s \leq C_s||f||_s||g||_s.$$

.

Demostración. Ver [53, Teorema 3.2, p. 47] y [53, Teorema 3.5, p. 51]. □

Teorema 1.1 (Desigualdad de Gronwall).
Sean x, Ψ *y* χ *funciones reales continuas, definidas en* $[a,b]$ *con* $\chi(t) \geq 0$*, para todo* $t \in [a,b]$*. Si*

$$x(t) \leq \Psi(t) + \int_a^t \chi(s)x(s)ds,\ t \in [a,b],$$

entonces,

$$x(t) \leq \Psi(t) + \int_a^t \chi(s)\Psi(s)e^{\int_s^t \chi(u)du}ds.$$

Además, si Ψ *es constante y*

$$x(t) \leq \Psi + \int_a^t \chi(s)x(s)ds,$$

entonces,

$$x(t) \leq \Psi e^{\int_a^t \chi(u)du},$$

para $t \in [a,b]$.

Demostración. Ver por ejemplo [16, Teorema 1, p. 1] y [16, Corolario 3, p. 3] o [29, Lema 1.6, p. 7] y [29, Consecuencia 2, p. 8]. □

Definición 1.5.
La transformada de Hilbert (notada mediante $\mathcal{H}$*), se define de la siguiente manera:*

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to\infty}\int_{|y|>\epsilon}\frac{f(x-y)}{y}dy.$$

Definición 1.6.
Para $g \in \mathcal{S}'(\Omega)$*, se definen los operadores* J^s_x*,*J^s_y*,* J^s*,* D^s_x *y* D^s_y *como sigue:*

$$\widehat{J^s_x g}(\xi,\eta) = \left(1+\xi^2\right)^{\frac{s}{2}}\hat{g}(\xi,\eta).$$

$$\widehat{J_y^s g}(\xi,\eta) = \left(1+\eta^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{g}(\xi,\eta).$$
$$\widehat{J^s g}(\xi,\eta) = \left(1+\xi^2+\eta^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{g}(\xi,\eta).$$
$$\widehat{D_x^s g} = |\xi|^s \hat{g}.$$
$$\widehat{D_y^s g} = |\eta|^s \hat{g}.$$

Lema 1.2 (Kato-Ponce).
Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$, $s > 0$, existe una constante $C = C(n,p,s)$ tal que,

$$\|J^s(fg) - f(J^s g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\left[\|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left\|J^{s-1}g\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|J^s f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right].$$

Demostración. Ver [36, Lema X1, p. 902]. □

Los casos excepcionales del siguiente teorema, no se consideran ya que no se emplean durante el trabajo.

Teorema 1.2 (Gagliardo - Nirenberg).
Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq q, r \leq \infty$, $j, m \in \mathbb{N}$ y θ un numero real, tales que,

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + (1-\theta)\frac{1}{q},$$

y $\frac{j}{m} \leq \theta \leq 1$. Entonces,

$$\|\nabla^j f\|_{L^p} \leq C\|\nabla^m f\|_{L^r}^{\theta} \|f\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

Demostración. Ver [63, Teorema, p. 125]. □

Definición 1.7.
Los espacios de Sobolev anisotrópicos se definen como sigue:

$$H^{s_1,s_2}\left(\mathbb{R}^2\right) := \left\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \mid \|f\|_{s_1,s_2} < \infty\right\},$$

donde

$$\|f\|_{s_1,s_2} = \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^{s_1}+|\eta|^{s_2}\right)^2 \left|\hat{f}(\xi,\eta)\right|^2 d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mientras que, los espacios anisotrópicos con pesos anisotrópicos $\mathcal{F}_{r_1,r_2}^{s_1,s_2}$ vienen definidos como,

$$\mathcal{F}_{r_1,r_2}^{s_1,s_2}\left(\mathbb{R}^2\right) := H^{s_1,s_2}\left(\mathbb{R}^2\right) \cap L_{r_1,r_2}^2\left(\mathbb{R}^2\right),$$

donde,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_{r_1,r_2}^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(1+|x|^{2r_1}+|y|^{2r_2}\right)|f(x,y)|^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\sim \left\|\left(1+|x|^{2r_1}+|y|^{2r_2}\right)^{\frac{1}{2}} f\right\|_0 \\ &\sim \left\|\left(1+|x|^{r_1}+|y|^{r_2}\right) f\right\|_0,\end{aligned}$$

considerando $\|\cdot\|_0$ como en la Definición 1.4. Por lo tanto,

$$\|f\|_{\mathcal{F}_{r_1,r_2}^{s_1,s_2}} \sim \|f\|_{s_1,s_2} + \|f\|_{L_{r_1,r_2}^2}.$$

Definición 1.8.
Los espacios X^s y X^{s_1,s_2} se definen por sus normas

$$\|f\|_{X^s} = \|J_y^s f\|_0 + \|J_x^s f\|_0$$

y

$$\|f\|_{X^{s_1,s_2}} = \|J_x^{s_1} f\|_0 + \|J_y^{s_2} f\|_0,$$

respectivamente.

Cabe resaltar que dichas normas son equivalentes a las normas de los espacios H^s y H^{s_1,s_2}, es decir,

$$\|f\|_{X^s} \sim \|f\|_{H^s}$$

y

$$\|f\|_{X^{s_1,s_2}} \sim \|f\|_{H^{s_1,s_2}}.$$

Lema 1.3.
Sean a y b números reales positivos. Si $J_u = (1-\partial_u^2)^{\frac{1}{2}}$ y $\langle v\rangle = (1+v^2)^{\frac{1}{2}}$, para cualquier $\theta \in (0,1)$

1. $\left|J_u^{\theta a}\left(\langle v\rangle^{(1-\theta)b} f\right)\right| \leq c|\langle v\rangle^b f|^{1-\theta}|J_u^a f|^\theta \leq (1-\theta)|\langle v\rangle^b f| + \theta|J_u^a f|.$
2. $\left|\langle v\rangle^{(1-\theta)b}\left(J_u^{\theta a} f\right)\right| \leq c|\langle v\rangle^b f|^{1-\theta}|J_u^a f|^\theta \leq (1-\theta)|\langle v\rangle^b f| + \theta|J_u^a f|.$

Demostración. Ver [25, Lema 2.8, p. 771] o [27, Lema 1, p. 443] y [61, Lema 4, p. 1217]. □

Lema 1.4.
Sea f una función en $\mathbb{R}$ tal que, ella y sus derivadas hasta de orden $n+1$ están en $L^2(\mathbb{R})$ y además $f^{(j)}(0) = 0$ para $j = 0, 1, \ldots, n$. Entonces, existe una función $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que, $f = x^{n+1} g$ y

$$g(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(xt)dt,$$

$$||g||_0 = \left\|\frac{f}{x^{n+1}}\right\|_0 \leq C_n \left\|f^{(n+1)}\right\|_0.$$

Si a esto se le añade la suposición que $f^{(n+1)}$ tiene derivada fraccionaria de orden α en $L^2(\mathbb{R})$,

$$\|D^\alpha g\|_0 \leq \left\|D^\alpha\left(\frac{f}{x^{n+1}}\right)\right\|_0 \leq C\left\|D^{n+1+\alpha} f\right\|_0.$$

Demostración. Ver [58, Lema 2.0.31, p. 14] y [58, Corolario 2.0.32, p. 14]. □

Definición 1.9.
Para cada $b \in (0,1)$ y f medible en $\mathbb{R}^n$ a valores complejos, la derivada de Stein de orden b se define para cada $x \in \mathbb{R}$ como sigue:

$$\mathcal{D}^b f(x) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}} dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 1.3.
Si $b \in (0,1)$ y $\dfrac{2n}{n+2b} \leq p < \infty$, entonces $f \in L_b^p(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si

1. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
2. $\mathcal{D}^b f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Además,

$$||f||_{b,p} := \left\|(1-\nabla)^{\frac{b}{2}} f\right\|_p \sim ||f||_p + ||\mathcal{D}^b f||_p.$$

Demostración. Ver [75, Teorema 1, p. 1]. □

Teorema 1.4.
Sean $b \in (0,1)$, $1 \leq p < \infty$ y $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funciones medibles. Entonces,

1. $\mathcal{D}^b(fg)(x) \leq \|f\|_\infty \mathcal{D}^b g(x) + |g(x)|\mathcal{D}^b f(x)$.
2. $\left\|\mathcal{D}^b(fg)\right\|_{L^p} \leq \|f\|_\infty \|\mathcal{D}g\|_{L^p} + \left\|g\mathcal{D}^b f\right\|_{L^p}$.
3. $\left\|\mathcal{D}^b(fg)\right\|_{L^2} \leq \|f\mathcal{D}g\|_{L^2} + \left\|g\mathcal{D}^b f\right\|_{L^2}$.
4. $\left\|D^b f\right\|_{L^2} \leq C\left\|\mathcal{D}^b f\right\|_{L^2}$.

Demostración. Ver [61, Teoremas C y D, p. 1212]. □

Proposición 1.1.
Si $\hat{f}(0,\eta) = 0$ y $0 < \alpha < 1$,

$$\left\|D_\xi^\alpha\left(sgn(\xi)\hat{f}\right)\right\|_{L^2} \leq \left\|\hat{f}\right\|_{L^2} + \left\|D_\xi \hat{f}\right\|_{L^2}.$$

Demostración. Ver [6, Proposición 2.19, p. 16]. □

Lema 1.5.
Si $b \in (0,1)$ y $1+\beta \geq 1$,

$$\mathcal{D}_\xi^b\left(e^{-it(\xi|\xi|^{1+\alpha} \pm \xi|\eta|^{1+\beta})}\right) \leq t^b|\xi|^{b(1+\alpha)} + t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b|\eta|^{b(1+\beta)}. \tag{1-1}$$

Demostración. Como consecuencia del Teorema 1.4, se tiene que

$$\mathcal{D}_\xi^b\left(e^{-it(\xi|\xi|^{1+\alpha} \pm \xi|\eta|^{1+\beta})}\right) \leq \mathcal{D}_\xi^b\left(e^{-it\xi|\xi|^{1+\alpha}}\right) + \mathcal{D}_\xi^b\left(e^{-it\xi|\eta|^{1+\beta}}\right) = A + B.$$

Para acotar A y B, se emplea un argumento estándar para este tipo de derivadas:

$$\begin{aligned}
A^2 = &\int \frac{\left|e^{-it\xi|\xi|^{1+\alpha}} - e^{-it(\xi+z)|\xi+z|^{1+\alpha}}\right|^2}{|z|^{1+2b}} dz \\
=& t^{\frac{-1}{2+\alpha}} \int \frac{\left|e^{-i\left(t^{\frac{1}{2+\alpha}}\xi|t^{\frac{1}{2+\alpha}}\xi|^{1+\alpha}\right)} - e^{-i\left(\left(t^{\frac{1}{2+\alpha}}\xi+w\right)|t^{\frac{1}{2+\alpha}}\xi+w|^{1+\alpha}\right)}\right|^2}{|t^{\frac{-1}{2+\alpha}}w|^{1+2b}} dw \\
=& t^{\frac{2b}{2+\alpha}} I\left(t^{\frac{1}{2+\alpha}}\xi\right).
\end{aligned}$$

El objetivo será acotar $I(y)$. Primero, se consideran los valores $|y| \geq 1$, así, $\mathbb{R}$ se puede escribir como la unión de B_1 y B_2, los cuales se definen como sigue: $B_1 = \{w \in \mathbb{R} \mid |w| < |y|^{-(1+\alpha)}\}$ y $B_2 = \{w \in \mathbb{R} \mid |w| \geq |y|^{-(1+\alpha)}\}$, el Teorema del valor medio implica lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
I(y) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|e^{-iy\left(|y|^{1+\alpha}\right)} - e^{-i\left((y+w)|y+w|^{1+\alpha}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw \\
&= \int_{B_1} \frac{\left|e^{-iy\left(|y|^{1+\alpha}\right)} - e^{-i\left((y+w)|y+w|^{1+\alpha}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw + \int_{B_2} \frac{\left|e^{-iy\left(|y|^{1+\alpha}\right)} - e^{-i\left((y+w)|y+w|^{1+\alpha}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw \\
&\leq \int_{B_1} \frac{\left|w(2+\alpha)y^{1+\alpha}e^{iy|y|^{1+\alpha}}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw + 8\int_{|y|^{-(1+\alpha)}}^{\infty} \frac{dw}{w^{1+2b}} \\
&= 2(2+\alpha)^2|y|^{2(1+\alpha)} \int_0^{|y|^{-(1+\alpha)}} w^{1-2b} dw + 8\int_{|y|^{-(1+\alpha)}}^{\infty} \frac{dw}{w^{1+2b}} \leq C|y|^{2b(1+\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Si ahora se estudia el caso en que $|y| < 1$, se escribirá $\mathbb{R}$ como la unión de los conjuntos $B_1 = \{w \in \mathbb{R} \mid |w| < |y|\}$, $B_2 = \{w \in \mathbb{R} \,||w| \geq |y|^{-(1+\alpha)}\}$ y $B_3 = \{w \in \mathbb{R} \mid |y| < |w| < |y|^{-(1+\alpha)}\}$, ya que, el argumento es similar al anterior, se muestra únicamente la integral sobre B_3:

$$
\int_{B_3} \frac{\left|e^{-iy\left(|y|^{1+\alpha}\right)} - e^{-i\left((y+w)|y+w|^{1+\alpha}\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw \leq \int_{|y|}^{1} w^{1-2b} dw + 8\int_1^{|y|^{-(1+\alpha)}} w^{-1-2b} dw \leq C.
$$

Por lo anterior, A satisface lo siguiente:

$$
A \leq C\left(t^b|\xi|^{b(1+\alpha)} + t^{\frac{b}{2+\alpha}}\right).
$$

Para acotar B, el procedimiento es análogo al anterior:

$$
\begin{aligned}
B^2 &= \int \frac{\left|e^{-it\xi|\eta|^{1+\beta}} - e^{-it(\xi+z)|\eta|^{1+\beta}}\right|^2}{|z|^{1+2b}} dz \\
&= \left(t|\eta|^{1+\beta}\right)^{2b} \int \frac{\left|e^{-it\xi|\eta|^{1+\beta}} - e^{-i\left(t\xi|\eta|^{1+\beta}+w\right)}\right|^2}{|w|^{1+2b}} dw = \left(t|\eta|^{1+\beta}\right)^{2b} I_2\left(t\xi|\eta|^{1+\beta}\right).
\end{aligned}
$$

El procedimiento para acotar $I_2(y)$, sigue las mismas ideas del caso anterior, obteniendo que:

$$
I_2(y) \leq C\left(t|\eta|^{1+\beta}\right)^{2b}.
$$

Así,

$$
B \leq Ct^b|\eta|^{b(1+\beta)}.
$$

De lo que se sigue el resultado.

$\square$

Lema 1.6.
Si $b \in (0,1)$, *y* $1+\beta \geq 1$,

$$\mathcal{D}_\eta^b \left(e^{-it(\xi|\xi|^{1+\alpha} \pm \xi|\eta|^{1+\beta})} \right) \leq t^b |\xi|^b |\eta|^{b\beta} + t^{\frac{b}{1+\beta}} |\xi|^b. \tag{1-2}$$

Demostración. La demostración sigue las ideas expuestas en el Lema anterior, motivo por el cual será omitida. □

Proposición 1.2.
Sea $\chi \in C_0^\infty$ *una función que* $\chi \equiv 1$ *en* $(-1,1)$ *y* $supp\, \chi \subseteq [-2,2]$, *para* $b \in (0,1)$ *y* $\theta > 0$,

$$\mathcal{D}^b \left(|\xi|^\theta \chi(\xi) \right)(\eta) \sim \begin{cases} c|\eta|^{\theta-b} + c_1, & \theta \neq b, \quad |\eta| \ll 1 \\ c(-ln|\eta|)^{1/2}, & \theta = b, \quad |\eta| \ll 1 \\ \frac{c}{|\eta|^{1/2+b}}, & \qquad\quad\; |\eta| \gg 1 \end{cases}$$

y $\mathcal{D}^b \left(|\xi|^\theta \chi(\xi) \right)(\cdot)$ *continua en* $\eta \in \mathbb{R} - \{0\}$. *En particular, se tiene que*

$$\mathcal{D}^b \left(|\xi|^\theta \chi(\xi) \right) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ si y sólo si } b < \theta + \frac{1}{2}. \tag{1-3}$$

Un resultado similar se obtiene para $\mathcal{D}^b \left(|\xi|^\theta sgn(\xi) \chi(\xi) \right)$.

Demostración. Ver [25, Proposición 2.9, p. 771]. □

Proposición 1.3.

1. *Sea* $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$ *con* $\partial_\xi^\alpha \phi \in L^2(\mathbb{R})$, *para* $\alpha = 1,2$. *Entonces para todo* $\theta \in (0,1)$

$$\|[J^\theta; \phi]f\|_0 \leq c_{\theta,\phi} \|f\|_0.$$

2. *Si* $\eta \in (0,1]$,

$$\|[J^\eta; f]g\|_0 \leq c \|\widehat{\partial_x f}\|_{L^1} \|g\|_0.$$

Demostración. Ver [25, Proposición 2.4, p. 770]. □

Proposición 1.4.
Sea $k \in \mathbb{Z}^+$, *si* $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1$ *para todo* $x \in [a,b]$, *y* $\phi'(x)$ *monótona en el caso* $k=1$, *entonces*

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \right| \leq c_k \lambda^{-1/k}. \tag{1-4}$$

Demostración. Ver [53, Proposición 1.5, p. 13]. □

Corolario 1.1 (Van der Corput).
Sea $k \in \mathbb{Z}^+$, *si* $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1$ *para todo* $x \in [a,b]$, *y* $\phi'(x)$ *monótona en el caso* $k=1$, *entonces*

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} f(x) dx \right| \leq c_k \lambda^{-1/k} \left(\|f\|_{L_\infty} + \|f'\|_{L^1} \right). \tag{1-5}$$

Demostración. Ver [53, Corolario 1.1, p. 14]. $\square$

El siguiente lema se empleará para lograr realizar las estimativas de la función maximal, para el caso $\beta = 1$.

Lema 1.7.
Para cualquier $y,\ t,\ \xi \in \mathbb{R}$, con $t,\ \xi \neq 0$, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i(t\xi\eta^2 + y\eta)} d\eta = \sqrt{\frac{\pi}{|t\xi|}} e^{-i\frac{y^2}{4t\xi}} e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(t\xi)}. \tag{1-6}$$

Demostración. Es consecuencia del Teorema de Cauchy. $\square$

Lema 1.8 (Cantidades conservadas).
Para el P.V.I. (2-1) las siguientes son cantidades conservadas:

$$\|u\|_0 = \|\varphi\|_0 . \tag{1-7}$$

Y

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\iint \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} u\right)^2 \pm \left(D_y^{\frac{1+\beta}{2}} u\right)^2 - \frac{2u^{p+2}}{(p+1)(p+2)} dxdy \\ &\qquad = \frac{1}{2}\iint \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} \varphi\right)^2 \pm \left(D_y^{\frac{1+\beta}{2}} \varphi\right)^2 - \frac{2\varphi^{p+2}}{(p+1)(p+2)} dxdy. \end{aligned} \tag{1-8}$$

Demostración. Su demostración sigue un argumento estándar, por lo que será omitida. $\square$

Lema 1.9.
Sean $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que, $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$. Entonces, $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^2)$ y la inclusión es continua.

Demostración. Ver [73, Lema 2.1, p. 5]. $\square$

Lema 1.10.
Sean $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que, $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$. Entonces, el espacio $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ es un álgebra de Banach.

Demostración. Ver [6, Proposición 4.3, p. 32]. $\square$

Definición 1.10 (Descomposición Littlewood - Paley).
Para descomponer una función g, se definen los operadores Q_x^j y Q_y^k, para $j, k = 0, 1, \ldots$, como sigue:

$$\widehat{(Q_x^0 g)}(\xi,\eta) := \chi_{[0,1)}(|\xi|)\hat{g}(\xi,\eta),\ \ \widehat{(Q_x^j g)}(\xi,\eta) = \chi_{[2^{j-1},2^j)}(|\xi|)\hat{g}(\xi,\eta) \quad \text{si } j \geq 1,$$

y

$$\widehat{(Q_y^0 g)}(\xi,\eta) := \chi_{[0,1)}(|\eta|)\hat{g}(\xi,\eta),\ \ \widehat{(Q_y^k g)}(\xi,\eta) = \chi_{[2^{k-1},2^k)}(|\eta|)\hat{g}(\xi,\eta) \quad \text{si } k \geq 1,$$

donde, χ_A es la función característica del conjunto A.

Por lo tanto, g puede reescribirse como sigue:

$$\hat{g}(\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} (\widehat{Q_y^k Q_x^j g})(\xi,\eta). \tag{1-9}$$

(1-9) implica lo siguiente:

$$\|g\|_0^2 \sim \sum_{k,j\geq 0} \left\|Q_x^j Q_y^k g\right\|_0^2.$$

$$\|J_x^s g\|_0^2 + \left\|J_y^s g\right\|_0^2 \sim \sum_{k\geq 0, j\geq 1} \left(2^j\right)^{2s} \left\|Q_x^j Q_y^k g\right\|_0^2 + \sum_{k\geq 1, j\geq 0} \left(2^k\right)^{2s} \left\|Q_x^j Q_y^k g\right\|_0^2 + \sum_{k,j\geq 0} \left\|Q_x^j Q_y^k g\right\|_0^2. \tag{1-10}$$

Teorema 1.5.
Si $1 < p < \infty$ y $0 < s < 1$,

$$\|J_x^s(fg)\|_{L^p_{xy}} \leq C(\|J_x^s f\|_{L^\infty_{xy}}\|g\|_{L^p_{xy}} + \|f\|_{L^\infty_{xy}}\|J_x^s g\|_{L^p_{xy}}).$$

Demostración. Consecuencia de los resultados obtenidos en [39, Teorema A 12, p. 614]. □

Proposición 1.5.
Sean $\alpha \in [0,1), \beta \in (0,1)$ con $\alpha+\beta \in [0,1]$. Entonces, para $p,q \in (1,\infty)$ y para todo $\delta > \frac{1}{q}$, existe $c = c(\alpha,\beta,p,q,\delta) > 0$ tal que,

$$\|D_x^\alpha[D_x^\beta; a]D_x^{1-(\alpha+\beta)} f\|_p \leq c\|J^\delta \partial_x a\|_q \|f\|_p.$$

Demostración. Ver [14, Proposición 3.2, p. 12]. □

Lema 1.11.
Sean $D^{s_1} f \in L^p$ y $D^{s_2} f \in L^q,$ entonces para todo $\theta \in [0,1], D^s f \in L^p$ se tiene que,

$$\|D^s f\|_{L^r} \leq C_{p,q,s_2}\|D^{s_1} f\|_{L^p}^\theta \|D^{s_2} f\|_{L^q}^{1-\theta},$$

para $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$ y $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demostración. Ver [58, Lema 2.0.4, p. 5]. □

Lema 1.12.
Si $\mathcal{H}$ es la transformada de Hilbert, entonces para $p \in (1,\infty)$ y $l,m \in \mathbb{Z}^+$, existe un $c = c(p,l,m) > 0$ tal que,

$$\|\partial_x^l[\mathcal{H}; a]\partial_x^m f\|_p \leq c\|\partial_x^{m+l} a\|_\infty \|f\|_p.$$

Demostración. Ver [14, Lema 3.1, p. 10]. □

Lema 1.13.
Sean $\alpha, b > 0$. Si $J^{\alpha}_{x_i} f(x_1,x_2), \langle x_j\rangle^b f(x_1,x_2) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, entonces para cualquier $\beta \in (0,1)$ se tiene que,

$$\|J^{\alpha\beta}_{x_i}(\langle x_j\rangle^{(1-\beta)b} f)\|_{L^2_{x_i}} \leq c\|\langle x_j\rangle^b f\|^{1-\beta}_{L^2_{x_i}} \|J^{\alpha}_{x_i} f\|^{\beta}_{L^2_{x_i}}, \text{ para } i,j = 1,2.$$

La desigualdad también es válida para $\langle\cdot\rangle_N$, con la constante c independiente de N, donde

$$\langle\cdot\rangle_N = \begin{cases} \langle\cdot\rangle & \text{si } \cdot \leq N \\ 2N & \text{si } \cdot \geq 3N \end{cases}$$

para $N \in \mathbb{Z}^+$, y $\langle\cdot\rangle_N$ es una función suave, no decreciente en $|\cdot|$, que además satisface $\langle\cdot\rangle_N' \leq 1$ y $|\langle\cdot\rangle_N''(\cdot)| \leq c\partial^2\langle\cdot\rangle$.

Demostración. Ver [13, Lema 2.12, p. 1078]. □

Proposición 1.6.
Para $0 \leq p < 4, \alpha \geq \frac{p}{p+4}$ y $f \in H^{\alpha,1}(\mathbb{R}^2)$, existe una constante c tal que:

$$\|f\|^{p+2}_{L^{p+2}} \leq c\|f\|_0^{\frac{\alpha(p+4)-p}{2\alpha}} \|D^{\alpha}_x f\|_0^{\frac{p}{2\alpha}} \|f_y\|_0^{p/2},$$

en particular,

$$\|f\|_{L^{p+2}} \leq \|f\|_{\alpha,1}.$$

Demostración. Ver [6, Proposición 2.20, p. 22]. □

Lema 1.14 (Principio de Compacidad concentrada)**.**
Sea $(\rho_n)_n$ una sucesión de funciones no negativas en $L^1(\mathbb{R}^N)$, tales que, $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x) = \lambda$ para todo n y algún $\lambda > 0$. Entonces, existe una sub-sucesión $(\rho_{n_k})_k$ que satisface una de las siguientes tres condiciones:

1. *(**Compacidad**) Existe $y_k \in \mathbb{R}^N$ para $k = 1,2,\cdots$ tal que $\rho_{n_k}(\cdot + y_k)$ está concentrada, es decir, para cualquier $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que,*

$$\int_{|x-y_k|\leq R} \rho_{n_k}(x)dx \geq \lambda - \epsilon.$$

2. *(**Desvanecimiento**) Para cualquier $R > 0$,*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{|x-y|\leq R} \rho_{n_k}(x)dx = 0.$$

3. *(**Dicotomía**) Existe $\alpha \in (0,\lambda)$ tal que, para cualquier $\epsilon > 0$, existen $k_0 \geq 1$ y $\rho^1_{n_k},\ \rho^2_{n_k} \geq 0$ elementos de $L^1(\mathbb{R}^N)$, tales que, para $k \geq k_0$,*

$$\|\rho_{n_k} - (\rho^1_{n_k} + \rho^2_{n_k})\|_{L^1} \leq \epsilon; \left|\int_{\mathbb{R}^N} \rho^1_k(x)dx - \alpha\right| \leq \epsilon; \left|\int_{\mathbb{R}^N} \rho^2_k(x)dx - (\lambda-\alpha)\right| \leq \epsilon.$$

   Además, $supp\rho^1_{n_k} \cap supp\rho^2_{n_k} = \emptyset$, y $dist(supp\rho^1_k, supp\rho^2_k) \to \infty$ cuando $k \to \infty$.

Demostración. Ver [55, Lema I.1, p. 115] y [56]. □

Nota 1.1.

- *En el trabajo se entenderá que la integral sin límites de integración, representa a la integral sobre todo el conjunto de los reales, es decir,*

$$\int f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

- *Los símbolos $\leq, <, \geq, >$ representarán incluso las desigualdades que tienen múltiplos constantes de algún término, y dichas constantes no influyen en el resultado de manera importante, es decir,*

$$f \leq kg \text{ se podrá notar como } f \leq g.$$

- *La noción de buen planteamiento que se tendrá en cuenta en el trabajo es la siguiente:*

  Sean X y Y espacios de Banach tales que, $Y \hookrightarrow X$. Considerando el P.V.I

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) & = F(t, u(x,t)) \in X \\ u(x,0) & = \varphi(x) \in Y, \end{cases} \tag{1-11}$$

  *donde $F : [0,T] \times Y \to X$ es una función continua. Se dirá que el P.V.I (1-11) es **localmente bien planteado**, si:*

  1. *Para todo $\varphi \in Y$, existen $T(\varphi) > 0$ y $u \in C([0,T] : Y)$, tal que $u(0) = \varphi$ y además u satisface (1-11).*
  2. *Existe una única $u \in C([0,T] : Y)$ solución de (1-11).*
  3. *La aplicación $\varphi \to u \in C([0,T] : Y)$ es continua.*

  *Además, si se llega a dar el caso que $T = \infty$ se dirá que el problema es **globalmente bien planteado**.*

2 Buen planteamiento local $H^s, s > 2$

El eje central de este capítulo, es mostrar que el problema de Cauchy asociado al P.V.I de la generalización de la ecuación Z-K

$$\begin{cases} u_t - \partial_x(D_x^{1+\alpha}u \pm D_y^{1+\beta}u) + u^p u_x = 0 \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{cases} \tag{2-1}$$

con $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ y $p \in \mathbb{Z}^+$, satisface el Teorema 2.7.

Para ello, se emplea la técnica de regularización parabólica, para la cual, es necesario considerar la siguiente perturbación del problema (2-1):

$$\begin{cases} u_t - \partial_x(D_x^{1+\alpha}u \pm D_y^{1+\beta}u) + u^p u_x = -\mu(\partial_x^2 + \partial_y^2)^2 u \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{cases} \tag{2-2}$$

con $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ y $p \in \mathbb{Z}^+$ y $\mu > 0$. Mediante un argumento de contracción se muestra que éste problema satisface el Teorema 2.1. Posteriormente, se obtiene la independencia del tiempo de existencia de la solución del problema regularizado (2-2) de los parámetros s y μ, y finalmente, siguiendo un argumento del tipo Bona-Smith se muestra el buen planteamiento de (2-1).

Con esto en mente, se tratará el problema lineal asociado a (2-2), el cual se define de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u_t = \partial_x(D_x^{1+\alpha}u \pm D_y^{1+\beta}u) - \mu(\partial_x^2 + \partial_y^2)^2 u \\ u(0) = \varphi \in H^s(\mathbb{R}^2), \end{cases} \tag{2-3}$$

y cuya solución está dada por:

$$u = \mathbb{V}_\mu(t)\varphi := e^{tA_\mu}\varphi,$$

donde

$$A_\mu := \partial_x(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta}) - \mu(\partial_x^2 + \partial_y^2)^2.$$

Con esto en mente, el presente capítulo se divide en cuatro secciones; el objetivo de la primera sección es probar el buen planteamiento de (2-2), bajo las condiciones del Teorema 2.1. La segunda se centra en mostrar el buen planteamiento de (2-1), bajo las condiciones dadas en el Teorema 2.7. La tercera sección, tiene como fin, probar el buen planteamiento local de (2-2) (con $p = 1$), en espacios de baja regularidad según lo establecido en los Teoremas 2.8 y 2.9. Mientras que, en la última sección, se obtienen los resultados necesarios, para mostrar el buen planteamiento global de (2-2) (con $p = 1$), cuando $s \geq 1$ y $s \in (-2, 1)$, como se enuncia en los Teoremas 2.10 y 2.11, respectivamente.

2.1. Buen planteamiento para $\mu > 0$

A continuación se presentarán propiedades regularizantes de $(\mathbb{V}_\mu(t))_{t\geq 0}$, $\mu > 0$, las cuales ayudan a controlar la norma de la solución de (2-2) y (2-3).

Lema 2.1 (Desigualdad de regularización).
Sean $\mu > 0,\ t > 0,\ s \in \mathbb{R}$ y $\lambda \geq 0$. Entonces, para $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$ se tiene que

$$||\mathbb{V}_\mu(t)\varphi||_{s+\lambda} \leq C||\varphi||_s, \tag{2-4}$$

donde $A_\mu := \partial_x(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta}) - \mu(\partial_x^2 + \partial_y^2)^2$ y $C = C_\lambda \left(1 + \frac{1}{t\mu}\right)^{\lambda/4}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
&||\mathbb{V}_\mu(t)\varphi||^2_{s+\lambda}\\
&\qquad = \iint (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{s+\lambda} \left| e^{t\left[-i\xi(\xi^{1+\alpha}\pm\eta^{1+\beta})-\mu(\xi^2+\eta^2)^2\right]}\right|^2 |\hat{\varphi}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta\\
&\qquad = \iint (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{s+\lambda} e^{-2t\mu(\xi^2+\eta^2)^2} |\hat{\varphi}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta\\
&\qquad \leq \sup_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2} \left\{(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{\lambda} e^{-2t\mu(\xi^2+\eta^2)^2}\right\} \iint (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{s} |\hat{\varphi}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta\\
&\qquad \leq ||\varphi||_s^2 \sup_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2} \left\{(1 + |\xi|^{2\lambda} + |\eta|^{2\lambda}) e^{-2t\mu(\xi^2+\eta^2)^2}\right\}. \qquad (2\text{-}5)
\end{aligned}$$

Se procederá a acotar cada uno de los sumandos dentro del supremo en (2-5). El primero de ellos no presenta dificultad alguna, ya que,

$$e^{-2t\mu(\xi^2+\eta^2)^2} \leq 1, \tag{2-6}$$

cuando $t \geq 0$. Para el segundo sumando, se define la siguiente función:

$$f(\xi) := |\xi|^{2\lambda} e^{-2t\mu(\xi^2+\eta^2)^2} \leq |\xi|^{2\lambda} e^{-2t\mu\xi^4},$$

la cual es par, por lo que, basta acotarla para los valores de $\xi \geq 0$, así:

$$f'(\xi) = 2\xi^{2\lambda-1}(\lambda - 4t\mu\xi^4) = 0,$$

considerando,

$$\xi^* = \left(\frac{\lambda}{4t\mu}\right)^{1/4},$$

f tiene un máximo global en ξ^*, cuyo valor es:

$$f(\xi^*) = \left(\frac{\lambda}{4t\mu}\right)^{\lambda/2} e^{-\lambda/2} = K_\lambda \left(\frac{1}{t\mu}\right)^{\lambda/2}. \tag{2-7}$$

Para el término restante, se realiza un procedimiento análogo al del segundo sumando, obteniendo lo siguiente:

$$|\eta|^{2\lambda}e^{-2t\mu(\xi^2+\eta^2)^2} \leq |\eta|^{2\lambda}e^{-2t\mu\eta^4} \leq K_\lambda \left(\frac{1}{t\mu}\right)^{\lambda/2}. \tag{2-8}$$

De (2-6) - (2-8) se sigue que

$$||\mathbb{V}_\mu(t)\varphi||^2_{s+\lambda} \leq ||\varphi||^2_s \sup_{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2} \left\{(1+|\xi|^{2\lambda}+|\eta|^{2\lambda})e^{-2t\mu(\xi^2+\eta^2)^2}\right\} \leq ||\varphi||^2_s C^2_\lambda \left(1+\frac{1}{t\mu}\right)^{\lambda/2},$$

o equivalentemente.

$$||\mathbb{V}_\mu(t)\varphi||_{s+\lambda} \leq ||\varphi||_s C_\lambda \left(1+\frac{1}{t\mu}\right)^{\lambda/4}.$$

□

Para mostrar el buen planteamiento local de (2-2) en los espacios de Sobolev, con $s > 1$, se procede como en [32], de modo que, se requiere probar el siguiente resultado:

Lema 2.2.
Para cada $s > 1,\ \mu > 0,\ T > 0$ *y* $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2))$*, la ecuación integral,*

$$u(t) = \mathbb{V}_\mu(t)\varphi - \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')u^p(t')\partial_x u(t')dt', \tag{2-9}$$

es equivalente al problema (2-2), en el siguiente sentido, u *satisface (2-9) si y sólo si* $u \in C^1([0,T] : H^{s-4}(\mathbb{R}^2))$ *y*

$$\lim_{h\to 0}\left|\left|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - A_\mu u(t) - u^p(t)\partial_x u(t)\right|\right|_{s-4} = 0, \tag{2-10}$$

para todo $t \in [0,T]$*. Cuando* $t = 0$ *o* $t = T$*, el límite se toma por la derecha o izquierda, respectivamente.*

Demostración. Si $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2))$ satisface (2-9), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{u(t+h)-u(t)}{h} =& \frac{1}{h}\left[\mathbb{V}_\mu(t+h) - \mathbb{V}_\mu(t)\right]\varphi + \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\mathbb{V}_\mu(t+h-t')u^p(t')\partial_x u(t')dt' \\ &+ \frac{1}{h}\int_0^t \left[\mathbb{V}_\mu(t+h-t') - \mathbb{V}_\mu t\right]u^p(t')\partial_x u(t')dt'.\end{aligned}$$

Tomando el límite en cada sumando y aplicando las propiedades de $\mathbb{V}_\mu$, el Teorema del valor medio para integrales y el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue implican que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\mathbb{V}_\mu(t+h) - \mathbb{V}_\mu(t)\right]\varphi = A_\mu\mathbb{V}_\mu(t)\varphi,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\mathbb{V}_\mu(t+h-t')u^p(t')\partial_x u(t')dt' = \mathbb{V}_\mu(0)u^p(t)\partial_x u(t) = u^p(t)\partial_x u(t),$$

y

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^t \left[\mathbb{V}_\mu(t+h-t') - \mathbb{V}_\mu(t-t')\right] u^p(t')\partial_x u(t')dt' = A_\mu \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')u^p(t')\partial_x u(t')dt'.$$

Por lo tanto,

$$\partial_t u(t) = A_\mu u(t) + u^p(t)\partial_x u(t).$$

Recíprocamente, si $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,T] : H^{s-4}(\mathbb{R}^2))$ y satisface (2-10), entonces,

$$\partial_t u - A_\mu u = u^p \partial_x u,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'}\left[\mathbb{V}_\mu(t-t')u(t')\right] =& - A_\mu \mathbb{V}_\mu(t-t')u(t') + \mathbb{V}_\mu(t-t')\partial_{t'}u(t') \\ =& \mathbb{V}_\mu(t-t')u^p(t')\partial_x u(t'). \end{aligned}$$

El resultado es consecuencia del Teorema fundamental del cálculo. □

Ahora, se definirá el operador que representa la ecuación integral asociada a (2-2):

$$\Psi(u(t)) := \mathbb{V}_\mu(t)\varphi - \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')u^p(t')\partial_x u(t')dt', \tag{2-11}$$

para $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2))$, cuya norma es:

$$||u||_{s,\infty} := \sup_{[0,T]} ||u(t)||_s.$$

Para utilizar el Teorema del punto fijo de Banach, se trabajará en la bola cerrada

$$\mathfrak{X}(T,M) := \{u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2)) \mid ||u(t) - \mathbb{V}_\mu(t)\varphi||_s \leq M\},$$

la cual, al ser dotada de la métrica:

$$d(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} ||u(t) - v(t)||_s = \|u - v\|_{s,\infty},$$

resulta ser un espacio métrico completo, motivo por el cual se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.1.

1. *Si* $u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2))$, $s > 1$, *entonces* $\Psi(u) \in C((0,T] : H^s(\mathbb{R}^2))$.
2. *Existe* $T > 0$ *tal que, si* $u \in \mathfrak{X}(T,M)$, *entonces* $\Psi(u) \in \mathfrak{X}(T,M)$.
3. *Existe* $T > 0$ *tal que,* Ψ *es una contracción en* $\mathfrak{X}(T,M)$.

Demostración.

1. Esta prueba se divide en dos etapas: La primera de ellas, consiste en ver que la imagen de u mediante Ψ pertenece al espacio $H^s(\mathbb{R}^2)$:

$$\begin{aligned}||\Psi(u)||_s &\leq ||\mathbb{V}_\mu(t)\varphi||_s + \int_0^t ||\mathbb{V}_\mu(t-t')u^p(t')\partial_x u(t')||_{(s-1)+1}dt' \\ &\leq ||\varphi||_s + \frac{C}{p+1}\int_0^t \left(1+\frac{1}{(t-t')\mu}\right)^{1/4} ||\partial_x u^{p+1}(t')||_{s-1}dt' \\ &\leq ||\varphi||_s + \frac{C}{p+1}\int_0^t \left(1+\frac{1}{(t-t')\mu}\right)^{1/4} ||u^{p+1}(t')||_s dt' \\ &\leq ||\varphi||_s + \frac{C}{p+1}\sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_s^{p+1}(T+T^{3/4}\mu^{-1/4}).\end{aligned}$$

La segunda etapa, tiene como fin probar la continuidad de Ψ:

$$\begin{aligned}||\Psi(u(t+h))-\Psi(u(t))||_s \leq & \underbrace{\left|\left|(\mathbb{V}_\mu(t+h)-\mathbb{V}_\mu(t))\varphi\right|\right|_s}_{I} \\ & \underbrace{+\frac{1}{p+1}\int_0^t \left|\left|[\mathbb{V}_\mu(t+h-t')-\mathbb{V}_\mu(t-t')]\partial_x u^{p+1}(t')\right|\right|_s dt'}_{II} \\ & \underbrace{+\frac{1}{p+1}\int_t^{t+h} \left|\left|\mathbb{V}_\mu(t+h-t')\partial_x u^{p+1}(t')\right|\right|_s dt'}_{III}.\end{aligned}$$

De modo que, los sumandos II y III se acotan de la siguiente manera:

$$II \leq \frac{1}{p+1}\int_0^t \left|\left|\mathbb{V}_\mu(t-t')\partial_x[\mathbb{V}_\mu(h)-1]u^{p+1}(t')\right|\right|_s dt', \tag{2-12}$$

y

$$III \leq \frac{h}{p+1}\left|\left|\mathbb{V}_\mu(t+h-t^*)\partial_x u^{p+1}(t^*)\right|\right|_s, \text{ para algún } t^* \in [t,t+h]. \tag{2-13}$$

Al tomar el límite $h \to 0$, de las propiedades de $\mathbb{V}_\mu(t)$ se sigue que I tiende a cero. El sumando II, acotado en (2-12), tiende a cero en vista de desigualdad (2.1) y el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. Mientras que, el sumando III, acotado en (2-13), tiende a cero como consecuencia del Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

2. Se procederá a mostrar que existe un $T > 0$ tal que $\Psi : \mathfrak{X}(T,M) \to \mathfrak{X}(T,M)$. Para ello, debe tenerse presente la siguiente desigualdad:

$$||u||_s - ||\varphi||_s \leq ||u||_s - ||\mathbb{V}_\mu(t)\varphi||_s \leq ||u - \mathbb{V}_\mu(t)\varphi||_s \leq M, \tag{2-14}$$

siempre que $s > 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} ||\Psi(u) - \mathbb{V}_\mu(t)\varphi||_s &= \left|\left|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi - \frac{1}{p+1}\int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')\partial_x u^{p+1} dt' - \mathbb{V}_\mu(t)\varphi\right|\right|_s \\ &\leq \frac{1}{p+1}\int_0^t \left|\left|\mathbb{V}_\mu(t-t')\partial_x u^{p+1}\right|\right|_{s-1+1} dt' \\ &\leq C\int_0^t \left(1+\frac{1}{\mu(t-t')}\right)^{\frac{1}{4}} ||u||_s^{p+1} dt' \\ &\leq C(M+||\varphi||_s)^{p+1}(T+\mu^{-\frac{1}{4}}T^{\frac{3}{4}}) \\ &= (M+||\varphi||_s)^{p+1}F(T), \end{aligned} \tag{2-15}$$

donde, F es continua y creciente en el intervalo $[0,T]$, y cumple además que $F(0) = 0$, por tanto, existe $T_1' \in [0,T]$ tal que,

$$F(T_1') \leq \frac{M}{C(M+||\varphi||_s)^{p+1}}. \tag{2-16}$$

3. El siguiente argumento, prueba que Ψ una contracción:

$$\begin{aligned} \left|\left|\Psi(u) - \Psi(v)\right|\right|_s &= \Bigg|\Bigg|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi - \frac{1}{p+1}\int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')\partial_x u^{p+1} dt' \\ &\qquad - \mathbb{V}_\mu(t)\varphi + \frac{1}{p+1}\int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')\partial_x v^{p+1} dt'\Bigg|\Bigg|_s \\ &\leq \frac{1}{p+1}\int_0^t \left|\left|\mathbb{V}_\mu(t-t')\partial_x(u^{p+1}-v^{p+1})\right|\right|_s dt' \\ &\leq \frac{C}{p+1}\int_0^t \left(1+\frac{1}{\mu(t-t')}\right)^{\frac{1}{4}} \left|\left|u^{p+1}-v^{p+1}\right|\right|_s dt' \\ &\leq \frac{C}{p+1}\int_0^t \left(1+\frac{1}{\mu(t-t')}\right)^{\frac{1}{4}} \left|\left|\sum_{j=0}^{p} u^{p-j}v^j\right|\right|_s \left|\left|u-v\right|\right|_s dt' \\ &\leq \left(M+||\varphi||_s\right)^p \left|\left|u-v\right|\right|_{s,\infty}(T+\mu^{-\frac{1}{4}}T^{\frac{3}{4}}) \\ &= (M+||\varphi||_s)^p \left|\left|u-v\right|\right|_{s,\infty} F(T). \end{aligned} \tag{2-17}$$

Como en el caso anterior, F es continua y creciente en el intervalo $[0,T]$, y cumple que $F(0) = 0$, por lo tanto, existe $T_2', \in [0,T]$ tal que,

$$F(T_2')(M+||\varphi||_s)^p \left|\left|u-v\right|\right|_{s,\infty} < 1. \tag{2-18}$$

Ahora bien, tomando $T = min\{T_1', T_2'\}$ se tiene que, en el espacio $\mathfrak{X}(T,M)$, la aplicación Ψ es una contracción, por lo tanto, el Teorema del punto fijo de Banach, garantiza que existe una única solución para (2-2) en $\mathfrak{X}(T,M)$.

□

El resultado anterior, permite garantizar la existencia de solución al problema (2-2) en $H^s(\mathbb{R}^2)$ (para $s > 1$), pero, su unicidad se da únicamente en $\mathfrak{X}(T, M)$, por lo que, debe estudiarse la unicidad de la solución en $H^s(\mathbb{R}^2)$, así como también, la dependencia continua respecto al dato inicial en dicho espacio.

La unicidad de la solución del P.V.I (2-2) en $C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2))$, para $s > 1$, es consecuencia del siguiente resultado:

Proposición 2.2.
El P.V.I. (2-2) posee una única solución en el espacio $C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2))$*, si* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $p \in \mathbb{Z}^+, \mu > 0$ *y* $s > 1$.

Demostración. Sean $u, v \in C([0,T] : H^s)$, dos soluciones de la ecuación (2-2) con datos iniciales $u(0) = \varphi$ y $v(0) = \psi$, entonces,

$$
\begin{aligned}
&||u(t) - v(t)||_s \\
&\qquad = \left|\left| \mathbb{V}_\mu(t)\varphi - \frac{1}{p+1}\int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')\partial_x u^{p+1} dt' - \left(\mathbb{V}_\mu(t)\psi - \frac{1}{p+1}\int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')\partial_x v^{p+1} dt' \right) \right|\right|_s \\
&\qquad \leq \left|\left| \mathbb{V}_\mu(t)(\varphi - \psi) \right|\right|_s + \frac{1}{p+1} \left|\left| \int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')\partial_x (u^{p+1} - v^{p+1}) dt' \right|\right|_s \\
&\qquad \leq \left|\left| \varphi - \psi \right|\right|_s + \frac{1}{p+1} \int_0^t \left|\left| \mathbb{V}_\mu(t-t')\partial_x (u^{p+1} - v^{p+1}) \right|\right|_s dt' \\
&\qquad \leq \left|\left| \varphi - \psi \right|\right|_s + \frac{C}{p+1} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\mu(t-t')} \right)^{\frac{1}{4}} \left|\left| \partial_x (u^{p+1} - v^{p+1}) \right|\right|_{s-1} dt' \\
&\qquad \leq \left|\left| \varphi - \psi \right|\right|_s + \frac{C}{p+1} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\mu(t-t')} \right)^{\frac{1}{4}} \left|\left| u^{p+1} - v^{p+1} \right|\right|_s dt' \\
&\qquad \leq \left|\left| \varphi - \psi \right|\right|_s + \frac{C}{p+1} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\mu(t-t')} \right)^{\frac{1}{4}} \left|\left| u - v \right|\right|_s \left|\left| \sum_{j=0}^{p} u^{p-j} v^j \right|\right|_s dt' \\
&\qquad \leq \left|\left| \varphi - \psi \right|\right|_s + C \sum_{j=0}^{p} \left|\left| u^{p-j} v^j \right|\right|_{s,\infty} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\mu(t-t')} \right)^{\frac{1}{4}} \left|\left| u - v \right|\right|_s dt' \\
&\qquad \leq \left|\left| \varphi - \psi \right|\right|_s + C \sum_{j=0}^{p} \left|\left| u \right|\right|_{s,\infty}^{p-j} \left|\left| v \right|\right|_{s,\infty}^{j} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\mu(t-t')} \right)^{\frac{1}{4}} \left|\left| u - v \right|\right|_s dt'.
\end{aligned}
\tag{2-19}
$$

La desigualdad de Gronwall implica el resultado.

□

Para mostrar el buen planteamiento local del problema (2-2), hace falta probar la dependencia continua respecto al dato inicial, resultado obtenido en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.
Si $0 \leq \alpha, \beta \leq 1,\ p \in \mathbb{Z}^+,\ \mu > 0$ y $s > 1$, entonces la solución de la ecuación (2-2) depende continuamente del dato inicial dado.

Demostración. Sean (u_n) y u una familia de soluciones de (2-2), obtenidas realizando el proceso anterior, con datos iniciales (φ_n) y φ respectivamente. En la Proposición 2.1, se mostró que el tiempo de existencia de la solución T_n, depende de la norma del dato inicial, $||\varphi_n||_s$, de modo que, $\varphi_n \to \varphi$ implica que $T_n \to T$, escrito de otro modo, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N,\ T - \epsilon < T_n < T + \epsilon$. Eligiendo ϵ adecuadamente, por ejemplo $\epsilon = T/2$, se sigue que $T_n > T/2 > 0$, para todo $n \geq N$. Por lo tanto u_n está definida en el intervalo $[0, T/2]$, así que, al seguir las ideas usadas para mostrar la Proposición 2.2, se tiene que:

$$||u(t) - u_n(t)||_s \leq \big|\big|\varphi - \varphi_n\big|\big|_s + C\sum_{j=0}^{p} \big|\big|u\big|\big|_{s,\infty}^{p-j}\big|\big|u_n\big|\big|_{s,\infty}^{j} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\mu(t-t')}\right)^{\frac{1}{4}} \big|\big|u - u_n\big|\big|_s dt'. \tag{2-20}$$

La desigualdad de Gronwall implica el resultado.

□

Por lo tanto, ya se tienen todas las herramientas necesarias para probar el Teorema 2.1:

Demostración del Teorema 2.1: Es consecuencia inmediata de las Proposiciones 2.1, 2.2 y 2.3. □

La solución en $H^s(\mathbb{R}^2)$, para $s > 1$, del problema (2-2) garantizada por el Teorema 2.1, cumple con la siguiente propiedad de regularización:

Proposición 2.4 (Regularización de la solución)**.**
Si $s > 1$ y $\varphi \in H^s$ es el dato inicial de la solución u del PVI (2-2) garantizada por el Teorema 2.1, entonces $u \in C((0, T] : H^\infty)$.

Demostración. Observe lo siguiente:

$$||u||_{s+\theta} \leq \big|\big|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\big|\big|_{s+\theta} + \frac{1}{p+1}\int_0^t \big|\big|\mathbb{V}_\mu(t-t')\partial_x(u^{p+1})\big|\big|_{s+\theta} dt', \tag{2-21}$$

la desigualdad de regularización (2.1), con $s - 1$ en lugar de s y $\lambda = 1 + \theta$, transforma (2-21) en:

$$\begin{aligned} ||u||_{s+\theta} \leq& \big|\big|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\big|\big|_{s+\theta} + C\int_0^t \left(1 + \frac{1+\theta}{\mu(t-t')}\right)^{\frac{1+\theta}{4}} \big|\big|\partial_x(u^{p+1})\big|\big|_{s-1} dt' \\ \leq& ||\mathbb{V}_\mu(t)\varphi||_{s+\theta} + C\int_0^t \left(1 + \frac{1+\theta}{\mu(t-t')}\right)^{\frac{1+\theta}{4}} \big|\big|u\big|\big|_s^{p+1} dt'. \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la desigualdad de regularización (Lema 2.1), se obtiene que,

$$||u||_{s+\theta} \leq C\left(\frac{\theta}{4t\mu}\right)^{\frac{\theta}{4}} ||\varphi||_s + C\int_0^t \left(\frac{1+\theta}{\mu(t-t')}\right)^{\frac{1+\theta}{4}} \big|\big|u\big|\big|_s^{p+1} dt' < \infty, \tag{2-22}$$

siempre y cuando $\frac{1+\theta}{4} < 1$, es decir, $\theta < 3$. Iterando este proceso se obtiene el resultado. □

2.2. Buen planteamiento para $\mu = 0$

Los resultados que se desarrollan en esta sección, servirán para probar el Teorema 2.7. El primer resultado que se establece para lograr este cometido, prueba que el tiempo de existencia de la solución no depende de μ.

Lema 2.3.
Sean $0 \leq \alpha, \beta \leq 1,\ p \in \mathbb{Z}^+,\ s > 2$, $\mu > 0$ *y* $u_\mu \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2))$ *solución del problema (2-2) con dato inicial* $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$. *Entonces, existen* $T_s = T(s, ||\varphi_n||_s) > 0$ *y* $M > 0$, *independientes de* μ, *tales que,* $u_\mu \in C((0,T_s] : H^s(\mathbb{R}^2))$ *y* $\sup_{t\in[0,T_s]} ||u_\mu(t)||_s \leq M$.

Demostración. De la Proposición 2.4, se sigue que $u_\mu \in C((0,T_\mu] : H^\infty(\mathbb{R}^2))$, para $\mu > 0$, luego,

$$(u_\mu, \partial_t(u_\mu))_s + \mu(u_\mu, \Delta^2 u_\mu)_s = (u_\mu, \partial_x(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta})u_\mu)_s - (u_\mu, u_\mu^p \partial_x u_\mu)_s. \tag{2-23}$$

Dada la antisimetría del operador $\partial_x(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta})$, el primer sumando del lado derecho de (2-23) es nulo.

Para el segundo sumando del lado derecho de (2-23), el Lema 1.2 implica que:

$$\begin{aligned}(u_\mu, u_\mu^p \partial_x u_\mu)_s \leq& C||\partial_x u_\mu^p||_{s-1}||u_\mu||_s^2\\ \leq& C||u_\mu^p||_s||u_\mu||_s^2\\ \leq& C||u_\mu||_s^{p+2}.\end{aligned} \tag{2-24}$$

De (2-23) y (2-24), se sigue,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_\mu||_s^2 + \mu||\Delta u_\mu||_s^2 \leq C||u_\mu||_s^{p+2},$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_\mu||_s^2 \leq C||u_\mu||_s^{p+2}. \tag{2-25}$$

Si $\rho \in C([0,T^*) : [0,\infty))$, es la solución maximal de

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = 2C\rho^{\frac{p+2}{2}} \\ \rho(0) = ||\varphi||_s^2, \end{cases} \tag{2-26}$$

ρ se define de la siguiente manera: $\rho(t) = ||\varphi||_s^2(1 - Cpt||\varphi||_s^p)^{-\frac{2}{p}}$ y $T^* = (Cp||\varphi||_s^p)^{-1}$. Por lo tanto, el tiempo de existencia T_μ de la función u_μ se puede extender hasta cualquier $T \in (0,T^*)$, para cada $\mu > 0$, y además

$$||u_\mu||_s^2 < \rho(t). \tag{2-27}$$

□

El siguiente objetivo es mostrar que el tiempo de existencia de la solución es independiente de s.

Lema 2.4.
Sean $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $p \in \mathbb{Z}^+$, $s > 2$, $\mu > 0$ y $u_\mu \in C\left([0, T_{s+1}(\varphi)] : H^{s+1}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$ la solución correspondiente de (2-2), que está definida en el intervalo independiente de μ, $[0, T_{s+1}(\varphi)]$, donde $\varphi \in H^{s+1}\left(\mathbb{R}^2\right)$ es el dato inicial. Entonces u_μ puede ser extendida, de ser necesario, al intervalo $[0, T_s]$, con φ visto como un elemento de $H^s\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Demostración. Como $T_s \geq T_{s+1}$, de (2-23) se sigue que,

$$\partial_t \left\|u_\mu\right\|_{s+1}^2 \leq \left|\left(u_\mu\left(t\right), u_\mu^p \partial_x\left(u_\mu\left(t\right)\right)\right)\right|. \tag{2-28}$$

El Lema 1.2, implica

$$\begin{aligned}\left|\left(u_\mu\left(t\right), u_\mu^p \partial_x\left(u_\mu\left(t\right)\right)\right)\right| &\leq C\left(\left\|u_\mu\right\|_s^p \left\|u_\mu\right\|_{s+1}^2 + \left\|\partial_x\left(u_\mu^p\right)\right\|_s \left\|u_\mu\right\|_s \left\|u_\mu\right\|_{s+1}\right)\\ &\leq C\left(\left\|u_\mu\right\|_s^p \left\|u_\mu\right\|_{s+1}^2 + p\left\|u_\mu\right\|_s^{p-1} \left\|u_\mu\right\|_{s+1} \left\|u_\mu\right\|_s \left\|u_\mu\right\|_{s+1}\right)\\ &\leq C\left\|u_\mu\right\|_s^p \left\|u_\mu\right\|_{s+1}^2.\end{aligned}$$

Integrando (2-28), respecto a t, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\left\|u_\mu\right\|_{s+1}^2 \leq \left\|\varphi\right\|_{s+1}^2 + \sup_{[0,T_{s+1}]} \left\|u_\mu\right\|_s^p \int_0^t \left\|u_\mu\right\|_{s+1}^2 dt'. \tag{2-29}$$

De la desigualdad de Gronwall se tiene lo siguiente: $\left\|u_\mu\right\|_{s+1}^2 \leq C\left\|\varphi\right\|_{s+1}^2$, y por el procedimiento de extensión realizado anteriormente se obtiene el resultado. □

Para probar la dependencia continua, es necesario establecer un resultado previo. Para φ_n y $\varphi_\infty \in H^s(\mathbb{R}^2)$ tales que $\varphi_n \to \varphi_\infty$, para cada n fijo, existe una única solución del P.V.I (2-2), $u_{\mu,n}$ en el espacio $C\left([0, T] : H^s(\mathbb{R}^2)\right)$, con $\mu > 0$, y con tiempo de existencia $T_{s,n}(\varphi) > 0$ (independiente de μ), cuyo dato inicial es φ_n. Además, el tiempo tiene independencia de s, según el Lema 2.4. Tal resultado es el siguiente:

Lema 2.5.
Bajo las consideraciones anteriores, para $T \in (0, T_{s,\infty})$ fijo, existen $N_s \in \mathbb{Z}^+$ y $M > 0$ tales que, $T_{s,n} \geq T$ para $n \geq N_s$ y $||u_{\mu,n}(t)||_s \leq M$, para todo $t \in [0, T]$.

Demostración. Del mismo modo en que se obtuvo (2-25), se tiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_{\mu,n}||_s^2 \leq C||u_{\mu,n}||_s^{p+2}. \tag{2-30}$$

Por lo tanto, $||u_{\mu,n}(t)||_s^2 < \rho(t)$, para cada $t \in (0, T)$, con $0 < T < T_n^*$, y $T_n^* = (Cp||\varphi_n||_s^p)^{-1}$, siendo $\rho(t) = ||\varphi_n||_s^2(1 - Cpt||\varphi_n||_s^p)^{-\frac{2}{p}}$, es decir,

$$||u_{\mu,n}(t)||_s \leq \sup_{t\in[0,T]} \sqrt{\rho(t)} = M.$$

□

Ahora, se procede a mostrar que $\lim_{\mu \downarrow 0} u_\mu = u_0$ existe, y satisface (2-2) en $H^s(\mathbb{R}^2)$ débilmente.

Teorema 2.2.
Para $s > 2$ y $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, existen $T > 0$ y una función $u_0 \in C_w([0,T] : H^s) \cap C_w^1([0,T] : H^{s-3})$ tales que, $u_0(0) = \varphi$ y u_0 satisface la ecuación diferencial en el sentido débil, es decir, para todo $\psi \in H^{s-3}$ y $t \in [0,T]$ se tiene que,

$$\partial_t (u_0, \psi)_{s-3} = \left(\partial_x \left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta}\right) u_0(t) - u_0^p(t)\, \partial_x u_0(t), \psi\right)_{s-3},$$

o de manera equivalente

$$(u_0, \psi)_{s-3} = (\varphi, \psi)_{s-3} + \int_0^t \left(\partial_x \left(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta}\right) u_0(t') - u_0^p(t')\, \partial_x u_0(t'), \psi\right),$$

y además

$$\|u_0(t)\|_s \leq \rho(t).$$

Demostración. Primero, se mostrará que la familia $(u_\mu(t))_{\mu > 0}$ es una red de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\frac{1}{2}\partial_t \|u_\mu - u_\gamma\|_0^2 = -\left(u_\mu - u_\gamma, \Delta^2(\mu u_\mu - \gamma u_\gamma)\right) \tag{2-31}$$

$$\left(u_\mu - u_\gamma, \partial_x\left(D_x^{1+\alpha} u_\mu - D_y^{1+\beta} u_\mu\right) - \partial_x\left(D_x^{1+\alpha} u_\gamma + D_y^{1+\beta} u_\gamma\right)\right) \tag{2-32}$$

$$-\left(u_\mu - u_\gamma, u_\mu^p \partial_x(u_\mu) - u_\gamma^p \partial_x(u_\gamma)\right). \tag{2-33}$$

Para acotar el lado derecho de (2-31), se debe hacer uso de la desigualdad de Cauchy-Schwartz y de la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}\left(u_\mu - u_\gamma, \Delta^2(\mu u_\mu - \gamma u_\gamma)\right) &= \left(u_\mu - u_\gamma, \mu\Delta^2(u_\mu - u_\gamma)\right) + (\mu - \gamma)\left(u_\mu - u_\gamma, \Delta^2 u_\gamma\right) \\ &\leq |\gamma - \mu|\left(\|u_\mu\|_2 + \|u_\gamma\|_2\right)\|u_\gamma\|_2.\end{aligned}$$

El sumando (2-32) es cero, pues, el operador $\partial_x(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta})$ es antisimétrico.

Mientras que, (2-33) es equivalente a:

$$\frac{1}{2(p+1)}\left(\partial_x(u_\mu - u_\gamma)^2, \sum_{j=1}^{p-1} u_\mu^j u_\gamma^{p-j}\right),$$

lo cual es acotado, en vista de la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{(p+1)}\|u_\mu - u_\gamma\|_0^2 \left\|\partial_x \sum_{j=1}^{p-1} u_\mu^j u_\gamma^{p-j}\right\|_\infty \leq \frac{1}{2(p+1)}\|u_\mu - u_\gamma\|_0^2 \left\|\sum_{j=1}^{p-1} u_\mu^j u_\gamma^{p-j}\right\|_s.$$

Por el Lema 2.4, considerando $M = \sup_{[0,T]} \sqrt{\rho(t)}$, y la desigualdad de Gronwall, se tiene que

$$\|u_\mu - u_\gamma\|_0 \leq C|\mu - \gamma|.$$

Por la completitud de $L^2(\mathbb{R}^2)$, existe $u_0 \in C([0,T] : L^2(\mathbb{R}^2))$ la cual satisface la siguiente ecuación:

$$\lim_{\mu\downarrow 0} \sup_{[0,T]} \|u_\mu(t) - u_0(t)\|_0 = 0.$$

Ahora, se pretende mostrar que $(u_\mu(t))_{\mu>0}$ es una red de Cauchy débil en $H^s(\mathbb{R}^2)$. Para ello, se consideran $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $\epsilon > 0$ y $\varphi_\epsilon \in \mathcal{S}$ tales que, $\|\varphi - \varphi_\epsilon\|_s \leq \epsilon$. Así,

$$\begin{aligned}
|(u_\mu - u_\gamma, \varphi)|_s &= |(u_\mu - u_\gamma, \varphi - \varphi_\epsilon + \varphi_\epsilon)|_s \\
&\leq \left(\|u_\mu\|_s + \|u_\gamma\|_s\right)\|\varphi - \varphi_\epsilon\|_s + \|u_\mu - u_\gamma\|_0 \left\|\left(1+\partial_x^2\right)^s \varphi_\epsilon\right\|_0 \\
&\leq 2M\epsilon + C|\mu - \gamma|.
\end{aligned} \tag{2-34}$$

Dado que, $H^s(\mathbb{R}^2)$ es un espacio reflexivo, él es débilmente completo, por lo que, existe un elemento $u_0 \in C_w([0,T] : H^s(\mathbb{R}\times\mathbb{T}))$ tal que,

$$\lim_{\mu\downarrow 0} (u_\mu(t), \varphi)_s = (v, \varphi)_s.$$

Como $L^2(\mathbb{R}^2) = (L^2(\mathbb{R}))' \subseteq (H^s(\mathbb{R}^2))'$, la unicidad del límite implica que $u_0(t) = v(t)$, para todo $t \in [0,T]$. Además, del Lema 2.4, se tiene lo siguiente:

$$||u_0(t)||_s = \sup_{||\Psi||_s=1} \left|(u_0(t), \Psi)\right| = \sup_{||\Psi||_s=1} \lim_{\mu\downarrow 0} \left|(u_\mu(t), \Psi)\right| \leq \rho(t) \leq M,$$

para $t \in [0,T]$.

Resta mostrar que $u_0 \in C_w^1([0,T]; H^{s-3})$. Para tal fin, se considera $\Psi \in H^{s-3}$, y así,

$$\begin{aligned}
&(u_\mu(t), \Psi)_{s-3} \\
&\quad = (\varphi, \Psi)_{s-3} + \int_0^t \left(\mu\Delta^2 u_\mu(t') + \partial_x(D_x^{1+\alpha} u_\mu \pm D_y^{1+\beta} u_\mu) - u_\mu(t')^p \partial_x u_\mu(t'), \Psi\right)_{s-3} dt',
\end{aligned}$$

para cada $t \in [0,T_s]$. Dado que, $u_\mu \rightharpoonup u_0$ en $H^s(\mathbb{R}^2)$, se tiene que, $\Delta^2 u_\mu \rightharpoonup \Delta^2 u_0$ en $H^{s-2}(\mathbb{R}^2)$, el término $\partial_x(D_x^{1+\alpha} u_\mu \pm D_y^{1+\beta} u_\mu) \rightharpoonup \partial_x(D_x^{1+\alpha} u_0 \pm D_y^{1+\beta} u_0)$ en $H^{s-3}(\mathbb{R}^2)$ y $u_\mu^p \partial_x u_\mu \rightharpoonup u_0^p \partial_x u_0$ en $H^s(\mathbb{R}^2)$, de manera uniforme en $[0,T_s]$. Así que, al hacer que $\mu \downarrow 0$ se tiene lo siguiente:

$$(u_0(t), \Psi)_{s-3} = (\varphi, \Psi)_{s-3} + \int_0^t \left(\partial_x(D_x^{1+\alpha} u_\mu \pm D_y^{1+\beta} u_\mu) - u_\mu(t')^p \partial_x u_\mu(t'), \Psi\right)_{s-3} dt',$$

para todo $t \in [0,T_s]$. La integral

$$\int_0^t \left(\partial_x(D_x^{1+\alpha} u_0 \pm D_y^{1+\beta} u_0) - u_0(t')^p \partial_x u_0(t')\right) dt'$$

tiene sentido como una integral de Bochner, y en vista del Teorema de Pettis, u_0 se puede escribir como sigue:

$$u_0(t) = \varphi + \int_0^t \left(-\partial_x(D_x^{1+\alpha} u_0 \pm D_y^{1+\beta} u_0) - u_0(t')^p \partial_x u_0(t')\right) dt'. \tag{2-35}$$

Por lo tanto,

$$\partial_t u_0(t) = \partial_x (D_x^{1+\alpha} u_0 \pm D_y^{1+\beta} u_0) - u_0(t')^p \partial_x u_0(t'), \tag{2-36}$$

existe para casi todo $t \in [0, T]$, y como $u_0(0) = \varphi$, entonces, u_0 es solución débil del problema. $\square$

Los siguientes resultados tienen como objetivo, mostrar la unicidad de la solución:

Teorema 2.3.
Sean $T > 0$ fijo, $s > 2,\ \varphi_1,\ \varphi_2 \in H^s(\mathbb{R}^2)$ y $u_1,\ u_2 : [0,T] \to H^s(\mathbb{R}^2)$, funciones acotadas tales que, $u_1(0) = \varphi_1$ y $u_2(0) = \varphi_2$, y además

$$u_1,\ u_2 \in C\left([0,T] : L^2(\mathbb{R}^2)\right) \cap C_w\left([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2)\right) \cap AC\left([0,T_s] : H^{s-3}(\mathbb{R}^2)\right).$$

Entonces

$$||u_1(t) - u_2(t)||_0 \leq ||\varphi_1 - \varphi_2||_0 e^{tL_0(M,M)},$$

y $M = \text{máx}\left\{\sup_{[0,T]} ||u_1(t)||_s, \sup_{[0,T]} ||u_2(t)||_s\right\}$.

Demostración. Como $s > 2$, entonces $s - 3 > -s$, de modo que $H^{s-3} \hookrightarrow H^{-s}$, por lo tanto, para $w = u_1 - u_2$ y cada $t \in [0,T]$ fijo, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left((w(t+h), w(t+h)) - (w(t), w(t))\right)_0 \\
&\quad = \left(\frac{w(t+h) - w(t)}{h}, w(t+h)\right)_0 + \left(\frac{w(t+h) - w(t)}{h}, w(t)\right)_0 \\
&\quad = \left\langle\frac{w(t+h) - w(t)}{h}, w(t+h)\right\rangle_s + \left\langle\frac{w(t+h) - w(t)}{h}, w(t)\right\rangle_s,
\end{aligned} \tag{2-37}$$

donde, h es tal que $t + h \in [0,T]$, y $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ es el paréntesis de dualidad en $H^s(\mathbb{R}^2)$. Dado que, $t \in [0,T] \to w(t) \in H^s(\mathbb{R}^2)$ es acotada, y como

$$\partial_t w(t) = \text{lím}_{h \to 0} \frac{w(t+h) - w(t)}{h} = \partial_x (D_x^{1+\alpha} w \pm D_y^{1+\beta} w) - \left(u_1(t)^p \partial_x u_1(t) - u_2(t)^p \partial_x u_2(t)\right),$$

se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}||w(t)||_0^2 &= -2\left\langle u_1(t)^p \partial_x u_1(t) - u_2(t)^p \partial_x u_2(t), w(t)\right\rangle_s \\
&= -2\left(u_1(t)^p \partial_x u_1(t) - u_2(t)^p \partial_x u_2(t), w(t)\right)_0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, al sumar y restar $u_2^p \partial_x u_1$ dentro del producto interno, y aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{d}{dt}||w(t)||_0^2 \leq L_0\left(\|u_1\|_s, \|u_2\|_s\right)||w||_0^2,$$

donde $L_0\left(\|u_1\|_s, \|u_2\|_s\right) = \left\|\sum_{j=1}^{p-1} u_1^j u_2^{p-j}\right\|_s \|u_1\|_s + \|u_2\|_s^p$. El resultado se sigue de la desigualdad de Gronwall. $\square$

Teorema 2.4.
Sean $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$ y $s > 2$. Entonces, existen un tiempo $T > 0$ y una única $u_0 \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2))$ que satisface (2-1).

Demostración. El Teorema 2.3 garantiza la unicidad.

Para probar que $u_0 \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2))$, se considera $\Psi \in H^s(\mathbb{R}^2)$ tal que, $||\Psi||_s = 1$. Del Teorema 2.2, se obtiene:

$$\left|(u_0(t), \Psi)_s\right| \leq ||u_0(t)||_s \leq \rho(t),$$

por lo tanto, para toda $\Psi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, se tiene que,

$$\begin{aligned}
\left|(\varphi, \Psi)_s\right| &= \lim_{t\downarrow 0} \left| (u_0(t), \Psi)_s \right| \\
&= \liminf_{t\downarrow 0} \left| (u_0(t), \Psi)_s \right| \\
&\leq \liminf_{t\downarrow 0} \|u_0(t)\|_s \\
&\leq \limsup_{t\downarrow 0} \|u_0(t)\|_s \\
&\leq \limsup_{t\downarrow 0} \sqrt{\rho(t)} \\
&= \|\varphi\|_s . \qquad (2\text{-}38)
\end{aligned}$$

Tomando el supremo en (2-38), sobre $\|\Psi\|_s = 1$, se obtiene lo siguiente:

$$\liminf_{t\downarrow 0} \|u_0(t)\|_s = \limsup_{t\downarrow 0} \|u_0(t)\|_s = \limsup_{t\downarrow 0} \sqrt{\rho(t)} = \|\varphi\|_s ,$$

de lo que se sigue,

$$\lim_{t\downarrow 0} \|u_0(t)\|_s = \|\varphi\|_s .$$

Como, $u_0(t) \rightharpoonup \varphi$ en $H^s(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$\lim_{t\downarrow 0} u_0(t) = \varphi, \quad \text{en } H^s(\mathbb{R}^2).$$

Si t' es un elemento fijo de $(0,T)$, existen $\tilde{T} > 0$ y una única $v \in C_w\left(\left[0, \tilde{T}\right] : H^s(\mathbb{R}^2)\right) \cap C_w^1\left(\left[0, \tilde{T}\right] : H^{s-3}(\mathbb{R}^2)\right)$, las cuales satisfacen

$$\begin{aligned}
\partial_t v(t) - \partial_x \left(D_x^{1+\alpha} + D_y^{1+\beta}\right) v(t) + v(t)^p v(t) &= 0 \\
v(x,y,0) &= u_0(t').
\end{aligned}$$

La unicidad implica que $v(t) = u(t + t')$, y como v es continua a derecha de $t = 0$, entonces u es continua a derecha de $t = t'$. Como (2-2) es invariante bajo el cambio de variables $(t, x, y) \to (t' - t, -x, -y)$, la única solución del problema

$$\partial_t w(t)v - \partial_x \left(D_x^{1+\alpha} + D_y^{1+\beta}\right) w(t) + w(t)^p w(t) = 0$$
$$w(x, y, 0) = \tilde{u}(t'),$$

es continua a derecha de $w(t, x, y) = u(t' - t, -x, -y)$, lo cual implica la continuidad de u_0. $\square$

Los siguientes resultados se basan en el argumento llevado a cabo por Bona y Smith en [8], para obtener la dependencia continua y así el buen planteamiento del P.V.I (2-1) en $H^s(\mathbb{R}^2)$, para $s > 2$.

Lema 2.6.
Si $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 2$, se definen para $\tau \in \mathbb{R}^+$, las siguientes funciones

$$\varphi^\tau = e^{[-\tau(1-\Delta)^{\frac{s}{2}}]}\varphi = \left(e^{-\tau(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}}\hat{\varphi}\right)^\vee, \tag{2-39}$$

entonces $\lim\limits_{\tau \downarrow 0} ||\varphi^\tau - \varphi||_s = 0$ *y*

$$||\varphi^\tau||_{s+1} \leq \left[1 + \left(\frac{1}{s\tau}\right)^{\frac{2}{s}}\right]^{\frac{1}{2}} ||\varphi||_s. \tag{2-40}$$

Además las funciones φ^τ forman una red de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. Como

$$\lim_{\tau \downarrow 0} ||\varphi^\tau - \varphi||_s = \lim_{\tau \downarrow 0} \iint (1 + \xi^2 + \eta^2)^s \left|e^{-\tau(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}}\hat{\varphi} - \hat{\varphi}\right|^2 d\xi d\eta, \tag{2-41}$$

para probar que (2-41) tiende a cero, basta observar lo siguiente:

$$(1 + \xi^2 + \eta^2)^s \left|e^{-\tau(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}} - 1\right|^2 |\hat{\varphi}|^2 \leq 4(1 + \xi^2 + \eta^2)^s |\hat{\varphi}|^2,$$

y que $\lim\limits_{\tau \downarrow 0} \left|e^{-\tau(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}} - 1\right| = 0$. Así el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, implica el resultado.

Para mostrar que φ^τ está acotada en H^{s+1}, se emplean las propiedades del supremo, y se maximiza la función $f(x) = x^2 e^{-2\tau x^2}$, como sigue:

$$\begin{aligned}
||\varphi^\tau||_{s+1}^2 &= \iint (1 + \xi^2 + \eta^2)^{s+1} \left|e^{-\tau(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}}\hat{\varphi}\right|^2 d\xi d\eta \\
&= \sup_{(\xi,\eta)} (1 + \xi^2 + \eta^2) e^{-2\tau(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}} ||\varphi||_s^2 \\
&\leq \left(1 + \sup_{(\xi,\eta)} \xi^2 e^{-2\tau(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}} + \sup_{(\xi,\eta)} \eta^2 e^{-2\tau(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}}\right) ||\varphi||_s^2 \\
&\leq \left(1 + 2\left(\frac{1}{\tau s}\right)^{\frac{2}{s}} e^{-\frac{2}{s}}\right) ||\varphi||_s^2,
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$||\varphi^\tau||_{s+1}^2 \leq C\left[1+\left(\frac{1}{s\tau}\right)^{\frac{2}{s}}\right]^{\frac{1}{2}}||\varphi||_s^2. \tag{2-42}$$

Resta mostrar que las funciones φ^τ forman una red de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^2)$. Para ello, se emplea el Teorema del valor medio en la función $f(x) = e^{-x(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}}$, así:

$$\begin{aligned}||\varphi^\tau - \varphi^\theta||_0^2 =& \iint \left|e^{-\tau(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}}\hat{\varphi} - e^{-\theta(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}}\hat{\varphi}\right|^2 d\xi d\eta\\ \leq& |\tau-\theta|^2\iint|(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}|^2|\hat{\varphi}|^2 d\xi d\eta,\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$||\varphi^\tau - \varphi^\theta||_0 \leq |\tau-\theta|||\varphi||_s. \tag{2-43}$$

De lo que se sigue el resultado. □

Ahora bien, si $\varphi_n \to \varphi_\infty$ en $H^s(\mathbb{R}^2)$, para las aproximaciones φ^τ definidas en (2-39), se tienen soluciones respectivas $u_{\mu,n}^\tau$. Como $\varphi_n^\tau \to \varphi_n$ cuando $\tau \downarrow 0$, para $n = 1, 2, \ldots, \infty$ fijo, siguiendo el argumento usado para probar el Lema 2.5, es posible establecer un intervalo de existencia $[0, T]$ para todas estas soluciones independiente de s, siempre que n sea suficientemente grande y τ convenientemente pequeño. También se puede hallar una cota M para las soluciones en $H^s(\mathbb{R}^2)$, así

$$||u_{\mu,n}^\tau||_s \leq M, \text{ para } t \in [0, T]. \tag{2-44}$$

Teorema 2.5.
Sean $\varphi, \varphi_n \in H^s(\mathbb{R}^2)$ con $s > 2$, $\mu > 0$, φ_n^τ, $u_{\mu,n}^\tau$ como antes. Entonces, $0 \leq \theta \leq \tau$, existen $C > 0$ y $0 < \eta < 1$ tales que, para todo $t \in [0, T]$, n suficientemente grande y $\tau << 1$, se tiene que

$$||u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta||_s \leq C\left[||\varphi^\tau - \varphi^\theta||_s + \tau^{1-\eta}\right]. \tag{2-45}$$

Demostración. Sean τ_0 y N_0 tales que, $u_{\mu,n}^\tau(t)$ está definida en $[0, T]$, para $0 < \tau < \tau_0$ y $n \geq N_0$, así

$$\begin{aligned}\partial_t||u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta||_s^2 \leq& 2\left(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta, (u_{\mu,n}^\tau)^p\partial_x u_{\mu,n}^\tau - (u_{\mu,n}^\theta)^p\partial_x u_{\mu,n}^\theta\right)\\ \leq& 2\left[\left|\left(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta, (u_{\mu,n}^\theta)^p\partial_x\left(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta\right)\right)\right|\right.\\ &\left.+\left|\left(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta, \left((u_{\mu,n}^\tau)^p - (u_{\mu,n}^\theta)^p\right)\partial_x u_{\mu,n}^\tau\right)\right|\right].\end{aligned} \tag{2-46}$$

La acotación del primer sumando de (2-46), es consecuencia del Lema 1.2, como se ve en seguida:

$$\left|\left(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta, (u_{\mu,n}^\theta)^p\partial_x\left(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta\right)\right)\right| \leq C||u_{\mu,n}^\theta||_s^p||u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta||_s^2 \leq CM^p||u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta||_s^2. \tag{2-47}$$

Para acotar el segundo sumando de (2-46), se emplean las desigualdades de Cauchy-Schwartz y el Lema 1.2, así:

$$\begin{aligned}&\left|\left(u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta, \left((u_{\mu,n}^\tau)^p - (u_{\mu,n}^\theta)^p\right)\partial_x u_{\mu,n}^\tau\right)\right|\\ &\leq C||u_{\mu,n}^\tau - u_{\mu,n}^\theta||_s\left[\left|\left|(u_{\mu,n}^\tau)^p - (u_{\mu,n}^\theta)^p\right|\right|_s||u_{\mu,n}^\tau||_s + \left|\left|(u_{\mu,n}^\tau)^p - (u_{\mu,n}^\theta)^p\right|\right|_{s_0}||u_{\mu,n}^\tau||_{s+1}\right],\end{aligned} \tag{2-48}$$

siempre que, $\frac{1}{2} < s_0 < s_0 + 1 < s$.

El primer sumando del lado derecho de (2-48), es acotado en vista de (2-44), como se puede ver a continuación:

$$\begin{aligned}
&||u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}||_s \big|\big|(u^\tau_{\mu,n})^p - (u^\theta_{\mu,n})^p\big|\big|_s ||u^\tau_{\mu,n}||_s \\
&\le ||u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}||_s^2 \Bigg|\Bigg| \sum_{j=0}^{p} \left(u^\tau_{\mu,n}\right)^j \left(u^\theta_{\mu,n}\right)^{p-j} \Bigg|\Bigg|_s ||u^\tau_{\mu,n}||_s && \text{(2-49)} \\
&\le CM||u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}||_s^2. && \text{(2-50)}
\end{aligned}$$

Para acotar el segundo sumando del lado derecho de (2-48), se debe tener en cuenta la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
\partial_t ||u^\tau_{\mu,n}||^2_{s+1} &\le 2\big| \left(u^\tau_{\mu,n}, \left(u^\tau_{\mu,n}\right)^p \partial_x u^\tau_{\mu,n}\right) \big| \\
&\le C||u^\tau_{\mu,n}||_s ||u^\tau_{\mu,n}||^2_{s+1} \le CM||u^\tau_{\mu,n}||^2_{s+1}. && \text{(2-51)}
\end{aligned}$$

De modo que por (2-40), (2-51) y la desigualdad de Gronwall se tiene que,

$$||u^\tau_{\mu,n}||_{s+1} \le C||\varphi^\tau||_{s+1} \le C||\varphi||_s \tau^{-\frac{1}{2}}, \tag{2-52}$$

para $\tau \le \tau_0$.

Ahora, para acotar el término $\big|\big|(u^\tau_{\mu,n})^p - (u^\theta_{\mu,n})^p\big|\big|_{s_0}$, se emplea el siguiente argumento:

$$\begin{aligned}
\big|\big|(u^\tau_{\mu,n})^p - (u^\theta_{\mu,n})^p\big|\big|_{s_0} &\le ||u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}||_{s_0} \Bigg|\Bigg| \sum_{j=0}^{p} \left(u^\tau_{\mu,n}\right)^j \left(u^\theta_{\mu,n}\right)^{p-j} \Bigg|\Bigg|_{s_0} \\
&\le C||u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}||_s^\lambda ||u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}||_0^{1-\lambda} \\
&\le C(2M)^\lambda ||u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}||_0^{1-\lambda}, && \text{(2-53)}
\end{aligned}$$

para $\lambda = \frac{s_0}{s}$. Por lo tanto, ahora debe hallarse una cota para $||u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}||_0$, así:

$$\begin{aligned}
\partial_t ||u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}||_0^2 &= 2\left(u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}, \left(u^\tau_{\mu,n}\right)^p \partial_x u^\tau_{\mu,n} - \left(u^\theta_{\mu,n}\right)^p \partial_x u^\theta_{\mu,n}\right) \\
&= \frac{2}{p+1}\left(u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}, \partial_x \left(\left(u^\tau_{\mu,n}\right)^{p+1} - \left(u^\theta_{\mu,n}\right)^{p+1}\right)\right) \\
&= -\frac{2}{p+1}\left(\partial_x\left(u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}\right), \left(u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}\right) \sum_{j=0}^{p} \left(u^\tau_{\mu,n}\right)^j \left(u^\theta_{\mu,n}\right)^{p-j}\right) \\
&\le \frac{1}{p+1} \Bigg|\Bigg| \sum_{j=0}^{p} \left(u^\tau_{\mu,n}\right)^j \left(u^\theta_{\mu,n}\right)^{p-j} \Bigg|\Bigg|_\infty ||u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}||_0^2 \\
&\le \frac{CM^p}{p+1} ||u^\tau_{\mu,n} - u^\theta_{\mu,n}||_0^2. && \text{(2-54)}
\end{aligned}$$

Así pues, la desigualdad de Gronwall garantiza lo siguiente:

$$||u^{\tau}_{\mu,n} - u^{\theta}_{\mu,n}||_0^2 \leq C||\varphi^{\tau} - \varphi^{\theta}||_0^2. \tag{2-55}$$

Por lo tanto, para $0 < \theta \leq \tau$

$$\begin{aligned} \left|\left|(u^{\tau}_{\mu,n})^p - (u^{\theta}_{\mu,n})^p\right|\right|_{s_0} ||u^{\tau}_{\mu,n}||_{s+1} &\leq C||\varphi^{\tau} - \varphi^{\theta}||_0^{1-\frac{s_0}{s}} ||\varphi||_s \tau^{-\frac{1}{2}} \\ &\leq C||\varphi||_s^{2-\frac{s_0}{s}} \tau^{1-\frac{s_0+1}{s}}. \end{aligned} \tag{2-56}$$

De (2-46) - (2-49), (2-52), (2-53) y (2-56) se sigue que,

$$\partial_t ||u^{\tau}_{\mu,n} - u^{\theta}_{\mu,n}||_s^2 \leq C\left[||u^{\tau}_{\mu,n} - u^{\theta}_{\mu,n}||_s^2 + \tau^{1-\frac{s_0+1}{s}}\right].$$

El resultado es consecuencia de la desigualdad de Gronwall. □

Gracias a estos resultados, es posible mostrar la dependencia continua de las soluciones del P.V.I (2-2):

Teorema 2.6.
Sean $\varphi_n \in H^s(\mathbb{R}^2),\ n = 1, 2, \ldots, \infty$ tales que $\varphi_n \to \varphi_\infty$ en $H^s(\mathbb{R}^2)$, y $u_{0,n} \in C\left([0, T_n] : H^s(\mathbb{R}^2)\right)$ sus correspondientes soluciones del P.V.I (2-1), para $s > 2$. Entonces para cualquier $T'_\infty \in (0, T_\infty)$, existe un N_0 tal que, $T_n \geq T'_\infty$ para todo $n \geq N_0$ y

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T_\infty]} \left\|u_{0,n}(t) - u_{0,\infty}(t)\right\|_s = 0. \tag{2-57}$$

Demostración. Sean $\varphi^{\tau}_n,\ n = 1, 2, \ldots, \infty$ como en el Teorema 2.5, y $u^{\tau}_{\mu,n}$, sus correspondientes soluciones del P.V.I (2-1), con tiempos de existencia $T_{s,n}$. Como consecuencia de los resultados probados en esta sección, para $T \in (0, T_\infty)$, $u^{\tau}_{\mu,n} \in C\left([0, T] : H^s(\mathbb{R}^2)\right)$, si n es suficientemente grande y τ es suficientemente pequeño. Note lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(u_{0,n} - u_{0,\infty}, \Psi\right)_s &= \lim_{\mu\downarrow 0} \left(u_{\mu,n} - u_{\mu,\infty}, \Psi\right)_s \\ &= \lim_{\mu\downarrow 0} \left(u_{\mu,n} - u^{\tau}_{\mu,n}, \Psi\right)_s + \left(u^{\tau}_{\mu,n} - u^{\tau}_{\mu,\infty}, \Psi\right)_s + \left(u^{\tau}_{\mu,\infty} - u_{\mu,\infty}, \Psi\right)_s \\ &= \lim_{\mu\downarrow 0} \left[\left(u_{\mu,n} - u^{\tau}_{\mu,n}, \Psi\right)_s + \left(u^{\tau}_{\mu,m} - u_{\mu,m}, \Psi\right)_s\right] + \left(u^{\tau}_{0,n} - u^{\tau}_{0,\infty}, \Psi\right)_s, \end{aligned} \tag{2-58}$$

como consecuencia del Teorema 2.5, para $\epsilon > 0$, se la siguiente desigualdad:

$$\left| \left(u_{\mu,n} - u^{\tau}_{\mu,n}, \Psi\right)_s + \left(u_{\mu,m} - u^{\tau}_{\mu,m}, \Psi\right)_s \right| \leq \epsilon \left\|\Psi\right\|_s, \tag{2-59}$$

para $\mu > 0$ y $\tau > 0$ adecuadamente pequeños. Por lo tanto,

$$\left|\left(u_{0,n} - u_{0,\infty}, \Psi\right)_s\right| \leq \left(\epsilon + \left\|u^{\tau}_{0,n} - u^{\tau}_{0,\infty}\right\|_s\right) \left\|\Psi\right\|_s, \tag{2-60}$$

para cada $\Psi \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Así que, tomando el supremo sobre $\|\Psi\|_s = 1$, en (2-60), se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\|u_{0,n} - u_{0,\infty}\|_s \leq \epsilon + \left\|u^\tau_{0,n} - u^\tau_{0,\infty}\right\|_s, \tag{2-61}$$

siempre que $\tau > 0$ y lo suficientemente pequeño.

El segundo sumando del lado derecho de (2-61), satisface que,

$$\left\|u^\tau_{0,n} - u^\tau_{0,\infty}\right\|_s \leq 2M\|\varphi_{0,n} - \varphi_{0,\infty}\|.$$

De lo que se sigue el resultado. □

Con la teoría desarrollada en el capítulo, se tienen los elementos requeridos para demostrar el Teorema 2.7:

***Demostración del Teorema* 2.7**: El resultado es consecuencia de los Teoremas 2.3, 2.4 y 2.6. □

2.3. Índices con baja regularidad

En esta sección se considerará de nuevo el problema regularizado (2-2), y se mostrará su buen planteamiento en $H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s \in (-2, 2]$.

2.3.1. Buen planteamiento local para $s = 1$

Para poder obtener el buen planteamiento local de (2-2) en $H^1(\mathbb{R}^2)$, se debe probar el siguiente resultado, y seguir las ideas desarrolladas en la primera sección de éste capítulo.

Lema 2.7.
Si $\mu > 0$, $t > 0$, $s \in \mathbb{R}^+$ y $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^2)$, entonces

$$\|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_s \leq C\|\varphi\|_{L^1}.$$

Demostración. Considerando

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_s^2 &\leq \iint (1+\xi^2+\eta^2)^s e^{-2\mu t(\xi^2+\eta^2)^2}\hat{\varphi}\,d\xi d\eta \\
&\leq \|\hat{\varphi}\|_{L^\infty}^2 \iint (1+\xi^2+\eta^2)^s e^{-2\mu t(\xi^2+\eta^2)^2} d\xi d\eta \\
&\leq \|\hat{\varphi}\|_{L^\infty}^2 \left(\iint (\xi^2+\eta^2)^s e^{-2\mu t(\xi^2+\eta^2)^2} d\xi d\eta + \iint e^{-2\mu t(\xi^2+\eta^2)^2} d\xi d\eta\right) \\
&= \|\hat{\varphi}\|_{L^\infty}^2 (A_1 + A_2).
\end{aligned}$$

Para acotar A_1, se utiliza el cambio de coordenadas a polares, y una sustitución simple para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^{2s} e^{-2\mu t r^4} r d\theta dr \\ &= C(\mu t)^{-\frac{s+1}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{s-1}{2}} e^{-x} dx \\ &= C(\mu t)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right). \end{aligned} \tag{2-62}$$

El término A_2, se puede ver como un caso particular de A_1, tomando $s = 0$.

Por lo tanto,

$$\|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_s \leq \|\hat{\varphi}\|_{L^\infty} \left((\mu t)^{-\frac{1}{4}} + (\mu t)^{-\frac{s+1}{4}}\right) \leq \left((\mu t)^{-\frac{1}{4}} + (\mu t)^{-\frac{s+1}{4}}\right) \|\varphi\|_{L^1}.$$

□

Teorema 2.8.
Sean $0 \leq \alpha, \beta \leq 1,\ p = 1$ y $\mu > 0$, entonces el problema (2-2) está localmente bien planteado en $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. La demostración emplea el Teorema del punto fijo de Banach, de modo que, es análoga a la del Teorema 2.1, por lo cual será omitida. □

2.3.2. Buen planteamiento local para $s \in (-2, 2)$

Ahora, se presentará el buen planteamiento local de (2-2) en los espacios de Sobolev con baja regularidad, para tal fin se consideran los espacios

$$\mathfrak{X}_T^s = \{u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2)) \mid \|u\|_{\mathfrak{X}_T^s} < \infty\},$$

donde $T > 0$, $s \in \mathbb{R}$. La norma en dicho espacio se define así:

$$\|u\|_{\mathfrak{X}_T^s} = \sup_{t\in[0,T]} \left\{\|u(t)\|_s + t^{\frac{|s|}{4}} \|u(t)\|_0\right\}.$$

El objetivo de ésta sección, se alcanza siguiendo los resultados obtenidos en [17], y un argumento similar al de la primera sección del presente capítulo, por lo tanto, basta considerar las siguientes estimativas para el grupo:

$$\|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_{\mathfrak{X}_T^s} \leq \|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_s + t^{\frac{s}{4}} \|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_0 \leq \left(1 + C_s\left(T^{|s|} + \mu^{-\frac{|s|}{4}}\right)\right) \|\varphi\|_s,$$

y

$$\begin{aligned} \left\|\int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')\,\partial_x u^2 dt'\right\|_{\mathfrak{X}_T^s} &\leq \left\|\int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')\,\partial_x u^2 dt'\right\|_s + t^{\frac{s}{4}} \left\|\int_0^t \mathbb{V}_\mu(t-t')\,\partial_x u^2 dt'\right\|_0 \\ &\leq \left(\left(\mu^{-\frac{(s+2)}{4}} + \mu^{-\frac{1}{2}}\right) T^{\frac{2-|\mathbf{s}|}{4}} + \mu^{-\frac{1}{4}} T^{\frac{3}{4}}\right) \|u\|_{\mathfrak{X}_T^s}^2. \end{aligned}$$

Teorema 2.9.
Si $0 \leq \alpha, \beta \leq 1,\ p = 1,\ \mu > 0$, $s \in (-2, 2)$ y $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, entonces existen $T = T(\|\varphi\|_s) > 0$ y una única función $u \in \mathfrak{X}_T^s$ la cual es solución de (2-2), y además $u \in C\left((0, T) : H^r(\mathbb{R}^2)\right)$ para todo $r > 0$ y con aplicación dato inicial - solución continua.

Demostración. Se sigue de un procedimiento similar al realizado para probar el Teorema 2.1. □

2.4. Buen planteamiento global del problema regularizado para $s > -2$

Con el objetivo de mostrar el buen planteamiento global del P.V.I (2-2) con $\mu > 0$ y $p = 1$ en $H^s(\mathbb{R}^2)$ para $s \geq 1$, se requieren las siguientes acotaciones:

$$\|\varphi\|_0^2 = \|u(t)\|_0^2 + \mu \int_0^t \|\Delta u\|_0^2 dt', \tag{2-63}$$

$$\|\partial_x u\|_0^2 \leq \|\partial_x \varphi\|_0^2 \, e^{\epsilon^{-2}T}, \tag{2-64}$$

y

$$\|\partial_y u\|_0^2 \leq \|\partial_y \varphi\|_0^2 \, e^{\epsilon^{-2}T}. \tag{2-65}$$

(2-63) es consecuencia de hacer producto interno en $L^2(\mathbb{R}^2)$ de (2-2) con u y de la integración por partes.

Las estimativas (2-64) y (2-65) se obtienen de manera similar, por lo que se mostrará únicamente la forma de hallar la primera de ellas. Para ello, se deriva la ecuación (2-2) con respecto a la variable x y luego se hace el producto interno en $L^2(\mathbb{R}^2)$ con u_x, así, al notar $v = u_x$, y al aplicar la desigualdad de Gagliardo - Nirenberg (Teorema 1.2) en dos ocasiones, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0^2 \leq -\mu\|\Delta v(t)\|_0^2 + \|\varphi\|_0\|\Delta v(t)\|_0\|v(t)\|_0. \tag{2-66}$$

Como

$$\|\varphi\|_0\|\Delta v(t)\|_0\|v(t)\|_0 \leq \epsilon^2\|\varphi\|_0^2\|\Delta v(t)\|_0^2 + \epsilon^{-2}\|v(t)\|_0^2,$$

(2-66) se transforma en:

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0^2 \leq \left(\epsilon^2\|\varphi\|_0^2 - \mu\right)\|\Delta v(t)\|_0^2 + \epsilon^{-2}\|v(t)\|_0^2.$$

Eligiendo un valor para ϵ adecuado, para que satisfaga la desigualdad: $\epsilon^2\|\varphi\|_0^2 < \mu$, se obtiene:

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_0^2 \leq \epsilon^{-2}\|v(t)\|_0^2.$$

Por lo tanto, la desigualdad de Gronwall implica la siguiente desigualdad:

$$\|\partial_x u(t)\|_0^2 = \|v(t)\|_0^2 \leq \|\partial_x \varphi\|_0^2 \, e^{\epsilon^{-2}T}.$$

En vista de las estimativas probadas en esta sección, se puede establecer el buen planteamiento global en $H^1(\mathbb{R})$ del P.V.I (2-2).

Teorema 2.10.
Si $0 \leq \alpha, \beta \leq 1,\ \mu > 0$, $p = 1$ y $s \geq 1$, *entonces el* P.V.I (2-2) *está globalmente bien planteado en* $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Demostración. La prueba en $H^1(\mathbb{R}^2)$, se sigue de (2-63) - (2-65). Mientras que el resultado para $s > 1$ se sigue de la desigualdad de regularización

$$\left\|e^{tA_\mu} f\right\|_{1+\lambda} \leq t^{-\frac{\lambda+2}{4}} \|f\|_1^2,$$

proveniente de la ecuación integral, con $0 < \lambda < 1$. De lo que se sigue el resultado. $\square$

El último resultado del presente capítulo pretende mostrar el buen planteamiento global para $s \in (-2, 1)$, $\mu > 0$, $p = 1$ en el espacio $\mathfrak{X}_T^s$.

Teorema 2.11.
Si $0 \leq \alpha, \beta \leq 1,\ \mu > 0$, $p = 1$ y $s \in (-2, 1)$, *entonces el* P.V.I (2-2) *está globalmente bien planteado en* $\mathfrak{X}_T^s$.

Demostración. Si u es la solución de (2-2) dada por el Teorema 2.9, entonces

$$\|u\|_{\mathfrak{X}_{T'}^s} < M_{T'},$$

para $T' \in (0, T)$. Como $u(T') \in H^1(\mathbb{R}^2)$, el Teorema 2.10 implica que, la solución $\tilde{u}$ del P.V.I (2-2) con dato inicial $u(T')$ es global, y por la unicidad de la solución se tiene lo siguiente: $u(T'+t) = \tilde{u}(t)$, para $t \in [0, T - T']$, por lo tanto,

$$\|u\|_{\mathfrak{X}_T^s} \leq \|u\|_{\mathfrak{X}_{T'}^s} + \|u\,(T' + \cdot)\|_{\mathfrak{X}_{T-T'}^s} \leq M_{T'} + \left(1 + (T - T')^{|s|/4}\right) \sup_{[0,T-T']} \|\widetilde{u}(t)\|_1.$$

$\square$

3 Estimativas lineales

El objetivo principal de éste capítulo, es mejorar los resultados de buen planteamiento para el P.V.I (2-1), obtenidos en el capítulo anterior. Para ello, se empleará la técnica de Kenig, Ponce y Vega, la cual consiste en obtener las estimativas lineales conocidas como el efecto regularizante tipo Kato, la estimativa tipo Strichartz y la estimativa de la función maximal, con el fin de controlar los términos no lineales que implican derivadas fraccionarias, en el argumento de contracción utilizado para mostrar el buen planteamiento (ver [39]). Así que, para lograr cumplir tal meta, el capítulo se ha dividido en cuatro secciones, la primera de ellas, tiene como fin mostrar el efecto regularizante tipo Kato (Teorema 3.1), siguiendo los resultados obtenidos en [20] y [35]. En la segunda sección, se aborda el problema de hallar la estimativa tipo Strichartz (Teorema 3.2), siguiendo las ideas expuestas [38] y [50] . En la tercera sección, se modifican los argumentos en [20] y [39], para así, hallar la estimativa de la función maximal (Teorema 3.3). En la última sección de éste capítulo se muestra el buen planteamiento local de (2-1), según lo establecido en el Teorema 3.4.

3.1. Estimativa tipo efecto regularizante de Kato

Para estudiar el efecto regularizante tipo Kato (nombre empleado en honor al descubrimiento realizado por T. Kato en [35], para la ecuación KdV), se sigue un argumento estándar, por ejemplo, el expuesto por Famisnkii en [20], para la ecuación Z-K.

Teorema 3.1.
Sean $\alpha, \beta \geq 0$. *Si* $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$,

$$\left\| D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} \mathbb{V}(t) f \right\|_{L_x^\infty L_{yt}^2} \leq c \left\| f \right\|_{L_{xy}^2}. \tag{3-1}$$

Además,

$$\left\| D_y^{\frac{1+\beta}{2}} \mathbb{V}(t) f \right\|_{L_x^\infty L_{yt}^2} \leq c \left\| f \right\|_{L_{xy}^2}. \tag{3-2}$$

Demostración. Para mostrar (3-1), se supone que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Considerando $\theta = \xi|\xi|^{1+\alpha} + \xi|\eta|^{1+\beta} =$

$\varphi_\eta(\xi)$, la cual es una función invertible, luego, $\varphi_\eta^{-1}(\theta) = \xi$. Realizando una sustitución se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} \mathbb{V}(t) f(x,y) \\
&\quad = \iint |\xi|^{\frac{1+\alpha}{2}} e^{i(t(\xi|\xi|^{1+\alpha}+\xi|\eta|^{1+\beta})+x\xi+y\eta)} \hat{f}(\xi,\eta) d\xi d\eta \\
&\quad = \iint |\varphi_\eta^{-1}(\theta)|^{\frac{1+\alpha}{2}} e^{i(t(\varphi_\eta^{-1}(\theta)|\varphi_\eta^{-1}(\theta)|^{1+\alpha}+\varphi_\eta^{-1}(\theta)|\eta|^{1+\beta})+x\varphi_\eta^{-1}(\theta)+y\eta)} \hat{f}\left(\varphi_\eta^{-1}(\theta),\eta\right) \left(\varphi_\eta^{-1}(\theta)\right)' d\theta d\eta \\
&\quad = \left(|\varphi_\eta^{-1}(\theta)|^{\frac{1+\alpha}{2}} e^{ix\varphi_\eta^{-1}(\theta)} \hat{f}\left(\varphi_\eta^{-1}(\theta),\eta\right) \left(\varphi_\eta^{-1}(\theta)\right)' \right)^{\vee} (t,y),
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\left\| D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} \mathbb{V}(t) f(x,y) \right\|_{L^2_{ty}}^2 &= \left\| \left(|\varphi_\eta^{-1}(\theta)|^{\frac{1+\alpha}{2}} e^{ix\varphi_\eta^{-1}(\theta)} \hat{f}\left(\varphi_\eta^{-1}(\theta),\eta\right) \left(\varphi_\eta^{-1}(\theta)\right)' \right)^{\vee} (t,y) \right\|_{L^2_{ty}}^2 \\
&= \left\| |\varphi_\eta^{-1}(\theta)|^{\frac{1+\alpha}{2}} e^{ix\varphi_\eta^{-1}(\theta)} \hat{f}\left(\varphi_\eta^{-1}(\theta),\eta\right) \left(\varphi_\eta^{-1}(\theta)\right)' \right\|_{L^2_{\theta\eta}}^2 \\
&= \iint |\varphi_\eta^{-1}(\theta)|^{1+\alpha} \left| \hat{f}\left(\varphi_\eta^{-1}(\theta),\eta\right) \right|^2 \left| \left(\varphi_\eta^{-1}(\theta)\right)' \right|^2 d\theta d\eta \\
&= \iint |\xi|^{1+\alpha} \left| \hat{f}(\xi,\eta) \right|^2 \frac{(\varphi_\eta(\xi))'}{\left| (\varphi_\eta(\xi))' \right|^2} d\xi d\eta \\
&= \iint |\xi|^{1+\alpha} \left| \widehat{f}(\xi,\eta) \right|^2 \frac{1}{(2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} + |\eta|^{1+\beta}} d\xi d\eta \\
&\leq \iint \left| \widehat{f}(\xi,\eta) \right|^2 d\xi d\eta = \|f\|_{L^2_{xy}}^2 .
\end{aligned}
$$

Para obtener (3-2) se siguen las mismas ideas, pero en lugar de tener $|\xi|^{1+\alpha}$ como factor, se tiene $|\eta|^{1+\beta}$. □

Nota 3.1.
Si se consideran el signo positivo en $\mathbb{V}(t)$, junto con $\alpha = \beta = 1$, el resultado coincide con el Teorema 2.2 probado por Faminskii en [20].

3.2. Estimativa tipo Strichartz

Como se desea ajustar el argumento empleado por Linares y Pastor para la ecuación Z-K en [50], el cual es una adaptación de la técnica de Kenig, Ponce y Vega (ver [38]), se requiere aplicar el Corolario 1.1 (Lema de Van der Corput) y el Lema 1.7, esto implica que, el grupo en la variable η se debe tener exponente de orden 2, por lo que, en adelante se trabajará con la condición $\beta = 1$.

El siguiente resultado, es clave para mostrar la estimativa tipo Strichartz:

Lema 3.1.
Si $\epsilon < \frac{1}{2}$, $\alpha \geq 0$ *y*

$$I_t(x,y) = \iint |\xi|^{\epsilon} e^{it(\xi|\xi|^{1+\alpha}+\xi|\eta|^2+x\xi+y\eta)} d\xi d\eta,$$

entonces,

$$|I_t(x,y)| \leq \frac{c}{|t|^{\frac{3+\alpha+2\epsilon}{2(2+\alpha)}}}.$$

Demostración. Sea

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 \; si \; |x| \leq a \\ 0 \; si \; |x| > a \end{cases}.$$

Suponiendo que $t>0$, al aplicar la Proposición 1.4, junto con el Lema 1.7, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|I_t(x,y)| &= \left| \lim_{a\to\infty} \lim_{b\to\infty} \iint |\xi|^{\epsilon} e^{i(t(\xi|\xi|^{1+\alpha}+\xi|\eta|^2)+x\xi+y\eta)} \chi_a(\xi)\chi_b(\eta) d\xi d\eta \right| \\
&\leq \lim_{a\to\infty} \frac{1}{t^{1/2}} \left| \int |\xi|^{\epsilon-1/2} e^{i\left(t|\xi|^{2+\alpha} sgn(\xi)+x\xi\right)} \chi_a(\xi) d\xi \right| \\
&\leq \lim_{a\to\infty} \frac{1}{t^{1/2}} \left| \int \frac{|v|^{\epsilon-1/2}}{t^{\frac{\epsilon-1/2}{2+\alpha}}} e^{i\left(|v|^{2+\alpha} sgn(v)+xvt^{-1/(2+\alpha)}\right)} \chi_{at^{1/(2+\alpha)}}(v) \frac{1}{t^{1/(2+\alpha)}} dv \right| \\
&= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{t^{\frac{3+\alpha+2\epsilon}{2(2+\alpha)}}} \left| \int |v|^{\epsilon-1/2} e^{i\left(t|v|^{2+\alpha} sgn(v)+xvt^{-1/(2+\alpha)}\right)} \chi_{at^{1/(2+\alpha)}}(v) dv \right| \\
&= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{t^{\frac{3+\alpha+2\epsilon}{2(2+\alpha)}}} K_t(x,v).
\end{aligned}$$

El objetivo será mostrar que, $K_t(x,v)$ es acotada por una constante la cual no depende de x, v y t. Para ello, se considera $\theta \in C_0^{\infty}$ tal que, si $|v| \leq 1$, $\theta(v)=1$, y $\theta(v)=0$ para $|v|>2$, así:

$$\begin{aligned}
K_t(x,v) \leq &\left| \int |v|^{\epsilon-1/2} e^{i\left(t|v|^{2+\alpha} sgn(v)+xvt^{-1/(2+\alpha)}\right)} \chi_{at^{1/(2+\alpha)}}(v) \left(\theta(v)\right) dv \right| \\
&+ \left| \int |v|^{\epsilon-1/2} e^{i\left(|v|^{2+\alpha} sgn(v)+xvt^{-1/(2+\alpha)}\right)} \chi_{at^{1/(2+\alpha)}}(v) \left(1-\theta(v)\right) dv \right| \\
=&K_t^1(x,v) + K_t^2(x,v).
\end{aligned}$$

$K_t^1(x,v)$ es acotada, pues, la exponencial también lo es, así,

$$K_t^1(x,v) \leq \int |v|^{\epsilon-1/2} \chi_{at^{1/(2+\alpha)}}(v) \left(\theta(v)\right) dv < c.$$

Para acotar $K_t^2(x,v)$, se utiliza el Corolario 1.1, definiendo las funciones:

$$\phi_{x,t}(v) := |v|^{2+\alpha} sgn(v) + x \frac{v}{t^{1/(2+\alpha)}},$$

y

$$f_{x,t}(v) := |v|^{\epsilon-1/2}\chi_{at^{1/(2+\alpha)}}(v)\left(1-\theta(v)\right).$$

Como, f satisface que $supp(f) = \left[-at^{1/(2+\alpha)}, -1\right] \cup \left[1, at^{1/(2+\alpha)}\right]$, $f \in C^2$, $|f| < c_1$ para cada $v \in \mathbb{R}$,

$$\|f_{x,t}\|_\infty = \sup_{v\in\mathbb{R}} |v|^{\epsilon-1/2}\chi_{at^{1/(2+\alpha)}}(v)\left(1-\theta(v)\right) < c_2.$$

Mientras que, la derivada de f, se acota en $L^1(\mathbb{R})$, como sigue:

$$\begin{aligned}\left\|f'_{x,t}(v)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \left|\epsilon - \frac{1}{2}\right| \int |v|^{\epsilon-3/2}\chi_{at^{1/(2+\alpha)}}(v)\left(1-\theta(v)\right) dv \\ &= |2\epsilon - 1| \int_1^{at^{1/(2+\alpha)}} v^{\epsilon-3/2} dv \\ &< |2\epsilon - 1| \int_1^{\infty} v^{\epsilon-3/2} dv < c_3, .\end{aligned}$$

para $\epsilon < \frac{1}{2}$. Las derivadas de la función $\phi_{x,t}$ son:

$$\phi'_{x,t}(v) = (2+\alpha)|v|^{1+\alpha} + \frac{x}{t^{1/(2+\alpha)}},$$

y

$$\phi''_{x,t}(v) = (1+\alpha)(2+\alpha)|v|^{\alpha} sgn(v).$$

Ésta última derivada satisface que $|\phi''_{x,t}(v)| \geq (1+\alpha)(2+\alpha) > 1$, para $v \in supp(f)$, por lo tanto, el Corolario 1.1 implica lo siguiente:

$$K_t^2 = \left|\int |v|^{\epsilon-1/2} e^{i\left(|v|^{2+\alpha} sgn(v) + xvt^{-1/(2+\alpha)}\right)}\chi_{at^{1/(2+\alpha)}}(v)\left(1-\theta(v)\right) dv\right| \leq c.$$

Obteniendo así, el resultado deseado. □

Nota 3.2.
Considerando $\epsilon = 0$ y $\alpha = 1$, el resultado coincide con el Lema 2.1 de [20].

Lema 3.2.
Si $0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$, $\alpha \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\|D_x^{\theta\epsilon}\mathbb{V}(t)f\|_{L^p_{xy}} \leq c|t|^{-\theta\frac{3+\alpha+2\epsilon}{2(2+\alpha)}}\|f\|_{L^{p'}_{xy}},$$

donde $p = \frac{2}{1-\theta}$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Demostración. Considerando la familia analítica de operadores $T_{\theta+i\gamma}f = D_x^{\theta\epsilon+i\gamma}\mathbb{V}(t)f$, del Lema 3.1, se sigue que:

$$\begin{aligned}\|T_{1+i\gamma}f\|_{L^\infty_{xy}} &= \|I_t * f\|_{L^\infty_{xy}}\\ &\leq \|I_t\|_{L^\infty_{xy}}\|f\|_{L^1_{xy}}\\ &\leq \frac{c}{|t|^{\frac{3+\alpha+2\epsilon}{2(2+\alpha)}}}\|f\|_{L^1_{xy}}.\end{aligned}$$

De las propiedades de $\mathbb{V}(t)$, se tiene lo siguiente:

$$\|T_{i\gamma}f\|_{L^2_{xy}} = \|D_x^{i\gamma}\mathbb{V}(t)f\|_{L^2_{xy}} = \|D_x^{i\gamma}f\|_{L^2_{xy}} = \|f\|_{L^2_{xy}},$$

por lo tanto, el Teorema de interpolación de Stein (ver [53]), implica el resultado. □

El siguiente resultado muestra la estimativa tipo Strichartz asociada a (2-1).

Teorema 3.2.
Si $0 \leq \epsilon < 1/2$, $\alpha \geq 0$ *y* $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\|D_x^{\theta\epsilon/2}\mathbb{V}(t)f\|_{L^q_tL^p_{xy}} \leq c\|f\|_{L^2_{xy}}, \tag{3-3}$$

con $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, $p=\frac{2}{1-\theta}$ *y* $\frac{2}{q}=\theta\frac{3+\alpha+2\epsilon}{2(2+\alpha)}$.

Demostración. El resultado es consecuencia del siguiente argumento de dualidad:

$$\begin{aligned}\left\|D_x^{\frac{\theta\epsilon}{2}}\mathbb{V}(t)f\right\|_{L^q_tL^p_{xy}} &= \sup_{1=\|g\|_{L^{q'}_tL^{p'}_{xy}}}\left|\iint\left(\int D_x^{\frac{\theta\epsilon}{2}}\mathbb{V}(t)f(x,y)g(x,y,t)dt\right)dxdy\right|\\ &\leq \|f\|_{L^2_{xy}}\left\|\int D_x^{\frac{\theta\epsilon}{2}}\mathbb{V}(t)g(x,y,t)dt\right\|_{L^2_{xy}}.\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\left\|\int D_x^{\frac{\theta\epsilon}{2}}\mathbb{V}(t)g(x,y,t)dt\right\|^2_{L^2_{xy}} &= \iint\left(\int D_x^{\frac{\theta\epsilon}{2}}\mathbb{V}(t)g(\cdot,\cdot,t)dt\right)\left(\int\overline{D_x^{\frac{\theta\epsilon}{2}}\mathbb{V}(\tau)g(\cdot,\cdot,\tau)}d\tau\right)dxdy\\ &\leq \|g\|_{L^{q'}_tL^{p'}_{xy}}\left\|\int D^{\theta\epsilon}\mathbb{V}(t-\tau)\overline{g(\cdot,\tau)}d\tau\right\|_{L^q_tL^p_{xy}}.\end{aligned}$$

El lema anterior y el Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev, en la variable t, implican que

$$\begin{aligned}\left\|\int D^{\theta\epsilon}\mathbb{V}(t-\tau)\overline{g(\cdot,\tau)}d\tau\right\|_{L^q_tL^p_{xy}} &\leq \left\|\int\left\|D^{\theta\epsilon}\mathbb{V}(t-\tau)\overline{g(\cdot,\tau)}\right\|_{L^p_{xy}}d\tau\right\|_{L^q_t}\\ &\leq \left\|\int|t-\tau|^{-\theta\frac{3+\alpha+2\epsilon}{2(2+\alpha)}}\|g\|_{L^{p'}_{xy}}d\tau\right\|_{L^q_t}\\ &\leq \|g\|_{L^{q'}_tL^{p'}_{xy}}.\end{aligned}$$

□

Como una consecuencia inmediata, de la estimativa tipo Strichartz, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 3.1.

1.
$$\|\mathbb{V}(t)f\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} \leq cT^\delta \left\|D_x^{-\epsilon/2} f\right\|_{L_{xy}^2}, \tag{3-4}$$
dados $\alpha \geq 0$, $0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$ *y* $\delta = \frac{1+\alpha-2\epsilon}{4(2+\alpha)}$.

2.
$$\|\mathbb{V}(t)f\|_{L_T^{9/4} L_{xy}^\infty} \leq cT^\gamma \left\|D_x^{-\epsilon/2} f\right\|_{L_{xy}^2}, \tag{3-5}$$
para $\alpha \geq 4/7$, $0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$ *y* $\gamma = \frac{5+7\alpha-18\epsilon}{36(2+\alpha)}$. *El resultado es válido aún para* $0 \leq \alpha \leq 4/7$, *siempre que* $0 \leq \epsilon < \frac{5+7\alpha}{18}$.

3.
$$\|\mathbb{V}(t)f\|_{L_T^3 L_{xy}^\infty} \leq c\,\|f\|_{L_{xy}^2}, \tag{3-6}$$
con $\alpha \geq 0$ *y* $0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$,

Demostración. Considerando r y r' como exponentes conjugados.

1. La desigualdad de Hölder y el Teorema 3.2 $\big($con $\theta = 1, \delta = \frac{1}{2r'}, r' = \frac{2(2+\alpha)}{1+\alpha-2\epsilon}, r = \frac{2(2+\alpha)}{3+\alpha+2\epsilon}, p = \infty, q = 2r\big)$, implican que
$$\begin{aligned}\left\|D_x^{\epsilon/2}\mathbb{V}(t)f\right\|_{L_T^2} &\leq \left\|D_x^{\epsilon/2}\mathbb{V}(t)f\right\|_{L_T^{2r}} \|1\|_{L_T^{2r'}} \\ &\leq T^{\frac{1}{2r'}} \left\|D^{\epsilon/2}\mathbb{V}(t)f\right\|_{L_T^{2r} L_{xy}^\infty} \\ &\leq T^{\frac{1}{2r'}} \|f\|_{L_{xy}^2}.\end{aligned}$$
Si se considera $D_x^{-\epsilon/2} f$ en lugar de f, se obtiene el resultado deseado.

2. Nuevamente, la desigualdad de Hölder, junto con el Teorema 3.2 $\big($con $\theta = 1, \gamma = \frac{4}{9r'}, r' = \frac{16(2+\alpha)}{5+7\alpha+18\epsilon}, r = \frac{16(2+\alpha)}{9(3+\alpha+2\epsilon)}, p = \infty, q = \frac{9r}{4}\big)$, implican que
$$\begin{aligned}\|D_x^{\epsilon/2}\mathbb{V}(t)f\|_{L_T^{9/4} L_{xy}^\infty} &= \left(\int_0^T \|D_x^{\epsilon/2}\mathbb{V}(t)f\|_{L'_{xy}}^{9/4} dt\right)^{4/9} \\ &\leq T^{\frac{4}{9r'}} \|D_x^{\epsilon/2}\mathbb{V}(t)f\|_{L_T^{9r/4} L_{xy}^\infty}.\end{aligned}$$
Por lo tanto, la misma consideración del numeral anterior implica el resultado.

3. Basta considerar el caso en que $\theta = 1$ y $\epsilon = 0$, en el Teorema 3.2 para obtener el resultado deseado.

□

Nota 3.3.
Los resultados obtenidos durante ésta sección, son válidos para el caso incluso en que $\alpha \geq 1$, *involucrando así otros problemas relevantes en la matemática, por ejemplo, cuando se tiene la derivada de quinto orden, es decir,* $\alpha = 3$.

3.3. Estimativa de la función maximal

La última de las estimativas lineales que suele considerarse es la de $\sup_{t\in[0,T]}|\mathbb{V}(t)(\cdot)|$, más conocida como la estimativa de la función maximal. Para lograr ésta acotación, se seguirán las ideas expuestas en [20] y adaptadas en [65] para el caso $\partial_x(\Delta+\mathcal{H}\partial_x)$. Como en las estimativas desarrolladas en la sección anterior, se estudiará el caso en que $\beta=1$, además $0<\alpha\leq 1$ y únicamente el signo "$+$" en el símbolo, es decir, $\mathbb{V}(t)=e^{i(t(\xi|\xi|^{1+\alpha}+\xi\eta^2))}$, ya que se emplearán el Lema 1.7 y el Corolario 1.1, lo cual sería imposible en otro caso.

Para poder acotar el término antes mencionado se requieren unas consideraciones previas. Con esto en mente se elige $\mu\in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que,

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad x\leq 0\\ 1 & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases},$$

y que,

$$\mu(|\xi|-1)+\mu(2-|\xi|)=1. \tag{3-7}$$

La sucesión de funciones $\psi_k(\xi,\eta)$ definida por,

$$\begin{aligned}\psi_0(\xi,\eta)&=\mu(2-|\xi|)\mu(2-|\eta|)\\ \psi_k(\xi,\eta)&=\mu(2^{k+1}-|\xi|)\mu(2^{k+1}-|\eta|)\mu(|\eta|-2^k+1)\\ &\quad+\mu(2^{k+1}-|\xi|)\mu(|\xi|-2^k+1)\mu(2^k-|\eta|), \quad \text{para} \quad k\geq 1,\end{aligned}$$

satisface la identidad

$$\psi_0(\xi,\eta)+\psi_1(\xi,\eta)+\cdots+\psi_k(\xi,\eta)=\mu(2^{k+1}-|\xi|)\mu(2^{k+1}-|\eta|),$$

y además,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(\xi,\eta)=1. \tag{3-8}$$

Por otro lado, para $f\in L^2(\mathbb{R}^2)$, se define el siguiente operador:

$$B_kf:=(\psi_k^{1/2}\hat{f})^\vee. \tag{3-9}$$

Si $(\xi,\eta)\in supp(\psi_k)$,

$$2^k-1<|\xi|<2^{k+1} \quad \text{ó} \quad 2^k-1<|\eta|<2^{k+1},$$

así que $2^{2k}<2(1+\xi^2+\eta^2)$, y

$$\|B_kf\|_{L^2}\leq c2^{-ks}\|f\|_s. \tag{3-10}$$

Observe que, el grupo unitario $\mathbb{V}(t)$ puede reescribirse utilizando los operadores B_k como sigue:

$$\mathbb{V}(t)f(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{V}(t)B_k^2f(x,y). \tag{3-11}$$

De modo que, para hallar la estimativa de la función maximal, basta con acotar la parte interna de la serie definida en (3-11). Para tal fin será necesario establecer el siguiente lema.

Lema 3.3.
Sean $T > 0, t \in [0,T], (x,y) \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y $a, b \leq 2^{k+1}$. Entonces existen una constante $C(T) > 0$ y una función $H_{k,T} > 0$ tales que,

$$\left| \iint e^{i(t(\xi|\xi|^{1+\alpha}+\xi\eta^2)+x\xi+y\eta)} \mu(a-|\xi|)\mu(b-|\eta|)d\xi d\eta \right| \leq H_{k,T}(|x|), \tag{3-12}$$

para $0 < \alpha \leq 1$, donde

$$\int_0^\infty H_{k,T}(x)dx \leq C(T) 2^{\frac{11-2\alpha}{6}k}(k+1)^2. \tag{3-13}$$

Demostración. Para $a \geq 3$, se tiene lo siguiente:

$$\mu(a-|\xi|)\mu(2-|\xi|) = \mu(2-|\xi|),$$

y de (3-7) se sigue que,

$$\mu(a-|\xi|) = \mu(a-|\xi|)\mu(|\xi|-1) + \mu(2-|\xi|).$$

Por lo anterior, la integral de (3-12) se puede escribir como la suma de las dos integrales que se presentan a continuación:

$$J := \iint e^{i(t(\xi|\xi|^{1+\alpha}+\xi\eta^2)+x\xi+y\eta)} \mu(a-|\xi|)\mu(|\xi|-1)\mu(b-|\eta|)d\xi d\eta,$$

y

$$J_0 := \iint e^{i(t(\xi|\xi|^{1+\alpha}+\xi\eta^2)+x\xi+y\eta)} \mu(2-|\xi|)\mu(b-|\eta|)d\xi d\eta.$$

Así que, es necesario acotar tanto J como J_0. Para lograr tal objetivo, la idea en ambos casos será dividir el conjunto de los reales, en diferentes subconjuntos, de tal forma que las estimaciones realizadas sobre éstos (bien sea de J o J_0) satisfagan (3-13).

Para estimar J se considera, sin pérdida de generalidad, $T \geq 1$ y se definen las siguientes funciones:

$$\psi(\xi) := \mu(a-|\xi|)\mu(|\xi|-1) \quad y \quad \psi_2(\eta) := \mu(b-|\eta|),$$

cuyos soportes vienen dados por$\{\xi \mid 1 \leq |\xi| \leq a\}$ y $\{\eta \mid |\eta| \leq b\}$, respectivamente.

Considerando $|x| \leq 2^{-k/2}$,

$$\left| \iint e^{i(t(\xi|\xi|^{1+\alpha}+\xi\eta^2)+x\xi+y\eta)} \psi(\xi)\psi_2(\eta)d\xi d\eta \right| \leq \iint \psi(\xi)\psi_2(\eta)d\xi d\eta \leq c2^{2k}.$$

Ahora, se analizará el comportamiento de J en el conjunto $x \geq 2^{-k/2}$ o $x \leq -$ máx$\{2^{-k/2}, 32t2^{2k}\}$. Considerando (ξ,η) tal que $\xi \in supp(\psi)$ y $\eta \in supp(\psi_2)$, se definirá la función:

$$\varphi_1(\xi,\eta) := t(\xi|\xi|^{1+\alpha} + \xi\eta^2) + x\xi,$$

para probar la siguiente desigualdad:

$$|\varphi_{1\xi}(\xi,\eta)| \geq \text{máx}\left\{\frac{|x|}{2}, t\left((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha}+\eta^2\right)\right\}. \tag{3-14}$$

Si $x \geq 2^{-k/2} > 0$,

$$|\varphi_{1\xi}| = \left|t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha}+\eta^2)+x\right| \geq t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha}+\eta^2).$$

También se tiene que,

$$|\varphi_{1\xi}| \geq \frac{|x|}{2}.$$

Considerando el caso en que $x \leq -\text{máx}\left\{2^{-k/2}, 32t2^{2k}\right\},\ x<0$, la siguiente acotación es inmediata:

$$|x| \geq \text{máx}\{2^{-k/2}, 32t2^{2k}\} \geq 32t2^{2k}.$$

Como $\xi \in [-a,-1]\cup[1,a], \eta \in [-b,b]$ y $a, b \leq 2^{k+1}$, se satisface la siguiente cadena de desigualdades:

$$t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha}+\eta^2) \leq t((2+\alpha)2^{2k+2}+2^{2k+2}) \leq 16t2^{2k},$$

por lo tanto,

$$\frac{|x|}{2} \geq 16t2^{2k} \geq t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha}+\eta^2).$$

De lo anterior, se tiene que,

$$\begin{aligned}
|\varphi_{1\xi}| &= |t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha}+\eta^2)+x| \\
&\geq |x| - |t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha}+\eta^2)| \\
&= |x|/2 + |x|/2 - t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha}+\eta^2) \\
&\geq \frac{|x|}{2},
\end{aligned}$$

lo cual implica (3-14).

Para acotar la integral J se integrará por partes, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
J &= \iint e^{i(\varphi_1(\xi,\eta)+y\eta)}\psi(\xi)\psi_2(\eta)d\xi d\eta \\
&= \iint e^{iy\eta}\psi_2(\eta)\left(\int \frac{\psi(\xi)}{i\varphi_{1\xi}(\xi,\eta)}e^{i\varphi_1(\xi,\eta)}i\varphi_{1\xi}(\xi,\eta)d\xi\right)d\eta \\
&= \iint e^{iy\eta}\psi_2(\eta)\left(e^{i\varphi_1(\xi,\eta)}\frac{\psi(\xi)}{i\varphi_{1\xi}(\xi,\eta)}\bigg|_{\partial\,\mathrm{supp}\,\psi} - \int e^{i\varphi_1(\xi,\eta)}\partial_\xi\left(\frac{\psi(\xi)}{i\varphi_{1\xi}(\xi,\eta)}\right)d\xi\right)d\eta,
\end{aligned} \tag{3-15}$$

así,

$$|J| \leq \int \psi_2(\eta)\left(\int\left|\partial_\xi\left(\frac{\psi(\xi)}{\varphi_{1\xi}(\xi,\eta)}\right)\right|d\xi\right)d\eta. \tag{3-16}$$

Para $2^{-k/2} \leq |x| \leq 1$, se probará la siguiente desigualdad:

$$|J| \leq c2^k(k+1)|x|^{-1}. \tag{3-17}$$

(3-14) implica lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int \left|\partial_\xi \left(\frac{\psi(\xi)}{\varphi_{1\xi}(\xi,\eta)}\right)\right| d\xi &\leq \int \left|\frac{\psi_\xi}{\varphi_{1\xi}}\right| d\xi + \int \left|\frac{\psi\varphi_{1\xi\xi}}{\varphi_{1\xi}^2}\right| d\xi \\
&\leq \frac{2}{|x|}\int |\psi_\xi| d\xi + \frac{2}{|x|}\int \frac{t((2+\alpha)(1+\alpha)|\xi|^\alpha)}{(2+\alpha)t\xi^{1+\alpha}} d\xi \\
&\leq \frac{c}{|x|} + \frac{2(1+\alpha)}{|x|}\int_1^a \frac{1}{|\xi|} d\xi \\
&\leq \frac{c}{|x|} + \frac{2(1+\alpha)}{|x|} 2(k+1)\ln(2) \\
&\leq c(k+1)|x|^{-1},
\end{aligned} \tag{3-18}$$

por lo tanto, de (3-16) y (3-18) se sigue (3-17).

Se probará que para $|x| \geq 1$, es válida la siguiente desigualdad:

$$|J| \leq c2^k x^{-2}. \tag{3-19}$$

Al integrar por partes, se obtiene:

$$|J| \leq \int \psi_2(\eta) \left(\int \left|\partial_\xi \left(\frac{1}{\varphi_{1\xi}(\xi)} \partial_\xi \left(\frac{\psi(\xi)}{\varphi_{1\xi}(\xi,\eta)}\right)\right)\right| d\xi\right) d\eta. \tag{3-20}$$

Analizando el comportamiento de $\tilde{J}$, la integral interna de (3-20), se observa que

$$\begin{aligned}
|\tilde{J}| &\leq \int \left|\frac{\psi_{\xi\xi}}{\varphi_{1\xi}^2}\right| d\xi + 3\int \left|\frac{\psi_\xi\varphi_{1\xi\xi}}{\varphi_{1\xi}^3}\right| d\xi + \int \left|\frac{\psi\varphi_{1\xi\xi\xi}}{\varphi_{1\xi}^3}\right| d\xi + 3\int \left|\frac{\psi\varphi_{1\xi\xi}^2}{\varphi_{1\xi}^4}\right| d\xi \\
&:= \tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 + \tilde{J}_3 + \tilde{J}_4.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se procederá a acotar cada uno de los sumandos obtenidos anteriormente.

$$\tilde{J}_1 \leq \frac{4}{|x|^2}\int |\psi_{\xi\xi}| d\xi \leq \frac{c}{|x|^2}. \tag{3-21}$$

Como $|\xi| > 1$,

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_2 &\leq \frac{12}{|x|^2}\int \left|\frac{\psi_\xi\varphi_{1\xi\xi}}{\varphi_{1\xi}}\right| d\xi \leq \frac{12}{|x|^2}\int \frac{|\psi_\xi| t((2+\alpha)(1+\alpha)|\xi|^\alpha)}{(2+\alpha)t\xi^{1+\alpha}} d\xi \\
&\leq \frac{c}{|x|^2}\int \frac{|\psi_\xi|}{|\xi|} d\xi \leq \frac{c}{|x|^2}\int |\psi_\xi| d\xi \leq \frac{c}{|x|^2}.
\end{aligned} \tag{3-22}$$

El tercer sumando $\tilde{J}_3$, es acotado, en vista de la siguiente cadena de desigualdades:

$$\tilde{J}_3 \leq \frac{c}{|x|^2} \int \frac{\psi t|\xi|^{\alpha-1}}{t\xi^{1+\alpha}} d\xi \leq \frac{c}{|x|^2} \int_1^a \frac{1}{\xi^2} d\xi \leq \frac{c}{|x|^2}. \tag{3-23}$$

Mientras que, el último de los sumandos acota como sigue:

$$\tilde{J}_4 \leq \frac{c}{|x|^2} \int \frac{\psi \cdot (t|\xi|^{\alpha})^2}{(t\xi^{1+\alpha})^2} d\xi \leq \frac{c}{|x|^2} \int_1^a \frac{1}{\xi^2} d\xi \leq \frac{c}{|x|^2}. \tag{3-24}$$

Por lo tanto, las desigualdades (3-21) - (3-24) implican (3-20).

Lo que permite definir la función $H_{k,T}$ en los intervalos estudiados hasta el momento, como:

$$H_{k,T}(x) = \begin{cases} c2^{2k} & \text{si} \quad |x| \leq 2^{-k/2} \\ \frac{c(k+1)2^k}{|x|} & \text{si} \quad (x > 2^{-k/2} \vee x < -\,\text{máx}\{2^{-k/2}, 32t2^{2k}\}) \wedge (2^{-k/2} \leq |x| \leq 1) \\ c2^k x^{-2} & \text{si} \quad (x > 2^{-k/2} \vee x < -\,\text{máx}\{2^{-k/2}, 32t2^{2k}\}) \wedge (|x| \geq 1). \end{cases}$$

Ahora, se estudiará la manera de acotar J cuando $-32t2^{2k} < x < -2^{-k/2}$. Para ello, se reescribe J como sigue:

$$\begin{aligned} J &= \int e^{i(t(\xi|\xi|^{1+\alpha})+x\xi)} \psi(\xi) \left(\int e^{i(t\xi\eta^2+y\eta)} \psi_2(\eta) d\eta \right) d\xi \\ &= \int e^{i(t(\xi|\xi|^{1+\alpha})+x\xi)} \psi(\xi) (I_t * \psi_2^{\vee})(y) d\xi \\ &= \int \Phi(y-z) \left(\int \left(\frac{\pi}{t|\xi|} \right)^{1/2} e^{i(t\xi|\xi|^{1+\alpha}+x\xi-\frac{z^2}{4\xi t}+\frac{\pi}{4} sgn(\xi))} \psi(\xi) d\xi \right) dz, \end{aligned} \tag{3-25}$$

donde $I_t(y) = \int e^{i(t\xi\eta^2+y\eta)} d\eta$, y la última igualdad es consecuencia del Lema 1.7 y de considerar $\hat{\Phi}(\eta) = \psi_2(\eta)$.

Primero que todo, se considerará la integral interna de (3-25), la cual se notará como J_1, y se estudiarán los dos siguientes casos: $z^2 \geq x^2/6$ y $z^2 \leq x^2/6$.

Caso 1 ($\mathbf{z^2 \geq x^2/6}$):
Se considerarán los conjuntos:

$$\Omega_1 = \left\{ \xi \mid \xi^2 > \frac{|x|}{32t} \right\} \text{ y } \Omega_2 = \left\{ \xi \mid \xi^2 \leq \frac{|x|}{32t} \right\}.$$

Para obtener la estimativa de J_1 en el conjunto Ω_1 se define la siguiente función:

$$\varphi(\xi) := t(\xi|\xi|^{1+\alpha}) + x\xi - \frac{z^2}{4\xi t},$$

la cual satisface que,

$$\varphi_{\xi\xi\xi} = (2+\alpha)(1+\alpha)(\alpha)t|\xi|^{\alpha-1} + \frac{3z^2}{2\xi^4 t} \geq (2+\alpha)(1+\alpha)(\alpha)t2^{(k+1)(\alpha-1)} > 0,$$

como $|\xi| \leq a \leq 2^{k+1}$, entonces $2^{(k+1)(\alpha-1)} \leq |\xi|^{\alpha-1}$.

Del Corolario 1.1, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|J_1| &= \left| \int_{\Omega_1} \left(\frac{\pi}{t|\xi|}\right)^{1/2} e^{i\varphi(\xi)} e^{i\frac{\pi}{4}\,\mathsf{sgn}(\xi)} \psi(\xi) d\xi \right| \\
&\leq ct^{-\frac{1}{3}} 2^{\frac{k(1-\alpha)}{3}} \left(\left\| \left(\frac{\pi}{t|\xi|}\right)^{1/2} \psi \right\|_{L^\infty_{\Omega_1}} + \left\| \partial_\xi \left(\left(\frac{\pi}{t|\xi|}\right)^{1/2} \psi \right) \right\|_{L^1_{\Omega_1}} \right) \\
&\leq ct^{-\frac{5}{6}} 2^{\frac{k(1-\alpha)}{3}} \left[\left\| \frac{\psi}{|\xi|^{1/2}} \right\|_{L^\infty_{\Omega_1}} + \left\| \frac{\psi_\xi}{|\xi|^{1/2}} \right\|_{L^1_{\Omega_1}} + \left\| \frac{\psi}{|\xi|^{3/2}} \right\|_{L^1_{\Omega_1}} \right] \\
&\leq t^{-\frac{5}{6}} 2^{\frac{k(1-\alpha)}{3}} \left[\frac{(32t)^{1/4}}{|x|^{1/4}} + \int_{\Omega_1 \cap \mathsf{supp}\,\psi} \frac{\psi}{|\xi|^{3/2}} d\xi \right] \\
&\leq t^{-\frac{5}{6}} 2^{\frac{k(1-\alpha)}{3}} \frac{(32t)^{1/4}}{|x|^{1/4}} \\
&\leq \frac{t^{-\frac{7}{12}} 2^{\frac{k(1-\alpha)}{3}}}{|x|^{1/4}} \\
&\leq c \frac{2^{\frac{9-2\alpha}{6}k}}{|x|^{\frac{5}{6}}}.
\end{aligned} \tag{3-26}$$

Para acotar J_1 sobre la región Ω_2, se debe tener presente la siguiente acotación:

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi &= t(2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} + x + \frac{z^2}{4t\xi^2} \\
&\geq t(2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} + x + \frac{3z^2}{16t}\frac{32t}{|x|} + \frac{z^2}{16t\xi^2} \\
&= t(2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} + x + \frac{6z^2}{|x|} + \frac{z^2}{16t\xi^2} \\
&\geq t(2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} + \frac{z^2}{16t\xi^2},
\end{aligned} \tag{3-27}$$

por lo tanto,

$$\varphi_\xi \geq t(2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} + \frac{z^2}{16t\xi^2} \geq t(2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} + \frac{x^2}{96t\xi^2}. \tag{3-28}$$

Para la segunda derivada de φ, se observa que:

$$
\begin{aligned}
|\varphi_{\xi\xi}| &\leq t(2+\alpha)(1+\alpha)|\xi|^{\alpha} + \frac{z^2}{2|\xi|^3 t} \\
&\leq (2+\alpha)(1+\alpha)\frac{t^2|\xi|^{3+\alpha}+z^2}{|\xi|^3 t}.
\end{aligned} \tag{3-29}
$$

Por tanto, al multiplicar por un uno adecuado e integrar por partes J_1, se obtiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\Omega_2} \left(\frac{\pi}{t|\xi|}\right)^{1/2} e^{i\varphi(\xi)} e^{i\frac{\pi}{4}sgn(\xi)} \frac{\psi(\xi)}{i\varphi_\xi(\xi)} i\varphi_\xi(\xi) d\xi \\
&= \left(\frac{\pi}{t|\xi|}\right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4}sgn(\xi)} \frac{\psi(\xi)}{i\varphi_\xi(\xi)} e^{i\varphi(\xi)}\Bigg|_{\partial\Omega_2} - \int_{\Omega_2} \partial_\xi \left(\left(\frac{\pi}{t|\xi|}\right)^{1/2} \frac{\psi(\xi)}{i\varphi_\xi(\xi)} \right) e^{i\varphi(\xi)} e^{i\frac{\pi}{4}sgn(\xi)} d\xi,
\end{aligned}
$$

de lo que se sigue,

$$
|J_1| \leq \frac{c}{t^{1/2}} \left(\frac{\psi(\xi)}{|\xi|^{1/2}|\varphi_\xi|}\Bigg|_{\partial\Omega_2} \right) + \frac{c}{t^{1/2}} \int_{\Omega_2} \left| \partial_\xi \left(\frac{\psi(\xi)}{|\xi|^{1/2}\varphi_\xi(\xi)} \right) \right| d\xi := L_1 + L_2.
$$

Para acotar, el primero de los sumandos antes definidos se deberán tener presentes tanto (3-28), como el hecho que $2^{-k/2} < |x| < 2^{2k}32t$ implica $\frac{2^{-k/2}}{32t} < \frac{|x|}{32t} < 2^{2k}$, obteniendo así:

$$
L_1 \leq \frac{c}{t^{1/2}} \left(\frac{\psi(\xi)}{|\xi|^{1/2}(2+\alpha)t|\xi|^{1+\alpha}}\Bigg|_1^{\sqrt{\frac{|x|}{32t}}} \right) \leq \frac{c}{t^{(3-2\alpha)/4}|x|^{(3+2\alpha)/4}} \leq c\frac{2^{(3-2\alpha)k/2}}{|x|^{3/2}}.
$$

Para el sumando L_2, se deben tener en cuenta (3-28) y (3-29), pues,

$$
L_2 \leq \frac{c}{t^{1/2}} \int_{\Omega_2} \frac{|\psi_\xi|}{|\xi|^{1/2}|\varphi_\xi|} d\xi + \frac{c}{t^{1/2}} \int_{\Omega_2} \frac{\psi}{|\xi|^{3/2}|\varphi_\xi|} d\xi + \frac{c}{t^{1/2}} \int_{\Omega_2} \frac{\psi|\varphi_{\xi\xi}|}{|\xi|^{1/2}\varphi_\xi^2} d\xi := M_1 + M_2 + M_3,
$$

(3-28) implica que

$$
M_1 \leq \frac{c}{t^{1/2}} \int_{\Omega_2} \frac{|\psi_\xi| 96\xi^2 t}{|\xi|^{1/2}x^2} d\xi = c\frac{t^{1/2}}{x^2} \int_{\Omega_2} |\psi_\xi||\xi|^{3/2} d\xi \leq c\frac{t^{1/2}}{x^2}\frac{|x|^{3/4}}{t^{3/4}} \leq c\frac{2^{k/2}}{|x|^{3/2}},
$$

y que

$$
M_2 \leq c\frac{t^{1/2}}{x^2} \int_{\Omega_2} |\xi|^{1/2} d\xi = c\frac{t^{1/2}}{x^2} \xi^{3/2}\Bigg|_1^{\sqrt{\frac{|x|}{32t}}} \leq \frac{c}{t^{1/4}|x|^{5/4}} \leq c\frac{2^{k/2}}{|x|^{3/2}}.
$$

El término M_3, se acota como sigue:

$$
M_3 \leq \frac{c}{t^{1/2}} \int_{\Omega_2} \frac{1}{|\xi|^{1/2}} \frac{t\xi^2}{t^2|\xi|^{3+\alpha}+z^2} \frac{t^2|\xi|^{3+\alpha}+z^2}{|\xi|^3 t} \frac{t\xi^2}{x^2} d\xi \leq c\frac{2^{k/2}}{|x|^{3/2}}.
$$

Obteniendo así la acotación de J_1 en Ω_2.

Caso 2 ($\mathbf{z^2} \leq \mathbf{x^2}/\mathbf{6}$):
Para $z^2 = px^2$, donde $0 < p \leq \frac{1}{6}$, se definen los siguientes conjuntos:

$$\Omega_3 = \left\{\xi \mid \xi^2 > \frac{|x|}{10t}\right\}, \Omega_4 = \left\{\xi \mid \frac{p|x|}{2t} < \xi^2 \leq \frac{|x|}{10t}\right\} \text{ y } \Omega_5 = \left\{\xi \mid \xi^2 \leq \frac{p|x|}{2t}\right\}.$$

Para el conjunto Ω_3, se siguen las mismas ideas que se usaron para acotar la función en Ω_1 y obtener (3-26), por lo tanto,

$$|J_1| \leq c\frac{2^{\frac{9-2\alpha}{6}k}}{|x|^{\frac{5}{6}}}.$$

Para controlar $|J_1|$ en Ω_4, se debe tener presente que $|\xi| \geq 1$, así,

$$\varphi_\xi(\xi) = (2+\alpha)t|\xi|^{1+\alpha} + x + \frac{z^2}{4t\xi^2} \leq 5t|\xi|^2 + x + \frac{z^2}{4t\xi^2} := \vartheta(\xi),$$

un argumento de concavidad sobre ϑ mostrará la acotación de φ_ξ. Como,

$$\vartheta\left(\left(\frac{p|x|}{2t}\right)^{1/2}\right) = \frac{|x|}{2}(5p-1) = \vartheta\left(\left(\frac{|x|}{10t}\right)^{1/2}\right) \leq -\frac{|x|}{12},$$

y como $\vartheta_{\xi\xi} = 10t + \frac{3z^2}{2t\xi^4} > 0$, entonces, para todo $\xi \in \Omega_4$ se cumple:

$$\vartheta(\xi) \leq -\frac{|x|}{12}, \tag{3-30}$$

de lo que se deduce la siguiente desigualdad:

$$|\varphi_\xi(\xi)| \geq \frac{|x|}{12}. \tag{3-31}$$

Ahora, se establecerá una acotación para $\varphi_{\xi\xi}$:

$$\begin{aligned} |\varphi_{\xi\xi}| &= \left|(2+\alpha)(1+\alpha)t|\xi|^\alpha sgn(\xi) - \frac{z^2}{2\xi^3 t}\right| \\ &\leq 6t|\xi|^\alpha + \frac{z^2}{2|\xi|t}\frac{2t}{p|x|} \\ &\leq c\left(t|\xi| + \frac{|x|}{|\xi|}\right). \end{aligned} \tag{3-32}$$

Estas cotas serán útiles para poder hallar la estimación que corresponde a $|J_1|$ en esta región, como se puede ver enseguida:

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \frac{c}{t^{1/2}}\left[\left(\left.\frac{\psi}{|\xi|^{1/2}|\varphi_\xi|}\right|_{\partial\Omega_4}\right) + \int_{\Omega_4}\left|\partial_\xi\left(\frac{\psi}{|\xi|^{1/2}\varphi_\xi}\right)\right|d\xi\right] \\ &\leq \frac{c}{t^{1/2}}\left[\left(\left.\frac{\psi(\xi)}{|\xi|^{1/2}|\varphi_\xi|}\right|_{\partial\Omega_4}\right) + \int_{\Omega_4}\frac{|\psi_\xi|}{|\xi|^{1/2}|\varphi_\xi|}d\xi + \int_{\Omega_4}\frac{\psi}{|\xi|^{3/2}|\varphi_\xi|}d\xi + \int_{\Omega_4}\frac{\psi|\varphi_{\xi\xi}|}{|\xi|^{1/2}\varphi_\xi^2}d\xi\right] \\ &:= M_1 + M_2 + M_3 + M_4. \end{aligned}$$

El primer sumando cumple que,

$$M_1 \leq \frac{c}{t^{1/2}|x|}.$$

Para el segundo sumando, se debe tener en cuenta (3-31), así

$$M_2 \leq \frac{c}{t^{1/2}|x|}\int_{\Omega_4}|\psi_\xi|d\xi \leq \frac{c}{t^{1/2}|x|}.$$

El tercer sumando no presenta dificultades, dada la definición de ψ y (3-31),

$$M_3 \leq \frac{c}{t^{1/2}|x|}\int_{\Omega_4}\frac{\psi}{|\xi|^{3/2}}d\xi \leq \frac{c}{t^{1/2}|x|}\int_1^\infty \frac{1}{|\xi|^{3/2}}d\xi \leq \frac{c}{t^{1/2}|x|}.$$

Para el último sumando, deben tenerse presentes la definición de Ω_4 y (3-32),

$$\begin{aligned}|J_1| &\leq \frac{c}{t^{1/2}}\int_{\Omega_4}\frac{\psi}{|\xi|^{1/2}|x|^2}\left(t|\xi| + \frac{|x|}{|\xi|}\right)d\xi \\ &= \frac{c}{t^{1/2}|x|}\int_{\Omega_4}\frac{\psi}{|\xi|^{1/2}}\frac{t|\xi|}{|x|}d\xi + \frac{c}{t^{1/2}|x|}\int_{\Omega_4}\frac{\psi}{|\xi|^{3/2}}d\xi \\ &\leq \frac{c}{t^{1/2}|x|}\int_1^\infty \frac{1}{|\xi|^{3/2}}d\xi \\ &\leq \frac{c}{t^{1/2}|x|}.\end{aligned}$$

Por lo que en Ω_4

$$|J_1| \leq c\frac{2^k}{|x|^{3/2}}.$$

Para obtener la acotación en la región Ω_5, se estudiará primero el caso en que $\xi > 1$, y se tendrá en cuenta que

$$\varphi_{\xi\xi}(\xi) = (2+\alpha)(1+\alpha)|\xi|^\alpha - \frac{z^2}{2t\xi^3} \leq 8t\xi - \frac{z^2}{2t\xi^3} := \vartheta_1(\xi).$$

Al acotar ϑ_1 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\vartheta_1\left(\left(\frac{p|x|}{2t}\right)^{1/2}\right) &= \frac{8}{\sqrt{2}}t^{1/2}p^{1/2}|x|^{1/2} - \sqrt{2}|x|^{1/2}t^{1/2}\frac{1}{p^{1/2}} \\ &= \sqrt{2}t^{1/2}|x|^{1/2}\frac{(4p-1)}{\sqrt{p}} < 0,\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\varphi_{\xi\xi}\left(\left(\frac{p|x|}{2t}\right)^{1/2}\right) \leq C_p t^{1/2}x^{1/2}.$$

Ahora se estudiará la acotación para $\xi < -1$,

$$\begin{aligned}\varphi_{\xi\xi}\left(\left(\frac{p|x|}{2t}\right)^{1/2}\right) &= -\frac{(2+\alpha)(1+\alpha)p^{\frac{1+\alpha}{2}}t|x|^{\alpha/2} + |x|^{1/2}(2t)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{(2t)^{\alpha/2}p^{1/2}} \\ &< \tilde{C}_p t^{1/2}|x|^{1/2} < 0\end{aligned}$$

Como,

$$\varphi_{\xi\xi\xi}(\xi) = (2+\alpha)(1+\alpha)\alpha t|\xi|^{\alpha-1} + \frac{3z^2}{2\xi^4} \geq 0,$$

se sigue que $|\varphi_{\xi\xi}| \geq Mt^{1/2}|x|^{1/2}$, donde$M = \text{mín}\{|C_p|, |\tilde{C_p}|\} > 0$. Por lo tanto, el Corolario 1.1 implica que,

$$\begin{aligned}
|J_1| &= |\int_{\Omega_5} \left(\frac{\pi}{t|\xi|}\right)^{1/2} e^{i\varphi(\xi)} e^{i\frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}\,\xi}\psi(\xi)d\xi| \\
&\leq c\left(t^{1/2}|x|^{1/2}\right)^{-1/2}\left(\left\|\left(\frac{\pi}{t|\xi|}\right)^{1/2}\psi\right\|_{L^\infty_{\Omega_5}} + \left\|\partial_\xi\left(\left(\frac{\pi}{t|\xi|}\right)^{1/2}\psi\right)\right\|_{L^1_{\Omega_5}}\right) \\
&\leq ct^{-3/4}|x|^{-1/4}\left(\|\psi\|_{L^\infty_{\Omega_5}} + \|\psi_\xi\|_{L^1_{\Omega_5}}\right) \\
&\leq c\frac{2^{3k/2}}{|x|}.
\end{aligned}$$

Así pues, para $-32t2^{2k} < x < -2^{-k/2}$ se define,

$$H_{k,T}(x) := c(k+1)\left(2^{\frac{9-2\alpha}{6}k}|x|^{\frac{-5}{6}} + 2^{\frac{3-2\alpha}{2}k}|x|^{-3/2} + 2^{\frac{3k}{2}}|x|^{-1}\right)$$

para la cual es válida la siguiente desigualdad:

$$|J| \leq \|\Phi\|_1\|J_1\|_{L^\infty_z} \leq H_{k,T}(x),$$

y además, $H_{k,T}$ satisface (3-13).

Para mostrar que $J_0 = \iint e^{i(t(\xi|\xi|^{1+\alpha}+\xi\eta^2)+x\xi+y\eta)}\mu(2-|\xi|)\mu(b-|\eta|)d\xi d\eta$ es acotada, vale la pena recordar que $\psi_0(\xi) = \mu(2-|\xi|)$ y $supp(\psi_0) = \{\xi \mid |\xi| \leq 2\}$.

Al considerar los valores de x tales que $|x| \leq 160T$, se observa lo siguiente:

$$|J_0| \leq \iint \psi_0(\xi)\psi_2(\eta)d\xi d\eta \leq c2^k \tag{3-33}$$

Ahora, se considerarán los valores de x que cumplen $x \geq 160T$ o $x \leq -\,\text{máx}\{160T, 32t2^{2k}\}$, con la intención de probar que :

$$|J_0| \leq \frac{c2^k}{x^2}. \tag{3-34}$$

Para tal fin, se define la siguiente función:

$$\varphi_0(\xi,\eta) := t(\xi|\xi|^{1+\alpha} + \xi\eta^2) + x\xi.$$

Si $x \geq 160T$,

$$|\varphi_{0\xi}| = t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} + \eta^2) + x \geq \frac{x}{2}.$$

Ahora, como $x \leq -$ máx$\{160T, 32t2^{2k}\}$, entonces $|x| \geq 32t2^{2k}$, y dado que $b \leq 2^{k+1}$, se tiene la siguiente desigualdad:

$$t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} + \eta^2) \leq t((3)2^2 + 2^{2k+2}) \leq 16t2^{2k} \leq \frac{|x|}{2},$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|\varphi_{0\xi}| &= |t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} + \eta^2) + x| \\
&\geq |x| - |t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} + \eta)^2| \\
&= \frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{2} - |t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} + \eta)^2| \\
&\geq \frac{|x|}{2}.
\end{aligned}$$

Mostrando así que,

$$|\varphi_{0\xi}(\xi,\eta)| \geq \frac{|x|}{2}. \tag{3-35}$$

Como $x \geq 160T$ o $x \leq -$ máx$\{160T, 32t2^{2k}\}$ y en vista de (3-35), entonces $|\varphi_{0\xi}| \neq 0$. Por lo tanto, para acotar J_0 en este conjunto, se sigue que,

$$\begin{aligned}
|J_0| &= \left| \iint e^{i\varphi_0(\xi)} \psi_0(\xi)\psi_2(\eta) d\xi d\eta \right| \\
&\leq \int_{-b}^{b} \psi_2(\eta) \left| \int_{-2}^{2} e^{i\varphi_0(\xi)} \psi_0(\xi) d\xi \right| d\eta.
\end{aligned}$$

La integral interna es la que debe acotarse. Para ello, se dividirá la integral en dos intervalos, para evitar los problemas que trae el valor absoluto y luego se integrará por partes, como se puede ver en seguida:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} e^{i\varphi_0(\xi)} \psi_0(\xi) d\xi &= \int_{-2}^{0} e^{i\varphi_0(\xi)} \psi_0(\xi) d\xi + \int_{0}^{2} e^{i\varphi_0(\xi)} \psi_0(\xi) d\xi \\
&= \frac{e^{i\varphi_0}}{i\varphi_{0\xi}} \partial_\xi \left(\frac{\psi_0}{\varphi_{0\xi}} \right) \Bigg|_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} e^{i\varphi_0} \partial_\xi \left(\frac{1}{i\varphi_{0\xi}} \partial_\xi \left(\frac{\psi_0}{\varphi_{0\xi}} \right) \right) d\xi \\
&\quad + \frac{e^{i\varphi_0}}{i\varphi_{0\xi}} \partial_\xi \left(\frac{\psi_0}{\varphi_{0\xi}} \right) \Bigg|_{0}^{2} - \int_{0}^{2} e^{i\varphi_0} \partial_\xi \left(\frac{1}{i\varphi_{0\xi}} \partial_\xi \left(\frac{\psi_0}{\varphi_{0\xi}} \right) \right) d\xi \\
&= -\int_{-2}^{0} e^{i\varphi_0} \partial_\xi \left(\frac{1}{i\varphi_{0\xi}} \partial_\xi \left(\frac{\psi_0}{\varphi_{0\xi}} \right) \right) d\xi - \int_{0}^{2} e^{i\varphi_0} \partial_\xi \left(\frac{1}{i\varphi_{0\xi}} \partial_\xi \left(\frac{\psi_0}{\varphi_{0\xi}} \right) \right) d\xi \\
&:= A_1 + A_2.
\end{aligned}$$

En vista de la similitud de los procedimientos para acotar los sumandos, se acotará únicamente A_2,

$$
\begin{aligned}
|A_2| &\leq \int_0^2 \left| \partial_\xi \left(\frac{1}{\varphi_{0\xi}} \partial_\xi \left(\frac{\psi_0}{\varphi_{0\xi}} \right) \right) \right| d\xi \\
&\leq \int_0^2 \left| \frac{\psi_{0\xi\xi}}{\varphi_{0\xi}^2} \right| d\xi + 3 \int_0^2 \left| \frac{\psi_{0\xi}\varphi_{0\xi\xi}}{\varphi_{0\xi}^3} \right| d\xi + \int_0^2 \left| \frac{\psi_0 \varphi_{0\xi\xi\xi}}{\varphi_{0\xi}^3} \right| d\xi + 3 \int_0^2 \left| \frac{\psi_0 \varphi_{0\xi\xi}^2}{\varphi_{0\xi}^4} \right| d\xi \\
&:= A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24}.
\end{aligned}
$$

El primer sumando no representa ninguna dificultad, pues (3-35) implica que,

$$A_{21} \leq \frac{c}{x^2} \int_0^2 |\psi_{0\xi\xi}| d\xi \leq \frac{c}{x^2}.$$

Para acotar los sumandos que hacen falta, se debe tener presente que $|x| \geq 160T$, así:

$$A_{22} \leq \frac{c}{|x|^3} \int_0^2 |\psi_{0\xi}\varphi_{0\xi\xi}| d\xi \leq \frac{c}{x^2} \frac{1}{|x|} \int_0^2 t(2+\alpha)(1+\alpha)|\xi|^\alpha d\xi \leq \frac{ct}{160Tx^2} \leq \frac{c}{x^2}.$$

$$A_{23} \leq \frac{c(2+\alpha)(1+\alpha)\alpha t}{x^2 160T} \int_0^2 \frac{\psi_0}{|\xi|^\alpha} d\xi \leq \frac{c}{x^2}.$$

Y el último sumando, se acota como sigue:

$$A_{24} \leq \frac{c}{x^2(160T)^2} \int_0^2 |\psi_0 \varphi_{0\xi\xi}^2| d\xi \leq \frac{c}{x^2}.$$

De las desigualdades anteriores se deduce (3-34).

El objetivo ahora será acotar J_0 en el intervalo $-32t2^{2k} < x < -160T$. Para ello, se reescribirá J_0 como sigue:

$$J_0 = \int \Phi(y-z) \left(\int \left(\frac{\pi}{t|\xi|} \right)^{1/2} e^{i(t(\xi|\xi|^{1+\alpha}) + x\xi - \frac{z^2}{4\xi t} + \frac{\pi}{4}\,\mathrm{sgn}(\xi))} \psi_0(\xi) d\xi \right) dz, \tag{3-36}$$

para $\hat{\Phi}_y(\eta) = \psi_2(\eta)$.

Análogamente, al trabajo realizado para acotar J, se tomará la integral interna de (3-36), la cual se notará como J_{01}, y se considerarán dos casos:

Caso 1 ($\mathbf{z^2 \geq x^2/6}$):
Como $|x| > 160T \geq 160t$ y $2 \geq |\xi|$, implican $\frac{|x|}{40t} > \xi^2$, al definir siguiente la función :

$$\varphi(\xi) := t(\xi|\xi|^{1+\alpha}) + x\xi - \frac{z^2}{4\xi t},$$

y siguiendo el mismo argumento utilizado para obtener (3-27), se obtiene:

$$\varphi_\xi \geq t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha}) + x + \frac{z^2}{4t\xi^2} > t((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha}) + \frac{x^2}{96\xi^2 t}. \tag{3-37}$$

Mientras que, la segunda derivada se puede acotar de la siguiente manera:

$$|\varphi_{\xi\xi}| = \left|(2+\alpha)(1+\alpha)t|\xi|^\alpha - \frac{z^2}{2\xi^3 t}\right| \leq 6\frac{t^2|\xi|^{3+\alpha}+z^2}{t|\xi|^3}. \tag{3-38}$$

A lo anterior se adiciona el hecho $|\xi|^{-1/2}e^{i\frac{\pi}{4}sgn(\xi)} = (-i\xi)^{-1/2}$, por tanto,

$$J_{01} = \frac{c}{t^{1/2}}\int_{-2}^{2}\frac{1}{(-i\xi)^{1/2}}e^{i\varphi(\xi,\eta)}\psi_0(\xi)d\xi.$$

Como se pudo ver en (3-37), $\varphi_\xi \neq 0$, y dado que $(-i\xi)^{-1/2}$ es integrable alrededor de cero, se tiene lo siguiente:

$$J_{01} = \frac{c}{t^{1/2}}\frac{\psi_0}{(-i\xi)^{1/2}i\varphi_\xi}e^{i\varphi}\Big|_{-2}^{2} + \frac{c}{t^{1/2}}\int_{-2}^{2}e^{i\varphi}\partial_\xi\left(\frac{\psi_0}{(-i\xi)^{1/2}i\varphi_\xi}\right)d\xi.$$

Como $\psi_0(2) = \psi_0(-2) = 0$,

$$\begin{aligned}
|J_{01}| &\leq \frac{c}{t^{1/2}}\int_{-2}^{2}\left|\partial_\xi\left(\frac{\psi_0}{(-i\xi)^{1/2}\varphi_\xi}\right)\right|d\xi \\
&\leq \frac{c}{t^{1/2}}\int_{-2}^{2}\left|\frac{\psi_{0\xi}}{(-i\xi)^{1/2}\varphi_\xi}\right|d\xi + \frac{c}{t^{1/2}}\int_{-2}^{2}\left|\frac{\psi_0}{(-i\xi)^{3/2}\varphi_\xi}\right|d\xi + \frac{c}{t^{1/2}}\int_{-2}^{2}\left|\frac{\psi_0\varphi_{\xi\xi}}{(-i\xi)^{1/2}\varphi_\xi^2}\right|d\xi \\
&:= A_1 + A_2 + A_3.
\end{aligned}$$

Para acotar los dos primeros sumandos, se debe usar el siguiente hecho: $\frac{1}{\varphi_\xi} \leq \frac{96\xi^2 t}{x^2}$, que es consecuencia de (3-37). Luego,

$$A_1 \leq \frac{c}{t^{1/2}}\int_{-2}^{2}\left|\frac{\psi_{0\xi}\xi^2 t}{(-i\xi)^{1/2}x^2}\right|d\xi \leq c\frac{t^{1/2}}{x^2}\int_{-2}^{2}|\psi_{0\xi}|d\xi \leq \frac{c(T)}{x^2}.$$

$$A_2 \leq \frac{c}{t^{1/2}}\int_{-2}^{2}\left|\frac{\psi_0\xi^2 t}{(-i\xi)^{3/2}x^2}\right|d\xi \leq c\frac{t^{1/2}}{x^2}\int_{-2}^{2}|\psi_0|d\xi \leq \frac{c(T)}{x^2}.$$

Mientas que, el último sumando es acotado, en vista de la siguiente cadena de desigualdades:

$$A_3 \leq \frac{c}{t^{1/2}}\int_{-2}^{2}\frac{\psi_0}{|\xi|^{1/2}}\frac{t^2\xi^2|\xi|^{1+\alpha}+z^2}{t|\xi|^3}\frac{t\xi^2}{t^2\xi^2|\xi|^{1+\alpha}+z^2}\frac{\xi^2 t}{x^2}d\xi \leq c\frac{t^{1/2}}{x^2}\int_{-2}^{2}\psi_0 d\xi \leq \frac{C(T)}{x^2}.$$

De lo anterior, se concluye que $|J_{01}| \leq \frac{c(T)}{x^2}$.

Caso 2 ($\mathbf{z^2 \leq x^2/6}$):
Si $z^2 = px^2$, para $0 \leq p \leq 1/6$, se divide la región en los siguientes conjuntos:

$$\Omega_{04} = \left\{ \xi \mid \frac{p|x|}{2t} < \xi^2 < \frac{|x|}{10t} \wedge \frac{1}{|x|^{1/2}} \leq |\xi| \right\}, \ \Omega_{05} = \left\{ \xi \mid \xi^2 < \frac{p|x|}{2t} \wedge \frac{1}{|x|^{1/2}} \leq |\xi| \right\}$$

$$\text{y } \Omega_{06} = \left\{ \xi \mid \frac{1}{|x|^{1/2}} \geq |\xi| \right\}.$$

Para obtener la acotación sobre el conjunto Ω_{04}, se procede de manera análoga a como se hizo en Ω_4, entonces, se requiere definir las siguientes funciones

$$\varphi(\xi) = t(\xi|\xi|^{1+\alpha}) + x\xi - \frac{z^2}{4t\xi}, \ \text{ y } \ \vartheta(\xi) = 5t\xi^2 + x + \frac{z^2}{4t\xi^2},$$

para $0 < |\xi| \leq 2,$ las cuales satisfacen que,

$$\varphi_\xi(\xi) \leq \vartheta(\xi) + 2t|\xi|. \tag{3-39}$$

Como,

$$\vartheta\left(\left(\frac{p|x|}{2t}\right)^{1/2}\right) = \frac{|x|}{2}(5p-1) = \vartheta\left(\left(\frac{|x|}{10t}\right)^{1/2}\right),$$

y además $\vartheta_{\xi\xi} > 0$, se tiene la siguiente desigualdad: $\vartheta(\xi) \leq -\frac{|x|}{12}$, para $\xi \in \Omega_{04}$, entonces,

$$\varphi_\xi \leq -\frac{|x|}{12} + 2t|\xi|. \tag{3-40}$$

Ahora, definiendo la función

$$g(\xi) := -\frac{|x|}{12} + 2t|\xi|,$$

y teniendo en cuenta que $t \leq T,$ y que $160T \leq |x| \leq 32t2^{2k},$ implica $\sqrt{160T}|x|^{1/2} \leq |x|$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} g\left(\left(\frac{p|x|}{2t}\right)^{1/2}\right) &= -\frac{|x|}{12} + \frac{2}{\sqrt{2}}t^{1/2}p^{1/2}|x|^{1/2} \\ &\leq -\frac{|x|}{12} + \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{160T}}{\sqrt{160}}p^{1/2}|x|^{1/2} \\ &\leq -\frac{|x|}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{p^{1/2}}{\sqrt{5}}\right) \\ &\leq -c\frac{|x|}{4}, \end{aligned} \tag{3-41}$$

mientras que,

$$g\left(\left(\frac{|x|}{10t}\right)^{1/2}\right) = -\frac{|x|}{12} + \frac{2}{\sqrt{10}}t^{1/2}|x|^{1/2}$$
$$\leq -\frac{|x|}{12} + \frac{2}{\sqrt{10}}\frac{\sqrt{160T}}{\sqrt{160}}|x|^{1/2}$$
$$\leq -\frac{|x|}{12} + \frac{|x|}{20}$$
$$= -\frac{|x|}{30}. \tag{3-42}$$

Las desigualdades (3-41) y (3-42), implican el siguiente hecho:

$$\varphi_\xi\left(\left(\frac{p|x|}{2t}\right)^{1/2}\right) \leq -\frac{|x|}{4}c \quad y \quad \varphi_\xi\left(\left(\frac{|x|}{10t}\right)^{1/2}\right) \leq -\frac{|x|}{30},$$

y como $\varphi_{\xi\xi\xi} > 0$, para $0 < |\xi| \leq 2$, al aplicar un argumento de concavidad se obtiene lo siguiente:

$$|\varphi_\xi(\xi)| \geq c|x|, \tag{3-43}$$

para todo $\xi \in \Omega_{04}$.

Como $0 < |\xi| \leq 2$, implica $|x| \leq 2\frac{|x|}{|\xi|}$, y de la definición de Ω_{04} se sigue que $\frac{p|x|}{2t} < \xi^2$ y $t \leq |x|$, entonces, para acotar la función $\varphi_{\xi\xi}$ se emplea el siguiente argumento:

$$|\varphi_{\xi\xi}| = |(2+\alpha)(1+\alpha)t|\xi|^\alpha sgn(\xi) - \frac{z^2}{2\xi^3 t}| \leq 6t|\xi|^\alpha + \frac{z^2}{2|\xi|^3 t}$$
$$\leq 6t|\xi| + 2t + \frac{px^2}{2|\xi|t}\frac{2t}{p|x|}$$
$$\leq c\left(t|\xi| + \frac{|x|}{|\xi|}\right). \tag{3-44}$$

Nombrando J_{04} a la integral J_{01} restringida al conjunto Ω_{04}, al aplicar integración por partes, se obtiene lo siguiente:

$$|J_{04}| \leq \frac{c}{t^{1/2}}\left|\frac{e^{i\varphi}\psi_0}{|\xi|^{1/2}\varphi_\xi}\right|\Bigg|_{\partial\Omega_{04}} + \frac{c}{t^{1/2}}\int_{\Omega_{04}}\left|\partial_\xi\left(\frac{\psi_0}{|\xi|^{1/2}\varphi_\xi}\right)\right|d\xi$$
$$\leq \frac{c}{t^{1/2}}\left|\frac{e^{i\varphi}\psi_0}{|\xi|^{1/2}\varphi_\xi}\right|\Bigg|_{\partial\Omega_{04}} + \frac{c}{t^{1/2}}\int_{\Omega_{04}}\frac{|\psi_{0\xi}|}{|\xi|^{1/2}|\varphi_\xi|}d\xi + \frac{c}{t^{1/2}}\int_{\Omega_{04}}\frac{\psi_0}{|\xi|^{3/2}|\varphi_\xi|}d\xi + \frac{c}{t^{1/2}}\int_{\Omega_{04}}\frac{\psi_0|\varphi_{\xi\xi}|}{|\xi|^{1/2}\varphi_\xi^2}d\xi$$
$$:= A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Para acotar los sumandos anteriores es muy importante tener en cuenta la definición de Ω_{04}, la cual implica que $\frac{1}{|\xi|^{1/2}} \leq |x|^{1/4}$, así

$$A_1 \leq \frac{c}{t^{1/2}}\frac{|x|^{1/4}}{|x|} = \frac{c}{t^{1/2}|x|^{3/4}}, \tag{3-45}$$

$$A_2 \leq \frac{c}{t^{1/2}}|x|^{1/4}\frac{1}{|x|}\int_{\Omega_{04}}|\psi_{0\xi}| \leq \frac{c}{t^{1/2}|x|^{3/4}}, \tag{3-46}$$

$$\begin{aligned} A_3 &\leq \frac{c}{t^{1/2}|x|}\int_{\Omega_{04}}\frac{1}{|\xi|^{3/2}}d\xi \\ &= \frac{c}{t^{1/2}|x|}\int_{|x|^{-1/2}}^{2}\frac{1}{|\xi|^{3/2}}d\xi \\ &= \frac{c}{t^{1/2}|x|}(-\xi^{-1/2}|_{|x|^{-1/2}}^{2}) \\ &\leq \frac{c}{t^{1/2}|x|^{3/4}}. \end{aligned} \tag{3-47}$$

Mientras que, el último sumando requiere tener presente la desigudad: $\frac{1}{|x|^{1/4}} \leq |\xi|^{1/2} \leq \sqrt{2}$, y aplicar (3-44), es decir,

$$\begin{aligned} A_4 &\leq \frac{c}{t^{1/2}}\int_{\Omega_{04}}\frac{\psi_0 t|\xi|}{|\xi|^{1/2}\varphi_\xi^2}d\xi + \frac{c}{t^{1/2}}\int_{\Omega_{04}}\frac{\psi_0|x|}{|\xi|^{1/2}|\xi|\varphi_\xi^2}d\xi \\ &\leq \frac{c}{t^{1/2}}\frac{t}{|x|^2}\int_{\Omega_{04}}\psi_0|\xi|^{1/2}d\xi + \frac{c}{t^{1/2}|x|}\int_{\Omega_{04}}\frac{\psi_0}{|\xi|^{3/2}}d\xi \\ &\leq \frac{c}{t^{1/2}}\frac{|x|}{|x|^2} + \frac{c}{t^{1/2}|x|^{3/4}} \\ &\leq \frac{c}{t^{1/2}|x|^{3/4}}. \end{aligned} \tag{3-48}$$

De las estimativas (3-45) - (3-48) se tiene la siguiente acotación: $|J_{04}| \leq \frac{c}{t^{1/2}|x|^{3/4}}$.

Para estudiar la integral sobre la región Ω_{05}, se mostrará primero la siguiente desigualdad: $|\varphi_{\xi\xi}| \geq c|x|$. Para ello, se debe tener presente que la región Ω_{05} no contiene al cero, motivo por el cual $\varphi_{\xi\xi\xi}$ está bien definida sobre el conjunto antes mencionado, y además es positiva, como se puede ver a continuación,

$$\varphi_{\xi\xi\xi} = \frac{(2+\alpha)(1+\alpha)\alpha t}{|\xi|^{1-\alpha}} + \frac{3z^2}{2\xi^4 t} > 0.$$

Por lo tanto $\varphi_{\xi\xi}$ es creciente, como ésta función es impar, basta considerar el caso en que $0 < \xi \leq 2$, así pues,

$$\varphi_{\xi\xi}(\xi) \leq \varphi_{\xi\xi}(2) \quad \text{o} \quad \varphi_{\xi\xi}(\xi) \leq \varphi_{\xi\xi}\left(\left(\frac{p|x|}{2t}\right)^{1/2}\right).$$

El argumento anterior implica que debe establecerse la siguiente desigualdad:

$$\varphi_{\xi\xi}\left(\text{mín}\left\{2, \left(\frac{p|x|}{2t}\right)^{1/2}\right\}\right) < -c|x|. \tag{3-49}$$

Si $2 < (\frac{p|x|}{2t})^{1/2}$, entonces $\frac{|x|}{2} < \frac{px^2}{16t}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\varphi_{\xi\xi}(2) &= (2+\alpha)(1+\alpha)(2^{\alpha})t - \frac{px^2}{16t}\\ &\le \frac{(2+\alpha)(1+\alpha)(2^{\alpha})|x|}{180} - \frac{|x|}{2}\\ &= \frac{(2+\alpha)(1+\alpha)(2^{\alpha}) - 90}{180}|x|,\end{aligned} \tag{3-50}$$

pues $|x| > 160T$.

Ahora, si $\left(\frac{p|x|}{2t}\right)^{1/2} < 2$, entonces $|x|^{1/2}t^{1/2} < \frac{8^{1/2}t}{p^{1/2}} < \frac{8^{1/2}}{p^{1/2}160}|x|$, por lo cual,

$$\begin{aligned}\varphi_{\xi\xi}\left(\left(\frac{p|x|}{2t}\right)^{1/2}\right) &= (2+\alpha)(1+\alpha)t\left(\frac{p|x|}{2t}\right)^{\alpha/2} - \frac{px^2(2t)^{3/2}}{2t(p|x|)^{3/2}}\\ &\le \frac{8^{1/2}|x|}{p^{1/2}160}\left(\frac{(2+\alpha)(1+\alpha)p^{(1+\alpha)/2}|x|^{(\alpha-1)/2}t^{(1-\alpha)/2} - 2^{(1+\alpha)/2}}{2^{\alpha/2}p^{1/2}}\right)\\ &\le \frac{8^{1/2}|x|}{p^{1/2}160}\left(\frac{(2+\alpha)(1+\alpha)p\left(\frac{1}{160p}\right)^{(1-\alpha)/2} - 2^{(1+\alpha)/2}}{2^{\alpha/2}p^{1/2}}\right)\end{aligned} \tag{3-51}$$

(3-49) se sigue de (3-50) y (3-51).

Por lo tanto, para acotar la integral J_{05}, la cual será entendida como la integral J_{01} restringida a Ω_{05}, se empleará el Corolario 1.1, como sigue:

$$\begin{aligned}|J_{05}| &= \left|\frac{c}{t^{1/2}}\int_{\Omega_{05}} \frac{1}{(-i\xi)^{1/2}}e^{i\varphi}\psi_0 d\xi\right|\\ &\le \frac{c}{t^{1/2}|x|^{1/2}}\left(\left\|\frac{\psi_0}{|\xi|^{1/2}}\right\|_{L^{\infty}_{\Omega_{05}}} + \left\|\frac{\psi_{0\xi}}{|\xi|^{1/2}}\right\|_{L^{1}_{\Omega_{05}}} + \left\|\frac{\psi_0}{|\xi|^{3/2}}\right\|_{L^{1}_{\Omega_{05}}}\right)\\ &:= B_1 + B_2 + B_3.\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{|x|^{1/2}} < |\xi|$, entonces

$$B_1 \le \frac{c|x|^{1/4}}{t^{1/2}|x|^{1/2}} = \frac{c}{t^{1/2}|x|^{1/4}},$$

$$B_2 \le \frac{c|x|^{1/4}}{t^{1/2}|x|^{1/2}}\int_{\Omega_{05}} |\psi_{0\xi}|d\xi \le \frac{c}{t^{1/2}|x|^{1/4}},$$

$$B_3 \le \frac{c}{t^{1/2}|x|^{1/2}}\int_{\Omega_{05}} \frac{\psi_0}{|\xi|^{3/2}}d\xi \le \frac{c}{t^{1/2}|x|^{1/2}}\left(-|\xi|^{-1/2}\Big|_{\frac{1}{|x|^{1/2}}}^{2}\right) \le \frac{c}{t^{1/2}|x|^{1/4}},$$

obteniendo la siguiente acotación:

$$|J_{05}| \leq \frac{c}{t^{1/2}|x|^{1/4}}.$$

La integral J_{01} restringida a Ω_{06}, será notada como J_{06}, se acota sin mayor problema, como se ve a continuación:

$$|J_{06}| = \left|\frac{c}{t^{1/2}}\int_{\Omega_{06}} \frac{1}{(-i\xi)^{1/2}} e^{i\varphi}\psi_0 d\xi\right| \leq \frac{c}{t^{1/2}}\int_{\Omega_{06}} \frac{1}{|\xi|^{1/2}} d\xi = \frac{c}{t^{1/2}}\xi^{1/2}\Big|_0^{|x|^{-1/2}} = \frac{c}{t^{1/2}|x|^{1/4}}.$$

De lo anterior, si $-32t2^{2k} < x < 160T$, para cada y se tiene lo siguiente:

$$|J_0| \leq c(T)(k+1)t^{-1/2}|x|^{-1/4} \leq c(T)2^k(k+1)|x|^{-3/4}. \tag{3-52}$$

Por lo tanto, la función

$$H_{k,T}(x) = \begin{cases} c2^k & \text{si} \quad |x| \leq 160T \\ c2^k x^{-2} & \text{si} \quad x \geq 160T \vee x < -\text{máx}\{160T, 32t2^{2k}\} \\ c(T)(k+1)2^k|x|^{-3/4} & \text{si} \quad -32t2^{2k} < x < 160T \end{cases}$$

satisface (3-12). □

Teorema 3.3.
Si $\beta = 1,\ 0 \leq \alpha \leq 1, s > \frac{11-2\alpha}{12}$ y $f \in H^s(\mathbb{R}^2)$,

$$\|\mathbb{V}(t)f\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} \leq C(T,s)\|f\|_s. \tag{3-53}$$

Demostración. Como el operador B_k, definido en (3-9), es simétrico y conmuta con el grupo $\mathbb{V}(t)$, el Lema 3.3 implica que

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^T \mathbb{V}(t-t')(B_k^2 g)(x,y,t')dt'\right| \\ &= \left|\int_0^T \int \left(\iint e^{i((t-t')\varphi(\xi,\eta)+(x-z)\xi+(y-w)\eta)}\psi_k(\xi,\eta)d\xi d\eta\right) g(z,w,t')dzdwdt'\right| \\ &\leq \int_0^T \iint H_{k,T}(|x-z|)|g(z,w,t')|dzdwdt' \\ &= H_{k,T}(|x|) * \int_0^T \int |g(x,w,t')|dwdt', \end{aligned} \tag{3-54}$$

para $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\varphi(\xi,\eta) = \xi|\xi|^{1+\alpha} + \xi\eta^2$ y $t \in [0,T]$.

Si el operador $A_k : L^1_T L^2_{xy} \to L^2_{xy}$, es el definido mediante:

$$A_k g(x,y) := \int \chi_T(t)\mathbb{V}(-t)(B_k g)(x,y,t)dt,$$

se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\langle A_k g, f\rangle &= \iint A_k g(x,y)\overline{f(x,y)}dxdy \\
&= \int \left(\int \chi_T(t)\mathbb{V}(-t)B_k g(x,y,t)dt\right)\overline{f(x,y)}dxdy \\
&= \int \chi_T(t)\left(\iint e^{-it(\xi|\xi|^{1+\alpha}+\xi\eta^2)}\psi_k^{1/2}(\xi,\eta)\hat{g}(\xi,\eta,t)\overline{\hat{f}(\xi,\eta)}d\xi d\eta\right)dt \\
&= \int \chi_T(t)\overline{\left(\iint e^{it(\xi|\xi|^{1+\alpha}+\xi\eta^2)}\psi_k^{1/2}(\xi,\eta)\hat{f}(\xi,\eta)\overline{\hat{g}(\xi,\eta,t)}d\xi d\eta\right)}dt \\
&= \int \chi_T(t)\left(\iint \mathbb{V}(t)B_k f(x,y)\overline{g(x,y,t)}dxdy\right)dt \\
&= \int \chi_T(t)\left(\int g(x,y,t)\overline{\mathbb{V}(t)B_k f(x,y)}dxdy\right)dt.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $A_k^* : L^2_{xy} \to L^1_T L^2_{xy}$ es el operador $A_k^* f = \mathbb{V}(t)B_k f$. Si $X = L^2_x L^1_{yT}$, su dual es $X^* = L^2_x L^\infty_{yT}$, aplicando el Lema 3.3 y (3-54), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\|A_k^* A_k g\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} &= \left\|\int_0^T \mathbb{V}(t-t')B_k^2(x,y,t')g(x,y,t')dt'\right\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} \\
&\le \|g\|_{L^2_x L^1_{yT}} \int H_{k,T}(|x|)dx \\
&\le C(T)2^{\frac{11-2\alpha}{6}k}(k+1)^2\|g\|_{L^2_x L^1_{yT}},
\end{aligned}
$$

así que, por (3-11) se puede concluir lo siguiente:

$$
\|\mathbb{V}(t)f\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} \le \sum_{k=0}^{\infty}\|\mathbb{V}(t)B_k^2 f\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} \le \sum_{k=0}^{\infty} C_1(T)2^{k(\frac{11-2\alpha}{12}-s)}(k+1)\|f\|_s = C(T,s)\|f\|_s.
$$

□

Nota 3.4.
Los resultados expuestos en esta sección, coinciden con el Lema 2.2 y el Teorema 2.4 de [20], siempre que $\alpha = 1$.

3.4. Mejoras en el buen planteamiento

Los resultados presentados durante éste capítulo, la técnica de Kenig, Ponce y Vega, junto con un argumento de contracción, permiten mejorar el resultado de buen planteamiento obtenido en el segundo capítulo de éste trabajo. Cuando $\alpha = 1$ se tiene el buen planteamiento global, a partir de las leyes de conservación presentadas en el Lema 1.8. Con esto en mente, para la clase de funciones que cumplan las siguientes desigualdades:

$$\|D_x^s u_x\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \|D_y^s u_x\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} < \infty, \tag{3-55}$$

$$\|u_x\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} < \infty, \tag{3-56}$$

$$\|u\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty} < \infty. \tag{3-57}$$

es posible mostrar que el Teorema 3.4 es válido:

Demostración del Teorema 3.4. Para realizar la demostración se supondrá que $\frac{11-2\alpha}{12} < s < 1$, ya que para los valores de $s \geq 1$, se aprovecha la linealidad de la derivada en las estimativas de los Teoremas 3.1 y 3.3.

Se definen,

$$\Psi(u)(t) := \Psi_{u_0}(u)(t) = \mathbb{V}(t)u_0 - \int_0^t \mathbb{V}(t-t')(uu_x)(t')dt', \tag{3-58}$$

para $0 < T \leq 1$, y los espacios

$$X_T := \{u \in C([0,T] : H^s(\mathbb{R}^2)) \mid \mu(u) < \infty\}, \tag{3-59}$$

y

$$X_T^a := \{u \in X_T \mid \mu(u) \leq a\}, \tag{3-60}$$

donde,

$$\mu(u) := \|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^s} + \|u_x\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} + \|D_x^s u_x\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \|D_y^s u_x\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \|u\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty}. \tag{3-61}$$

El objetivo será elegir valores adecuados para a y T, de tal manera que Ψ sea una contracción sobre X_T^a. Para tal fin, primero se deberá estimar la parte lineal de (3-58), empleando las estimativas del Teorema 3.2 (para $1-\epsilon/2 \leq s$), el efecto regularizante del Teorema 3.1 y las estimativas de la función maximal (3-53), como sigue:

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbb{V}(t)u_0) =& \|\mathbb{V}(t)u_0\|_{L_T^\infty H_{xy}^s} + \|\partial_x \mathbb{V}(t)u_0\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} + \|D_x^s \partial_x \mathbb{V}(t)u_0\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} \\
&+ \|D_y^s \partial_x \mathbb{V}(t)u_0\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \|\mathbb{V}(t)u_0\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty} \\
\leq& \|u_0\|_{H^s} + c\|D_x^{-\epsilon/2}\partial_x u_0\|_{L_{xy}^2} + \|D_x^s u_0\|_{L_{xy}^2} + \|D_y^s u_0\|_{L_{xy}^2} + c\|u_0\|_{H^s} \\
\leq& c\|u_0\|_{H^s}.
\end{aligned} \tag{3-62}$$

La parte no lineal de (3-58), se acotará estudiando cada sumando de la norma μ por separado. Primero se estimará la norma $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t \mathbb{V}(t-t')(uu_x)(t')dt' \right\|_{L^2_{xy}} &\leq c\int_0^T \left\|\mathbb{V}(t-t')(uu_x)(t')\right\|_{L^2_{xy}} dt' \\
&\leq c\int_0^T \|uu_x\|_{L^2_{xy}} dt' \\
&\leq c\int_0^T \|u_x\|_{L^\infty_{xy}} \|u\|_{L^2_{xy}} dt' \\
&\leq c\|u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} \int_0^T \|u_x\|_{L^\infty_{xy}} dt' \\
&\leq cT^{1/2}\|u\|_{L^\infty_T H^s_{xy}} \|u_x\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} \\
&\leq cT^{1/2}(\mu(u))^2,
\end{aligned} \tag{3-63}$$

que es consecuencia de las desigualdades de Minkowski y Hölder.

Para acotar la norma en $L^2(\mathbb{R}^2)$ de $D^s_x(\int_0^t \mathbb{V}(t-t')(uu_x)(t')dt')$ se emplearán las desigualdades de Hölder, Minkowski, como también la regla de Leibniz para derivadas fraccionarias,

$$\begin{aligned}
\left\| D^s_x \left(\int_0^t \mathbb{V}(t-t')(uu_x)(t')dt' \right) \right\|_{L^2} &\leq \int_0^T \|D^s_x(uu_x)(t')\|_{L^2_{xy}} dt' \\
&\leq c\int_0^T \|u_x\|_{L^\infty_{xy}} \|D^s_x u\|_{L^2_{xy}} dt' + \int_0^T \|uD^s_x u_x\|_{L^2_{xy}} dt' \\
&\leq c\|D^s_x u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} \int_0^T \|u_x\|_{L^\infty_{xy} dt'} + T^{1/2}\|uD^s_x u_x\|_{L^2_T L^2_x} \\
&\leq cT^{1/2}\|u\|_{L^\infty_T H^s_{xy}} \|u_x\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + T^{1/2}\|u\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} \|D^s_x u_x\|_{L^\infty_x L^2_{yT}} \\
&\leq cT^{1/2}(\mu(u))^2.
\end{aligned} \tag{3-64}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
&\left\| D^s_y \left(\int_0^t \mathbb{V}(t-t')(uu_x)(t')dt' \right) \right\|_{L^2_{xy}} \\
&\leq cT^{1/2}\|D^s_y u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} \|u_x\|_{L^2_T L^\infty_{xy}} + T^{1/2}\|u\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} \|D^s_y u_x\|_{L^\infty_x L^2_{yT}} \\
&\leq cT^{1/2}(\mu(u))^2.
\end{aligned} \tag{3-65}$$

Para estimar la norma $L^2_T L^\infty_{xy}$, se considerará $0 < \epsilon < 1/2$, de tal forma que $1 - \epsilon/2 \leq s$. Se emplearán las estimativas del Corolario 3.1 junto con las desigualdades (3-63)-(3-65), para obtener:

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial_x \int_0^t \mathbb{V}(t-t')(uu_x)(t')dt'\right\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} \\
&\quad = \left\|\mathbb{V}(t)\left(\int_0^t \mathbb{V}(-t')\partial_x(uu_x)(t')dt'\right)\right\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} \\
&\quad \le c\int_0^T \|D_x^{-\epsilon/2}\partial_x(uu_x)(t')\|_{L_{xy}^2}dt' \\
&\quad \le c\int_0^T \|(uu_x)(t')\|_{H_{xy}^s}dt' \\
&\quad \le c\int_0^T \|(uu_x)(t')\|_{L_{xy}^2}dt' + c\int_0^T \|D_x^s(uu_x)(t')\|_{L_{xy}^2}dt' + c\int_0^T \|D_y^s(uu_x)(t')\|_{L_{xy}^2}dt' \\
&\quad \le c\int_0^T \|(uu_x)(t')\|_{L_{xy}^2}dt' + c\int_0^T \|D_x^s(uu_x)(t')\|_{L_{xy}^2}dt' + c\int_0^T \|D_y^s(uu_x)(t')\|_{L_{xy}^2}dt' \\
&\quad \le cT^{1/2}(\mu(u))^2.
\end{aligned}$$

Para acotar la norma en $L_x^\infty L_{yT}^2$, se hará uso del Teorema 3.1 y de la desigualdad (3-64), como se ve en la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
\left\|D_x^s\left(\partial_x \int_0^t \mathbb{V}(t-t')(uu_x)(t')dt'\right)\right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} &= \left\|\partial_x\mathbb{V}(t)\left(\int_0^t \mathbb{V}(-t')D_x^s(uu_x)(t')dt'\right)\right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} \\
&\le c\int_0^T \|D_x^s(uu_x)(t')\|_{L_{xy}^2}dt' \\
&\le cT^{1/2}(\mu(u))^2.
\end{aligned}$$

De igual manera,

$$\begin{aligned}
\left\|D_y^s\left(\partial_x \int_0^t \mathbb{V}(t-t')(uu_x)(t')dt'\right)\right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} &= \left\|\partial_x\mathbb{V}(t)\left(\int_0^t \mathbb{V}(-t')D_y^s(uu_x)(t')dt'\right)\right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} \\
&\le c\int_0^T \|D_y^s(uu_x)(t')\|_{L_{xy}^2}dt' \\
&\le cT^{1/2}(\mu(u))^2.
\end{aligned}$$

Por último, para la norma en $L_x^2 L_{yT}^\infty$, se deben emplear la estimativa de la función maximal (3-53) y las desigualdades (3-63)- (3-65), para obtener:

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t \mathbb{V}(t-t')(uu_x)(t')dt'\right\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty} &= \left\|\mathbb{V}(t)\left(\int_0^t \mathbb{V}(-t')(uu_x)(t')dt'\right)\right\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty} \\
&\le c\int_0^T \|(uu_x)(t')\|_{H_{xy}^s}dt' \\
&\le cT^{1/2}(\mu(u))^2.
\end{aligned}$$

Lo anterior implica que,

$$\mu(\Psi(u)) \leq c\|u_0\|_{H^s} + cT^{1/2}(\mu(u))^2. \tag{3-66}$$

Por lo tanto, al elegir $a = 2c\|u_0\|_{H^s}$ y $T > 0$ tales que,

$$caT^{1/2} < \frac{1}{2}, \tag{3-67}$$

si $u \in X_T^a$, entonces $\mu(\Psi(u)) \leq a$, en consecuencia $\Psi : X_T^a \to X_T^a$.

Siguiendo este mismo esquema, se muestra que Ψ es una contracción pues,

$$\mu(\Psi(u) - \Psi(\tilde{u})) \leq cT^{1/2}(\mu(u) + \mu(\tilde{u}))\mu(u - \tilde{u}) \leq 2acT^{1/2}\mu(u - \tilde{u}),$$

para $\tilde{u} \in X_T^a$. Por lo tanto, existe un único $u \in X_T^a$, tal que $\Psi(u) = u$, es decir,

$$u(t) = \mathbb{V}(t)u_0 - \int_0^t \mathbb{V}(t - t')(uu_x)(t')dt', \tag{3-68}$$

para $t \in [0, T]$.

Siguiendo lo mismos argumentos, se prueba la existencia de $T_1 \in (0, T)$ tal que,

$$\mu(\Psi(u) - \Psi(\tilde{u})) \leq \|u_0 - \tilde{u}_0\|_s + cT_1^{1/2}(\mu(u) + \mu(\tilde{u}))\mu(u - \tilde{u}),$$

por lo tanto, la aplicación $\tilde{u}_0 \to \tilde{u}$, definida en una vecindad V de u_0 es Lipschitz. $\square$

Nota 3.5.
En [71], Ribaud y Vento, haciendo uso de los espacios de Bourgain prueban que, para $\alpha \in [0, 1]$ y $s > \frac{2}{1+\alpha} - \frac{3}{4}$, el problema (2-1) es localmente bien planteado en $H^{(1+\alpha)s,2s}(\mathbb{R}^2)$, de modo que, el Teorema 3.4 contribuye a mejorar este resultado cuando $0 < \alpha < \frac{4}{7}$.

Para mejorar el buen planteamiento para el caso $p = 2$, la prueba requiere trabajar con la clase de funciones que satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\|D_x^s u_x\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \|D_y^s u_x\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} < \infty, \tag{3-69}$$

$$\|u_x\|_{L_T^3 L_{xy}^\infty} + \|u_x\|_{L_T^{9/4} L_{xy}^\infty} < \infty, \tag{3-70}$$

$$\|u\|_{L_x^2 L_{yT}^2} < \infty. \tag{3-71}$$

Demostración del Teorema 3.5. Como en la demostración del teorema anterior, se supondrá que $\frac{11-2\alpha}{12} < s < 1$ y $0 < T \leq 1$, de modo que, al definir el siguiente operador:

$$\Psi(u)(t) = \Psi_{u_0}(u)(t) = \mathbb{V}(t)u_0 - \int_0^t \mathbb{V}(t - t')\left(u^2 u_x\right)(t')\, dt', \tag{3-72}$$

y los espacios:

$$X_T = \left\{ u \in C\left([0,T] : H^s\left(\mathbb{R}^2\right) \right) \mid \mu_2(u) < \infty \right\} \tag{3-73}$$

y

$$X_T^a = \left\{ u \in X_T \mid \mu_2(u) \leq a \right\}, \tag{3-74}$$

donde,

$$\mu_2(u) = \|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^s} + \|u\|_{L_T^3 L_{xy}^\infty} + \|u_x\|_{L_T^{9/4} L_{xy}^\infty} + \|D_x^s u_x\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \left\|D_y^s u_x\right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \|u\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty} \tag{3-75}$$

se mostrará que, para valores adecuados de a y T, Ψ es una contracción en X_T^a. Para ello, primero se acotará la norma μ_2 sobre la parte lineal de (3-72), haciendo uso del efecto regularizante (Teorema 3.1), las estimativas tipo Strichartz (Corolario 3.1) con $1-\epsilon/2 \leq s$, la estimativa de la función maximal (Teorema 3.3) y las propiedades del grupo $\mathbb{V}(t)$, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mu_2\left(\mathbb{V}(t)u_0\right) = {} & \|\mathbb{V}(t)u_0\|_{L_T^\infty H_{xy}^s} + \|\mathbb{V}(t)u_0\|_{L_T^3 L_{xy}^\infty} + \|\partial_x \mathbb{V}(t)u_0\|_{L_T^{9/4} L_{xy}^\infty} \\
& + \|D_x^s \partial_x \mathbb{V}(t)u_0\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \left\|D_y^s \partial_x \mathbb{V}(t)u_0\right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \|\mathbb{V}(t)u_0\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty} \\
\leq {} & \|u_0\|_s + \|u_0\|_0 + \left\|D_x^{-\epsilon/2}\partial_x u_0\right\|_0 + \|\partial_x \mathbb{V}(t) D_x^s u_0\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} \\
& + \left\|\partial_y \mathbb{V}(t) D_y^s u_0\right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} + \|\mathbb{V}(t)u_0\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty} \\
\leq {} & \|u_0\|_s .
\end{aligned} \tag{3-76}$$

Para acotar μ_2 sobre la parte no lineal de (3-72), se debe acotar cada sumando de μ_2 por aparte. Para acotar la norma en $H^s(\mathbb{R}^2)$, se acotarán cada una de sus componentes por separado, como sigue:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t \mathbb{V}\left(t-t'\right)\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) dt' \right\|_0 & \leq \int_0^T \left\|u^2 u_x\right\|_{L_{xy}^2} dt' \\
& \leq \int_0^T \|u u_x\|_{L_{xy}^\infty} \|u\|_{L_{xy}^2} dt' \\
& \leq \|u\|_{L_T^\infty L_{xy}^2} \int_0^T \|u\|_{L_{xy}}^\infty \|u_x\|_{L_{xy}} dt' \\
& \leq T^{2/9} \|u\|_{L_T^\infty L_{xy}^2} \|u\|_{L_T^3 L_{xy}^\infty} \|u_x\|_{L_T^{9/4} L_{xy}^\infty} \\
& \leq T^{2/9} \|u\|_{L_T^\infty H_{xy}^s} \|u\|_{L_T^3 L_{xy}^\infty} \|u_x\|_{L_T^{9/4} L_{xy}^\infty} \\
& \leq T^{2/9}\left(\mu_2(u)\right)^3 ,
\end{aligned} \tag{3-77}$$

las desigualdades anteriores son consecuencia de las propiedades del grupo $\mathbb{V}(t)$ y las desigualdades de Minkowski y Hölder. Para acotar la norma en $L^2(\mathbb{R}^2)$ de $D_x^s(\int_0^t \mathbb{V}(t-t')(u^2 u_x)(t')dt')$, se utilizan las desigualdades de Hölder, Minkowski, como también la regla de Leibniz para derivadas fraccionarias, así:

$$
\begin{aligned}
&\left\| D_x^s \left(\int_0^t \mathbb{V}\left(t-t'\right)\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) dt' \right) \right\|_{L^2_{xy}} \\
&\leq \int_0^T \left\| D_x^s \left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) \right\|_{L^2_{xy}} dt' \\
&\leq \int_0^T \left(\|u_x\|_{L^\infty_{xy}} \|D_x^s(u^2)\|_{L^2_{xy}} + \left\| u^2 D_x^s u_x \right\|_{L^2_{xy}} \right) dt' \\
&\leq \int_0^T \|u_x\|_{L^\infty_{xy}} \|u\|_{L^\infty_{xy}} \|D_x^s u\|_{L^2_{xy}} dt' + \int_0^T \|u\|_{L^\infty_{xy}} \|u D_x^s u_x\|_{L^2_{xy}} dt' \\
&\leq \|D_x^s u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} \int_0^T \|u_x\|_{L^\infty_{xy}} \|u\|_{L^\infty_{xy}} dt' + \int_0^T \|u\|_{L^\infty_{xy}} \|u D_x^s u_x\|_{L^2_{xy}} dt' \\
&\leq T^{2/9} \|u\|_{L^\infty_T H^s_{xy}} \|u\|_{L^3_T L^\infty_{xy}} \|u_x\|_{L^{9/4}_T L^\infty_{xy}} + T^{1/6} \|u\|_{L^3_T L^\infty_{xy}} \|u\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} \|D_x^s u_x\|_{L^\infty_x L^2_{yT}} \\
&\leq T^{2/9} \left(\mu_2(u)\right)^3 + T^{1/6} \left(\mu_2(u)\right)^3 .
\end{aligned}
\tag{3-78}
$$

Siguiendo el mismo argumento se acota la norma de $D_y^s(\int_0^t \mathbb{V}(t-t')(u^2 u_x)(t')dt')$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$,

$$
\begin{aligned}
&\left\| D_y^s \left(\int_0^t \mathbb{V}\left(t-t'\right)\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) dt' \right) \right\|_{L^2_{xy}} \\
&\leq T^{2/9} \|u\|_{L^\infty_T H^s_{xy}} \|u\|_{L^3_T L^\infty_{xy}} \|u_x\|_{L^{9/4}_T L^\infty_{xy}} + T^{1/6} \|u\|_{L^3_T L^\infty_{xy}} \|u\|_{L^2_x L^\infty_{yT}} \left\|D_y^s u_x\right\|_{L^\infty_x L^2_{yT}} \\
&\leq T^{2/9} \left(\mu_2(u)\right)^3 + T^{1/6} \left(\mu_2(u)\right)^3 .
\end{aligned}
\tag{3-79}
$$

Para acotar la norma de la parte no lineal en $L^3_T L^\infty_{xy}$, se hace uso del Corolario 3.1 y de la desigualdad (3-77), como se ve a continuación:

$$
\begin{aligned}
\left\| \int_0^t \mathbb{V}\left(t-t'\right)\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) dt' \right\|_{L^3_T L^\infty_{xy}} &= \left\| \mathbb{V}(t) \left(\int_0^t \mathbb{V}\left(-t'\right)\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) dt' \right) \right\|_{L^3_T L_{xy}} \\
&\leq \left\| \int_0^T \mathbb{V}(-t)(u^2 u_x)(t') dt' \right\|_{L^2_{xy}} \\
&\leq \int_0^T \left\| u^2 u_x \right\|_{L^2_{xy}} dt' \\
&\leq T^{2/9} \left(\mu_2(u)\right)^3
\end{aligned}
\tag{3-80}
$$

Si $0 < \epsilon < \frac{1+2\alpha}{6}$ tal que $1 - \epsilon/2 \leq s$, del Corolario 3.1 y las estimativas (3-77) - (3-79), se deduce que

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial_x \int_0^t \mathbb{V}\left(t-t'\right)\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) dt'\right\|_{L_T^{9/4} L_{xy}^\infty} \\
&= \left\|\mathbb{V}(t)\left(\int_0^t \mathbb{V}\left(-t'\right) \partial_x\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) dt'\right)\right\|_{L_T^{9/4} L_{xy}^\infty} \\
&\leq \int_0^T \left\|D_x^{-\epsilon/2} \partial_x\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right)\right\|_0 dt' \\
&\leq \int_0^T \left\|u^2 u_x\right\|_s dt' \\
&\leq \int_0^T \left\|\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right)\right\|_0 dt' + \int_0^T \left\|D_x^s\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right)\right\|_0 dt' + \int_0^T \left\|D_y^s\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right)\right\|_0 dt' \\
&\leq T^{2/9}\left(\mu_2(u)\right)^3 + T^{1/6}\left(\mu_2(u)\right)^3
\end{aligned} \tag{3-81}$$

Para la controlar la norma en $L_x^\infty L_{yT}^2$, se emplea el efecto regularizante (Teorema 3.1) y la desigualdad (3-78), obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\left\|D_x^s\left(\partial_x \int_0^t \mathbb{V}\left(t-t'\right)\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) dt'\right)\right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} \\
&\quad = \left\|\partial_x \mathbb{V}(t)\left(\int_0^t \mathbb{V}\left(-t'\right) D_x^s\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) dt'\right)\right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} \\
&\quad \leq \left\|\int_0^T \mathbb{V}(-t) D_x^s(u^2 u_x)(t') dt'\right\|_0 \\
&\quad \leq \int_0^T \left\|D_x^s\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right)\right\|_0 dt' \\
&\quad \leq T^{2/9}\left(\mu_2(u)\right)^3 + T^{1/6}\left(\mu_2(u)\right)^3
\end{aligned} \tag{3-82}$$

De igual manera, pero empleando (3-79) en lugar de(3-78), se obtiene que

$$\begin{aligned}
\left\|D_y^s\left(\partial_x \int_0^t \mathbb{V}\left(t-t'\right)\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) dt'\right)\right\|_{L_x^\infty L_{yT}^2} &\leq \int_0^T \left\|D_y^s\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right)\right\|_0 dt' \\
&\leq T^{2/9}\left(\mu_2(u)\right)^3 + T^{1/6}\left(\mu_2(u)\right)^3
\end{aligned} \tag{3-83}$$

Finalmente, de la estimativa de la función maximal (Teorema 3.3) y las desigualdades (3-77) - (3-79), se concluye que

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t \mathbb{V}\left(t-t'\right)\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) dt'\right\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty} &= \left\|\mathbb{V}(t)\left(\int_0^t \mathbb{V}\left(-t'\right)\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right) dt'\right)\right\|_{L_x^2 L_{yT}^\infty} \\
&\leq \int_0^T \left\|\left(u^2 u_x\right)\left(t'\right)\right\|_s dt' \\
&\leq T^{2/9}\left(\mu_2(u)\right)^3 + T^{1/6}\left(\mu_2(u)\right)^3 .
\end{aligned} \tag{3-84}$$

De las estimativas (3-76) - (3-84) se tiene que

$$\mu_2(\Psi(u)) \leq \|u_0\|_s + T^{2/9}(\mu_2(u))^3,$$

como $0 < T \leq 1$, al considerar $a = 2\|u_0\|_s$ tal que $a^2T^{1/6} < 1/2$, se tiene que si $u \in X_T^a$, $\mu_2(\Psi(u)) \leq a$, en consecuencia $\Psi : X_T^a \to X_T^a$.

Para ver que Ψ es una contracción en X_T^a, se siguen las mismas ideas del teorema anterior, así como también para probar que la aplicación $\tilde{u_0} \to \tilde{u}$, definida desde una vecindad V de u_0, que depende de $T_1 \in (0, T)$ en $X_{T_1}^a$ es Lipschitz. □

3.5. Buen planteamiento global

Ahora se mostrará como extender las soluciones locales del P.V.I (2-1) a soluciones globales, cuando el dato inicial es un elemento de $H^1(\mathbb{R}^2)$, $\alpha = \beta = 1$ y en el símbolo se tiene el signo positivo. Para ello es necesario recordar las cantidades conservadas que posee el problema (Lema 1.8)

$$I_1(u) = \iint u^2(x,y,t)dxdy \tag{3-85}$$

$$I_2(u) = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^2}\left((\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 - \frac{2}{(p+1)(p+2)}u^{p+2}\right)dxdy \tag{3-86}$$

Teorema 3.6.

1. *Si $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ entonces la solución local del P.V.I (2-1) dada en el Teorema 3.4 puede ser extendida a cualquier intervalo $[0, T]$.*

2. *Si $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ y $\|u_0\|_0 << 1$ entonces la solución local del P.V.I (2-1) dada en el Teorema 3.5 puede ser extendida a cualquier intervalo $[0, T]$.*

Demostración. Para los dos numerales, es necesario realizar las siguientes consideraciones, si $u \in C([0, T] : H^1(\mathbb{R}^2))$ es la solución de (2-1), es posible aplicar la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg para $t \in [0, T]$, obteniendo que:

$$\|u(t)\|_{L^{p+2}} \leq c\,\|\nabla u(t)\|_0^{\theta}\,\|u(t)\|_0^{1-\theta},$$

con $\theta = \frac{p}{p+2}$. Las leyes de conservación implican lo siguiente:

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_1^2 &\leq \|u(t)\|_0^2 + \|\partial_x u(t)\|_0^2 + \|\partial_y u(t)\|_0^2 \\ &\leq \|u_0\|_0^2 + 2I_2(u(t)) + c\|u(t)\|_{L^{p+2}}^{p+2} \\ &\leq \|u_0\|_0^2 + 2I_2(u_0) + c\,\|u_0\|_0^2\,\|u(t)\|_1^p.\end{aligned} \tag{3-87}$$

1. Para este caso ($p = 1$), se considerará $y := y(t) = \|u\|_1^2$. De (3-87) y la desigualdad de Young se sigue que:
$$y^2 \leq \|u_0\|_2^2 + 2I_2(u_0) + \frac{c^2\|u_0\|_0^4}{2} + \frac{y^2}{2},$$
esto garantiza la existencia de $M = M(\|u_0\|_1, T)$ tal que,
$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_1 \leq M. \tag{3-88}$$
Sea $T' = \sup\{0 < T \mid$ existe una única $u \in C([0,T] : H^1(\mathbb{R}^2))$ solución de (2-1)$\}$. Suponiendo que $T' < \infty$, en vista de (3-88), la solución $u \in C([0,T') : H^1(\mathbb{R}^2))$ satisface que,
$$\|u(t)\|_1 \leq M\left(\|u_0\|_1, T'\right),$$
para todo $t \in [0,T')$. Del buen planteamiento local se tiene que $T \sim \|u_0\|_1^{-2}$. Al considerar el P.V.I (2-1) con dato inicial $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^2)$, el cual satisfaga la desigualdad $\|\varphi\|_1 \leq M(\|u_0\|_1, T)$, se puede hallar un tiempo $T_1 > 0$, tal que
$$T_1 < cM^{-2} \leq \|\varphi\|_1^{-2},$$
y una única solución $v \in C([0,T_1) : H^1(\mathbb{R}^2))$ del P.V.I (2-1) con $v(0) = \varphi$. Si se toma $\varphi = u(T' - T_1/2)$, al definir
$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } 0 \leq t < T' - T_1/2 \\ v\left(t - T' + T_1/2\right) & \text{si } T' - T_1/2 \leq t \leq T' + T_1/2. \end{cases} \tag{3-89}$$
Note que $w(t)$ satisface la ecuación integral (3-68), para cada $t \in [0, T' + T_1/2]$, lo cual contradice la definición de T', por lo tanto, $T' = \infty$.

2. Para este caso ($p = 2$), al considerar $y := y(t) = \|u\|_1^2$, de (3-87) se tiene que:
$$y^2 \leq c_2 + c_3 y^2.$$
Para obtener una desigualdad análoga a (3-88), se requiere que $\|u_0\|_0$ sea un valor pequeño ($\|u_0\|_0 << 1$), y así seguir el argumento del caso anterior para poder extender las soluciones locales a soluciones globales en $H^1(\mathbb{R}^2)$.

□

Nota 3.6.
Es importante resaltar que las soluciones dadas en los Teoremas 3.4-3.6 pertenecen a un subespacio de $H^s(\mathbb{R}^2)$ el cual está determinado por las normas μ_1 y μ_2, según sea el caso.

4 Espacios isotrópicos y anisotrópicos

En el presente capítulo se darán condiciones para que el problema (2-1) esté bien planteado en los espacios isotrópicos X^s mencionados en la Definición 1.8, como también en los espacios anisotrópicos $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ y X^{s_1,s_2}, descritos en las Definiciones 1.7 y 1.8, respectivamente.

Para lograr el buen planteamiento en estos espacios, se hará uso de un argumento de compacidad, para el cual se deben mostrar las estimativas de energía asociadas al P.V.I (2-1). Partiendo de éstas y del Corolario 3.1, se obtiene una estimativa no lineal, la cual es fundamental para hallar soluciones de (2-1), como límites (en el sentido distribucional) de soluciones suaves (ver [44]). Por tal motivo, es necesario tener presentes las cantidades conservadas que posee el problema (2-1), descritas en el Lema 1.8.

Con esto en mente, el presente capítulo se ha dividido en tres secciones, en la primera se muestran las estimativas de energía, en los espacios X^s y X^{s_1,s_2}. En la segunda, se prueba el buen planteamiento local de (2-1), según las hipótesis del Teorema 4.1. Mientras que, en la última sección del capítulo, se muestra un resultado de buen planteamiento local para los espacios $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ (Teorema 4.2), seguido de la mejora plasmada en el Teorema 4.3.

4.1. Estimativas de energía

En esta sección se procede a mostrar las estimativas de energía en los espacios isotrópicos X^s y anisotrópicos X^{s_1,s_2}.

Lema 4.1.
Sean $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, u solución del P.V.I (2-1) con $\varphi \in H^\infty(\mathbb{R}^2)$ y $s > 1$. Entonces

$$\sup_{0<t<T} \|u\|_{X^s} \leq Ce^{\left(\|u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} + \|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} + \|\partial_y u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}\right)} \|\varphi\|_{X^s},$$

para todo $T \in [0,1]$.

Demostración. Aplicando el operador J^s_x en (2-1) y haciendo el producto interno en $L^2(\mathbb{R}^2)$ con $J^s_x u$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\iint J^s_x u_t J^s_x u dxdy - \iint J^s_x \partial_x D^{1+\alpha}_x u J^s_x u dxdy \mp \iint J^s_x \partial_x D^{1+\beta}_y u J^s_x u dxdy + \iint J^s_x u u_x J^s_x u dxdy = 0,$$

o equivalentemente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_x^s u\right\|_0^2 = \iint J_x^s \partial_x D_x^{1+\alpha} u J_x^s u dxdy \pm \iint J_x^s \partial_x D_y^{1+\beta} u J_x^s u dxdy - \iint J_x^s u u_x J_x^s u dxdy. \tag{4-1}$$

La antisimetría de los operadores $J_x^s \partial_x D_x^{1+\alpha}$ y $J_x^s \partial_x D_y^{1+\beta}$, garantiza que los dos primeros sumandos del lado derecho de (4-1) son cero, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_x^s u\right\|_0^2 &= -\iint J_x^s u u_x J_x^s u dxdy \\
&= \iint \frac{1}{2}\partial_x u \left(J_x^s u\right)^2 dxdy - \iint \left(\left[J_x^s; u\right] u_x\right) J_x^s u dxdy \\
&\leq \left\|\partial_x u\right\|_{L_{xy}^\infty} \left\|J_x^s u\right\|_0^2 + \left\|\left[J_x^s; u\right] u_x\right\|_0 \left\|J_x^s u\right\|_0 \\
&\leq \left\|\partial_x u\right\|_{L_{xy}^\infty} \left\|J_x^s u\right\|_0^2,
\end{aligned} \tag{4-2}$$

lo cual es consecuencia de la desigualdad de Kato-Ponce (Lema 1.2).

Siguiendo la misma idea, pero usando el operador J_y^s en lugar de $J_x^s u$, se obtiene la ecuación,

$$\iint J_y^s u_t J_y^s u dxdy - \iint J_y^s \partial_x D_x^{1+\alpha} u J_y^s u dxdy \mp \iint J_y^s \partial_x D_y^{1+\beta} u J_y^s u dxdy + \iint J_y^s u u_x J_y^s u dxdy = 0,$$

es decir,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_y^s u\right\|_0^2 = \iint J_y^s \partial_x D_x^{1+\alpha} u J_y^s u dxdy \pm \iint J_y^s \partial_x D_y^{1+\beta} u J_y^s u dxdy - \iint J_y^s u u_x J_y^s u dxdy. \tag{4-3}$$

La antisimetría de los operadores $J_y^s \partial_x D_x^{1+\alpha}$, $J_y^s \partial_x D_y^{1+\beta}$ implica que, los dos primeros sumandos del lado derecho de (4-3) se anulan, obteniéndose:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_y^s u\right\|_0^2 &= -\iint J_y^s u u_x J_y^s u dxdy \\
&= \iint \frac{1}{2}\partial_x u \left(J_y^s u\right)^2 dxdy - \iint \left(\left[J_y^s; u\right] u_x\right) J_y^s u dxdy \\
&\leq \left\|\partial_x u\right\|_{L_{xy}^\infty} \left\|J_y^s u\right\|_0^2 + \left\|\left[J_y^s; u\right] u_x\right\|_0 \left\|J_y^s u\right\|_0 \\
&\leq \left(\left\|\partial_x u\right\|_{L_{xy}^\infty} + \left\|\partial_y u\right\|_{L_{xy}^\infty}\right)\left(\left\|J_x^s u\right\|_0 + \left\|J_y^s u\right\|_0\right)^2.
\end{aligned} \tag{4-4}$$

Lo cual se sigue de las desigualdades de Young y Kato-Ponce (Lema 1.2).

Sumando (4-2) y (4-4), se obtiene que:

$$\frac{d}{dt}\left\|u\right\|_{X^s}^2 \leq C\left(\left\|\partial_x u\right\|_{L_{xy}^\infty} + \left\|\partial_y u\right\|_{L_{xy}^\infty}\right)\left\|u\right\|_{X^s}^2 \leq C\left(\left\|u\right\|_{L_{xy}^\infty} + \left\|\partial_x u\right\|_{L^\infty} + \left\|\partial_y u\right\|_{L^\infty}\right)\left\|u\right\|_{X^s}^2.$$

La desigualdad de Gronwall, implica lo siguiente:

$$\left\|u\right\|_{X^s}^2 \leq \left\|\varphi\right\|_{X^s}^2 e^{\left\|u\right\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty} + \left\|\partial_x u\right\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty} + \left\|\partial_y u\right\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty}}.$$

□

Lema 4.2.
Si $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, y u es la solución de (2-1) con dato inicial $\varphi \in \mathsf{H}^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, entonces para $s_1 \geq s_2 > 1$, y para $T \in [0,1]$, se tiene que,

$$\sup_{0<t<T} \|u\|_{X^{s_1,s_2}} \leq e^{\left(\|u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} + \|\partial_x u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} + \|\partial_y u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}\right)} \|\varphi\|_{X^{s_1,s_2}}.$$

Demostración. Procediendo como en el lema anterior, pero usando el operador $J_x^{s_1}$ en lugar de J_x^s, se obtiene que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|J_x^{s_1}u\|_0^2 \leq \|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} \|J_x^{s_1}u\|_0^2.$$

Y en lugar del operador J_y^s se utiliza el operador $J_y^{s_2}$, obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|J_y^{s_2}u\|_0^2 &\leq \|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} \|J_y^{s_2}u\|_0^2 + \|[J_y^{s_2}; u]u_x\|_0 \|J_y^{s_2}u\|_0 \\
&\leq \|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} \|J_y^{s_2}u\|_0^2 + \left(\|\partial_y u\|_{L^\infty_{xy}} \|J_y^{s_2-1}\partial_x u\|_0 + \|J_y^{s_2}u\|_0 \|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}}\right) \|J_y^{s_2}u\|_0 \\
&\leq \|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} \|J_y^{s_2}u\|_0^2 + \left(\|\partial_y u\|_{L^\infty_{xy}} \left(\|J_y^{s_2}u\|_0 + \|J_x^{s_1}u\|_0\right) + \|J_y^{s_2}u\|_0 \|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}}\right) \|J_y^{s_2}u\|_0 \\
&\leq (\|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} + \|\partial_y u\|_{L^\infty_{xy}}) \|u\|_{X^{s_1,s_2}}^2
\end{aligned}$$

siempre que $s_1 \geq s_2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u\|_{X^{s_1,s_2}}^2 &\leq C\left(\|\partial_x u\|_{L^\infty_{xy}} + \|\partial_y u\|_{L^\infty_{xy}}\right) \|u\|_{X^{s_1,s_2}}^2 \\
&\leq C\left(\|u\|_{L^\infty_{xy}} + \|\partial_x u\|_{L^\infty} + \|\partial_y u\|_{L^\infty}\right) \|u\|_{X^{s_1,s_2}}^2,
\end{aligned}$$

y la desigualdad de Gronwall, implican el resultado. □

4.2. Buen planteamiento local en X^s, $s > \frac{15+7\alpha}{4(2+\alpha)}$

En esta sección se abordará el buen planteamiento del P.V.I (2-1) en los espacios de X^s, para ello es necesario mostrar el siguiente resultado:

Lema 4.3.
Sean $\beta = 1, 0 < \alpha \leq 1, u \in C([0,T] : H^\infty(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0,T] : H^\infty(\mathbb{R}^2))$ y $f \in C([0,T] : H^\infty(\mathbb{R}^2)), T \in [0,1]$ tal que,

$$\partial_t u - \partial_x(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^2)u = \partial_x f,$$

si $s_1 > \frac{3+\alpha}{4(2+\alpha)}$ y $s_2 > \frac{1}{2}$, entonces,

$$\|u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}} \leq T^{\frac{1}{2}}(\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} + \|J_x^{s_1}f\|_{L^1_T L^2_{xy}}).$$

Demostración. En esta demostración se empleará una descomposición del tipo Littlewood-Paley, por tal motivo, se hará uso de los operadores Q_x^j y Q_y^k para $j,k = 0,1,\ldots$, exhibidos en la Definición 1.10. De (1-9) se sigue que,

$$\|u\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \|Q_y^k Q_x^j u\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty}. \tag{4-5}$$

Para obtener la estimativa requerida, el intervalo $[0,T]$ se divide en 2^{j+k} sub-intervalos del mismo tamaño, $2^{-j-k}T$, los cuales son notados como $[a_{j,m}, a_{j,m+1})$, con $m = 1,2,\ldots,2^{j+k}$, así, al acotar uno de los sumandos del lado derecho de (4-5) se obtiene:

$$\begin{aligned}\|Q_y^k Q_x^j u\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty} &\leq \sum_{m=1}^{2^{j+k}} \|\chi_{[a_{jm}, a_{j(m+1)})}(t) Q_y^k Q_x^j u\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty}\\ &\leq \sum_{m=1}^{2^{j+k}} (T2^{-(j+k)})^{\frac{1}{2}} \|\chi_{[a_{j,m}, a_{j,(m+1)})}(t) Q_y^k Q_x^j u\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty}.\end{aligned} \tag{4-6}$$

Aplicando la fórmula de Duhamel, el Corolario 3.1 y notando $u(a_{j,m})$ como $u_{j,m}$, cada sumando de (4-6), se puede ver de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\|\chi_{[a_{j,m}, a_{j,(m+1)})}(t) Q_y^k Q_x^j u\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} \leq & \|\chi_{[a_{j,m}, a_{j,(m+1)})}(t) \mathbb{V}(t) Q_y^k Q_x^j u_{j,m}\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty}\\ &+ \int_{a_{j,m}}^t \|\chi_{[a_{j,m}, a_{j,(m+1)})}(t) \mathbb{V}(t-t') Q_y^k Q_x^j \partial_x f\|_{L_T^2 L_{xy}^\infty} dt'\\ \leq & 2^{-j\delta} \|Q_y^k Q_x^j u_{j,m}\|_{L_{xy}^2} + \int_{a_i m}^{a_{j,m+1}} 2^{-j\delta} 2^j \|Q_y^k Q_x^j f\|_{L_{xy}^2} dt'\\ \leq & 2^{-j\delta}\left(\|Q_y^k Q_x^j u_{j,m}\|_{L_{xy}^2} + 2^j \|\chi_{[a_{j,m}, a_{j,(m+1)})}(t) Q_y^k Q_x^j f\|_{L_T^1 L_{xy}^2}\right),\end{aligned}$$

donde $\delta = \frac{1+\alpha}{4(2+\alpha)}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\|Q_y^k Q_x^j u\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty} &\leq (T2^{-(j+k)})^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{2^{j+k}} 2^{-j\delta}\left(\|Q_y^k Q_x^j u_{j,m}\|_{L_{xy}^2} + 2^j \|\chi_{[a_{j,m}, a_{j,(m+1)})}(t) Q_y^k Q_x^j f\|_{L_T^1 L_{xy}^2}\right)\\ &\leq T^{1/2}\left(2^{-j-k} \sum_{m=1}^{2^{j+k}} \|2^{\frac{k}{2}} Q_y^k 2^{\frac{3+\alpha}{4(2+\alpha)}j} Q_x^j u_{j,m}\|_{L_{xy}^2} + 2\left\|Q_y^k 2^{\frac{3+\alpha}{4(2+\alpha)}j} Q_x^j f\right\|_{L_T^1 L_{xy}^2}\right),\end{aligned}$$

así, de (1-10) y al sumar sobre j y k, se obtiene la acotación requerida: z

$$\|u\|_{L_T^1 L_{xy}^\infty} \leq T^{1/2}\left(\left\|J_y^{s_2} J_x^{s_1} u\right\|_{L_T^\infty L_{xy}^2} + \|J_x^{s_1} f\|_{L_T^1 L_{xy}^2}\right).$$

□

Lema 4.4.
Si $\beta = 1, 0 < \alpha \leq 1$ y u la es solución de (2-1) , con dato inicial $\varphi \in H^\infty(\mathbb{R}^2)$ en el intervalo $[0,T]$, entonces, para $s > \frac{15+7\alpha}{4(2+\alpha)}$ existe un tiempo $T\left(\|\varphi\|_{X^s}, s\right) > 0$ tal que,

$$g(T) := \int_0^T (\|u\|_{L^\infty_{xy}} + \|u_x\|_{L^\infty_{xy}} + \|u_y\|_{L^\infty_{xy}})dt \leq C\left(T, \|\varphi\|_{X^s}, s\right).$$

***Demostración**.* Como $u,\ \partial_x u$ y $\partial_y u$ satisfacen el Lema 4.3 considerando a f como $u^2/2,\ \partial_x(u^2)/2$ y $\partial_y(u^2)/2$ respectivamente, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} g(T) \leq cT^{1/2} &\left(\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} + \|J_x^{s_1}J_y^{s_2}\partial_x u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} + \|J_x^{s_1}J_y^{s_2}\partial_y u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}}\right) \\ &+ T^{1/2}\left(\int_0^T \|J_x^{s_1}(u^2)\|_{L^2_{xy}}dt + \int_0^T \|J_x^{s_1}\partial_x(u^2)\|_{L^2_{xy}}dt + \int_0^T \|J_x^{s_1}\partial_y(u^2)\|_{L^2_{xy}}dt\right), \end{aligned} \tag{4-7}$$

donde $s_1 > \frac{3+\alpha}{4(2+\alpha)}$ y $s_2 > \frac{1}{2}$.

Los tres primeros sumandos del lado derecho de (4-7) se acotan de la siguiente manera:

$$\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} \leq \|u\|_{X^s}, \tag{4-8}$$

lo cual se sigue de aplicar la desigualdad de Young con $p = q = 2$.

$$\|J_x^{s_1+1}J_y^{s_2}u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} \leq \|J_x^s u\|_{L^2_{xy}} + \|J_y^s u\|_{L^2_{xy}}, \tag{4-9}$$

que es consecuencia de la desigualdad de Young $\left(\text{con } p = \frac{15+7\alpha}{11+5\alpha} \text{ y } q = \frac{15+7\alpha}{4+2\alpha}\right)$.

En el tercer sumando, se aplica nuevamente la desigualdad de Young pero con $p = \frac{15+7\alpha}{3+\alpha}$ y $q = \frac{15+7\alpha}{12+6\alpha}$, así:

$$\|J_x^{s_1}J_y^{s_2+1}u\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} \leq \|J_x^s u\|_{L^2_{xy}} + \|J_y^s u\|_{L^2_{xy}}. \tag{4-10}$$

Los sumandos del lado derecho de (4-7) que tienen integrales, se acotan empleando el Teorema 1.5, como sigue,

$$\int_0^T \|J_x^{s_1}u^2\|_{L^2_{xy}} \leq \|J_x^{s_1}u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}\|u\|_{L^\infty_T X^s} + \|u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}\|u\|_{L^\infty_T X^s}, \tag{4-11}$$

$$\int_0^T \|J_x^{s_1}u\partial_x u\|_{L^2_{xy}} \leq c\|J_x^{s_1}u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}\|u\|_{L^\infty_T X^s} + c\|u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}\|u\|_{L^\infty_T X^s} \tag{4-12}$$

y

$$\int_0^T \|J_x^{s_1}u\partial_y u\|_{L^2_{xy}} \leq c\|J_x^{s_1}u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}\|u\|_{L^\infty_T X^s} + c\|u\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}\|u\|_{L^\infty_T X^s}. \tag{4-13}$$

Sumando (4-8)-(4-13) e invocando el Lema 4.1 se obtiene:

$$g(T) \leq T^{1/2}\|\varphi\|_{X^s}e^{g(T)}(1 + g(T)).$$

Un argumento estándar de continuidad, garantiza el resultado. □

Con los resultados obtenidos durante el capítulo es posible realizar la prueba del Teorema 4.1.

Demostración del Teorema 4.1: Se considera una aproximación de la identidad $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, cuyo soporte es el conjunto $[-1,1]\times[-1,1]$ y $\rho(\xi,\eta)=1$, si $(\xi,\eta)\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Además si $\varphi\in X^s$ se definen las funciones $\varphi_k\in X^s\cap H^\infty$ así, $\varphi_k=\left(\rho\left(\frac{\cdot}{k}\right)\hat{\varphi}\right)^\vee$.

El objetivo inicial es mostrar algunas de las propiedades de los datos iniciales φ_k, luego de sus respectivas soluciones y finalizar la prueba empleando las propiedades de L^2.

Considerando $s'<s$, se tiene que,

$$\begin{aligned}\|\varphi_k-\varphi_m\|_{X^{s'}}^2\leq&\left|\langle\xi\rangle^{s'}\left(\rho\left(\frac{\xi}{k},\frac{\eta}{k}\right)-\rho\left(\frac{\xi}{m},\frac{\eta}{m}\right)\right)\hat{\varphi}(\xi,\eta)\right|\\&+\left|\langle\eta\rangle^{s'}\left(\rho\left(\frac{\xi}{k},\frac{\eta}{k}\right)-\rho\left(\frac{\xi}{m},\frac{\eta}{m}\right)\right)\hat{\varphi}(\xi,\eta)\right|\\\leq&\frac{1}{k^{2(s-s')}}\left|\langle\xi\rangle^{s}\left(\rho\left(\frac{\xi}{k},\frac{\eta}{k}\right)-\rho\left(\frac{\xi}{m},\frac{\eta}{m}\right)\right)\hat{\varphi}(\xi,\eta)\right|\\&+\frac{1}{k^{2(s-s')}}\left|\langle\eta\rangle^{s}\left(\rho\left(\frac{\xi}{k},\frac{\eta}{k}\right)-\rho\left(\frac{\xi}{m},\frac{\eta}{m}\right)\right)\hat{\varphi}(\xi,\eta)\right|,\end{aligned}$$

así,

$$\|\varphi_k-\varphi_m\|_{X^{s'}}\leq\frac{1}{k^{(s-s')}}\|\varphi_k-\varphi_m\|_{X^s}\leq\frac{1}{k^{(s-s')}}\|\varphi\|_{X^s}. \tag{4-14}$$

Si se considera $m\geq k$, se puede ver lo siguiente:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\langle\zeta\rangle^{s}\left(\rho\left(\frac{\xi}{k},\frac{\eta}{k}\right)-\rho\left(\frac{\xi}{m},\frac{\eta}{m}\right)\right)\hat{\varphi}(\xi,\eta)\right|^2=0,$$

donde, ζ puede ser tanto ξ, como η. Entonces, el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, garantiza la siguiente igualdad:

$$\lim_{k\to\infty}\|\varphi_k-\varphi_m\|_{X^s}=0. \tag{4-15}$$

Considerando la familia de soluciones (u_k), asociadas a los datos iniciales (φ_k), cuya existencia está garantizada por el Teorema 2.7 (para los casos en que $\beta=1$ y $0<\alpha\leq 1$). Como $u_k\in C\left([0,T]:H^\infty(\mathbb{R}^2)\right)$, el Lema 4.4 garantiza la existencia de un tiempo $T>0$ tal que,

$$\int_0^T(\|u_k\|_{L^\infty_{xy}}+\|u_{k_x}\|_{L^\infty_{xy}}+\|u_{k_y}\|_{L^\infty_{xy}})dt\leq C. \tag{4-16}$$

La desigualdad (4-16) y el Lema 4.1, implican la siguiente estimativa:

$$\sup_{0\leq t\leq T}\|u_k\|_{X^s}<C\|\varphi\|_{X^s}. \tag{4-17}$$

De la desigualdad de Gronwall, se sigue que,

$$\|u_k-u_m\|_0^2\leq\|\varphi_k-\varphi_m\|_0^2e^{\|\partial_x u_k\|_{L^1_TL^\infty_{xy}}+\|\partial_x u_m\|_{L^1_TL^\infty_{xy}}}, \tag{4-18}$$

y de (4-15), se obtiene la igualdad:

$$\lim_{k,m\to\infty} \|u_k - u_m\|_0 = 0. \tag{4-19}$$

De (4-14) y (4-17), se tiene que:

$$\sup_{0\le t\le T} \|u_k - u_m\|_0 \le \frac{1}{k^s}\|\varphi\|_{X^s}, \tag{4-20}$$

y

$$\sup_{0\le t\le T} \|u_k\|_{X^s} \le \|\varphi\|_{X^s}. \tag{4-21}$$

Por lo tanto, al interpolar (4-20) y (4-21), para $s' < s$, se deduce la siguiente acotación:

$$\sup_{0\le t\le T} \|u_k - u_m\|_{X^{s'}} \le \frac{1}{k^{s-s'}}\|\varphi\|_{X^s}, \tag{4-22}$$

es decir, la familia (u_k), es de Cauchy en $C([0,T] : X^{s'})$ (para $s' < s$), por lo tanto, existe $u \in C([0,T] : X^{s'})$ tal que, $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $C([0,T] : X^{s'})$. La desigualdad (4-19) implica la convergencia de (u_k) a u en $C([0,T] : L^2(\mathbb{R}^2))$. Mientras que, (4-17) y el Teorema de Banach - Alaoglu (ver [72]), garantizan la pertenencia de u al espacio $L^\infty([0,T] : X^s)$.

Para probar que (u_k) es de Cauchy en $L^1_T L^\infty_{xy}$, se consideran $w = u_k - u_m$ y $f = (u_k + u_m)w$, así, el Lema 4.3 implica la siguiente acotación:

$$\begin{aligned}\int_0^T \|w\|_{L^\infty_{xy}} dt' \le& T^{\frac{1}{2}} \left(\left\| J_x^{s_1} J_y^{s_2} w \right\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} + \|J_x^{s_1} f\|_{L^1_T L^2_{xy}} \right) \\ \le& T^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^\infty_T X^{s'}} + \int_0^T \left\| J_x^{s_1} \left((u_k + u_m)\, w \right) \right\|_{L^2_{xy}} dt',\end{aligned} \tag{4-23}$$

siempre que $s_1 > \frac{3+\alpha}{4(2+\alpha)}$ y $s_2 > \frac{1}{2}$.

En vista de (4-22), el primer sumando del lado derecho de (4-23), satisface la siguiente desigualdad:

$$\|w\|_{L^\infty_T X^{s'}} \le \frac{1}{k^{s-s'}} \|\varphi\|_{X^s},$$

para $s > s' > \frac{15+7\alpha}{4(2+\alpha)}$.

Para el segundo sumando del lado derecho de (4-23), el Teorema 1.5 implica que,

$$\left\| J_x^{s_1} \left((u_m + u_k)\, w \right) \right\|_0 \le \|J_x^{s_1} (u_m + u_k)\|_0 \|w\|_{L^\infty_{xy}} + \|u_m + u_k\|_{L^\infty_{xy}} \left\| J_x^{s_1} w \right\|_0. \tag{4-24}$$

Como $\left\|J_x^{s'}u_k\right\|_0 \leq \frac{1}{k^{s-s'}}\|\varphi\|_{X^s}$, (4-16) y (4-24), implican que,

$$\int_0^T \|J_x^{s_1}\left(\left(u_k+u_m\right)w\right)\|_{L^2_{xy}}\,dt' \leq \frac{1}{k^{s-s_1}}\|\varphi\|_{X^s},$$

se garantiza lo siguiente:

$$\int_0^T \|u_k-u_m\|_{L^\infty_{xy}}\,dt \underset{k,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Para mostrar que (∇u_k) es de Cauchy en $L^1_T L^\infty_{xy}$, se utiliza de nuevo el Lema 4.3, así:

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\partial_x w\|_{L^\infty_{xy}} + \|\partial_y w\|_{L^\infty_{xy}}\,dt' \leq{}& \left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}\partial_x w\right\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} + \left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}\partial_y w\right\|_{L^\infty_T L^2_{xy}}\\ &+\|J_x^{s_1}\left(w\partial_x u_k+u_m\partial_x w\right)\|_{L^1_T L^2_{xy}} + \|J_x^{s_1}\left(w\partial_y u_k+u_m\partial_y w\right)\|_{L^1_T L^2_{xy}}.\end{aligned} \tag{4-25}$$

Los dos primeros términos del lado derecho de (4-25), se acotan de manera similar, de modo que, se mostrará únicamente uno de ellos:

$$\left\|J_x^{s_1}J_y^{s_2}\partial_x w\right\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} \leq \|w\|_{L^\infty_T X^{s'}} \leq \frac{1}{k^{s-s'}}\|\varphi\|_{X^s}.$$

Mientras que, los dos últimos sumandos del lado derecho de (4-25), se estiman de manera parecida, por lo tanto, basta mostrar únicamente uno de ellos:

$$\begin{aligned}\|J_x^{s_1}(u_k+u_m)\partial_x w\|_{L^1_T L^2_{xy}} &\leq \|J_x^{s_1}(u_k+u_m)\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}\|\partial_x w\|_{L^\infty_T L^2_{xy}} + \|u_k+u_m\|_{L^1_T L^\infty_{xy}}\|J_x^{s_1+1}w\|_{L^\infty_T L^2_{xy}}\\ &\leq \|w\|_{L^\infty_T X^{s'}}\\ &\leq \frac{1}{k^{s-s'}}\|\varphi\|_{X^s},\end{aligned}$$

lo cual es consecuencia del Teorema 1.2, la desigualdad de Young y (4-16), junto con la suposición $s'-s_1>1$.

Para ver que $u\in C\left([0,T]:X^s\right)$, se emplean la continuidad débil u en X^s y la estimativa de energía presentada en el Lema 4.1, como sigue,

$$\|\varphi\|_{X^s} \leq \liminf_{t\downarrow 0}\|u(t)\|_{X^s} \leq \limsup_{t\downarrow 0}\|u(t)\|_{X^s} \leq \|\varphi\|_{X^s},$$

obteniendo así, la continuidad a derecha en $t=0$. Para el resto de puntos se razona como en el Teorema 2.4.

La unicidad basta establecerla en $L^2(\mathbb{R}^2)$, y ésta se sigue de (4-18). Mientras que, la dependencia continua se tiene gracias a un argumento de tipo Bona - Smith. □

4.3. Buen planteamiento en espacios anisotrópicos

Primero se mostrará un resultado base, para luego emplear un argumento de compacidad análogo al presentado en la sección anterior con el fin de tener una mejora sobre éste.

Teorema 4.2.
Si $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, $\varphi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ *y* $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} < 2$ *para* $s_1, s_2 > 2$, *entonces existen un tiempo* $T = T\left(\|\varphi\|_{s_1 s_2}, M\right) > 0$ *y una función* $u \in C\left([0,T] : H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)\right)$ *la cual satisface el problema (2-1), y la aplicación dato-solución es continua.*

Demostración. Haciendo uso de la regularización parabólica y teniendo en cuenta la siguiente versión de la desigualdad de regularización:

$$\begin{aligned}\|\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_{H^{s_1+\lambda_1,s_2+\lambda_2}} &= \|J_x^{s_1+\lambda_1}\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_{L^2} + \|J_y^{s_2+\lambda_2}\mathbb{V}_\mu(t)\varphi\|_{L^2} \\ &\leq \left(1 + (\mu t)^{\frac{\lambda_1}{4}} + (\mu t)^{\frac{\lambda_2}{4}}\right)\|\varphi\|_{H^{s_1,s_2}},\end{aligned}$$

junto a los Lemas 1.9 y 1.10, es posible obtener resultados análogos a los obtenidos para los espacios $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Para mostrar que existe un tiempo $T > 0$ y una constante M independientes de μ, tales que,

$$\underset{[0,T]}{sup}\|u_\mu(t)\|_{H^{s_1,s_2}} \leq M,$$

se procede como en el Lema 2.3, obteniendo la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|J_x^{s_1}u_\mu\|_0^2 + \|J_x^{s_1}\triangle u_\mu\|_0^2 = \left(J_x^{s_1}u_\mu \mid J_x^{s_1}u_\mu^p\partial_x u_\mu\right)_0,$$

y como,

$$\left|\left(J_x^{s_1}u_\mu \mid J_x^{s_1}u_\mu^k\partial_x u_\mu\right)_0\right| \leq \left\|\partial_x u_\mu^p\right\|_{s_1-1}\|u_\mu\|_{s_1}^2 \leq \|u_\mu\|_{s_1}^{p+2},$$

entonces,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|J_x^{s_1}u_\mu\|_0^2 + \|J_x^{s_1}\triangle u_\mu\|_0^2 \leq \|u_\mu\|_{s_1}^{p+2}. \tag{4-26}$$

De forma análoga en la variable y, se obtiene que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_y^{s_2}u_\mu\right\|_0^2 + \left\|J_y^{s_2}\triangle u_\mu\right\|_0^2 = \left(J_y^{s_2}u_\mu \mid J_y^{s_2}u_\mu^p\partial_x u_\mu\right)_0,$$

y

$$\left|\left(J_y^{s_2}u_\mu \mid J_y^{s_2}u_\mu^p\partial_x u_\mu\right)_0\right| \leq \left\|J_y^{s_2-1}\partial_x u_\mu^p\right\|_0\|u_\mu\|_{s_2}^2.$$

Además,

$$\begin{aligned}\left\|J_y^{s_2-1}\partial_x u_\mu^p\right\|_0^2 &\leq \iint \left(1+\eta^2\right)^{(s_2-1)}\left(1+\xi^2\right)\left|\widehat{u_\mu^p}\right|^2 d\eta d\xi\\ &\leq \iint \left(1+\eta^2\right)^{2(s_2-1)}\left|\widehat{u_\mu^p}\right|^2 d\eta d\xi + \iint \left(1+\xi^2\right)^2\left|\widehat{u_\mu^p}\right|^2 d\eta d\xi\\ &\leq \left\|J_y^{s_2}u_\mu^p\right\|_0^2 + \left\|J_x^{s_2}u_\mu^p\right\|_0^2,\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|J_y^{s_2}u_\mu\right\|_0^2 + \left\|J_y^{s_2}\triangle u_\mu\right\|_0^2 \leq \|u_\mu\|_{s_2}^{p+2}. \tag{4-27}$$

Sumando (4-26) y (4-27), se obtiene que:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\mu\|_{H^{s_1,s_2}} \leq \|u_\mu\|_{H^{s_1 s_2}}^{p+2}.$$

Así, el mismo argumento empleado en el Lema 2.3, cambiando el dato inicial de la ecuación diferencial por $\|\varphi\|_{s_1,s_2}^2$, implica el resultado.

Como se hizo en el Teorema 2.2, por la convergencia fuerte en $L^2(\mathbb{R}^2)$ y uniforme en $[0,T]$, y lo obtenido anteriormente, se garantiza la existencia de un tiempo $T>0$ y $u\in C_w([0,T]:H^{s_1,s_2})\cap AC([0,T]:H^{s_1-3,s_2-2})$ la cual satisface (2.1).

La unicidad se obtiene del mismo modo en que se hizo en el Teorema 2.3, y la dependencia continua se puede probar siguiendo, nuevamente, un argumento de tipo Bona-Smith. □

Ya que se tiene el resultado base, se mostrará un resultado análogo al Lema 4.4, en los espacios X^{s_1,s_2}.

Lema 4.5.
Sean $\beta=1, 0<\alpha\leq 1$, u la solución de (2.1) , con dato inicial $\varphi\in H^\infty(\mathbb{R}^2)$ el cual se define en $[0,T]$, y $r\in[15+7\alpha, 16+8\alpha]$, entonces para $s_1>\frac{r}{4(2+\alpha)}$ y $s_2>\frac{3r}{2(r-3-\alpha)}$, existe un tiempo $T\left(\|\varphi\|_{X^{s_1,s_2}}, s_1, s_2\right)>0$ tal que

$$g(T) := \int_0^T (\|u\|_{L^\infty_{xy}} + \|u_x\|_{L^\infty_{xy}} + \|u_y\|_{L^\infty_{xy}})dt \leq C\left(T, \|\varphi\|_{X^{s_1,s_2}}, s_1, s_2\right).$$

Demostración. El procedimiento es análogo al seguido en la demostración del Lema 4.4, con una pequeña variación en los valores empleados en la desigualdad de Young, por tal motivo será lo único que se mostrará en detalle.

Para $s_1'>\frac{3+\alpha}{4(2+\alpha)}$ y $s_2'>1/2$, considerando $p=q=2$, se tiene la acotación:

$$\|J_x^{s_1'}J_y^{s_2'}u\|_{L_T^\infty L_{xy}^2} \leq \|u\|_{X^{s_1,s_2}}. \tag{4-28}$$

Si $p_r = \frac{r}{11+5\alpha}$ y $q_r = \frac{r}{r-11-5\alpha}$, entonces la desigualdad de Young implica que,

$$\|J_x^{s_1'+1}J_y^{s_2'}u\|_{L_T^\infty L_{xy}^2} \leq \|J_x^{s_1}u\|_{L_{xy}^2} + \|J_y^{s_2}u\|_{L_{xy}^2}. \tag{4-29}$$

Y finalmente empleando la desigualdad de Young con $\tilde{p}_r = \frac{r}{3+\alpha}$ y $\tilde{q}_r = \frac{r}{r-3-\alpha}$, se obtiene la estimativa:

$$\|J_x^{s_1'}J_y^{s_2'+1}u\|_{L_T^\infty L_{xy}^2} \leq \|J_x^{s_1}u\|_{L_{xy}^2} + \|J_y^{s_2}u\|_{L_{xy}^2}. \tag{4-30}$$

Empleando el Teorema 1.5 se puede ver lo siguiente:

$$\int_0^T \left\|J_x^{s_1'}u^2\right\|_0 dt \leq \int_0^T \left\|uJ_x^{s_1'}u\right\|_0 dt \leq \|u\|_{L_T^1L_{xy}^\infty}\left\|J_x^{s_1'}u\right\|_{L_T^\infty L_{xy}^2} \leq \|u\|_{L_T^1L_{xy}^\infty}\|u\|_{L_T^\infty X^{s_1,s_2}}, \tag{4-31}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \|J_x^{s_1'}(u\partial_x u)\|_0 dt &\leq \int_0^T \left(\|\partial_x u\|_0\|J_x^{s_1'}u\|_{L^\infty} + \|J_x^{s_1'}\partial_x u\|_0\|u\|_{L^\infty}\right) dt\\ &\leq \|\partial_x u\|_{L_T^\infty L_{xy}^2}\|J_x^{s_1'}u\|_{L_T^1L_{xy}^\infty} + \|J_x^{s_1'}\partial_x u\|_{L_T^\infty L_{xy}^2}\|u\|_{L_T^1L_{xy}^\infty}\\ &\leq \|u\|_{L_T^\infty X^{s_1,s_2}}\|J_x^{s_1}u\|_{L_T^1L_{xy}^\infty} + \|u\|_{L_T^\infty X^{s_1,s_2}}\|u\|_{L_T^1L_{xy}^\infty},\end{aligned} \tag{4-32}$$

y

$$\begin{aligned}\int_0^T \|J_x^{s_1}(u\partial_y u)\|_0 dt &\leq \left(\int_0^T \|\partial_y u\|_0\|J_x^{s_1}u\|_{L^\infty} + \|J_x^{s_1}\partial_y u\|_0\|u\|_{L^\infty}\right) dt\\ &\leq \|\partial_y u\|_{L_T^\infty L_{xy}^2}\|J_x^{s_1}u\|_{L_T^1L_{xy}^\infty} + \|J_x^{s_1}\partial_y u\|_{L_T^\infty L_{xy}^2}\|u\|_{L_T^1L_{xy}^\infty}\\ &\leq \|u\|_{L_T^\infty X^{s_1,s_2}}\|J_x^{s_1}u\|_{L_T^1L_{xy}^\infty} + \|u\|_{L_T^\infty X^{s_1,s_2}}\|u\|_{L_T^1L_{xy}^\infty}.\end{aligned} \tag{4-33}$$

Sumando las desigualdades (4-28) - (4-33) y empleando el Lema 4.2, se obtiene que,

$$g(T) \leq \|\varphi\|_{X^{s_1,s_2}}e^{g(T)}(1+g(T)),$$

un argumento estándar de continuidad muestra que g es acotada. □

De modo que ya se tienen las herramientas para mostrar el buen planteamiento en los espacios X^{s_1,s_2}, enunciado en el Teorema 4.3.

***Demostración del Teorema* 4.3**: Siguiendo las ideas empleadas para probar el Teorema 4.1, se puede ver que para $s_1' < s_1$, $s_2' < s_2$ y $m > k > 1$, se tienen las siguientes estimativas:

$$\|\varphi_k - \varphi_m\|_{X^{s_1',s_2'}} \leq \frac{1}{k^{s_1-s_1'}}\left\|J_x^{r_1}\varphi\right\|_0 + \frac{1}{k^{s_2-s_2'}}\left\|J_y^{s_2}\varphi\right\|_0, \tag{4-34}$$

y

$$\lim_{k\to\infty}\|\varphi_k - \varphi_m\|_{X^{s_1,s_2}} = 0.$$

Para los datos iniciales $\varphi_k \in X^{s_1,s_2} \cap H^{\infty}$, el Teorema 4.2 garantiza que existen soluciones del P.V.I (2-1), $u_k \in C([0,T] : H^{\infty})$ tales que,

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - \varphi\|_{X^{s_1,s_2}} = 0,$$

y

$$\|\varphi_k\|_{X^{s_1,s_2}} \leq \|\varphi\|_{X^{s_1,s_2}}.$$

El Lema 4.5 garantiza la existencia de un tiempo $T > 0$, tal que,

$$g(T) = \int_0^T (\|u\|_{L^\infty_{xy}} + \|u_x\|_{L^\infty_{xy}} + \|u_y\|_{L^\infty_{xy}})dt \leq C, \tag{4-35}$$

por lo tanto, de la estimativa de energía obtenida en el Lema 4.2 y (4-35), se obtiene la siguiente acotación:

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u_k\|_{X^{s_1,s_2}} < C. \tag{4-36}$$

De la desigualdad de Gronwall se tiene que:

$$\lim_{k,m\to\infty} \sup_{0<t<T} \|u_k - u_m\|_0 = 0. \tag{4-37}$$

De (4-34), la estimativa de energía obtenida en el Lema 4.2 y (4-35), se siguen

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u_k - u_m\|_0 \leq \frac{1}{k^{s_1}} \|J_x^{s_1}\varphi\|_0 + \frac{1}{k^{s_2}} \left\|J_y^{s_2}\varphi\right\|_0, \tag{4-38}$$

y

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u_k\|_{X^{s_1,s_2}} \leq \|\varphi\|_{X^{s_1,s_2}}. \tag{4-39}$$

Una interpolación junto con (4-38) y (4-39), garantizan la estimativa:

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u_k - u_m\|_{X^{s_1',s_2'}} \leq \frac{1}{k^{s_1-s_1'}} \|J_x^{r_1}\varphi\|_0 + \frac{1}{k^{s_2-s_2'}} \left\|J_y^{s_2}\varphi\right\|_0,$$

por lo tanto, (u_k) es una sucesión de Cauchy en $C([0,T] : X^{s_1',s_2'})$ (para $s_1' < s_1$ y $s_2' < s_2$); lo anterior, garantiza la existencia de u tal que $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $C([0,T] : X^{s_1',s_2'})$. En vista de (4-37), $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $C([0,T] : L^2(\mathbb{R}^2))$. Mientras que, (4-36) junto con el Teorema de Banach - Alaoglu implican que $u \in L^\infty([0,T] : X^{s_1,s_2})$.

Para ver que $u \in C([0,T] : X^{s_1,s_2})$ y $u,\ u_x, u_y \in L^1_T L^\infty_{xy}$, se sigue el mismo esquema del Teorema 4.1, teniendo en cuenta que, las normas a considerar son en el espacio X^{s_1,s_2} en lugar de X^s.

La unicidad se tiene, ya que en $L^2(\mathbb{R}^2)$ se tiene tal resultado. La dependencia continua se prueba empleando un argumento tipo Bona-Smith.

□

Nota 4.1.
Como era de esperarse, el método aplicado al P.V.I (2-1) *en el capítulo* 3*, genera mejores resultados que el de compacidad, pero, dada la índole de las cantidades conservadas* (Lema1.8) *y los resultados obtenidos en la tercera sección del presente capítulo se sugiere que los espacios más "naturales" para tratar éste problema son los anisotrópicos.*

5 Espacios anisotrópicos con pesos

En el capítulo 4 se observó que los espacios anisotrópicos, son ideales para tratar el P.V.I (2-1), motivo por el cual, en el presente capítulo se tratarán tres aspectos importantes del P.V.I (2-1) en dichos espacios. En la primera sección se aborda el buen planteamiento de (2-1) en los espacios anisotrópicos con pesos anisotrópicos (Teoremas 5.1 y 5.2). En la segunda sección, se muestran tres resultados de continuación única (Teoremas 5.3, 5.4 y 5.5). Y en la tercera y última sección de éste capítulo se emplean los resultados del capítulo 4, para realizar mejoras en el buen planteamiento local en los espacios anisotrópicos con pesos anisotrópicos (Teoremas 5.6 y 5.7).

La norma en estos espacios, como se estableció en la Definición 1.7, tiene la forma:

$$\|f\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}} = \|f\|_{L^2_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)} .$$

El primer sumando, en vista de la identidad de Plancherel, implica que se deben considerar las derivadas de $\hat{f}$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$, mientras que el segundo, sugiere que f debe estar en el espacio de Sobolev anisotrópico $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ estudiado en el capítulo anterior. Para tratar esta cuestión, es importante considerar la transformada de Fourier del grupo generado por la parte lineal de la ecuación (2-1), por lo tanto, se considera f tal que, $\hat{f} = V\hat{\varphi} = e^{-it\left(sgn(\xi)|\xi|^{2+\alpha} \pm \xi|\eta|^{1+\beta}\right)}\hat{\varphi}$, y se estimarán sus derivadas respecto a las variables ξ y η. Con este fin, se listarán dichas derivadas, que en el caso de la variable ξ son:

$$\partial_\xi V = (-it)(\left((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} \pm |\eta|^{1+\beta}\right))V.$$

$$\partial_\xi^2 V = \left[(-it)\left((2+\alpha)(1+\alpha)sgn(\xi)|\xi|^{\alpha}\right) + (-it)^2\left((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} \pm |\eta|^{1+\beta}\right)^2\right]V.$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi^3 V = &\left[(-it)\left((2+\alpha)(1+\alpha)\alpha|\xi|^{\alpha-1}\right)\right]V \\ &+ \left[3(-it)^2\left((2+\alpha)(1+\alpha)sgn(\xi)|\xi|^{\alpha}\right)\left((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} \pm |\eta|^{1+\beta}\right)\right]V \\ &+ \left[(-it)^3\left((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} \pm |\eta|^{1+\beta}\right)^3\right]V.\end{aligned}$$

Por lo tanto para $m = 1, 2, \ldots$, la derivada de orden m de V se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\partial_\xi^m V = &\left[\sum_{j=1}^{m-1}(-it)^j C_{\alpha,j}\left(sgn(\xi)\right)^{m+j}\sum_{k=1}^{j}|\xi|^{(1+\alpha)(j+1-k)-(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)(k-1)}\right]V \\ &+ \left[(-it)^m\sum_{j=0}^{m}C_{\alpha,j}|\xi|^{(1+\alpha)(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)j}\right]V.\end{aligned}$$

Este cálculo, junto con algunas estimativas que se nombrarán en su momento, conducen al siguiente resultado:

Lema 5.1.
Si $0 < \alpha < 1,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ \varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}$*, con* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^+$ *y* $s_1 \geq r(1+\alpha),\ s_2 \geq r(1+\beta)$*, cuando* $0 < r < \frac{5}{2} + \alpha$*, entonces,*

$$\left\| D^r_\xi \left(V\hat{\varphi}\right)\right\|_0 \leq p(t) \left\|\varphi\right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}}, \tag{5-1}$$

donde $p(t)$ *es una función continua y creciente.*

Para $\frac{5}{2} + \alpha \leq r < \frac{7}{2} + \alpha$*, el resultado es también válido, siempre que,* $\partial^j_\eta(0,\eta) = 0$ *para* $0 \leq j \leq \lfloor r \rfloor - 2$*, donde* $\lfloor \cdot \rfloor$ *es la función parte entera.*

Demostración. Para obtener dicha acotación se tratarán primero los casos enteros, $n = 1,2,3,4$ y luego los casos no enteros.

Derivadas enteras:

Comenzando con el caso en que $n = 1$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_\xi(V\hat{\varphi})\right\|_0 &\leq \left\|(\partial_\xi\hat{\varphi})\,V\right\|_0 + \left\|(\partial_\xi V)\,\hat{\varphi}\right\|_0 \\
&\leq \left(\left\|\partial_\xi\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|(-it)\left((2+\alpha)|\xi|^{1+\alpha} \pm |\eta|^{1+\beta}\right)\hat{\varphi}\right\|_0\right)\left\|V\right\|_\infty \\
&\leq C\left(\left\|x\varphi\right\|_0 + t\left(\left\|D^{1+\alpha}_\xi\varphi\right\|_0 + \left\|D^{1+\beta}_\eta\varphi\right\|_0\right)\right)\left\|V\right\|_\infty \\
&\leq C(1+t)\left\|\varphi\right\|^{s_1,s_2}_{1,0},
\end{aligned}$$

siempre que $s_1 \geq 1+\alpha$ y $s_2 \geq 1+\beta$.

Ahora, se tratarán los casos $n = 2,3,4$. En los casos $n = 3,4$ se deben tener en cuenta las expresiones que generen exponentes negativos en la variable ξ, los cuales deben ser tratados de una manera especial.

$$\begin{aligned}
||\partial^n_\xi(V\hat{\varphi})||_0 \leq &\sum_{m=1}^{n} \left\|\left(\partial^{n-m}_\xi\hat{\varphi}\right)\left(\partial^m_\xi V\right)\right\|_0 + \left\|\left(\partial^n_\xi\hat{\varphi}\right)V\right\|_0 \\
\leq &\left\|\left(\partial^n_\xi\hat{\varphi}\right)V\right\|_0 \\
&+ \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{j} t^j C_{\alpha,j}\left\|\left(\partial^{n-m}_\xi\hat{\varphi}\right)\left((sgn(\xi))^{m+j}|\xi|^{(1+\alpha)(j+1-k)-(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)(k-1)}V\right)\right\|_0 \\
&+ \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} t^m C_{\alpha,j}\left\|\left(\partial^{n-m}_\xi\hat{\varphi}\right)\left(|\xi|^{(1+\alpha)(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)j}V\right)\right\|_0 \\
\leq &\left\|\varphi\right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{n,0}} + I + II.
\end{aligned} \tag{5-2}$$

Como en la desigualdad (5-2) todas las sumas son finitas, basta acotar cada uno de los sumandos. Los términos de la primera sumatoria I, se dividen en dos casos, cuando el término $|\xi|$ tiene exponente no negativo ($m-j \leq (j+1-k)(1+\alpha)$) y cuando tiene exponente negativo ($m-j > (j+1-k)(1+\alpha)$):

Caso $m - j \leq (j+1-k)(1+\alpha)$: Los términos que se han de acotar son de la forma:

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right) \left((sgn(\xi))^{m+j}|\xi|^{(1+\alpha)(j+1-k)-(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)(k-1)}V\right) \right\|_0 \\
&\quad \leq ||V||_\infty \left\|(sgn(\xi))^{m+j}|\xi|^{(1+\alpha)(j+1-k)-(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)(k-1)} \left(\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right)\right\|_0 \\
&\quad \leq \left\| |\xi|^{m(1+\alpha)-\frac{(m-j)m}{j+1-k}} \left(\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right)\right\|_0 + \left\| |\eta|^{\frac{(1+\beta)(k-1)m}{m-j-1+k}} \left(\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right)\right\|_0,
\end{aligned} \tag{5-3}$$

que es consecuencia de la desigualdad de Young con $p = \dfrac{j+1-k}{m}$ y $q = \dfrac{m-j-1+k}{m}$, siempre que $k \neq 1$.

Los términos de (5-3) se acotan haciendo uso del Lema 1.3; para el primer sumando se consideran $\theta_1 = \dfrac{n-m}{n}$, $a_1 = n$ y $b_1 = \dfrac{n(1+\alpha)(j+1-k)-n(m-j)}{j+1-k} < n(1+\alpha)$; y para el segundo sumando, $\theta_2 = \dfrac{n-m}{n}$, $a_2 = n$ y $b_2 = \dfrac{n(1+\beta)(k-1)}{m-j-1+k} < n(1+\beta)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\left(|\xi|^{(1+\alpha)(j+1-k)-(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)(k-1)}V\right)\right\|_0 \\
&\quad \leq C\|V\|_\infty \left(\left\|\langle\xi\rangle^{\frac{n(1+\alpha)(j+1-k)-n(m-j)}{j+1-k}}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|J_\xi^n\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|\langle\eta\rangle^{\frac{n(1+\beta)(j+1-k)(k-1)}{m-j-1+k}}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|J_\eta^n\hat{\varphi}\right\|_0 \right) \\
&\quad \leq C\,\|\varphi\|_{F_{n,0}^{s_1,s_2}}.
\end{aligned} \tag{5-4}$$

Si $k = 1$, se debe aplicar la desigualdad de Young con $p = \dfrac{j}{m}$ y $q = \dfrac{m-j}{m}$, el Lema 1.3 con $\theta = \dfrac{n-m}{n}$, $a = n$ y $b = n(1+\alpha)$, como también el Lema 1.4 para así obtener el resultado deseado.

Caso $m - j > (j+1-k)(1+\alpha)$: Esto ocurre en tres ocasiones, la primera cuando, $k = j = 1$ y $m = n = 3$; al aplicar la desigualdad de Young con $p = q = 2$, se obtienen dos sumandos, el primero no presenta dificultad alguna para mostrar que es acotado, mientras que, para mostrar la estimativa del segundo, se debe emplear el Lema 1.4, así que se requiere $\hat{\varphi}(0,\eta) = \partial_\xi\hat{\varphi}(0,\eta) = 0$, obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{\varphi}\left(|\xi|^{(1+\alpha)-2}V\right)\right\|_0 &\leq \|V\|_\infty \left\| |\xi|^\alpha \frac{1}{|\xi|}\left(\hat{\varphi}\right)\right\|_0 \\
&\leq \left\| |\xi|^{2\alpha}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|\frac{1}{|\xi|^2}\hat{\varphi}\right\|_0 \\
&\leq C\,\|\varphi\|_{F_{n,0}^{s_1,s_2}}.
\end{aligned} \tag{5-5}$$

La segunda, cuando $k = j = 1$, $m = 4$ y $n = 4$; al aplicar la desigualdad de Young $\left(\text{con } p = 3 \text{ y } q = \frac{3}{2}\right)$, como antes, se requiere emplear el Lema 1.4, lo cual hace necesario $\hat{\varphi}(0,\eta) = \partial_\xi\hat{\varphi}(0,\eta) =$

$\partial_\xi^2 \hat{\varphi}(0,\eta) = 0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left\|\hat{\varphi}\left(sgn(\xi)|\xi|^{\alpha-2}V\right)\right\|_0 &\leq \|V\|_\infty \left\|sgn(\xi)|\xi|^\alpha \frac{1}{|\xi|^2}\left(\hat{\varphi}\right)\right\|_0\\ &\leq \left\|sgn(\xi)|\xi|^{3\alpha}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|\frac{1}{|\xi|^3}\hat{\varphi}\right\|_0\\ &\leq \|\varphi\|_{F_{n,0}^{s_1,s_2}}.\end{aligned}$$

Y la última ocurrencia es cuando $k = j = 1$, $m = 3$ y $n = 4$, siguiendo las ideas de los casos anteriores, se obtiene la siguiente acotación:

$$\begin{aligned}\left\|\hat{\varphi}\left(|\xi|^{\alpha-1}|\eta|^{1+\beta}V\right)\right\|_0 &\leq ||V||_\infty \left\||\xi|^\alpha \frac{1}{|\xi|^2}\left(|\eta|^{1+\beta}\hat{\varphi}\right)\right\|_0\\ &\leq \left\||\xi|^{2\alpha}|\eta|^{1+\beta}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|\frac{1}{|\xi|^2}|\eta|^{1+\beta}\hat{\varphi}\right\|_0\\ &\leq \|\varphi\|_{F_{n,0}^{s_1,s_2}}.\end{aligned}$$

La acotación de II, se obtiene considerando dos casos, en el primero de ellos, se supone $n > m$, la desigualdad de Young $\left(\text{ con } p = \frac{m}{m-j} \text{ y } q = \frac{m}{j}\right)$, y el Lema 1.3 para los dos sumandos resultantes con $\theta_1 = \frac{n-m}{n}$, $a_1 = n$, $b_1 = (1+\alpha)n$ y $\theta_2 = \frac{n-m}{n}$, $a_2 = n$, $b_2 = (1+\beta)n$ respectivamente, implican la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}\left\|\left(\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right)\left(|\xi|^{(1+\alpha)(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)j}V\right)\right\|_0 &\leq \|V\|_\infty \left\|\left(|\xi|^{(1+\alpha)(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)j}\right)\left(\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right)\right\|_0\\ &\leq \left\||\xi|^{(1+\alpha)m}\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\||\eta|^{(1+\beta)m}\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right\|_0\\ &\leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{n,0}^{s_1,s_2}}.\end{aligned}$$

En el segundo caso, cuando $n = m$, la desigualdad de Young con $p = \frac{m}{m-j}$ y $q = \frac{m}{j}$, garantiza el resultado.

__Derivadas fraccionarias:__

Ahora, se tratarán las derivadas no enteras, del tipo $\left\|\partial_\xi^r(V\hat{\varphi})\right\|_0$ para $r > 0$, se considerará $r = n+b$ con $n = 0, 1, 2, 3$ y $b \in (0,1)$, e incluso el caso $n = 4$ para $b \in (0, \alpha - 1/2)$ y $\alpha \in (1/2, 1)$. De modo que, el cálculo de éstas conlleva a la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial_\xi^r(V\hat{\varphi})\right\|_0=\left\|\mathcal{D}_\xi^b\partial_\xi^n(V\hat{\varphi})\right\|_0\leq\left\|\mathcal{D}_\xi^b(\partial_\xi^n\hat{\varphi})V\right\|_0+\sum_{m=1}^{n}\left\|\mathcal{D}_\xi^b(\partial_\xi^m V)(\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi})\right\|_0\\
&\leq\left\|\mathcal{D}_\xi^b(\partial_\xi^n\hat{\varphi})V\right\|_0\\
&\quad+\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{k=1}^{j}t^jC_{\alpha,j}\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\left(\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right)(sgn(\xi))^{m+j}|\xi|^{(1+\alpha)(j+1-k)-(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)(k-1)}V\right)\right\|_0\\
&\quad+\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}t^mC_{\alpha,j}\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\left(\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right)|\xi|^{(1+\alpha)(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)j}V\right)\right\|_0\\
&=A_1+A_2+A_4.
\end{aligned}\tag{5-6}$$

El término A_1, no presenta ningún problema dada la naturaleza de φ y de V, pues $\|V\|_{L^\infty}$=1.

Para acotar A_4, se aplican las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), obteniendo la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}
A_4&\leq\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\left(\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right)|\xi|^{(1+\alpha)(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)j}\right)V\right\|_0+\left\|\left(\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right)|\xi|^{(1+\alpha)(m-j)}|\eta|^{(1+\beta)j}\mathcal{D}_\xi^b\left(V\right)\right\|_0\\
&=A_{41}+A_{42}.
\end{aligned}$$

El término A_{41} se acota empleando el Lema 1.3 dos veces, primero con $a_1=m-j+b$, $\tilde{b_1}=(m-j+b)(1+\alpha)$ y $\theta=\frac{b}{m-j+b}$ y luego $a_2=n+b$, $\tilde{b_2}=(n+b)(1+\beta)$ y $\theta_2=\frac{n-j+b}{n+b}$ como también, la desigualdad de Young con $p=\frac{j}{m+b}$ y $p=\frac{m-j+b}{m+b}$, obteniéndose:

$$A_{41}\leq\|V\|_\infty\left(\left\||\eta|^{j(1+\beta)}J_\xi^{n-j+b}\hat{\varphi}\right\|_0+\left\||\eta|^{j(1+\beta)}\langle\xi\rangle^{(m-j+b)(1+\alpha)}\hat{\varphi}\right\|_0\right)\leq\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{n,0}^{s_1,s_2}}.$$

Mientras que A_{42} se acota invocando el Lema 1.5, luego la desigualdad de Young en cada sumando así: $p_1=\frac{j}{m},\ q_1=\frac{m-j}{m}$; $p_2=\frac{j}{m+b},\ q_2=\frac{m-j+b}{m+b}$ y $p_3=\frac{j+b}{m+b},\ q_3=\frac{m-j+b}{m+b}$, y por último el Lema 1.3 con $a_1=n,\ \tilde{b}_1=n(1+\beta)$ y $\theta_1=\frac{n-m}{n}$; $a_2=n,\ \tilde{b}_2=n(1+\alpha)$ y $\theta_2=\frac{n-m}{n}$, $a_3=n+b,\ \tilde{b}_3=(n+b)(1+\beta)$ y $\theta_3=\frac{n-m}{n}$ y $a_4=n+b,\ \tilde{b}_4=(n+b)(1+\alpha)$ y $\theta_4=\frac{n-m}{n+b}$, así:

$$\begin{aligned}
A_{42}&\leq\left\||\xi|^{(1+\alpha)(m-j)}|\eta|^{j(1+\beta)}\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\left(t^{\frac{b}{2+\alpha}}+t^b|\xi|^{b(1+\alpha)}+t^b|\eta|^{b(1+\beta)}\right)\right\|_0\\
&\leq t^{\frac{b}{2+\alpha}}\left(\left\||\eta|^{m(1+\beta)}\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right\|_0+\left\||\xi|^{m(1+\alpha)}\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right\|_0\right)\\
&\qquad+2t^b\left(\left\||\eta|^{(m+b)(1+\beta)}\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right\|_0+\left\||\xi|^{(m+b)(1+\alpha)}\partial_\xi^{n-m}\hat{\varphi}\right\|_0\right)\\
&\leq c(t)\,\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{n,0}^{s_1,s_2}}.
\end{aligned}$$

Note que término A_2 no aparece cuando $n=1$, éste término se debe tratar de una manera diferente, dependiendo de los valores entre los cuales varía r, de modo que se contemplará cada caso por separado:

$\underline{\mathbf{2 < r < 5/2 + \alpha,\ 0 < \alpha < 1/2 :}}$

En este caso A_2 posee un único sumando ($m = 2, j = k = 1$), para acotarlo se requiere de una función $\chi(\xi) \in C_0^\infty$ tal que, $supp(\chi) = [-2, 2]$ y $\chi(\xi) = 1$ para $\xi \in (-1, 1)$, luego,

$$\begin{aligned}\|D_\xi^b(|\xi|^\alpha sgn(\xi) V\hat{\varphi})\|_0 &\leq \|D_\xi^b(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)V\hat{\varphi})\|_0 + \|D_\xi^b(|\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi(\xi))V\hat{\varphi})\| \\ &= A_{21} + A_{22}.\end{aligned} \quad (5\text{-}7)$$

Aplicando las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4) se puede ver que:

$$A_{21} \leq \|D_\xi^b(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi))\hat{\varphi}\|_0 + \|D_\xi^b(V\hat{\varphi})|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\|_0 = A_{21^1} + A_{21^2}.$$

Si $b < \alpha + \frac{1}{2}$, la Proposición 1.2 garantiza que $\left\|\mathcal{D}^b\left(|\xi|^\theta \chi(\xi)\right)\right\|_0 < \infty$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}A_{21^1}^2 &= \|D_\xi^b(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi))\hat{\varphi}\|_0^2 \\ &\leq \int \sup_\xi |\hat{\varphi}(\xi,\eta)|^2 d\eta \\ &\leq \int \left\|(\varphi)^{\hat{x,y}}(\cdot,\eta)\right\|_{L_\xi^\infty}^2 d\eta \\ &\leq \int \left\|(\varphi)^{\hat{y}}(\cdot,\eta)\right\|_{L_x^1}^2 d\eta \\ &\leq \int \left(\int (1+x^2)^r |\hat{\varphi}^y(x,\eta)|^2 dx\right)\left(\int \frac{1}{(1+x^2)^r} dx\right) d\eta \\ &\leq \|\varphi\|_{F_{r,0}^{s_1,s_2}}^2.\end{aligned} \quad (5\text{-}8)$$

Para acotar el término A_{21^2}, se emplean las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), como también el Lema 1.5, la desigualdad de Young y el Lema 1.3, como sigue:

$$\begin{aligned}A_{21^2} &\leq \|D_\xi^b(V)|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\varphi}\|_0 + \|D_\xi^b(\hat{\varphi})|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\| \\ &\leq \|(t^{\frac{b}{2+\alpha}} + t^b|\xi|^{b(1+\alpha)} + t^b|\eta|^{b(1+\beta)})|\xi|^\alpha\hat{\varphi}\|_0 + \||\xi|^\alpha D_\xi^b(\hat{\varphi})\|_0 \\ &\leq c(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}.\end{aligned}$$

Ahora se acotará A_{22}, haciendo uso de las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), se obtiene:

$$A_{22} \leq \|D_\xi^b(|\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi(\xi))\hat{\varphi})V\|_0 + \||\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi(\xi))\hat{\varphi}D_\xi^b(V)\|_0 = A_{22^1} + A_{22^2}.$$

Para acotar A_{22^1}, se utilizan la Proposición 1.3 y el Lema 1.3 como sigue:

$$\begin{aligned}A_{22^1} &\leq \left\|D_\xi^b\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)(1-\chi(\xi))\frac{\langle\xi\rangle^\alpha\hat{\varphi}}{\langle\xi\rangle^\alpha}\right)\right\|_0 \\ &\leq \left\|J_\xi^b\left(\langle\xi\rangle^\alpha\hat{\varphi}\right)\right\| \\ &\leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}.\end{aligned} \quad (5\text{-}9)$$

Mientras que A_{22^2}, se acota empleando el Lema 1.5, la desigualdad de Young y el Lema 1.3.

$5/2+\alpha \leq r < 3,\ 0 < \alpha < 1/2:$

Dado que, bajo estas condiciones $r = 2+b$, y $b \in (1/2, 1/2+\alpha)$, debe acotarse el mismo término del caso anterior, pero en este intervalo no se cumplen las hipótesis de la Proposición 1.2, lo que hace necesaria la condición $\hat{\varphi}(0) = 0$, ya que esto permite invocar la Proposición 1.1, para controlar la expresión $\left\|D_\xi^b\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\varphi}\right)\right\|_0$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\left\|D_\xi^b\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\varphi}\right)\right\|_0\\
&\leq \||\xi|^\alpha\, sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\varphi}\|_0 + \|\partial_\xi\left(|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\varphi}\right)\|_0\\
&\leq \|\hat{\varphi}\|_0 + \left\||\xi|^\alpha\chi(\xi)\frac{\hat{\varphi}}{|\xi|}\right\|_0 + \||\xi|^\alpha\chi(\xi)\partial_\xi\hat{\varphi}\|_0 + \||\xi|^\alpha\partial_\xi\chi(\xi)\hat{\varphi}\|_0 + \|\delta_\xi\hat{\varphi}\|_0\\
&\leq \|\hat{\varphi}\|_0 + \||\xi|^\alpha\chi(\xi)\|_{L_\xi^\infty}\|D_\xi\hat{\varphi}\|_0 + \||\xi|^\alpha\chi(\xi)\|_{L_\xi^\infty}\|\partial_\xi\hat{\varphi}\|_0 + \||\xi|^\alpha\,\partial_\xi\chi(\xi)\|_{L_\xi^\infty}\|\hat{\varphi}\|_0 + \|\delta_\xi\hat{\varphi}\|_0\\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}.
\end{aligned}$$

Los demás términos se pueden acotar como se hizo en el caso inmediatamente anterior.

$5/2+\alpha \leq r < 4,\ 1/2 < \alpha < 1:$

En el caso en que $n = 3$ y $r = 3+b$, para acotar el término A_2 se procede como sigue:

$$\begin{aligned}
A_2 \leq& t\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(sgn(\xi)|\xi|^\alpha V\partial_\xi\hat{\varphi}\right)\right\|_0 + t\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(\frac{|\xi|^\alpha}{\xi}\hat{\varphi}V\right)\right\|_0\\
&+ t^2\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(sgn(\xi)|\xi|^{1+2\alpha}\hat{\varphi}V\right)\right\|_0 + t^2\left\|\mathcal{D}_\xi^b\left(sgn(\xi)|\xi|^\alpha|\eta|^{1+\beta}\hat{\varphi}V\right)\right\|\\
=& A_{21} + A_{22} + A_{23} + A_{24}.
\end{aligned}$$

Los términos $A_{21},\ A_{23}$ y A_{24} se acotan de manera similar a como se hizo con los términos de (5-7). El término que genera mayor interés es A_{22}, el cual se acota aplicando las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4) junto con el Lema 1.3, la desigualdad de Young con $p = q = 2$ y el Lema 1.4 para el primer sumando y el segundo sumando se nota A_{32} y se acota más adelante, así pues,

$$\begin{aligned}
A_{22} &= \left\|D_\xi^b\left(|\xi|^\alpha\frac{\hat{\varphi}}{|\xi|}\right)\right\|_0 + A_{32}\\
&\leq \left\|\langle\xi\rangle^{\alpha(1+b)}\left(\frac{\hat{\varphi}}{|\xi|}\right)\right\|_0 + \left\|J_\xi^{(b+1)}\left(\frac{\hat{\varphi}}{|\xi|}\right)\right\|_0 + A_{32}\\
&\leq \left\|\langle\xi\rangle^{2\alpha(b+1)}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|\frac{\hat{\varphi}}{|\xi|^2}\right\| + \left\|\frac{\hat{\varphi}}{|\xi|}\right\|_0 + \left\|D_\xi^{b+1}\frac{\hat{\varphi}}{|\xi|}\right\|_0 + A_{32}\\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}} + A_{32}.
\end{aligned}$$

Para acotar el término A_{32}, se usa la condición $\partial_\xi\hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}(0) = 0$, ya que aparecen potencias negativas de $|\xi|$, por lo tanto, al aplicar la desigualdad de Young y los Lemas 1.4 y 1.5, se obtiene:

$$\begin{aligned} A_{32} &\leq c(t)\left(\left\|\frac{|\xi|^{\alpha}}{\xi}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|\frac{|\xi|^{\alpha+b\alpha+b}}{\xi}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|\frac{|\xi|^{\alpha}|\eta|^{b(1+\beta)}}{\xi}\hat{\varphi}\right\|_0\right) \\ &\leq c(t)\left(\left\||\xi|^{2\alpha}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\||\xi|^{2(\alpha+b\alpha+b)}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\||\xi|^{2\alpha}|\eta|^{b(1+\beta)}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|\frac{\hat{\varphi}}{|\xi|^2}\right\|_0\right) \\ &\leq c(t)\left\|\varphi\right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}}. \end{aligned} \tag{5-10}$$

$3 \leq r < 5/2+\alpha,\ 1/2 < \alpha < 1$:

Si se considera que $r = 3$, debe reconsiderarse la forma de obtener (5-5), pues, se carece de la hipótesis $\partial_\xi\hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}(0) = 0$, por lo que se introduce una función de corte, la cual satisface que $|\xi|^{\alpha-1}\chi$ es integrable cerca del cero, luego,

$$\begin{aligned} \left\||\xi|^{\alpha-1}\hat{\varphi}\right\|_0 &\leq \left\||\xi|^{\alpha-1}\chi\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\||\xi|^{\alpha-1}(1-\chi)\hat{\varphi}\right\|_0 \\ &\leq \left\|\left\|\hat{\varphi}\right\|_{L^\infty_\xi}\left\||\xi|^{\alpha-1}\chi\right\|_{L^2_\xi}\right\|_{L^2_\eta} + \left\||\xi|^{\alpha-1}(1-\chi)\right\|_{L^\infty_\xi}\left\|\hat{\varphi}\right\|_0 \\ &\leq \left\|\left\|\hat{\varphi}\right\|_{L^\infty_\xi}\right\|_{L^2_\eta} + \left\|\hat{\varphi}\right\|_{L^2} \\ &\leq \left\|\varphi\right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}}. \end{aligned} \tag{5-11}$$

Si se considera que $r = 3+b, b < \alpha - 1/2$ y $1/2 < \alpha < 1$, se tienen los mismos términos del caso anterior, por lo cual todos los términos se acotan de la misma manera, salvo A_{22}, ya que no se posee la hipótesis de que $\partial_\xi\hat{\varphi}(0) = \hat{\varphi}(0) = 0$, así, al introducir una función de corte se tiene que:

$$\begin{aligned} A_{22} &\leq \left\|\mathcal{D}^b_\xi\left(|\xi|^\alpha\frac{\hat{\varphi}}{|\xi|}\right)\right\|_0 + A_{32} \\ &\leq \left\|D^b_\xi\left(|\xi|^{\alpha-1}\chi\hat{\varphi}\right)\right\|_0 + \left\|D^b_\xi\left(|\xi|^{\alpha-1}(1-\chi)\hat{\varphi}\right)\right\|_0 + A_{32} \\ &= B_1 + B_2 + A_{32}, \end{aligned} \tag{5-12}$$

donde A_{32} tiene la misma forma de antes. Primero, los esfuerzos se centran en los términos B_1 y B_2. Para acotar B_1 debe sumarse un cero adecuado, como puede verse en seguida

$$B_1 \leq \left\|\mathcal{D}^b_\xi\left(|\xi|^{\alpha-1}\chi(\hat{\varphi}(\xi,n) - \hat{\varphi}(0,n)\right)\right\|_0 + \left\|\mathcal{D}^b_\xi\left(|\xi|^{\alpha-1}\chi(\hat{\varphi}(0,n)\right)\right\|_0 = B_{11} + B_{12}.$$

El término B_{11}, se acota empleando la desigualdad $\|\mathcal{D}_\xi^b f\|_0 \leq \|f\|_0 + \|\partial_\xi f\|_0$, así que

$$\begin{aligned}
B_{11} \leq & \left\| |\xi|^{\alpha-1}\chi(\hat{\varphi}(\xi,n) - \hat{\varphi}(0,n)) \right\|_0 + \left\| \partial_\xi \left(|\xi|^{\alpha-1}\chi(\hat{\varphi}(\xi,n) - \hat{\varphi}(0,n)) \right) \right\|_0 \\
\leq & \left\| |\xi|^\alpha \chi \left(\frac{\hat{\varphi}(\xi,n) - \hat{\varphi}(0,n)}{|\xi|} \right) \right\|_0 + \left\| |\xi|^{\alpha-1} \chi \left(\frac{\hat{\varphi}(\xi,n) - \hat{\varphi}(0,n)}{|\xi|} \right) \right\|_0 \\
& + \left\| |\xi|^\alpha \partial \xi \chi \left(\frac{\hat{\varphi}(\xi,n) - \hat{\varphi}(0,n)}{|\xi|} \right) \right\|_0 + \left\| |\xi|^{\alpha-1} \chi \partial_\xi \hat{\varphi} \right\|_0 \\
\leq & \left\| \|\partial_\xi \hat{\varphi}\|_{L^\infty_\xi} \||\xi|^\alpha \chi\|_{L^2_\xi} \right\|_{L^2_n} + \left\| \|\partial_\xi \hat{\varphi}\|_{L^\infty_\xi} \||\xi|^{\alpha-1} \chi\|_{L^2_\xi} \right\|_{L^2_n} + \left\| \|\partial_\xi \hat{\varphi}\|_{L^\infty_\xi} \||\xi|^\alpha \partial_\xi \chi\|_{L^2_\xi} \right\|_{L^2_n} \\
& + \left\| \|\partial_\xi \hat{\varphi}\|_{L^\infty_\xi} \||\xi|^{\alpha-1} \chi\|_{L^2_\xi} \right\|_{L^2_n} \\
\leq & \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}}.
\end{aligned}$$

El término B_{12}, no presenta dificultades, pues al tomar el supremo en ξ y aplicar la Proposición 1.2, se obtiene su acotación:

$$B_{12} \leq \left\| \|\hat{\varphi}\|_{L^\infty_\xi} \|\mathcal{D}_\xi^b \left(|\xi|^{\alpha-1}\chi \right) \|_{L^2_\xi} \right\|_{L^2_n} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}}.$$

El término B_2, se acota teniendo presente que $|\xi|^{\alpha-1}(1-\chi), \partial_\xi(|\xi|^{\alpha-1}(1-\chi)) \in L^\infty(\mathbb{R})$, así:

$$B_2 \leq \left\| \|\mathcal{D}_\xi^b(|\xi|^{\alpha-1}(1-\chi))\|_{L^\infty_\xi} \|\hat{\varphi}\|_{L^2_\xi} \right\|_{L^2_n} + \left\| \||\xi|^{\alpha-1}(1-\chi)\|_{L^\infty_\xi} \|\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi})\|_{L^2_\xi} \right\|_{L^2_n} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{r_1,r_2}_{r}}.$$

El término A_{32} se reescribe como en (5-10), por lo tanto,

$$A_{32} \leq \left\| \frac{|\xi|^\alpha}{\xi} \hat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \frac{|\xi|^{\alpha+b\alpha+b}}{\xi} \hat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \frac{|\xi|^\alpha |\eta|^{b(1+\beta)}}{\xi} \hat{\varphi} \right\|_0 = A_{32^1} + A_{32^2} + A_{32^3},$$

donde A_{32^1} ya ha sido acotado en (5-11). La estimativa para término A_{32^2} se muestra en seguida:

$$A_{32^2} \leq \|J_\xi^{\alpha+b\alpha+b-1}|\varphi\|_0 \leq \|J_\xi^{r(1+\alpha)}\varphi\|_0.$$

Para controlar el término A_{32^3}, se requiere de otra función de corte, $\chi_0(\eta)$ que cumpla con las mismas condiciones de $\chi(\xi)$, así, al definir $\chi_1(\xi,\eta) = \chi(\xi)\chi_0(\eta)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
A_{32^3} \leq & \left\| |\eta|^{(\alpha+1)b} |\xi|^{\alpha-1} \chi_1 \hat{\varphi} \right\|_0 + \left\| |\eta|^{(\alpha+1)b} |\xi|^{\alpha-1} \left(1-\chi_1\right) \hat{\varphi} \right\|_0 \\
\leq & \left\| \|\hat{\varphi}\|_{L^\infty_\xi} \||\xi|^{\alpha-1}\chi\|_{L^2_\xi} |\eta|^{(\alpha+1)b} \chi_0 \right\|_{L^2_n} + \left\| \frac{(1-\chi_1)}{|\xi|} \right\|_{L^\infty} \left\| |\eta|^{(\alpha+1)b} |\xi|^\alpha \hat{\varphi} \right\|_0 \\
\leq & \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la desigualdad de Young con $p = \frac{b+1}{b}$ y $q = b+1$.

$4 < r < 7/2 + \alpha,\ 1/2 < \alpha < 1$:

En el último caso a considerar, se tendrá en cuenta que $r = 4 + b$ y $0 < b < \alpha - 1/2$. Aquí los términos se acotan siguiendo las ideas de alguno de los casos anteriores, por lo tanto no se mostrarán en detalle.

Los sumandos de A_2 $\|\mathcal{D}_\xi^b((\partial_\xi^2\hat{\varphi})(sgn(\xi)|\xi|^\alpha V))\|_0,\ \|\mathcal{D}_\xi^b((\partial_\xi\hat{\varphi})(sgn(\xi)|\xi|^{2\alpha+1}V))\|_0,$ $\|\mathcal{D}_\xi^b((\partial_\xi\hat{\varphi})(sgn(\xi)^\alpha|\eta|^{1+\beta}V))\|_0$ y $\|\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi}sgn(\xi)|\xi|^{\alpha-2}V)\|_0$ se acotan empleando una función de corte $\chi(\xi)$, la Proposición 1.2 y las ideas utilizadas para acotar (5-7), como se puede ver para el último de los términos mencionados:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi}sgn(\xi)|\xi|^{\alpha-2}V)\|_0 \leq & \|\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi}sgn(\xi)|\xi|^{\alpha-2}\chi V)\|_0 + \|\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi}sgn(\xi)|\xi|^{\alpha-2}(1-\chi)V)\|_0\\ \leq & \|\mathcal{D}_\xi^b(sgn(\xi)|\xi|^\alpha\chi)V\hat{\varphi}|\xi|^{-2}\|_0 + \|sgn(\xi)|\xi|^\alpha\chi\mathcal{D}_\xi^b(V\hat{\varphi}|\xi|^{-2})\|_0\\ & + \|\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi}sgn(\xi)|\xi|^{\alpha-2}(1-\chi)V)\|_0\\ \leq & \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}.\end{aligned}$$

Para estimar el término $\|\mathcal{D}_\xi^b((\partial_\xi\hat{\varphi})(|\xi|^{\alpha-1}V))\|_0$, se deben emplear las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), junto con los Lemas 1.3, 1.5, 1.4, y la desigualdad de Young, como se puede ver en la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}_\xi^b((\partial_\xi\hat{\varphi})(|\xi|^{\alpha-1}V))\|_0 \leq & \|\mathcal{D}_\xi^b((\partial_\xi\hat{\varphi})(|\xi|^{\alpha-1}))V\|_0 + \|(\partial_\xi\hat{\varphi})(|\xi|^{\alpha-1})\mathcal{D}_\xi^b(V)\|_0\\ \leq & c(t)\left(\left\|\langle\xi\rangle^{(b+1)\alpha}\frac{\partial_\xi\hat{\varphi}}{|\xi|}\right\|_0 + \left\|J_\xi^{b+1}\left(\frac{\partial_\xi\hat{\varphi}}{|\xi|}\right)\right\|_0 + \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}\right)\\ \leq & c(t)\left(\|\langle\xi\rangle^{2(b+1)\alpha}\partial_\xi\hat{\varphi}\|_0 + \||\xi|^{-2}\partial_\xi\hat{\varphi}\|_0 + \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}\right)\\ \leq & c(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}.\end{aligned}$$

De los términos restantes $\|\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi}sgn(\xi)|\xi|^{3\alpha+2}V)\|_0,\ \|\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi}sgn(\xi)|\xi|^{2\alpha+1}|\eta|^{1+\beta}V)\|_0,$ $\|\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi}sgn(\xi)|\xi|^\alpha|\eta|^{2(1+\beta)})\|_0$, $\|\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi}|\xi|^{2\alpha}V)\|_0,\ \ \|\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi}|\xi|^{\alpha-1}|\eta|^{1+\beta}V)\|_0$, último es el que mayor interés despierta, debido a su dificultad, por ello, primero se emplean las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4):

$$\|\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi}|\xi|^{\alpha-1}|\eta|^{1+\beta}V)\|_0 \leq \||\eta|^{1+\beta}\mathcal{D}_\xi^b(\hat{\varphi}|\xi|^{\alpha-1})V\|_0 + \||\eta|^{1+\beta}\hat{\varphi}|\xi|^{\alpha-1}\mathcal{D}_\xi^b(V)\|_0 = B_1 + B_2,$$

para luego aplicar los Lemas 1.3 y 1.4, junto con la desigualdad de Young, y obtener así la acotación para B_1,

$$\begin{aligned}B_1 \leq & \left\|\langle\eta\rangle^{(1+\beta)(1+b)}|\xi|^{\alpha-1}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|J_\xi^{1+b}\left(|\xi|^\alpha\frac{\hat{\varphi}}{|\xi|}\right)\right\|_0\\ \leq & \left\|\langle\eta\rangle^{(1+\beta)(2+b)}\frac{\hat{\varphi}}{|\xi|}\right\|_0 + \left\||\xi|^{\alpha(2+b)}\frac{\hat{\varphi}}{|\xi|}\right\|_0 + \|J^{2+b}(|\xi|^\alpha\hat{\varphi})\|_0\\ \leq & \|\langle\eta\rangle^{(3+b)(1+\beta)}\hat{\varphi}\|_0 + \|\langle\xi\rangle^{\alpha(3+b)}\hat{\varphi}\|_0 + \|J_\xi^{3+b}\hat{\varphi}\|_0\\ \leq & \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}}.\end{aligned}$$

La estimativa del término B_2, es consecuencia de los Lemas 1.5, 1.4 y 1.3, junto con la desigualdad de Young.

Concluyendo con la demostración. □

Continuando con el estudio de las derivadas de la función $V\hat{\varphi} = e^{-it\left(sgn(\xi)|\xi|^{2+\alpha} \pm \xi|\eta|^{1+\beta}\right)}\hat{\varphi}$, pero ahora en la variable η, es posible establecer un resultado análogo al anterior:

Lema 5.2.
Si $0 < \alpha < 1$, $0 \le \beta \le 1$, $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}$, con $s_1, s_2 > 2$ y $s_1, s_2 \ge r(1+\beta)$, entonces cuando $0 < r < \beta + \frac{3}{2}$

$$\left\|\mathcal{D}^r_\eta \left(V\hat{\varphi}\right)\right\|_0 \le c(t) \left\|\varphi\right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}}, \tag{5-13}$$

donde $c(t)$ es una función continua y creciente.

El resultado también es válido para $\beta + \frac{3}{2} \le r < \beta + \frac{5}{2}$, si se adiciona la hipótesis de que $\partial^j_\eta(\xi, 0) = 0$, para $0 \le j \le \lfloor r \rfloor - 2$.

Demostración. $\underline{\boldsymbol{0 < r < 1:}}$
El primer caso a tener en cuenta es cuando $r = b$ y $b \in (0,1)$, el cual se acota empleando el Lema 1.6 y la desigualdad de Young, como se ve en seguida:

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{D}^b_\eta \left(V\hat{\varphi}\right)\right\|_0 \le& \left\|\left(\mathcal{D}^b_\eta V\right)\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|V\mathcal{D}^b_\eta\hat{\varphi}\right\|_0 \\
\le& t^b \left\||\xi|^b|\eta|^{b\beta}\hat{\varphi}\right\|_0 + t^{\frac{b}{1+\beta}} \left\||\xi|^b\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|V\mathcal{D}^b_\eta\hat{\varphi}\right\|_0 \\
\le& t^b \left(\left\|\xi^{b(1+\beta)}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|\eta^{b(1+\beta)}\hat{\varphi}\right\|_0\right) + t^{\frac{b}{1+\beta}} \left\||\xi|^b\hat{\varphi}\right\|_0 + \|V\|_\infty \left\|\mathcal{D}^b_\eta\hat{\varphi}\right\|_0 \\
\le& p(t) \left\|\varphi\right\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,b}}.
\end{aligned}$$

$\underline{\boldsymbol{r = 1:}}$
En este caso, debe estimarse la primera derivada de $V\hat{\varphi}$ respecto a η, la cual no presenta mayor dificultad ya que,

$$\partial_\eta V = (-it)\left(\pm\xi(1+\beta)sgn(\eta)|\eta|^\beta\right)V.$$

Por lo tanto, al aplicar la desigualdad de Young con $p = 1+\beta$ y $q = \frac{1+\beta}{\beta}$, se obtiene la estimativa requerida:

$$\begin{aligned}
\left\|\partial_\eta\left(V\hat{\varphi}\right)\right\|_0 \le& \left\|\left(\partial_\eta V\right)\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|V\partial_\eta\hat{\varphi}\right\|_0 \\
\le& t\left\|\xi sgn(\eta)|\eta|^\beta V\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\|V\partial_\eta\hat{\varphi}\right\|_0 \\
\le& t\left(\left\|\xi^{1+\beta}\hat{\varphi}\right\|_0 + \left\||\eta|^{1+\beta}\hat{\varphi}\right\|_0\right) + \left\|\partial_\eta\hat{\varphi}\right\|_0.
\end{aligned}$$

$\underline{\boldsymbol{1 < r < 3/2 + \beta,\ 0 < \beta < 1/2:}}$
En este caso se consideran $r = 1 + b$ y $b \in (0, \beta + 1/2)$, de modo que, la norma que se debe acortar es la siguiente:

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{D}^b_\eta\left[(-it)\left(\pm\xi(1+\beta)sgn(\eta)|\eta|^\beta\right)V\hat{\varphi} + V\partial_\eta\hat{\varphi}\right]\right\|_0 \\
&\le (1+\beta)t\left\|\mathcal{D}^b_\eta\left(\xi sgn(\eta)|\eta|^\beta V\hat{\varphi}\right)\right\|_0 + \left\|\mathcal{D}^b_\eta\left(V\partial_\eta\hat{\varphi}\right)\right\|_0 \\
&\le (1+\beta)t\left(\left\|\mathcal{D}^b_\eta\left(\xi sgn(\eta)|\eta|^\beta\hat{\varphi}\right)\right\|_0 + \left\|\xi sgn(\eta)|\eta|^\beta\mathcal{D}^b_\eta V\right\|_0\right) + \left\|\left(\mathcal{D}^b_\eta V\right)\partial_\eta\hat{\varphi}\right\|_0 + \|V\|_\infty\left\|\mathcal{D}^b_\eta\partial_\eta\hat{\varphi}\right\|_0 \\
&= (1+\beta)t\left(A_1 + A_2\right) + A_3 + \|V\|_\infty\left\|\mathcal{D}^b_\eta\partial_\eta\hat{\varphi}\right\|_0.
\end{aligned}$$

Se procederá a acotar los sumandos $A_i,\ i=1,2,3$. Para A_1 debe introducirse una función $\chi(\eta)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que, $\chi(\eta)\equiv 1$ si $\eta\in(-1,1)$ y $supp(\chi)\subseteq[-2,2]$, luego,

$$\begin{aligned} A_1 \leq& \left\|\mathcal{D}_\eta^b\left(\xi sgn(\eta)|\eta|^\beta\chi(\eta)\hat{\varphi}\right)\right\|_0+\left\|\mathcal{D}_\eta^b\left(\xi sgn(\eta)|\eta|^\beta(1-\chi(\eta))\hat{\varphi}\right)\right\|_0\\ =&A_{11}+A_{12} \end{aligned} \tag{5-14}$$

El término A_{11} se acota aplicando las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), la Proposición 1.2, las ideas usadas para obtener (5-8) y el Lema 1.3, obteniéndose que,

$$\begin{aligned} A_{11}\leq& \left\|\mathcal{D}_\eta^b\left(sgn(\eta)|\eta|^\beta\chi(\eta)\right)\xi\hat{\varphi}\right\|_0+\left\|sgn(\eta)|\eta|^\beta\chi(\eta)\mathcal{D}_\eta^b\left(\xi\hat{\varphi}\right)\right\|_0\\ \leq& \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{s_1,s_2}}. \end{aligned}$$

Para el término A_{12} se aplican las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), obteniendo dos sumandos; en el primero de ellos se aplican el supremo sobre los términos que involucran a χ, la Proposición 1.1, la desigualdad de Young $\big($con $p=\frac{\beta+1}{\beta}$ y $q=\beta+1\big)$ y el Lema 1.3 (con $a_0=1+b,\ b_0'=1+b$), mientras que, para el segundo sumando se aplica el Lema 1.3 con $a_1=1+b$ y $b_1'=1+b$ en dos oportunidades, así:

$$\begin{aligned} A_{12}=&\left\|\mathcal{D}_\eta^b\left(\frac{\xi sgn(\eta)|\eta|^\beta(1-\chi(\eta))\hat{\varphi}(1+|\eta|^\beta)}{1+|\eta|^\beta}\right)\right\|_0\\ \leq&\left\|\xi\hat{\varphi}(1+|\eta|^\beta)\mathcal{D}_\eta^b\left(\frac{sgn(\eta)|\eta|^\beta(1-\chi(\eta))}{1+|\eta|^\beta}\right)\right\|_0+\left\|\frac{sgn(\eta)|\eta|^\beta(1-\chi(\eta))}{1+|\eta|^\beta}\mathcal{D}_\eta^b\left(\xi\hat{\varphi}(1+|\eta|^\beta)\right)\right\|_0\\ \leq&\left\|\mathcal{D}_\eta^b\frac{sgn(\eta)|\eta|^\beta(1-\chi(\eta))}{1+|\eta|^\beta}\right\|_\infty\left\|\xi(1+|\eta|^\beta)\hat{\varphi}\right\|_0\\ &+\left\|\frac{sgn(\eta)|\eta|^\beta(1-\chi(\eta))}{1+|\eta|^\beta}\right\|_\infty\left(\left\|\xi\mathcal{D}_\eta^b\hat{\varphi}\right\|_0+\left\|\mathcal{D}_\eta^b\left(\xi|\eta|^\beta\hat{\varphi}\right)\right\|_0\right)\\ \leq&\left(\left\|\frac{sgn(\eta)|\eta|^\beta(1-\chi(\eta))}{1+|\eta|^\beta}\right\|_\infty+\left\|\partial_\eta\frac{sgn(\eta)|\eta|^\beta(1-\chi(\eta))}{1+|\eta|^\beta}\right\|_\infty\right)\left(\left\|\langle\xi\rangle^{1+\beta}\hat{\varphi}\right\|_0+\left\|\langle\eta\rangle^{1+\beta}\hat{\varphi}\right\|_0\right)\\ &+\left\|\frac{sgn(\eta)|\eta|^\beta(1-\chi(\eta))}{1+|\eta|^\beta}\right\|_\infty\left(\left\|\langle\xi\rangle^{1+b}\hat{\varphi}\right\|_0+\left\|J_\eta^{1+b}\hat{\varphi}\right\|_0+\|\langle y\rangle^{1+b}\varphi\|_0+\|J^{(1+b)(1+\beta)}\varphi\|_0\right)\\ \leq&\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{s_1,s_2}}. \end{aligned}$$

El término A_2 no requiere tanto esfuerzo, ya que es consecuencia de el Lema 1.6 y la desigualdad de Young con $p=\beta+1$ y $q=\frac{1+\beta}{\beta}$, como se puede ver a continuación:

$$\begin{aligned} A_2\leq&\left\|\xi|\eta|^\beta\hat{\varphi}\left(t^b|\xi|^b|\eta|^{b\beta}+t^{\frac{b}{1+\beta}}|\xi|^b\right)\right\|_0\\ \leq& t^b\left\|\xi^{1+b}|\eta|^{\beta(1+b)}\hat{\varphi}\right\|_0+t^{\frac{b}{1+\beta}}\left\|\xi^{1+b}|\eta|^\beta\hat{\varphi}\right\|_0\\ \leq&\left(t^b+t^{\frac{b}{1+\beta}}\right)\left(\left\||\eta|^{(1+b)(1+\beta)}\hat{\varphi}\right\|_0+\left\||\xi|^{(1+b)(1+\beta)}\hat{\varphi}\right\|_0\right)\\ \leq& c(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{s_1,s_2}}. \end{aligned}$$

Para poder acotar A_3 se emplean el Lema 1.6, la desigualdad de Young con $p = 1+\beta$ y $q = \frac{1+\beta}{\beta}$, y finalmente el Lema 1.3 considerando $a = 1+b$ y $b' = (1+b)(1+\beta)$, obteniendo que:

$$\begin{aligned}
A_3 &\leq t^b \left\| |\xi|^b |\eta|^{b\beta} \partial_\eta \hat{\varphi} \right\|_0 + t^{\frac{b}{1+\beta}} \left\| \xi^b \partial_\eta \hat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq t^b \left(\left\| \xi^{b(1+\beta)} \partial_\eta \hat{\varphi} \right\| + \left\| \eta^{b(1+\beta)} \partial_\eta \hat{\varphi} \right\| \right) + t^{\frac{b}{1+\beta}} \left\| \xi^b \partial_\eta \hat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq t^b \left(\left\| \langle \xi \rangle^{(1+b)(1+\beta)} \hat{\varphi} \right\|_0 + 2 \left\| J_\eta^{1+\beta} \hat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \langle \eta \rangle^{(1+b)(1+\beta)} \hat{\varphi} \right\|_0 \right) + t^{\frac{b}{1+\beta}} \left(\left\| \langle \xi \rangle^{1+b} \hat{\varphi} \right\|_0 + \left\| J_\eta^{1+b} \hat{\varphi} \right\|_0 \right) \\
&\leq c(t) \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{s_1,s_2}}.
\end{aligned}$$

$\underline{\boldsymbol{r = 2:}}$

Para este caso, se requiere controlar la segunda derivada de $V\hat{\varphi}$ con respecto a η, esto implica el uso de la hipótesis $\hat{\varphi}(\xi, 0) = 0$, como se puede ver a continuación:

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_\eta^2 (V\hat{\varphi}) \right\|_0 &\leq \left\| \xi |\eta|^\beta \frac{\hat{\varphi}}{|\eta|} V \right\|_0 + \left\| \xi^2 |\eta|^{2\beta} \hat{\varphi} V \right\|_0 + \left\| \xi |\eta|^\beta sgn(\eta) V \partial_\eta \hat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \partial_\eta^2 \hat{\varphi} \right\|_0 \\
&= A_1 + A_2 + A_3 + A_4.
\end{aligned}$$

El término A_4 no presenta ningún problema para acotarse, dadas las hipótesis sobre φ.

El término A_3, se estima utilizando la desigualdad de Young y el Lema 1.3, así:

$$\begin{aligned}
\|\xi|\eta|^\beta \partial_\eta \hat{\varphi}\|_0 &\leq \|\xi^{1+\beta} \partial_\eta \hat{\varphi}\|_0 + \||\eta|^{1+\beta} \partial_\eta \hat{\varphi}\|_0 \\
&\leq \|J_\eta^2 \hat{\varphi}\|_0 + \|\langle \xi \rangle^{2(1+\beta)} \hat{\varphi}\|_0 + \|\langle \eta \rangle^{2(1+\beta)} \hat{\varphi}\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,2}^{s_1,s_2}}.
\end{aligned}$$

El término A_2 se controla utilizando la desigualdad de Young con $p = \frac{3(1+\beta)}{3+\beta}$ y $q = \frac{3(1+\beta)}{2\beta}$.

Mientras que, el término A_1 se acota empleando la desigualdad de Young y los Lemas 1.4 y 1.3, como sigue:

$$\begin{aligned}
A_1 &\leq \left\| |\xi|^{1+\beta} \frac{\hat{\varphi}}{|\eta|} \right\|_0 + \left\| |\eta|^{1+\beta} \frac{\hat{\varphi}}{|\eta|} \right\|_0 \\
&\leq \|J_\eta (\langle \xi \rangle \hat{\varphi})\|_0 + \left\| \langle \eta \rangle^\beta \hat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq \left\| J_\eta^2 \hat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \langle \xi \rangle^{2(1+\beta)} \hat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \langle \eta \rangle^\beta \hat{\varphi} \right\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,2}^{s_1,s_2}}.
\end{aligned}$$

$\underline{\boldsymbol{2 < r < 5/2 + \beta,\ 0 < \beta < 1/2:}}$

Para este caso, se considerará $b \in (0, 1/2 + \beta)$, y $r = 2 + b$, y además, la hipótesis $\hat{\varphi}(\xi, 0) = 0$,

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{D}_\eta^b \left(\partial_\eta^2 (V\hat{\varphi}) \right) \right\|_0 &\leq \left\| \mathcal{D}_\eta^b \left(\xi |\eta|^\beta \frac{\hat{\varphi}}{|\eta|} V \right) \right\|_0 + \left\| \mathcal{D}_\eta^b \left(\xi^2 |\eta|^{2\beta} \hat{\varphi} V \right) \right\|_0 \\
&\quad + \left\| \mathcal{D}_\eta^b \left(\xi |\eta|^\beta sgn(\eta) V \partial_\eta \hat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| \mathcal{D}_\eta^b \left(\partial_\eta^2 \hat{\varphi} \right) \right\|_0 \\
&= A_1 + A_2 + A_3 + A_4.
\end{aligned}$$

Se aplican las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4) al término A_1, para así obtener la desigualdad:

$$A_1 \leq \left\| \mathcal{D}^b_\eta \left(\xi|\eta|^\beta \frac{\hat{\varphi}}{|\eta|} \right) V \right\|_0 + \left\| \xi|\eta|^\beta \frac{\hat{\varphi}}{|\eta|} \mathcal{D}^b_\eta (V) \right\|_0 = A_{11} + A_{12}.$$

Para acotar el primero de los sumandos obtenidos, A_{11}, se hace uso de los Lemas 1.4 y 1.3 con $a = (2+b)(1+\beta)$ y $b' = 2+b$, así:

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{D}^b_\eta \left(\xi|\eta|^\beta \frac{\hat{\varphi}}{|\eta|} \right) V \right\|_0 &\leq \|J^{1+b}_\eta (\xi|\eta|^\beta \hat{\varphi})\|_0 \\ &\leq \|\langle y \rangle^{1+b} J^{1+\beta} \varphi\|_0 \\ &\leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}} . \end{aligned}$$

El término A_{12} se limita empleando, los Lemas 1.6, 1.4 y 1.3, como se puede ver a continuación:

$$\begin{aligned} \left\| \xi|\eta|^\beta \frac{\hat{\varphi}}{|\eta|} \mathcal{D}^b_\eta (V) \right\|_0 &\leq c(t) \left(\|\partial_\eta (|\xi|^{1+b}|\eta|^{\beta(1+b)} \hat{\varphi})\|_0 + \|\partial_\eta(|\xi|^{1+\beta}|\eta|^\beta)\|_0 \right) \\ &\leq c(t) \left(\|\langle y \rangle J^{(1+\beta)(1+b)} \varphi\|_0 + \|\langle y \rangle J^{1+\beta+b} \varphi\| \right) \\ &\leq c(t) \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}} . \end{aligned}$$

El término A_2 se controla empleando las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), el Lema 1.6, el Lema 1.3 y la desigualdad de Young, como sigue,

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \left\| \mathcal{D}^b_\eta \left(\xi^2 |\eta|^{2\beta} \hat{\varphi} \right) V \right\|_0 + \left\| \xi^2 |\eta|^{2\beta} \hat{\varphi} \mathcal{D}^b_\eta (V) \right\|_0 \\ &\leq c(t) \left(\left\| \langle y \rangle^b J^{2(1+\beta)} \varphi \right\|_0 + \left\| |\xi|^{2+b} |\eta|^{\beta(2+b)} \hat{\varphi} \right\|_0 + \left\| |\xi|^{2+b} |\eta|^{2\beta} \hat{\varphi} \right\|_0 \right) \\ &\leq c(t) \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}} . \end{aligned}$$

El procedimiento para acotar A_3 es análogo al realizado en (5-7), pero se deben emplear funciones de corte para cada variable, como se puede ver en seguida:

$$\begin{aligned} A_3 &\leq \left\| \mathcal{D}\eta^b \left(\chi(\eta)|\eta|^\beta sgn(\eta) \chi(\xi) \xi V \partial_\eta \hat{\varphi} \right) \right\|_0 + \left\| \mathcal{D}\eta^b \left((1-\chi(\eta))|\eta|^\beta sgn(\eta)(1-\chi(\xi)) \xi V \partial_\eta \hat{\varphi} \right) \right\|_0 \\ &\leq \left\| \mathcal{D}\eta^b \left(\chi(\eta)|\eta|^\beta sgn(\eta) \right) \chi(\xi) \xi V \partial_\eta \hat{\varphi} \right\|_0 + \left\| \chi(\eta)|\eta|^\beta sgn(\eta) \chi(\xi) \xi \mathcal{D}\eta^b \left(V \partial_\eta \hat{\varphi} \right) \right\|_0 \\ &\quad + \left\| \mathcal{D}\eta^b \left((1-\chi(\eta))|\eta|^\beta sgn(\eta) \partial_\eta \hat{\varphi} \right) (1-\chi(\xi)) \xi V \right\|_0 \\ &\quad + \left\| (1-\chi(\eta))|\eta|^\beta sgn(\eta) \partial_\eta \hat{\varphi} (1-\chi(\xi)) \xi \mathcal{D}\eta^b (V) \right\|_0 \\ &\quad = A_{31} + A_{32} + A_{33} + A_{34}. \end{aligned} \tag{5-15}$$

Siguiendo las ideas empleadas para obtener (5-8), se tiene que,

$$A_{31}^2 \leq \int \sup_\eta |\partial_\eta \hat{\varphi}(\xi,\eta)|^2 d\xi \leq \int \|y(\varphi)^{\hat{x}}(\xi,y)\|^2_{L^1_y} d\xi \leq \|\langle y \rangle^2 \varphi\|_0^2.$$

El término A_{32}, requiere emplear las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), el Lema 1.6, la desigualdad de Young y el Lema 1.3, como se pudo ver en el caso cuando $r \in (1,2)$.

El término A_{33}, se controla empleando el Lema 1.3 en dos ocasiones, obteniendo la siguiente estimativa:

$$\begin{aligned}
A_{33} &\leq \|\mathcal{D}^b(|\eta|^\beta \xi \partial_\eta \hat{\varphi})\|_0 \\
&\leq \|\langle y\rangle^b J_y^\beta J_x \langle y\rangle \varphi\|_0 \\
&\leq \|\langle y\rangle^b J^{1+\beta} \langle y\rangle \varphi\|_0 \\
&\leq \|\langle y\rangle^{1+b} \langle y\rangle \varphi\|_0 + \|J^{(1+\beta)(1+b)} \langle y\rangle \varphi\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}} + \|J^{(1+\beta)(2+b)}\varphi\|_0 + \|\langle y\rangle^{2+b}\varphi\|_0 \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}}.
\end{aligned}$$

Y el término A_{34}, se acota empleando el Lema 1.6, la desigualdad de Young y el Lema 1.3:

$$\begin{aligned}
A_{34} &\leq c(t)\left(\|\langle \eta\rangle^{\beta(1+b)}\langle \xi\rangle J_\eta \hat{\varphi}\|_0 + \rangle^\beta \langle \xi\rangle J_\eta \hat{\varphi}\|_0\right) \\
&\leq c(t)\left(|\langle \eta\rangle^{(1+\beta)(1+b)} J_\eta \hat{\varphi}\|_0 + \|\langle\langle \xi\rangle^{(1+\beta)(1+b)} J_\eta \hat{\varphi}\|_0\right) \\
&\leq c(t)\left(\|\langle \eta\rangle^{(1+\beta)(2+b)}\hat{\varphi}\|_0 + \|\langle \xi\rangle^{(1+\beta)(2+b)}\hat{\varphi}\|_0 + \|J_\eta^{2+b}\hat{\varphi}\|_0\right) \\
&\leq c(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}}.
\end{aligned}$$

Mientras que para dominar el término A_4 sólo se necesita utilizar las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), y los Lemas 1.6 y 1.3.

$2 < r < 3/2 + \beta,\ 1/2 < \beta < 1$:

Para acotar el término A_1, cuando se consideran $2 < r < \beta + 3/2$ y $r = 2 + b$ con $b \in (0, \beta - 1/2)$, no se requiere la hipótesis $\hat{\varphi}(\xi, 0) = 0$, pues, al agregar una función de corte $\chi(\eta)$, la función $|\eta|^{\beta-1}\chi(\eta)$ resulta integrable cerca del cero, y además se puede aplicar la Proposición 1.2, lo que ayuda a controlar estos términos siguiendo las ideas usadas para acotar los sumandos B_1 y B_2 en (5-12).

$r = 3$

En este caso se tiene que,

$$\begin{aligned}
\|\partial_\eta^3(V\hat{\varphi})\|_0 \leq & t^3\|\xi^3|\eta|^{3\beta} sgn(\eta)\hat{\varphi}\|_0 + t^2\|\xi^2|\eta|^{2\beta-1} sgn(\eta)\hat{\varphi}\|_0 + t\|\xi|\eta|^{\beta-2} sgn(\eta)\hat{\varphi}\|_0 \\
& + t^2\|\xi^2|\eta|^{2\beta}\partial_\eta\hat{\varphi}\|_0 + t\|\xi|\eta|^{\beta-1}\partial_\eta\hat{\varphi}\|_0 + t\|\xi|\eta|^\beta sgn(\eta)\partial_\eta^2\hat{\varphi}\|_0 + \|\partial_\eta^3\hat{\varphi}\|_0 \\
= & B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7.
\end{aligned}$$

El último término no presenta problemas para acotarse, dado el origen de φ. Para acotar el primer término, únicamente se requiere aplicar la desigualdad de Young $\left(\text{con } p = 1 + \beta \text{ y } q = \frac{1+\beta}{\beta}\right)$. Los términos B_4 y B_6 requieren aplicar la desigualdad de Young y el Lema 1.3 para lograr su acotación.

Mientras que para acotar los términos $B_2,\ B_3$ yB_5 es necesaria la hipótesis $\hat{\varphi}(\xi, 0) = \partial_\eta\hat{\varphi}(\xi, 0) = 0$, con el fin de invocar el Lema 1.4, seguido del Lema 1.3.

$\underline{\boldsymbol{3 < r < 5/2 + \beta,\ 1/2 < \beta < 1:}}$

Haciendo $r = 3 + b$, como $r \in (3, \beta + 5/2)$, se tiene que $b \in (0, \beta - 1/2)$, por lo cual,

$$\begin{aligned}\|D_\eta^b \partial_\eta^3 (V\hat{\varphi})\|_0 \leq & t^3 \|D_\eta^b (\xi^3 |\eta|^{3\beta} sgn(\eta)\hat{\varphi} V)\|_0 + t^2 \|D_\eta^b (\xi^2 |\eta|^{2\beta-1} sgn(\eta)\hat{\varphi} V)\|_0 \\ & + t\|D_\eta^b (\xi |\eta|^{\beta-2} sgn(\eta)\hat{\varphi} V)\|_0 + t^2 \|D_\eta^b (\xi^2 |\eta|^{2\beta} \partial_\eta \hat{\varphi} V)\|_0 \\ & + t\|D_\eta^b (\xi |\eta|^{\beta-1} \partial_\eta \hat{\varphi} V)\|_0 \\ & + t\|D_\eta^b (\xi |\eta|^{\beta} sgn(\eta) \partial_\eta^2 \hat{\varphi} V)\|_0 + \|D_\eta^b (\partial_\eta^3 \hat{\varphi} V)\|_0 \\ = & C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7.\end{aligned}$$

Los términos C_1 y C_7 se acotan empleando las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), como también el Lema 1.6, la desigualdad de Young y el Lema 1.3.

Los términos C_4 y C_6 requieren de las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4) junto a los Lemas 1.6 y 1.3.

Los términos restantes se acotan empleando las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4) y los Lemas 1.6, 1.4 y 1.3, de éstos se mostrará el que tiene la potencia negativa más grande:

$$\begin{aligned}C_3 &\leq \|\mathcal{D}_\eta^{2+b} (\xi |\eta|^\beta \hat{\varphi})\|_0 + \|D_\eta^2 (|\xi|^{1+b} |\eta|^{\beta(1+b)} \hat{\varphi})\|_0 + \|D_\eta^2 (|\xi|^{1+b} |\eta|^\beta \hat{\varphi})\|_0 \\ &\leq \|\langle y\rangle^{2+b} J^{1+\beta} \varphi\|_0 + \|\langle y\rangle^2 J^{(1+b)(1+\beta)} \varphi\|_0 + \|\langle y\rangle^2 J^{1+b+\beta} \varphi\|_0 \\ &\leq \|\varphi\|_{\mathcal{F}_{0,r}^{s_1,s_2}}.\end{aligned}$$

Concluyendo así la demostración. $\square$

5.1. Buen planteamiento en los espacios anisotrópicos con pesos

Los Lemas 5.1 y 5.2 son la base para mostrar el buen planteamiento del P.V.I (2-1) en los espacios $\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}$ (Teorema 5.1) y $\mathcal{F}_{0,r}^{s_1,s_2}$ (Teorema 5.2), respectivamente. De modo que, se procederá a mostrar el primero de éstos resultados:

Demostración del Teorema 5.1: Se probará únicamente el primer numeral del teorema ya que el segundo se puede probar de manera análoga.

Como $\mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2} \subseteq H^{s_1,s_2}$, por la teoría desarrollada en el capítulo anterior (Teorema 4.2) ya se tiene garantizada la existencia de una solución de (2-1) en H^{s_1,s_2}, por lo tanto, u satisface,

$$u(t) = \mathbb{V}(t)\varphi + \int_0^t \mathbb{V}(t-t')u^p u_x dt',$$

siempre que $\varphi \in \mathcal{F}_{r,0}^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$.

Por la contenencia de los espacios, lo único que debe se probado es la persistencia en el espacio $L^2_{r,0}(\mathbb{R}^2)$. Como consecuencia del Lema 5.1, se obtiene:

$$\begin{aligned}\|u(t)\|_{L^2_{r,0}} &\leq \|\mathbb{V}(t)\varphi\|_{L^2_{r,0}} + \int_0^t \|\mathbb{V}(t-t')u^p u_x\|_{L^2_{r,0}} dt' \\ &\leq c(t)\|\varphi\|_{L^2_{r,0}} + \int_0^t c(t-t')\|u^p u_x\|_{L^2_{r,0}} dt' \\ &\leq c(t)\|\varphi\|_{L^2_{r,0}} + \int_0^t c(t-t')\|u_x\|_{L^2_{r,0}} \|u\|^p_{s_1,s_2}\, dt',\end{aligned}$$

la desigualdad de Gronwall garantiza que $\|u(t)\|_{L^2_{r,0}} < \infty$, es decir, $\|u(t)\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}} < \infty$, para $t \in [0,T]$.

Para mostrar la unicidad de la solución en el espacio $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}$, se tomarán dos soluciones u y v con datos iniciales φ_1 y φ_2, respectivamente, tales que

$$\begin{aligned}\|u-v\|_{L^2_{r,0}} &\leq c(t)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2_{r,0}} + \int_0^t c(t-t')\|\partial_x(u^{p+1}-v^{p+1})\|_{L^2_{r,0}} dt' \\ &\leq c(t)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2_{r,0}} + \int_0^t c(t-t')\left(\|\left(u^p-v^p\right)u_x\|_{L^2_{r,0}} + \|v^p\left(u_x-v_x\right)\|_{L^2_{r,0}}\right) dt' \\ &\leq c(t)\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2_{r,0}} \\ &+ \int_0^t c(t-t')\|u-v\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}} \left(\|u-v\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}} \sum_{j=1}^{p-1} \|u^j v^{p-j}\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}} + \|v\|^p_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}}\right) dt',\end{aligned}$$

de modo que al aplicar la desigualdad de Gronwall y suponer que $\varphi_1 = \varphi_2$ se tiene el resultado.

Para mostrar la dependencia continua, se consideran datos iniciales $\varphi_k \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r,0}$, cuyas soluciones correspondientes son u_k, para $k = 1, 2, \cdots, \infty$. Si $\varphi_k \to \varphi_\infty$, $u_k \to u_\infty$ en H^{s_1,s_2}, de nuevo, el objetivo es analizar su comportamiento en $L^2_{r,0}$, pero siguiendo las ideas utilizadas para obtener la unicidad se sigue que:

$$\|u_m - u_\infty\|_{L^2_{r,0}} \leq c(T)\|\varphi_k - \varphi_\infty\|_{L^2_{r,0}} e^{c(T)},$$

de lo que se sigue el resultado. □

La prueba del segundo resultado obtenido en los espacios anisitrópicos con pesos (Teorema 5.2) sigue los mismos pasos del anterior, teniendo en cuenta que la norma en consideración es en $L^2_{0,r}$ en lugar de $L^2_{r,0}$, de modo que,

***Demostración del Teorema* 5.2.** La demostración es análoga a la del teorema anterior, por lo que será omitida. □

Conmo $L^2_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2) = L^2_{r_1,0}(\mathbb{R}^2) \cap L^2_{0,r_2}(\mathbb{R}^2)$, es posible establecer el siguiente resultado:

Corolario 5.1.
Sean $0 < \alpha < 1,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ s_1, s_2 > 2$, *con* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^+$:

1. *Si* $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$, *el P.V.I asociado a (2-1) es localmente bien planteado en* $\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$, *siempre que:* $0 \leq r_1 < \alpha + 5/2,\ 0 \leq r_2 < \beta + 3/2$ *y se tenga que* $s_1, s_2 \geq \text{máx}\{r_1(1+\alpha), r_2(1+\beta)\}$.

2. *Si* $\varphi \in \dot{\mathcal{F}}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}$, *el P.V.I asociado a (2-1) es localmente bien planteado en* $\dot{\mathcal{F}}^{s_1,s_2}_{r_1,r_2}(\mathbb{R}^2)$, *siempre que:* $\alpha + 5/2 \leq r_1 < \alpha + 7/2$ *o* $\beta + 3/2 \leq r_2 < \beta + 5/2$ *y se tenga que* $s_1, s_2 \geq \text{máx}\{r_1(1+\alpha), r_2(1+\beta)\}$.

Demostración. Es consecuencia de los Teoremas 5.1 y 5.2. □

5.2. Continuación única

En esta sección se muestran propiedades de continuación única asociadas al P.V.I (2-1), siguiendo las ideas expuestas en [6], [13] y [25] . El primer resultado de continuación única (Teorema 5.3) se muestra a continuación:

Demostración del Teorema 5.3: Primero, se considerará el caso $0 < \alpha < 1/2$ y $r = 2 + b$, donde $b = 1/2 + \alpha$, por lo tanto $2 < r < 3$; además, sin pérdida de generalidad, se tomará $t_1 = 0$. Como u satisface la ecuación integral, dada por la fórmula de Duhamel, al multiplicar ésta por $|x|^{2+b}$ y aplicar la transformada de Fourier, se obtiene la siguiente ecuación:

$$D_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}\partial_\xi^2 \hat{u} = D_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}\partial_\xi^2\left(V(t)\hat{\varphi}\right) + \frac{i}{2}\int_0^t D_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}\partial_\xi^2\left(V(t-t')\xi\widehat{u^2}\right)dt. \tag{5-16}$$

El objetivo es mostrar que la norma en $L^2(\mathbb{R}^2)$ del lado derecho de (5-16) es finita. Así que, se deben estimar los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
&\|D_\xi^b\left(V(t)\partial_\xi^2\hat{\varphi}\right)\|_0 + \|D_\xi^b\left((\partial_\xi V(t))(\partial_\xi\hat{\varphi})\right)\|_0 + \|D_\xi^b\left((\partial_\xi^2 V(t))\hat{\varphi}\right)\|_0 \qquad (5\text{-}17)\\
&+\int_0^t\left(\|D_\xi^b\left(V(t-t')\partial_\xi^2\widehat{u^2}\right)\|_0 + \|D_\xi^b\left((\partial_\xi V(t-t'))(\partial_\xi\widehat{u^2})\right)\|_0 + \|D_\xi^b\left((\partial_\xi^2 V(t-t'))\widehat{u^2}\right)\|_0\right)dt'.
\end{aligned}$$

Para acotar el primer sumando del lado derecho de (5-17), se utilizan las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), seguidas de los Lemas 1.5 y 1.3, para obtener la siguiente estimativa:

$$\begin{aligned}
\|D_\xi^b\left(V(t)\partial_\xi^2\hat{\varphi}\right)\|_0 &\leq \|\mathcal{D}_\xi^b\left(V(t)\partial_\xi^2\hat{\varphi}\right)\|_0\\
&\leq \|t^b|\xi|^{b(1+\alpha)}\partial_\xi^2\hat{\varphi}\|_0 + \|t^{\frac{b}{2+\alpha}}\partial_\xi^2\hat{\varphi}\|_0 + \|t^b|\eta|^{b(1+\beta)}\partial_\xi^2\hat{\varphi}\|_0 + \|\mathcal{D}_\xi^b\partial_\xi^2\hat{\varphi}\|_0\\
&\leq p(t)\left(\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{5}{2}+\alpha,0}} + \|J_\xi^{2+b}\hat{\varphi}\|_0 + \|\langle\xi\rangle^{(1+\alpha)(2+b)}\hat{\varphi}\|_0 + \|\langle\eta\rangle^{(1+\beta)(2+b)}\hat{\varphi}\|_0\right)\\
&\leq p(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{5}{2}+\alpha,0}},
\end{aligned}$$

donde $s_1 \geq (1+\alpha)(2+b)$ y $s_2 \geq (1+\beta)(2+b)$.

El primer sumando de la parte no lineal de (5-17), se acota considerando $t = t_2 - t'$ y empleando los Lemas 1.3, 1.2 y el de Sobolev (Lema 1.1), como se puede ver en la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}\left\| D_\xi^b \left(V(t)\partial_\xi^2 \xi \widehat{u^2} \right) \right\|_{L^2} \leq & c(t) \left(\| |\xi|^{b(1+\alpha)} \partial_\xi^2 \xi \widehat{u^2} \|_0 + \| \partial_\xi^2 \xi \widehat{u^2} \|_0 + \| \eta |^{b(1+\beta)} \partial_\xi^2 \xi \widehat{u^2} \|_0 + \| \mathcal{D}_\xi^b \partial_\xi^2 \xi \widehat{u^2} \|_0 \right) \\ \leq & c(t) \big(\| \langle \xi \rangle^{(2+b)(1+\alpha)} \xi \widehat{u^2} \|_0 + \| J_\xi^{2+b} \xi \widehat{u^2} \|_0 + \| \partial_\xi^2 \xi \widehat{u^2} \| \\ & + \| \langle \eta \rangle^{(2+b)(1+\alpha)} \xi \widehat{u^2} \|_0 + \| \mathcal{D}_\xi^b \partial_\xi^2 \xi \widehat{u^2} \|_0 \big) \\ \leq & c(t) \big(\| J_x^{(2+b)(1+\alpha)} (uu_x) \|_0 + \| \langle x \rangle^2 uu_x \|_0 + \| J_y^{(2+b)(1+\beta)} (uu_x) \|_0 \\ & + \| \langle x \rangle^{2+b} uu_x \|_0 \big) \\ \leq & c(t) \big(\| J_x u \|_{L^\infty} \| J_x^{(2+b)(1+\alpha)-1} u_x \|_0 + \| J_x^{(2+b)(1+\alpha)} u \|_0 \| u_x \|_{L^\infty} \\ & + \| u_x \|_{L^\infty} \| \langle x \rangle^2 u \| + \| J_y u \|_{L^\infty} \| J_y^{(2+b)(1+\beta)-1} u_x \|_0 \\ & + \| J_y^{(2+b)(1+\beta)} u \|_0 \| u_x \|_{L^\infty} + \| \langle x \rangle^{2+b} u \|_0 \| u_x \|_{L^\infty} \big) \\ \leq & c(t) \| u \|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{2+b,0}}. \end{aligned}$$

La acotación de los demás sumandos siguen estas ideas, excepto por uno de los términos que aparece al expandir el sumando que contiene la segunda derivada de V, ya que no se cumplen las condiciones de la Proposición 1.2, como ocurría en (5-7), por tal motivo se acotará ése término en particular:

$$\begin{aligned} \| D_\xi^b (|\xi|^\alpha sgn(\xi) V \hat{\varphi}) \|_0 \leq & \| \mathcal{D}_\xi^b ((it)|\xi|^\alpha sgn(\xi) \chi V \hat{\varphi}) \|_0 + \| \mathcal{D}_\xi^b ((it)|\xi|^\alpha sgn(\xi)(\chi - 1) V \hat{\varphi}) \|_0 \\ \leq & \| \mathcal{D}_\xi^b ((it)|\xi|^\alpha sgn(\xi) \chi (V-1) \hat{\varphi}) \|_0 + \| \mathcal{D}_\xi^b ((it)|\xi|^\alpha sgn(\xi) \chi \hat{\varphi}) \|_0 \\ & + \| \mathcal{D}_\xi^b ((it)|\xi|^\alpha sgn(\xi)(\chi - 1) V \hat{\varphi}) \|_0. \end{aligned} \tag{5-18}$$

El tercer sumando del lado derecho de (5-18), se acota de manera similar como se hizo en el Lema 5.1 (término A_{22} de (5-7)).

El primer sumando del lado derecho de (5-18), es finito en vista de la Proposición 1.1, y de que $(V - 1)(0, \eta, t) = 0$.

Al notar al segundo sumando del lado derecho de (5-18) como $\|\mathcal{D}_\xi^b(F)\|_0$, dado que $\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{5}{2}+\alpha}$, entonces $V(t)\varphi \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{5}{2}+\alpha}$. Si $x^2 V(t)\varphi - F^\vee \in L^2_{b,0}(\mathbb{R}^2)$, se sigue que $F^\vee \in L^2_{b,0}(\mathbb{R}^2)$, pero esto ocurre si y sólo si $\hat{\varphi}(0, \eta) = 0$ para todo η.

Para la parte no lineal se considera $t = t_2 > 0$, y se razona de manera similar a la parte lineal. Como, $\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}(\partial_\xi^2 \hat{u}(t)) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, entonces,

$$\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha} \left((it)|\xi|^\alpha sgn(\xi) \chi(\xi) \hat{\varphi}(\xi) - i \int_0^t (t - t')|\xi|^\alpha sgn(\xi) \chi(\xi) \xi \widehat{u^2} dt \right) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

De la siguiente estimativa:

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(\int_0^t (t-t')|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\xi\widehat{u^2}dt\right)\right\|_0 \\
&\leq \int_0^t (t-t')\left\|\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}(|\xi|^{\alpha+1}sgn(\xi)\chi(\xi)\widehat{u^2})\right\|_0 dt' \\
&\leq \int_0^t (t-t')\left(\left\|\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}(|\xi|^{\alpha+1}sgn(\xi)\chi(\xi))\right\|_\infty \left\|\widehat{u^2}\right\|_0 + \left\||\xi|^{\alpha+1}\chi(\xi)\right\|_\infty \left\|\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}(\widehat{u^2})\right\|_0\right) dt',
\end{aligned}$$

y de $\left\|x^{\alpha+\frac{1}{2}}u^2\right\|_0 \leq \|u\|_\infty \left\|x^{\alpha+\frac{1}{2}}u\right\|_0$, se sigue que $\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}(\partial_\xi^2\hat{u}-(it)|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\varphi}(\xi)) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Como $u(t) \in \mathcal{F}_{2+b,0}^{s_1,s_2}$, entonces, $(it)|\xi|^\alpha sgn(\xi)\chi(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, lo cual ocurre si y sólo si $\hat{\varphi}(0,\eta) = 0$ para casi toda η.

El argumento anterior, junto a la ecuación integral:

$$\hat{u}(\xi,\eta,t) = V(t)\hat{\varphi} - \frac{i\xi}{2}\int_0^t V(t-t')\widehat{u^2}dt',$$

implican que $\hat{u}(0,\eta,t) = 0$ para casi todo η y $t \in [0,T]$.

En el caso en que $1/2 \leq \alpha < 1$, se consideran $b = \alpha - 1/2$ y $r = 3 + b$, de tal forma que $3 < r < 5/2 + \alpha$ y se acotan los términos de forma análoga, pero utilizando la ecuación :

$$\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}\partial_\xi^3\hat{u} = \mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}\partial_\xi^3 V(t)\hat{\varphi} + \frac{i}{2}\int_0^t \mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}\partial_\xi^3 V(t-t')\xi\widehat{u^2}dt,$$

en lugar de (5-16). □

El segundo resultado obtenido de continuación única (Teorema 5.4) se prueba en seguida:

Demostración del Teorema 5.4: Considerando el caso en que $0 < \alpha < 1/2$ y $r = 3 + b$, con $b = 1/2 + \alpha$, es decir, $3 < r < 4$, y además, sin pérdida de generalidad, se asume $t_1 = 0$. Al u ser solución de (2-2), se puede hacer uso de la fórmula de Duhamel, luego ésta se multiplica por $|x|^{3+b}$ y se aplicar la transformada de Fourier, obteniéndose que

$$D_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}\partial_\xi^3\hat{u} = d_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}\partial_\xi^3\left(V(t)\hat{\varphi}\right) + \frac{i}{2}\int_0^t D_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}\partial_\xi^3\left(V(t-t')\xi\widehat{u^2}\right)dt. \tag{5-19}$$

Tomando la norma en $L^2(\mathbb{R}^2)$, al lado derecho de (5-19), se tiene que

$$\begin{aligned}
&\|D_\xi^b\left(V(t)\partial_\xi^3\hat{\varphi}\right)\|_0 + \sum_{j=1}^3 \|D_\xi^b\left(\partial_\xi^j V(t)\partial_\xi^{3-j}\hat{\varphi}\right)\|_0 \\
&\qquad + \int_0^t \left(\left\|D_\xi^b\left(V(t-t')\partial_\xi^3\xi\widehat{u^2}\right)\right\|_0 + \sum_{j=1}^3\left\|D_\xi^b\left(\partial_\xi^j V(t-t')\partial_\xi^{3-j}\xi\widehat{u^2}\right)\right\|_0\right)dt'.
\end{aligned}$$

Para mostrar que los términos anteriores se pueden acotar de la misma forma en que se hizo en el Lema 5.1, se acotan el primer término de la parte lineal, utilizando las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), y los Lemas 1.5 y 1.3

$$\begin{aligned}
\|D_\xi^b\left(V(t)\partial_\xi^3\hat{\varphi}\right)\|_0 &\leq \|\mathcal{D}_\xi^b\left(V(t)\partial_\xi^3\hat{\varphi}\right)\|_0 \\
&\leq \|t^b|\xi|^{b(1+\alpha)}\partial_\xi^3\hat{\varphi}\|_0 + \|t^{\frac{b}{2+\alpha}}\partial_\xi^3\hat{\varphi}\|_0 + \|t^b|\eta|^{b(1+\beta)}\partial_\xi^3\hat{\varphi}\|_0 + \|\mathcal{D}_\xi^b\partial_\xi^3\hat{\varphi}\|_0 \\
&\leq c(t)\left(\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{7}{2}+\alpha,0}} + \|J_\xi^{3+b}\hat{\varphi}\|_0 + \|\langle\xi\rangle^{(1+\alpha)(3+b)}\hat{\varphi}\|_0 + \|\langle\eta\rangle^{(1+\beta)(3+b)}\hat{\varphi}\|_0\right) \\
&\leq c(t)\|\varphi\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{\frac{7}{2}+\alpha,0}}.
\end{aligned}$$

Y el primer término de la parte no lineal, considerando $t = t_2 - t'$ y empleando los Lemas 1.3, 1.2 y el de Sobolev (Lema 1.1),

$$\begin{aligned}
\left\|D_\xi^b\left(V(t)\partial_\xi^3\xi\widehat{u^2}\right)\right\|_{L^2} \leq& c(t)\left(\||\xi|^{b(1+\alpha)}\partial_\xi^3\xi\widehat{u^2}\|_0 + \|\partial_\xi^3\xi\widehat{u^2}\|_0 + \||\eta|^{b(1+\beta)}\partial_\xi^3\xi\widehat{u^2}\|_0 + \|\mathcal{D}_\xi^b\partial_\xi^3\xi\widehat{u^2}\|_0\right) \\
\leq& c(t)\big(\|\langle\xi\rangle^{(3+b)(1+\alpha)}\xi\widehat{u^2}\|_0 + \|J_\xi^{3+b}\xi\widehat{u^2}\|_0 + \|\partial_\xi^3\xi\widehat{u^2}\| \\
&\quad + \|\langle\eta\rangle^{(3+b)(1+\alpha)}\xi\widehat{u^2}\|_0 + \|\mathcal{D}_\xi^b\partial_\xi^3\xi\widehat{u^2}\|_0\big) \\
\leq& c(t)\|u\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{2+b,0}}.
\end{aligned}$$

Como en el teorema anterior, los términos que se deben analizar con detalle son aquellos que tienen el producto $sgn(\xi)|\xi|^\alpha$, ya que no cumplen con las condiciones de la Proposición 1.2, y bajo las hipótesis consideradas surgen dos sumandos con dicha forma, $sgn(\xi)|\xi|^\alpha|\eta|^{1+\beta}\hat{\varphi}$ y $sgn(\xi)|\xi|^\alpha V\partial_\xi\hat{\varphi}$, el primero de ellos cumple que,

$$sgn(\xi)|\xi|^\alpha|\eta|^{1+\beta}V\hat{\varphi} = sgn(\xi)|\xi|^\alpha|\eta|^{1+\beta}\chi V\hat{\varphi} + sgn(\xi)|\xi|^\alpha|\eta|^{1+\beta}(1-\chi)V\hat{\varphi} = A_1 + A_2,$$

siguiendo las ideas para acotar el término A_{22} de (5-7), se puede ver que $A_2^\vee \in L^2_{\frac{1}{2}+\alpha}$. El sumando A_1 se reescribe como sigue:

$$sgn(\xi)|\xi|^\alpha|\eta|^{1+\beta}\chi V\hat{\varphi} = sgn(\xi)|\xi|^\alpha|\eta|^{1+\beta}\chi\hat{\varphi} + sgn(\xi)|\xi|^\alpha|\eta|^{1+\beta}\chi(V-1)\hat{\varphi} = A_{11} + A_{12},$$

y como $(V-1)(0,\eta,t) = 0$, entonces $A_{12}^\vee \in L^2_{\frac{1}{2}+\alpha}$. El término A_{11} se transforma, sumando un cero adecuado, así:

$$sgn(\xi)|\xi|^\alpha|\eta|^{1+\beta}\chi\hat{\varphi}(\xi) = sgn(\xi)|\xi|^\alpha|\eta|^{1+\beta}\chi\hat{\varphi}(0) + sgn(\xi)|\xi|^\alpha|\eta|^{1+\beta}\chi(\hat{\varphi}(\xi)-\hat{\varphi}(0)) = A_{11^1} + A_{11^2},$$

el Teorema del valor medio garantiza la pertenencia de $A_{11^2}^\vee$ al espacio $L^2_{\frac{1}{2}+\alpha}$. Como $\hat{\varphi}(0) = 0$, entonces $A_{11^1}^\vee \in L^2_{\frac{1}{2}+\alpha}$.

Para el segundo término, $sgn(\xi)|\xi|^\alpha V\partial_\xi\hat{\varphi}$, se realiza la siguiente transformación:

$$sgn(\xi)|\xi|^\alpha V\partial_\xi\hat{\varphi} = sgn(\xi)|\xi|^\alpha\chi(\xi)V\partial_\xi\hat{\varphi} + sgn(\xi)|\xi|^\alpha(1-\chi)V\partial_\xi\hat{\varphi} = B_1 + B_2,$$

como en el Lema 5.1, $B_2^{\vee} \in L^2_{\frac{1}{2}+\alpha,0}(\mathbb{R}^2)$. El término B_1 es más delicado de analizar, para ello se reescribe de la siguiente forma:

$$B_1 = sgn(\xi)|\xi|^{\alpha}\chi(\xi)\partial_{\xi}\hat{\varphi} + sgn(\xi)|\xi|^{\alpha}\chi(\xi)(V-1)\partial_{\xi}\hat{\varphi} = B_{11} + B_{12},$$

donde $\mathcal{D}_{\xi}^{\frac{1}{2}+\alpha}B_{12}$ es un elemento de $L^2(\mathbb{R}^2)$. El término B_{11} se transforma, sumando un cero adecuado, como sigue:

$$B_{11} = sgn(\xi)|\xi|^{\alpha}\chi(\xi)\partial_{\xi}\hat{\varphi}(0,\eta) + sgn(\xi)|\xi|^{\alpha}\chi(\xi)(\partial_{\xi}\hat{\varphi}(\xi,\eta) - \partial_{\xi}\hat{\varphi}(0,\eta)) = B_{11^1} + B_{11^2},$$

como $\mathcal{D}_{\xi}^{\frac{1}{2}+\alpha}(B_{11^2}) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, entonces $\mathcal{D}_{\xi}^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(\partial_{\xi}^3 V(t)\hat{\varphi} - sgn(\xi)|\xi|^{\alpha}\chi(\xi)\partial_{\xi}\hat{\varphi}(0,\eta)\right) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Razonando análogamente a la parte lineal, la parte no lineal, cumple lo siguiente:

$$\mathcal{D}_{\xi}^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(\int_0^{t_2}\left(\partial_{\xi}^3 V(t_2-t')\widehat{u^2} - (t_2-t')sgn(\xi)|\xi|^{\alpha}\chi(\xi)\partial_{\xi}\hat{\varphi}(0,\eta)\right)dt'\right) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Entonces, el hecho de que $\mathcal{D}_{\xi}^{\frac{1}{2}+\alpha}(\partial_{\xi}^3\hat{u}) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, equivale a que:

$$\mathcal{D}_{\xi}^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(sgn(\xi)|\xi|^{\alpha}\chi(\xi)\left(it_2\partial_{\xi}\hat{\varphi}(0,\eta) - i\int_0^{t_2}(t_2-t')\partial_{\xi}(\xi\widehat{u^2}(0,\eta))dt'\right)\right) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Para transformar el término,

$$it_2\partial_{\xi}\hat{\varphi}(0,\eta) - i\int_0^{t_2}(t_2-t')\partial_{\xi}(\xi\widehat{u^2}(0,\eta))dt', \tag{5-20}$$

debe tenerse presente las siguientes identidades:

$$\partial_{\xi}\hat{\varphi}(0,\eta) = \iint -ix\varphi e^{-i\eta y}dxdy, \tag{5-21}$$

y

$$\partial_{\xi}(\xi\widehat{u^2})(0,\eta) = \iint x\partial_x u^2 e^{-i\eta y}dxdy = \iint u^2 e^{-i\eta y}dxdy = \frac{d}{dt}\iint xue^{-i\eta y}dxdy, \tag{5-22}$$

la cual es consecuencia del siguiente hecho:

$$\iint x\partial_t ue^{-i\eta y}dxdy = \iint x\partial_x(D_x^{1+\alpha} \pm D_y^{1+\beta} + \frac{1}{2}u^2)dxdy. \tag{5-23}$$

Al remplazar (5-21) y (5-22) en (5-20), se obtiene la siguiente expresión:

$$-it_2\iint x\varphi e^{-i\eta y}dxdy - i\int_0^{t_2}(t_2-t')\left(\frac{d}{dt'}\iint xue^{-i\eta y}dxdy\right)dt'. \tag{5-24}$$

Integrando por partes el segundo sumando de (5-24), se obtiene que:

$$-it_2\iint x\varphi e^{-i\eta y}dxdy - i(t_2-t')\iint xue^{-i\eta y}dxdy\Big|_{t'=0}^{t'=t_2} + i\int_0^{t_2}\iint xue^{-i\eta y}dxdydt,$$

por lo tanto, (5-20) se puede ver de la siguiente manera:

$$i\int_0^{t_2}\iint xue^{-i\eta y}dxdydt.$$

Como $u(t_2)\in\dot{\mathcal{F}}^{s_1,s_2}_{\frac{7}{2}+\alpha,0}$, entonces

$$\mathcal{D}_\xi^{\frac{1}{2}+\alpha}\left(sgn(\xi)|\xi|^\alpha\chi(\xi)\int_0^{t_2}\iint xue^{-i\eta y}dxdydt'\right)\in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Pero esto ocurre únicamente cuando $\int_0^{t_2}\int\int xue^{-i\eta y}dxdydt' = 0$ para cada $\eta\in\mathbb{R}$, en particular cuando $\eta=0$, lo que motiva a definir la función:

$$I(t):=\int_0^{t_2}\int\int xudxdydt',$$

como $I(0)=I(t_2)=0$, el Teorema de Rolle implica la existencia de $\tilde{t}\in(0,t_2)$ tal que,

$$I'(\tilde{t})=\iint xu(\tilde{t})dxdy=0.$$

Análogamente, como $u(t_3)\in\dot{\mathcal{F}}^{s_1,s_2}_{\frac{7}{2}+\alpha,0}$, existe $\tilde{t}_2\in(t_2,t_3)$ tal que,

$$\iint xu(\tilde{t}_2)dxdy=0,$$

de (5-23) con $\eta=0$ junto con el Lema 1.8, se tiene que

$$\frac{d}{dt}\iint xudxdy=\frac{1}{2}\iint u^2dxdy=\frac{1}{2}\iint\varphi^2dxdy,$$

por lo tanto,

$$\iint xudxdy=t\|\varphi\|_0^2+\iint x\varphi dxdy.$$

En conclusión, el primer momento de una solución no nula, es una función estrictamente creciente, por lo cual $\|\varphi\|_0=0$, entonces $u\equiv 0$.

Para el caso en que $1/2\le\alpha<1$, un argumento análogo al realizado garantiza el resultado, pero se utiliza la cuarta derivada de $V(t)\hat{\varphi}$ en lugar de usar (5-19). □

El último de los resultados de continuación única que se alcanzaron (Teorema 5.5), es para la variable y y su prueba es la siguiente:

Demostración del Teorema 5.5: Como en los teoremas anteriores se considerará el caso en que $0\le\beta<1/2$, y $r=1+b$ con $b=1/2+\beta$, y sin pérdida de generalidad se asumirá que $t_1=0$. Dado que

$u \in \mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}$ es solución del P.V.I (2-1), la fórmula de Duhamel, multiplicada por $|y|^r$ y transformada vía la transformada de Fourier, implica que:

$$D_\eta^{\frac{1}{2}+\beta}\partial_\eta \hat{u} = D_\eta^{\frac{1}{2}+\beta}\partial_\eta V(t)\hat{\varphi} + \frac{i}{2}\int_0^t D_\eta^{\frac{1}{2}+\beta}\partial_\eta V(t-t')\xi\widehat{u^2}dt'. \tag{5-25}$$

Tomando la norma en $L^2(\mathbb{R}^2)$, sobre el lado derecho de (5-25), se tienen que considerar los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{D}_\eta^b(V(t)t\xi sgn(\eta)|\eta|^\beta\hat{\varphi})\|_0 + \|\mathcal{D}_\eta^b(V(t)\partial_\eta\hat{\varphi})\|_0\\
&+\int_0^t\left(\|\mathcal{D}_\eta^b(V(t-t')(t-t')\xi sgn(\eta)|\eta|^\beta\xi\widehat{u^2})\|_0 + \|\mathcal{D}_\eta^b(V(t-t')\partial_\eta\widehat{u^2})\|_0\right)dt'\\
=&A_1+A_2+A_3+A_4.
\end{aligned}$$

El término A_2 se puede estimar empleando las propiedades de la derivada de Stein (Teorema 1.4), la desigualdad de Young y el Lema 1.6. Mientras que, para el término A_4 deben usarse los mismos resultados junto con los Lemas 1.2 y de Sobolev, y la consideración adicional de que $t=t_2-t'$, como se puede ver enseguida:

$$\begin{aligned}
A_2 &\le \|t^b|\xi|^b|\eta|^{b\beta}\partial_\eta\hat{\varphi}\|_0 + \|t^{\frac{b}{1+\beta}}|\xi|^b\partial_\eta\hat{\varphi}\|_0\\
&\le p(t)\left(\|\langle\xi\rangle^{b(1+\beta)}\partial_\eta\hat{\varphi}\|_0 + \|\langle\eta\rangle^{b(1+\beta)}\partial_\eta\hat{\varphi}\|_0\right)\\
&\le p(t)\left(\|\langle\xi\rangle^{(1+b)(1+\beta)}\hat{\varphi}\|_0 + \|\langle\eta\rangle^{(1+b)(1+\beta)}\hat{\varphi}\|_0 + \|J_\eta^{1+b}\hat{\varphi}\|_0\right)\\
&\le p(t)\|\varphi\|_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &\le p(t)\left(\|J_x^{(1+b)(1+\beta)}(uu_x)\|_0 + \|J_y^{(1+b)(1+\beta)}(uu_x)\|_0 + \|\langle y\rangle^{1+b}\hat{\varphi}\|_0\right)\\
&\le p(t)\|\varphi\|^2_{\mathcal{F}^{s_1,s_2}_{0,r}},
\end{aligned}$$

para $s_1, s_2 \ge$ máx$\{2,(1+b)(1+\beta)\}$.

Como en los resultados anteriores, se estudiarán en detalle los sumandos que contienen el producto $|\eta|^\beta sgn(\eta)$ pues no cumplen con las condiciones de la Proposición 1.2.

De lo anterior se tiene que

$$\mathcal{D}_\eta^b\partial_\eta\hat{u} + i\mathcal{D}_\eta^b\left(t(\xi|\eta|^\beta sgn(\eta))V(t)\hat{\varphi} + \int_0^t(t-t')\xi|\eta|^\beta sgn(\eta)V(t-t')\xi\widehat{u^2}dt'\right) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Como para $t=t_2$, se tiene que $\mathcal{D}_\eta^{\frac{1}{2}+\beta}\partial_\eta\hat{u} \in L^2$, entonces,

$$\mathcal{D}_\eta^b\left(\xi|\eta|^\beta sgn(\eta)V(t_2)\int_0^{t_2}\left(\hat{\varphi}+(t_2-t')V(-t')\xi\widehat{u^2}\right)dt'\right) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Si se considera a $F = \xi|\eta|^\beta sgn(\eta)V(t_2)\int_0^{t_2}\hat{\varphi} + (t_2-t')V(-t')\xi\widehat{u^2}dt'$, lo anterior equivale a que $\mathcal{D}_\eta^b F \in L^2(\mathbb{R}^2)$, es decir, $\mathcal{D}_\eta^b(\chi(\eta)F + (1-\chi)(\eta)F) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. En vista del Lema 5.2, se tiene la pertenencia de $\mathcal{D}_\eta^b((1-\chi)(\eta)F)$ al espacio $L^2(\mathbb{R}^2)$, lo cual implica que:

$$\mathcal{D}_\eta^b\left(\xi|\eta|^\beta sgn(\eta)V(t_2)\chi(\eta)\int_0^{t_2}\left(\hat{\varphi} + (t_2-t')V(-t')\xi\widehat{u^2}\right)dt'\right) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Si se nota $\hat{g}(\xi,\eta) = \int_0^{t_2}\xi\left(\hat{\varphi} + (t_2-t')V(-t')\xi\widehat{u^2}\right)dt'$, lo anterior es equivalente a:

$$\mathcal{D}_\eta^{\frac{1}{2}+\beta}\left(|\eta|^\beta sgn(\eta)V(t_2)\chi(\eta)\iint g(x,y)e^{-i(x\xi+y\eta)}dxdy\right) \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

es decir,

$$\mathcal{D}_\eta^{\frac{1}{2}+\beta}\left(|\eta|^\beta sgn(\eta)V(t_2)\chi(\eta)\iint g(x,y)e^{-iy\eta}dxdy\right) \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

para casi toda x. En otras palabras,

$$\mathcal{D}_\eta^{\frac{1}{2}+\beta}\left(|\eta|^\beta sgn(\eta)V(t_2)\chi(\eta)\left((\hat{g}^y(x,\eta) - \hat{g}^y(x,0)) + \hat{g}^y(x,0)\right)\right) \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

para casi toda x. Si $F = |\eta|^\beta sgn(\eta)V(t_2)\chi(\eta)$, como $F(\hat{g}^y(x,\eta) - \hat{g}^y(x,0)) \in L^2(\mathbb{R})$, se requiere que el resto esté en $L^2(\mathbb{R})$, es decir,

$$\mathcal{D}_\eta^{\frac{1}{2}+\beta}\left(|\eta|^\beta sgn(\eta)V(t_2)\chi(\eta)\hat{g}^y(x,0)\right) \in L^2(\mathbb{R}),$$

pero esto implica que $\hat{g}^y(x,0) = 0$, equivalentemente,

$$\hat{g}(\xi,0) = \int_0^{t_2}\xi\left(\hat{\varphi}(x,0) + (t_2-t')V(-t')\xi\widehat{u^2}\right)dt' = 0.$$

Lo anterior se puede ver como:

$$\int(\partial_x\varphi(x,y) + \partial_x^2 u^2)dy = 0,$$

o de manera equivalente:

$$2\int(\partial_x u)^2 dy = -\int\left(2u\partial_x^2 u dy + \partial_x\varphi(x,y)\right)dy.$$

Como $\int(2uu_{xx} + \varphi_x)dy \geq 0$, entonces $u_x^2 = 0$, por lo tanto $u_x \equiv 0$, y como la norma en L^2 de la solución es finita, se tiene que $u \equiv 0$. $\square$

5.3. Mejoras en el buen planteamiento

En esta sección se prueban los Teoremas 5.6 y 5.7, empleando los resultados obtenidos en el capítulo 4 y siguiendo las ideas expuestas en [13] y [25].

Demostración del Teorema 5.6: Se mostrará únicamente el primer numeral, ya que el segundo se hace de manera análoga.

Para esta demostración es necesario tener presente la definición de los pesos truncados hecha en el Lema 1.13:

$$\langle x\rangle_N = \begin{cases} \langle x\rangle & \text{si } x \le N \\ 2N & \text{si } x \ge 3N \end{cases}$$

para $N \in \mathbb{Z}^+$, tal que, $\langle x\rangle_N$ sea una función suave, no decreciente en $|x|$, y además satisface las siguientes desigualdades: $\partial_x\langle x\rangle_N \le 1$ y $|\langle x\rangle_N''(x)| \le c\partial_x^2\langle x\rangle$.

Aplicando los pesos truncados sobre la ecuación (2-1) y el producto interno en $L^2(\mathbb{R}^2)$ con $\langle x\rangle_N^\theta u$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\langle x\rangle_N^\theta u\|_0^2 &= \iint \langle x\rangle_N^\theta u\langle x\rangle_N^\theta \partial_x D_x^{1+\alpha} u dxdy - \iint \langle x\rangle_N^\theta u\langle x\rangle_N^\theta \partial_x\partial_y^2 u dxdy \\ &\quad - \iint \langle x\rangle_N^\theta u\langle x\rangle_N^\theta u u_x dxdy \\ &= I + II + III.\end{aligned}$$

Para acotar I es necesario reescribir el término utilizando el conmutador y también emplear la regla de Leibniz, como sigue:

$$\begin{aligned}&\langle x\rangle_N^\theta \partial_x D_x^{1+\alpha} u = -[D_x^\alpha; \langle x\rangle_N^\theta] D_x\partial_x u + D_x^\alpha(\langle x\rangle_N^\theta D_x\partial_x u) \\ &= -[D_x^\alpha; \langle x\rangle_N^\theta] D_x\partial_x u - D_x^\alpha(\partial_x\langle x\rangle_N^\theta D_x u) + D_x^\alpha\partial_x(\langle x\rangle_N^\theta D_x u) \\ &= -[D_x^\alpha; \langle x\rangle_N^\theta] D_x\partial_x u - D_x^\alpha(\partial_x\langle x\rangle_N^\theta D_x u) - D_x^\alpha\partial_x([D_x; \langle x\rangle_N^\theta] u) + D_x^{\alpha+1}\partial_x(\langle x\rangle_N^\theta u) \\ &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4.\end{aligned}$$

La Proposición 1.5 garantiza las siguientes acotaciones:

$$\|A_1\|_0 = \|[D_x^\alpha; \langle x\rangle_N^\theta] D_x\partial_x u\|_0 \le \|J_x^\delta \partial_x\langle x\rangle_N^\theta\|_q \|D_x^\alpha\partial_x u\|_0,$$

y

$$\begin{aligned}\|A_2\|_0 &= \|D_x^\alpha(\partial_x\langle x\rangle_N^\theta D_x u)\|_0 \\ &\le \|[D_x^\alpha; \partial_x\langle x\rangle_N^\theta] D_x u\|_0 + \|\partial_x\langle x\rangle_N^\theta D_x^{\alpha+1} u\|_0 \\ &\le \|J_x^\delta \partial_x^2\langle x\rangle_N^\theta\|_q \|D_x^\alpha u\|_0 + \|\partial_x\langle x\rangle_N^\theta\|_\infty \|D_x^{\alpha+1} u\|_0.\end{aligned}$$

Para el término A_3 se debe tener presente que $[D_x; \langle x\rangle_N^\theta]u = \mathcal{H}(\partial_x\langle x\rangle_N^\theta) - [\mathcal{H}; \langle x\rangle_N^\theta]\partial_x u$. De los Lemas 1.11, 1.12 y la proposición 1.5, se obtiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
&\|D_x^\alpha\partial_x[D_x; \langle x\rangle_N^\theta]u\|_0 = \|D_x^\alpha\partial_x\mathcal{H}(\partial_x\langle x\rangle_N^\theta u) - D_x^\alpha\partial_x[\mathcal{H}; \langle x\rangle_N^\theta]\partial_x u\|_0\\
&\leq \|D_x^{\alpha+1}(\partial_x\langle x\rangle_N^\theta u)\|_0 + \|D_x^\alpha\partial_x[\mathcal{H}; \langle x\rangle_N^\theta]\partial_x u\|\\
&\leq \|D_x^\alpha D_x(\partial_x\langle x\rangle_N^\theta u)\|_0 + \|\partial_x^2[\mathcal{H}; \langle x\rangle_N^\theta]\partial_x u\|_0^\alpha\|\partial_x[\mathcal{H}; \langle x\rangle_N^\theta]\partial_x u\|_0^{1-\alpha}\\
&\leq \|D_x^\alpha(\partial_x^2\langle x\rangle_N^\theta u)\|_0 + \|D_x^\alpha(\partial_x\langle x\rangle_N^\theta\partial_x u)\|_0 + \|\partial_x^2[\mathcal{H}; \langle x\rangle_N^\theta]\partial_x u\|_0 + \|\partial_x[\mathcal{H}; \langle x\rangle_N^\theta]\partial_x u\|_0\\
&\leq \|D_x^\alpha\partial_x^2\langle x\rangle_N^\theta\|_\infty\|u\|_0 + \|\partial_x^2\langle x\rangle_N^\theta\|_\infty\|D_x^\alpha u\|_0 + \|[D_x^\alpha; \partial_x\langle x\rangle_N^\theta]\partial_x u\|_0 + \|\partial_x\langle x\rangle_N^\theta D_x^\alpha\partial_x u\|_0\\
&\quad + \|\partial_x^3\langle x\rangle_N^\theta\|_\infty\|u\|_0 + \|\partial_x^2\langle x\rangle_N^\theta\|_\infty\|u\|_0\\
&\leq \|D_x^\alpha\partial_x^2\langle x\rangle_N^\theta\|_\infty\|u\|_0 + \|\partial_x^2\langle x\rangle_N^\theta\|_\infty\|D_x^\alpha u\|_0 + \|J_x^\delta\partial_x^2\langle x\rangle_N^\theta\|_q\|D_x^\alpha u\|_0\\
&\quad + \|\partial_x\langle x\rangle_N^\theta\|_\infty\|D_x^\alpha\partial_x u\|_0 + \|\partial_x^3\langle x\rangle_N^\theta\|_\infty\|u\|_0 + \|\partial_x^2\langle x\rangle_N^\theta\|_\infty\|u\|_0.
\end{aligned}$$

Por la antisimetría de la derivada, el término $\iint\langle x\rangle_N^\theta u D_x^{\alpha+1}\partial_x(\langle x\rangle_N^\theta u)dxdy$ tiene un aporte nulo en la suma. Por lo tanto $|I| \leq \|\langle x\rangle_N^\theta u\|_0\|u\|_{X^{s_1,s_2}}$.

Para acotar II se debe emplear el siguiente hecho: $|\partial_x\langle x\rangle_N^{2\theta}| \leq \langle x\rangle_N^{2\theta-1}$, como también el Lema 1.13, así:

$$\begin{aligned}
\iint\langle x\rangle_N^\theta u\langle x\rangle_N^\theta\partial_x\partial_y^2 u dxdy &= -\iint(\langle x\rangle_N^\theta)^2\partial_y u\partial_x\partial_y u dxdy\\
&= -\frac{1}{2}\iint(\langle x\rangle_N^\theta)^2\partial_x(\partial_y u)^2 dxdy\\
&= \frac{1}{2}\iint\partial_x(\langle x\rangle_N^\theta)^2(\partial_y u)^2 dxdy\\
&\leq \frac{1}{2}\iint\langle x\rangle_N^{2\theta-1}(\partial_y u)^2 dxdy\\
&\leq \|\langle x\rangle_N^{\theta-\frac{1}{2}}J_y u\|_0^2\\
&\leq \left(\|\langle x\rangle_N^\theta u\|_0 + \|J_y^{2\theta}u\|_0\right)^2\\
&\leq \|\langle x\rangle_N^\theta u\|_0^2 + \|J_y^{s_1}u\|_0^2.
\end{aligned}$$

Para III, se tiene que,

$$\iint\langle x\rangle_N^\theta u\langle x\rangle_N^\theta u\partial_x u = \iint(\langle x\rangle_N^\theta)^2u^2\partial_x u \leq \|\partial_x u\|_\infty\|\langle x\rangle_N^\theta u\|_0^2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\langle x\rangle_N^\theta u\|_0^2 \leq \|\langle x\rangle_N^\theta u\|_0^2(1 + \|\partial_x u\|_\infty) + \|u\|_{r_1,r_2} \leq \|\langle x\rangle_N^\theta u\|_0^2(1 + \|\partial_x u\|_\infty) + M,$$

así pues, de la desigualdad de Gronwall se tiene siguiente acotación:

$$\|\langle x\rangle_N^\theta u\|_0^2 \leq \|\langle x\rangle_N^\theta\varphi\|_0^2 + tM + \int_0^t e^{ct'}(\|\langle x\rangle_N^\theta\varphi\|_0^2 + t'M)dt'.$$

Haciendo que $N \to \infty$, el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue garantiza que

$$\|\langle x\rangle^{\theta} u\|_0^2 \leq \|\langle x\rangle^{\theta} \varphi\|_0^2 + h(t),$$

siendo h una función continua que satisface que $h(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, por lo tanto, $u \in L^{\infty}([0,T] : L^2(\langle x\rangle^{\theta} dxdy))$.

Para obtener la continuidad de la aplicación $t \to \langle x\rangle^{\theta} u(t)$ en $L^2(\mathbb{R}^2, \langle x\rangle^{\theta} dxdy)$, deben tenerse en mente, la continuidad débil y el siguiente hecho:

$$\begin{aligned}\left|\|\langle x\rangle_N^{\theta} u(t)\|_0 - \|\langle x\rangle_N^{\theta} u(t')\|_0\right| &\leq |t-t'| + \int_t^{t'} e^{\tau}\left(\|\langle x\rangle_N^{\theta}\varphi\|_0 + \tau M\right) d\tau \\ &\leq C|t-t'|,\end{aligned}$$

lo cual, junto al Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, implican que

$$\left|\|\langle x\rangle^{\theta} u(t)\|_0 - \|\langle x\rangle^{\theta} u(t')\|_0\right| \leq C|t-t'|.$$

Por tanto $t \mapsto \|\langle x\rangle^{\theta} u(t)\|_0^2$, resulta continua en $L^2(\mathbb{R}^2, \langle x\rangle^{\theta} dxdy)$.

Para ver la unicidad se considera otra solución v de (2-1), cuyo dato inicial es ϕ. Definiendo $z = u - v$ y empleando un procedimiento como el anterior, se obtiene que,

$$\|\langle x\rangle_N^{\theta} z\|_0^2 \leq \|\langle x\rangle_N^{\theta}(\varphi-\phi)\|_0^2 + ct\|\varphi-\phi\|_0 + \int_0^t e^{ct'}(\|\langle x\rangle_N^{\theta}(\varphi-\phi)\|_0^2 + ct'\|\varphi-\phi\|_0^2)dt'.$$

La dependencia continua es consecuencia de un argumento tipo Bona-Smith.

Para tratar la persistencia cuando $r = 1+\theta$, debe hacer un pequeño ajuste al argumento anterior:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\langle x\rangle_N^{\theta} xu\right\|_0^2 = &\iint \langle x\rangle_N^{\theta} xu \langle x\rangle_N^{\theta} x\partial_x D_x^{1+\alpha} u dxdy \pm \iint \langle x\rangle_N^{\theta} xu\langle x\rangle_N^{\theta} x\partial_x D_y^{1+\beta} u dxdy \\ &- \iint \langle x\rangle_N^{\theta} xu \langle x\rangle_N^{\theta} xuu_x dxdy \\ =&I + II + III.\end{aligned}$$

I se puede ver como:

$$I = \iint \langle x\rangle_N^{\theta} xu\langle x\rangle_N^{\theta} D_x^{1+\alpha}\partial_x(xu)dxdy - (2+\alpha)\iint \langle x\rangle_N^{\theta} xu\langle x\rangle_N^{\theta} D_x^{1+\alpha} u dxdy = I_1 + I_2.$$

I_1 es análogo al sumando I del caso $r = \theta$. En el término I_2 se aplica la desigualdad de Cauchy - Schwartz, obteniendo la siguiente desigualdad:

$$|I_2| \leq \|\langle x\rangle_N^{\theta} xu\|_0 \|\langle x\rangle_N^{\theta} D_x^{1+\alpha} u\|_0,$$

lo cual sugiere que el término involucrado en la segunda norma, requiere ser transformado utilizando el conmutador, así :

$$\langle x\rangle_N^\theta D_x^{1+\alpha}u = \left[\langle x\rangle_N^\theta, D_x^\alpha\right] D_x u + D_x^\alpha \langle x\rangle_N^\theta D_x u = I_{21} + I_{22},$$

donde el primer sumando es acotado gracias a la Proposición 1.5; para el segundo se tiene que $I_{22} = D_x^\alpha \partial_x \left(\langle x\rangle_N^\theta \mathcal{H}u\right) - D_x^\alpha \partial_x \langle x\rangle_N^\theta \mathcal{H}u = D_x^\alpha \partial_x \left(\langle x\rangle_N^\theta \mathcal{H}u\right) - (D_x^\alpha \mathcal{H}\partial_x \left(\langle x\rangle_N^\theta u\right) + D_x^\alpha \partial_x \left[\langle x\rangle_N^\theta, \mathcal{H}\right] u)$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|I_{22}\|_0 \leq & \| \left[J_x^\alpha, \partial_x \langle x\rangle_N^\theta\right] \mathcal{H}u) \|_0 + \| \partial_x \langle x\rangle_N^\theta J_x^\alpha \mathcal{H}u\|_0 + \left\| J_x^{1+\alpha}\left(\langle x\rangle_N^\theta u\right)\right\|_0 \\ & + \|D_x\partial_x \left[\langle x\rangle_N^\theta, \mathcal{H}\right] u\|_0^\alpha \| \partial_x \left[\langle x\rangle_N^\theta, \mathcal{H}\right] u\|_0^{1-\alpha} \\ \leq & \|u\|_0 + \|J_x^\alpha u\|_0 + \left\|J_x^{1+\alpha}\left(\langle x\rangle_N^\theta u\right)\right\|_0 + \left\|\partial_x^2 \langle x\rangle_N^\theta\right\|_\infty^\alpha \|u\|_0^\alpha \left\|\partial_x \langle x\rangle_N^\theta\right\|_0^{1-\alpha} \|u\|_0^{1-\alpha},\end{aligned}$$

de lo que se sigue que $|I_2| \leq \|\langle x\rangle_N^\theta xu\|_0 \|u\|_{X^{s_1,s_2}}$.

II se puede ver como:

$$II = \iint \langle x\rangle_N^\theta xu \langle x\rangle_N^\theta \partial_x D_y^{1+\beta}(xu)dxdy - \iint \langle x\rangle_N^\theta xu \langle x\rangle_N^\theta D_y^{1+\beta} u dxdy = II_1 + II_2.$$

II_1 es análogo al sumando II del caso $r = \theta$. Para estimar II_2, basta observar lo siguiente:

$$|II_2| \leq \left\|\langle x\rangle_N^\theta xu\right\|_0 \left\|\langle x\rangle_N^\theta D_y^{1+\beta} u\right\|_0.$$

El sumando III es análogo al del caso $r = \theta$.

Para los casos cuando $r = 2 + \theta$, se puede emplear la ecuación integral y aplicando el Lema 5.1 se tiene el resultado. □

***Demostración del Teorema* 5.7**: Siguiendo las ideas del Teorema anterior, se considerará primero el caso $r = \theta$. Se aplican los pesos truncados, en la variable y, a la ecuación (2-1) y se hace el producto interno en $L^2(\mathbb{R}^2)$ con $\langle y\rangle_N^\theta u$, obteniendo que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\langle y\rangle_N^\theta u\|_0^2 = & \iint \langle y\rangle_N^\theta u \langle y\rangle_N^\theta \partial_x D_x^{1+\alpha} u dxdy \pm \iint \langle y\rangle_N^\theta u \langle y\rangle_N^\theta \partial_x \partial_y^2 u dxdy \\ & + \iint \langle y\rangle_N^\theta u \langle y\rangle_N^\theta u u_x dxdy \\ = & I + II + III.\end{aligned}$$

Los términos I y III tienen un aporte nulo por la independencia de $\langle y\rangle_N^\theta$ de x y la antisimetría de la derivada.

Para el término II, primero se asumirá que $\theta > 1/2$, así, al integrar por partes, aplicar las desigualdades de Hölder y Young, junto con el Lema 1.3, se tiene que:

$$\begin{aligned}
II &= -\int \partial_y \langle y\rangle_N^{2\theta} u \partial_x \partial_y u - \int \langle y\rangle_N^{2\theta} \partial_y u \partial_x \partial_y u \\
&\leq \left\| \langle y\rangle_N^{\theta-1/2} \partial_x u \right\|_0 \left\| \langle y\rangle_N^{\theta-1/2} \partial_y u \right\|_0 \\
&\leq \left\| J_x \left(\langle y\rangle_N^{\theta-1/2} u \right) \right\|_0^2 + \left\| J_y \left(\langle y\rangle_N^{\theta-1/2} u \right) \right\|_0^2 + \left\| \langle y\rangle_N^{\theta} u \right\|_0^2 \\
&\leq \left\| \langle y\rangle_N^{\theta} u \right\|_0^2 + \|u\|_{2\theta}^2.
\end{aligned}$$

Si $\theta \in (0, 1/2]$, entonces $\left| \partial_y \langle y\rangle_N^{2\theta} \right| \leq \langle y\rangle_N^{2\theta} \leq 1$, por lo tanto:

$$\int \langle y\rangle_N^{2\theta} u \partial_x \partial_y^2 u = -\int \partial_y \langle y\rangle_N^{2\theta} u \partial_x \partial_y u = \int \partial_y \langle y\rangle_N^{2\theta} \partial_x u \partial_y u \leq \|\partial_x u\| \, \|\partial_y u\| \leq \|u\|_{H^1}^2,$$

luego,

$$\frac{d}{dt} \left\| \langle y\rangle_N^{\theta} u \right\|^2 \leq c \left(1 + \left\| \langle y\rangle_N^{\theta} u \right\|^2 \right),$$

al integrar respecto a t, usar la desigualdad de Gronwall y el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se tiene que la aplicación $t \mapsto \langle y\rangle^{\theta} u(t)$ es continua en $L^2(\mathbb{R}^2, \langle y\rangle^{\theta} dxdy)$.

El caso en que $r = 1 + \theta$ se hace de manera similar. Y el caso $r = 2 + \theta$ se puede trabajar con la ecuación integral, y con el Lema 5.2.

La unicidad y la dependencia continua se obtienen de manera análoga al Teorema anterior. □

6 Ondas solitarias

En este capítulo, se tratará un aspecto diferente al abordado en los demás capítulos del presente trabajo, ya que, tiene como objetivo, mostrar la existencia de ondas solitarias asociadas a (2-1) en los siguientes casos: Caso 1: $0 \leq \alpha \leq 1,\ \beta = 1$ y $p = 1, 2, 3$. Caso 2: $\alpha = \beta$, $0 \leq \alpha \leq 1$ y $p = 1, 2$. Para ello, se considera una solución de (2-1) en forma de una onda viajera $u(x, y, t) = \phi(x - ct, y)$, con $c > 0$; siendo c la velocidad de la onda y $\xi = x - ct$ la variable característica. Además, para que ϕ sea una onda solitaria, se supondrá que pertenece al espacio $H^{\frac{1+\alpha}{2}, \frac{1+\beta}{2}}(\mathbb{R}^2)$, (una presentación más detallada sobre ondas viajeras, puede consultarse en [67] y en las referencias allí contenidas). La forma de abordar tal cuestión, será siguiendo las ideas expuestas por Albert en [2], trabajo en el cual se expone de manera detallada el principio de compacidad concentrada, introducido por Lions en [55] y [56].

Dado que ϕ satisface la ecuación diferencial parcial:

$$-c\phi_x - \partial_x(D_x^{1+\alpha}\phi + D_y^{1+\beta}\phi) + \frac{1}{p+1}(\phi^{p+1})_x = 0,$$

al integrar ésta respecto a x, se obtiene la siguiente ecuación:

$$-c\phi - (D_x^{1+\alpha}\phi + D_y^{1+\beta}\phi) + \frac{1}{p+1}\phi^{p+1} = 0, \tag{6-1}$$

o equivalentemente,

$$-cQ'(\phi) = I'(\phi),$$

donde, Q e I son las cantidades conservadas (1-7) y (1-8), respectivamente, presentadas en el Lema 1.8, y que se recuerdan, dado el progatogismo que tendrán en el capítulo:

$$Q(u) = \iint u^2 dxdy,$$

y

$$I(u) = \frac{1}{2}\iint \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}u\right)^2 + \left(D_y^{\frac{1+\beta}{2}}u\right)^2 - \frac{2u^{p+2}}{(p+1)(p+2)}dxdy.$$

Con esto en mente, se empleará el principio de compacidad concentrada de Lions (ver [55] y [56]), siguiendo un esquema similar al expuesto en [2] y [6].

Con el fin de llevar a cabo tal argumento, se requiere definir para cada $q > 0$, el siguiente conjunto:

$$G_q := \left\{ \varphi \in H^{\frac{1+\alpha}{2},1}(\mathbb{R}^2) \mid Q(\varphi) = q \right\}, \tag{6-2}$$

para el caso 1. Y

$$G_q := \left\{ \varphi \in H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2) \mid Q(\varphi) = q \right\}, \tag{6-3}$$

para el caso 2.

También es necesario definir la familia de problemas de minimización asociados

$$I_q := \text{ínf}\{I(\varphi) \mid \varphi \in G_q\}. \tag{6-4}$$

Si ϕ es solución de (6-4), también lo es de (6-1), así que, para hallar tal solución, se definirán las siguientes sucesiones:

Definición 6.1.
Una sucesión $(\phi_n)_n$ en $H^{\frac{1+\alpha}{2},1}(\mathbb{R}^2)$ (para el caso 1) o en $H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2)$ (para el caso 2), se conoce como una sucesión minimizante para I_q, si

$$Q(\phi_n) = q, \quad \text{para todo } n \in N, \quad y \quad \lim_{n\to\infty} I(\phi_n) = I_q.$$

Definición 6.2.
Si $(\phi_n)_n$ es una sucesión minimizante para I_q; se define la sucesión, $M_n : [0, \infty] \to [0, q]$ como,

$$M_n(r) := \frac{1}{2} \sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \iint_{\Omega(a,b,r)} \phi_n^2 dxdy,$$

siendo $\Omega(a, b, r)$ el rectángulo $[a - r, a + r] \times [b - r, b + r]$.

Es de resaltar que la sucesión $(M_n)_n$ es una sucesión de funciones crecientes y uniformemente acotada, así pues, el principio de selección de Helly, garantiza la existencia de una sub-sucesión, que se nota de nuevo por $(M_n)_n$, la cual converge puntualmente a una función creciente y acotada $M : [0, \infty] \to [0, q]$, de modo que, tiene sentido definir el siguiente valor:

$$\nu := \lim_{r\to\infty} M(r), \tag{6-5}$$

el cual satisface $0 \leq \nu \leq q$.

En vista de los elementos definidos, el método de compacidad concentrada consiste en dos pasos: Primero: Mostrar que $\nu = q$. Segundo: Probar que dada una sucesión minimizante, ésta tiene una sub-sucesión, que al ser trasladada ligeramente, es fuertemente convergente en $H^{\frac{1+\alpha}{2},1}$ (para el caso 1) o en $H^{\frac{1+\alpha}{2}}$ (para el caso 2), a un elemento del conjunto G_q correspondiente.

Para lograr estos objetivos, lo primero que se muestra, es que I_q es acotado para todo $q > 0$.

Lema 6.1.
$-\infty < I_q < 0$, para todo $q > 0$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, tanto en el caso 1, como en el caso 2.

***Demostración*. Caso 1:** Se considera $\phi \in H^{\frac{1+\alpha}{2},1}(\mathbb{R}^2)$, una función positiva, la cual satisface que $Q(\phi) = q$, de modo que, para cada $\theta > 0$ se define,

$$\phi_\theta(x,y) = \theta^{\frac{1}{2}}\phi(x,\theta y).$$

Aplicando Q a ϕ_θ, se obtiene que,

$$\begin{aligned}
Q(\phi_\theta) &= \frac{1}{2}\iint \phi_\theta^2 dxdy \\
&= \frac{1}{2}\iint \theta\left(\phi(x,\theta y)\right)^2 dxdy \\
&= \frac{1}{2}\iint \phi^2 dxdy = Q(\phi) = q.
\end{aligned}$$

Para mostrar que $I(\phi_\theta) < 0$, se procede como sigue,

$$\begin{aligned}
I(\phi_\theta) &= \frac{1}{2}\iint \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi_\theta\right)^2 + \left(D_y\phi_\theta\right)^2 - \frac{2\phi_\theta^{p+2}}{(p+2)(p+1)}dx \\
&= \frac{1}{2}\iint \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\theta^{\frac{1}{2}}\phi(x,\theta y)\right)^2 + \left(D_y\theta^{\frac{1}{2}}\phi(x,\theta y)\right)^2 - \frac{2\theta^{\frac{1}{2}}\phi(x,\theta y)^{p+2}}{(p+2)(p+1)}dx \\
&= \frac{1}{2}\|D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi\|_0^2 + \frac{1}{2}\theta^2\|D_y\phi\|_0^2 - \frac{\theta^{\frac{p}{2}}}{(p+2)(p+1)}\|\phi\|_{L^{p+2}}^{p+2}.
\end{aligned}$$

Si $\theta <$ mín $\left\{1, \left(\frac{m}{k+l}\right)^{\frac{2}{4-p}}\right\}$, $k = \left\|D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi\right\|_0^2$, $l = \|D_y\phi\|_0^2$ y $m = \frac{2\|\phi\|_{L^{p+2}}^{p+2}}{(p+2)(p+1)}$, se tiene que $I_q < 0$.

El hecho de que $-\infty < I_q$, se sigue del siguiente argumento:

$$\begin{aligned}
2I(\phi) &= 2I(\phi) + 2Q(\phi) - 2Q(\phi) \\
&= \|\phi\|_{\frac{1+\alpha}{2},1}^2 - \int \frac{2\phi^{p+2}}{(p+1)(p+2)} - 2q \\
&\geq -2q - \frac{2}{(p+1)(p+2)}\|\phi\|_{L^{p+2}}^{p+2} \\
&\geq -2q - \frac{2}{(p+1)(p+2)}\|\phi\|_{\frac{1+\alpha}{2},1}^{p+2},
\end{aligned}$$

donde, la última desigualdad es consecuencia de la Proposición 1.6.

Caso 2: Sea ϕ un elemento de $H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2)$, con las mismas consideraciones del caso 1. La primera parte de la prueba es similar a la realizada para tal caso, como se puede ver a continuación:

$$I(\phi_\theta) = \frac{1}{2}\left\|D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi\right\|_0^2 + \frac{1}{2}\theta^{1+\alpha}\left\|D_y^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi\right\|_0^2 - \frac{\theta^{\frac{p}{2}}}{(p+2)(p+1)}\|\phi\|_{L^{p+2}}^{p+2},$$

con $\theta < $ mín $\left\{1, \left(\frac{m}{k+l}\right)^{\frac{2}{2+2\alpha-p}}\right\}$, $k = \left\|D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi\right\|_0^2$, $l = \left\|D_y^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi\right\|_0^2$ y $m = \frac{2\|\phi\|_{L^{p+2}}^{p+2}}{(p+2)(p+1)}$, se tiene que $I_q < 0$.

Para mostrar que $-\infty < I_q$, un argumento análogo al del caso 1, implica que,

$$\begin{aligned} 2I(\phi) &= 2I(\phi) + 2Q(\phi) - 2Q(\phi) \\ &= \|\phi\|_{\frac{1+\alpha}{2}}^2 - \int \frac{2\phi^{p+2}}{(p+1)(p+2)} - 2q \\ &\geq -2q - \frac{2}{(p+1)(p+2)}\|\phi\|_{L^{p+2}}^{p+2} \\ &\geq -2q - \frac{2}{(p+1)(p+2)}\|\phi\|_{\frac{1+\alpha}{2}}^{p+2}, \end{aligned}$$

donde, la última desigualdad es consecuencia del Lema de Sobolev (Lema 1.1). □

El siguiente paso, es mostrar que las sucesiones minimizantes son acotadas.

Lema 6.2.
Para $0 \leq \alpha \leq 1$, si $(\phi_n)_n$ es una sucesión minimizante para I_q, existen constantes $B > 0$ y $\delta > 0$ tales que:
Para el caso 1:

1. $\|\phi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2},1} \leq B$.
2. $\|\phi_n\|_{L^{p+2}} > \delta$, *para n suficientemente grande.*

Para el caso 2:

1. $\|\phi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2}} \leq B$.
2. $\|\phi_n\|_{L^{p+2}} > \delta$, *para n suficientemente grande.*

Demostración. **Caso 1:**

1.
$$\begin{aligned} \|\phi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2},1}^2 &\leq 2I(\phi_n) + 2Q(\phi_n) + \frac{2}{(p+2)(p+1)}\|\phi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2} \\ &\leq C + 2q + C_1\|\phi_n\|_0^{\frac{(1+\alpha)(4+p)-2p}{(1+\alpha)(4-p)}}\left\|D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi_n\right\|_0^{\frac{p}{1+\alpha}}\|\partial_y\phi_n\|_0^{\frac{p}{2}} \\ &\leq C + 2q + C_2 q^{\frac{2[(1+\alpha)(p+4)-2p]}{(1+\alpha)(4-p)}} + \frac{p}{4}\|\partial_y\phi_n\|_0^2, \end{aligned}$$

así que, al considerar $B = \sqrt{\frac{4}{p}\left(C + 2q + C_2 q^{\frac{2[(1+\alpha)(p+4)-2p]}{(1+\alpha)(4-p)}}\right)}$, se tiene el resultado.

2. Para esta prueba se razona por contradicción. Se supone que no existe δ tal que $\|\phi_n\|_{L^{p+2}} > \delta$, así
$$\liminf_{n\to\infty} \iint \phi_n^{p+2} dxdy \leq 0,$$
por lo que,
$$\begin{aligned} I_q &= \lim_{n\to\infty} I(\phi_n) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left\| D_x^{\frac{1+\alpha}{2}} \phi_n \right\|_0^2 + \|\partial_y \phi_n\|_0^2 - \frac{1}{(p+1)(p+2)} \|\phi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2} \\ &\geq -\frac{1}{(p+1)(p+2)} \|\phi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2} \geq 0, \end{aligned}$$
lo cual contradice el lema anterior.

Caso 2:

1.
$$\begin{aligned} \|\phi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2}}^2 &\leq 2I(\phi_n) + 2Q(\phi_n) + \frac{2}{(p+2)(p+1)} \|\phi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2} \\ &\leq C + 2q + C_1 \|\phi_n\|_0^{\frac{2-p}{p+2}} \|\phi_n\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{2p}{p+2}} \\ &\leq C + 2q + C_1 q^{\frac{2-p}{p+2}} \|\phi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2}}^{\frac{2p}{p+2}}, \end{aligned}$$
como $\frac{2p}{p+2} < 2$ se garantiza la existencia de tal B.

2. Se procede de manera análoga al caso 1.

□

El siguiente resultado tiene como objetivo, mostrar la propiedad sub-aditiva de I_q.

Lema 6.3.
Para $q_1,\ q_2 > 0$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, se tiene que $I_{q_1+q_2} < I_{q_1} + I_{q_2}$, tanto para el caso 1, como para el caso 2.

Demostración. **Caso 1:** Para $\theta > 1$ se define $\phi_\theta = \theta\phi$, la cual satisface la identidad:
$$Q(\phi_\theta) = \theta^2 Q(\phi).$$
Mientras que, la segunda ley de conservación, implica que
$$I(\phi_\theta) \leq \theta^{p+2} I(\phi).$$
Por lo tanto,
$$\begin{aligned} I_{\theta^2 q} &= \inf \left\{ I(\phi_\theta) \mid Q(\phi_\theta) = \theta^2 q \right\} \\ &\leq \theta^{p+2} \inf \left\{ I(\phi) \mid Q(\phi) = q \right\} \\ &\leq \theta^2 I_q, \end{aligned}$$

así $I_{\theta q} \leq \theta I_q$, para cada $\theta > 1$.

Si se considera $q_1 > q_2 > 0$, entonces

$$I_{q_1+q_2} = I_{q_1\left(1+\frac{q_2}{q_1}\right)} < \left(1+\frac{q_2}{q_1}\right) I_{q_1} = I_{q_1} + \left(\frac{q_2}{q_1}\right) I_{\frac{q_1}{q_2}q_2} < I_{q_1} + I_{q_2}.$$

Caso 2: La prueba es idéntica a la del caso 1, teniendo en cuenta que el conjunto G_q cambia, pero esta no genera modificación alguna en el argumento, ya que, no se han empleado propiedades de los elementos de dicho conjunto.

$\square$

Para ver que no se da el desvanecimiento de la onda ($\nu = 0$), se presenta los siguientes dos resultados:

Lema 6.4.
Para $0 \leq \alpha \leq 1$, sean $B > 0,\ \delta > 0$ tales que:

(i). Para el caso 1: $\|\phi\|_{\frac{1+\alpha}{2},1} \leq B$ y $\|\phi\|_{L^{p+2}} \geq \delta$, si $\phi \in H^{\frac{1+\alpha}{2},1}(\mathbb{R}^2)$.

(ii). O para el caso 2: $\|\phi\|_{\frac{1+\alpha}{2}} \leq B$ y $\|\phi\|_{L^{p+2}} \geq \delta$, si $\phi \in H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2)$.

Entonces, existe $\eta = \eta(B,\delta) > 0$, tal que

$$\sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \iint_{\Omega(a,b,1/2)} |\phi|^{p+2} dxdy \geq \eta.$$

***Demostración*.** **Caso 1:** Como

$$\|\phi\|^2_{\frac{1+\alpha}{2},1} = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \iint_{\Omega(i,j,1/2)} \phi^2 + (D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi)^2 + (D_y\phi)^2 dxdy \leq \sum_{i,j\in Z} \frac{B^2}{\|\phi\|^{p+2}_{L^{p+2}}} \iint_{\Omega(i,j,1/2)} |\phi|^{p+2} dxdy,$$

entonces, existen $i_0, j_0 \in \mathbb{Z}$, tales que,

$$\iint_{\Omega(i_0,j_0,1/2)} \phi^2 + (D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi)^2 + (D_y\phi)^2 dxdy \leq \frac{B^2}{\|\phi\|^{p+2}_{L^{p+2}}} \iint_{\Omega(i_0,j_0,1/2)} |\phi|^{p+2} dxdy.$$

De la Proposición 1.6, se sigue que $\|\phi\|_{L^{p+2}} \leq C \|\phi\|_{\frac{1+\alpha}{2},1}$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left(\iint_{\Omega(i_0,j_0,1/2)} |\phi|^{p+2} dxdy\right)^{\frac{1}{p+2}} &\leq A \left(\iint_{\Omega(i_0,j_0,1/2)} \phi^2 + (D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi)^2 + (D_y\phi)^2 dxdy\right)^{1/2} \\ &\leq A \left(\frac{B^2}{\|\phi\|_{L^{p+2}}}^{p+2} \iint_{\Omega(i_0,j_0,1/2)} |\phi|^{p+2} dxdy\right)^{1/2},\end{aligned}$$

en otras palabras

$$\frac{\delta^{(p+2)^2}}{(AB)^{\frac{2(p+2)}{p}}} \leq \frac{\|\phi\|^{(p+2)^2}_{L^{p+2}}}{(AB)^{\frac{2(p+2)}{p}}} \iint_{\Omega(i_0,j_0,1/2)} |\phi|^{p+2} dxdy.$$

Concluyendo la prueba para el caso 1.

Caso 2: Siguiendo el mismo esquema, pero utilizando la norma en $H^{\frac{1+\alpha}{2}}$, en lugar de la norma en $H^{\frac{1+\alpha}{2},1}$, y en cambio de la Proposición 1.6, empleando el Lema de Sobolev (Lema 1.1), se tiene el resultado. □

Lema 6.5.
Tanto para el caso 1, como para el caso 2, si $(\phi_n)_n$ es una sucesión minimizante para I_q, el valor ν definido en (6-5) es positivo.

***Demostración*.** **Caso 1:**
Del lema anterior se tiene que para cada ϕ_n existen $\eta > 0$ y $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, tales que

$$\iint_{\Omega(a_n,b_n,1/2)} |\phi_n|^{p+2} dxdy \geq \eta.$$

Considerando $\rho \in C_0^\infty$, tal que $0 \leq \rho \leq 1$ en $\Omega(0,0,1/2)$ y $supp(\rho) = \Omega(0,0,1)$; para $r > 0$ se define $\rho_{r,n}(x,y) = \rho\left(\frac{x-a_n}{r}, \frac{y-b_n}{y}\right)$, entonces

$$\eta \leq \iint_{\Omega(a_n,b_n,1/2)} |\phi_n|^2 dxdy \leq \iint (\rho_{r,n}|\phi_n|)^{p+2} dxdy \leq \|(\rho_{r,n}\phi)^p\|_{L^\infty} \iint (\rho_{r,n}|\phi_n|)^2 dxdy,$$

de lo que se sigue

$$0 < \eta \leq CM(2r).$$

Caso 2: Dado que, la diferencia entre este caso y el anterior radica en el conjunto G_q, definido en (6-2) y (6-3), y que la conclusión del Lema 6.4, es la misma en los dos casos, el argumento anterior funciona en este caso.

□

Para analizar el comportamiento de las sucesiones minimizantes, se enuncia el siguiente resultado:

Lema 6.6.
Sean $0 \leq \alpha \leq 1$, $(\phi_n)_n$ una sucesión minimizante para I_q y $\epsilon > 0$. Entonces, existen un natural N y dos sucesiones de funciones $\{g_N,\, g_{N+1}, \ldots\}$ y $\{h_N,\, h_{N+1}, \ldots\}$ en $H^{\frac{1+\alpha}{2},1}(\mathbb{R}^2)$ para el caso 1; o en $H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2)$ para el caso 2, tales que para $n \geq N$

1. $|Q(g_n) - \nu| < \epsilon$.
2. $|Q(h_n) - (q - \nu))| < \epsilon$.
3. $|I(\phi_n) - (I(g_n) + I(h_n))\,| < \epsilon$.

***Demostración*.** Tanto para el caso 1, como para el caso 2, en cada ítem del lema se necesita considerar las siguientes funciones: $\rho, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, tales que:

- $0 \leq \rho \leq 1$.
- $\rho \equiv 1$ en el conjunto $\Omega(0,0,1)$.
- $supp(\rho) \subseteq \Omega(0,0,2)$.
- $0 \leq \psi \leq 1$.
- $\psi \equiv 1$ en $\mathbb{R}^2 - \Omega(0,0,2)$.
- $supp(\psi) \subseteq \mathbb{R}^2 - \Omega(0,0,1)$.

Además de lo anterior, se requiere que $\rho^2 + \psi^2 = 1$, y como antes $\rho_r(x,y) = \rho\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$ y $\psi_r(x,y)$ se entenderá de manera análoga.

Como

$$M(r) = \lim_{n\to\infty} M_n(r) = \lim_{n\to\infty} \sup_{(a,b)\in R^2} \frac{1}{2} \iint_{\Omega(a,b,r)} \phi_n^2 dxdy,$$

entonces, para $\epsilon_1 > 0$ y r suficientemente grande, se tiene que $\nu - \epsilon_1 < M(r) \leq M(2r) \leq \nu$, así que, para un r lo bastante grande, fijo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\nu - \epsilon_1 < M_n(r) \leq M_n(2r) < \nu + \epsilon_1,$$

por lo tanto, para todo $n \geq N$ se puede elegir una pareja (a_n, b_n), tal que,

$$\nu - \epsilon_1 < \frac{1}{2} \iint_{\Omega(a_n,b_n,r)} \phi_n^2 dxdy < \frac{1}{2} \int_{\Omega(a_n,b_n,2r)} \phi_n^2 dxdy < \nu + \epsilon_1.$$

Por simplicidad en la notación se considerarán,

$$g_n(x,y) = \rho_r((x,y) - (a_n,b_n))\phi_n(x,y) = (\rho_{r,n}\phi_n)(x,y),$$

y

$$h_n(x,y) = \psi_r((x,y) - (a_n,b_n))\phi_n(x,y) = (\psi_{r,n}\phi_n)(x,y).$$

Los dos primeros numerales se prueban de manera idéntica en los dos casos, ya que, se emplean hechos sobre $Q,\ \rho$ y ψ, los cuales no se modifican bajo las definiciones de G_q ((6-2) para el caso 1 y (6-3) para el caso 2).

1. $$Q(g_n) = \frac{1}{2} \iint (\rho_{r,n}\phi_n)^2 dxdy \leq \frac{1}{2} \iint_{\Omega(a_n,b_n,r)} \phi_n^2 dxdy \leq M_n(2r) < \nu + \epsilon_1.$$

2. $$Q(h_n) = \frac{1}{2} \iint (\psi_{r,n}\phi_n)^2 dxdy \leq \frac{1}{2} \iint \phi_n^2 dxdy - \frac{1}{2} \iint_{\Omega(a_n,b_n,r)} \phi_n^2 dxdy \leq q - (\nu - \epsilon_1).$$

3. **Caso 1:** Para probar éste numeral se requiere tener en cuenta que,

$$\begin{aligned}|I_q(\phi_n)-(I_q(g_n)+I_q(h_n))| \leq & \frac{1}{2}\left|\iint \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}(\phi_n)\right)^2-\left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}(g_n)\right)^2-\left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}(h_n)\right)^2 dxdy\right| \\ & +\frac{1}{2}\left|\iint (D_y(\phi_n))^2-(D_y(g_n))^2-(D_y(h_n))^2 dxdy\right| \\ & +\frac{1}{(p+1)(p+2)}\left|\iint \phi_n^{p+2}-g_n^{p+2}-h_n^{p+2}dxdy\right| \\ = & I+II+III.\end{aligned}$$

Para acotar I debe sumarse un cero adecuado, y emplear la Proposición 1.3, de modo que

$$I \leq \frac{1}{2}\iint \left|\left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi_n\right)^2-\left(\rho_{r,n}D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi_n\right)^2-\left(\psi_{r,n}D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi_n\right)^2\right| dxdy+O\left(\frac{1}{r}\right).$$

II se puede controlar así:

$$\begin{aligned}II \leq & \frac{1}{2}\iint (D_y\phi_n)^2(1-\rho_{r,n}^2-\psi_{r,n}^2)+\frac{1}{2}\left|\iint \left((D_y\rho_{r,n})^2+(D_y\psi_{r,n})^2\right)\phi_n^2 dxdy\right| \\ & \left|\iint (\phi_n D_y\rho_{r,n})(\rho_{r,n}D_y\phi_n)dxdy\right|+\left|\iint (\phi_n D_y\psi_{r,n})(\psi_{r,n}D_y\phi_n)dxdy\right| \\ = & A_1+A_2+A_3+A_4.\end{aligned}$$

El aporte de A_1 es nulo. Mientras que A_2 cumple que

$$A_2 \leq \frac{1}{2r^2}\left(\|D_y\rho\|_\infty^2+\|D_y\psi\|_\infty^2\right)\|\phi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2},1}^2.$$

Los términos A_3 y A_4 se acotan de manera similar, así que sólo se mostrará la forma de estimar A_3.

$$A_3 \leq \|D_y\rho_{r,n}\|_\infty \iint \phi_n D_y\phi_n dxdy \leq \frac{\|D_y\rho\|_\infty}{r}\|\phi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2},1}^2.$$

Mientras que para acotar III se debe tener en cuenta que $supp(1-\rho_{r,n}^{p+2}-\psi_{r,n}^{p+2}) \subseteq \Omega(a_n,b_n,2r)-\Omega(a_n,b_n,r)=\Omega$. Sea $\rho_{\tilde{r,n}}$ tal que, $supp(\rho_{\tilde{r,n}})=\Omega$ y $1-\rho_{r,n}^{p+2}-\psi_{r,n}^{p+2} \leq \rho_{\tilde{r,n}} \leq 1$, y la Proposición 1.6 implica que

$$\|\rho_{\tilde{r,n}}\phi_n\|_{L^{p+2}}^{p+2} \leq \|\rho_{\tilde{r,n}}\phi_n\|_0^{\frac{(1+\alpha)(p+4)-2p}{2(1+\alpha)}}\|\rho_{\tilde{r,n}}\phi_n\|_{\frac{1+\alpha}{2},1}^{\frac{2p+p(1+\alpha)}{2(1+\alpha)}} \leq C\|\rho_{\tilde{r,n}}\phi_n\|_0^2 \leq 2C\epsilon_1^{\frac{(1+\alpha)(p+4)-2p}{2(1+\alpha)}},$$

de lo que se sigue el resultado.

3 Caso 2: Como en el caso anterior

$$\begin{aligned}|I_q(\varphi_n)-(I_q(g_n)+I_q(h_n))| \leq & \frac{1}{2}\left|\iint \left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}(\varphi_n)\right)^2-\left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}(g_n)\right)^2-\left(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}(h_n)\right)^2 dxdy\right| \\ & +\frac{1}{2}\left|\iint \left(D_y^{\frac{1+\alpha}{2}}(\varphi_n)\right)^2-\left(D_y^{\frac{1+\alpha}{2}}(g_n)\right)^2-\left(D_y^{\frac{1+\alpha}{2}}(h_n)\right)^2 dxdy\right| \\ & +\frac{1}{(p+1)(p+2)}\left|\iint \phi_n^{p+2}-g_n^{p+2}-h_n^{p+2}dxdy\right| \\ = & I+II+III.\end{aligned}$$

Los sumandos I y II se acotan de la misma manera como se hizo con el término I del caso 1. Mientras que el sumando III es el mismo del caso 1, pero quien garantiza el resultado es el Teorema 1.2, de modo que, se tiene el resultado.

□

El primero de los objetivos, probar que no hay dicotomía, es consecuencia del siguiente resultado:

Lema 6.7.
Si $(\phi_n)_n$ es una sucesión minimizante para I_q, $\nu = q$, tanto para el caso 1, como para el caso 2.

Demostración. **Caso 1:** Suponiendo que $\nu < q$, el lema anterior implica para $\epsilon = 1/m > 0$, existen dos sucesiones de funciones (g_{n_m}) y (h_{n_m}), tales que

$$|Q\left(g_{n_m}\right) - \nu| < \frac{1}{m},$$
$$|Q\left(h_{n_m}\right) - (q-\nu)| < \frac{1}{m},$$

y

$$|I\left(\phi_n\right) - \left(I\left(g_{n_m}\right) + I\left(h_{n_m}\right)\right)| < \frac{1}{m}.$$

Considerando

$$B_m = \sqrt{\frac{\nu}{Q\left(g_{n_m}\right)}} \text{ y } C_m = \sqrt{\frac{q-\nu}{Q\left(h_{n_m}\right)}},$$

las cuales satisfacen que $B_m, C_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1$, se tiene que

$$I_\nu \leq I\left(B_m g_{n_m}\right) = B_m^2 I\left(g_{n_m}\right) + \left(B_m^2 - B_m^{p+2}\right) \iint \frac{g_{n_m}^{p+2}}{(p+1)(p+2)} dxdy, \tag{6-6}$$

y

$$I_{q-\nu} \leq I\left(B_m h_{n_m}\right) = B_m^2 I\left(h_{n_m}\right) + \left(B_m^2 - B_m^{p+2}\right) \iint \frac{h_{n_m}^{p+2}}{(p+1)(p+2)} dxdy. \tag{6-7}$$

Dado que $\|g_{n_m}\|_{L^{p+2}}$ y $\|h_{n_m}\|_{L^{p+2}}$ son acotadas, al sumar (6-6) y (6-7), y tomar el límite $m \to \infty$, se obtiene que

$$I_q \leq I_\nu + I_{q-\nu} \leq \lim_{m\to\infty} \left(I\left(g_{n_m}\right) + I\left(h_{n_m}\right)\right) = \lim_{m\to\infty} I\left(\phi_{n_m}\right) = I_q,$$

lo cual contradice el Lema 6.3, por lo tanto $\nu = q$.

Caso 2: La demostración es idéntica a la del caso 1, la diferencia radica en la justificación de que tanto g_{n_m}, como h_{n_m} están acotadas en L^{p+2}, ya que, en el caso 1 proviene del la Proposición 1.6 y en el caso 2 del Lema de Sobolev (Lema 1.1). □

Por último, se muestra que se da la compacidad del principio de compacidad concentrada (1.14).

Lema 6.8.
Bien sea, para el caso 1 o para el caso 2. Si $0 \leq \alpha \leq 1$, $\nu = q$ y $(\phi_n)_n$ es una sucesión minimizante para I_q, entonces existe una sucesión $(a_n, b_n)_n$, tal que:

1. *Para n suficientemente grande y para todo $z < q$, existe $r = r(z)$, tal que*
$$\frac{1}{2} \iint_{\Omega(a_n,b_n,r)} \phi_n^2 dxdy > z.$$

2. *La sucesión definida como*
$$\tilde{\phi}_n(x,y) = \phi_n((x,y) - (a_n, b_n))$$
tiene una sub-sucesión convergente en $H^{\frac{1+\alpha}{2},1}(\mathbb{R}^2)$ (para el caso 1) o en $H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2)$ (para el caso 2).

Demostración. **Caso 1:**

1. Como,
$$q = \nu = \lim_{r\to\infty} M(r) = \lim_{r\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \int_{\Omega(a,b,r)} \phi_n^2 dxdy,$$
existe $r_0 > 0$, tal que, para n suficientemente grande,
$$\sup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} \int_{\Omega(a,b,r_0)} \phi_n^2 dxdy > \frac{q}{2}.$$
Cada uno de éstos valores de n tiene asociada una pareja de la forma (a_n, b_n), tal que
$$\frac{1}{2} \int_{\Omega(a_n,b_n,r_0)} \phi_n^2 dxdy > \frac{q}{2}.$$
Si z es un valor el cual cumple $q/2 < z < q$, dado que $\nu = q$, existen $r_0(z)$ y $N(z)$ tales que, para $n > N(z)$ y algún $(a_n(z), b_n(z))$, se tiene que,
$$\frac{1}{2} \int_{\Omega(a_n(z),b_n(z),r_0(z))} \phi_n^2 dxdy > z.$$
Puesto que
$$\frac{1}{2} \iint \phi_n^2 dxdy = q,$$
se tiene que
$$\Omega(a_n, b_n, r_0) \cap \Omega(a_n(z), b_n(z), r_0(z)) \neq \emptyset.$$
Al tomar $r = 2r_0(z) + r_0$, se tiene que $\Omega(a_n(z), b_n(z), r_0(z)) \subset \Omega(a_n, b_n, r)$, de lo que se sigue que
$$z < \frac{1}{2} \int_{\Omega(a_n(z),b_n(z),r_0(z))} \phi_n^2 dxdy < \frac{1}{2} \int_{\Omega(a_n,b_n,r)} (\phi_n)^2 dxdy.$$

2. El numeral anterior implica que, para $m \in \mathbb{N}$, existe un r_m, tal que, para n suficientemente grande se cumple que
$$\frac{1}{2}\int_{\Omega(a_n,b_n,r_m)} \phi_n^2 dxdy > q - \frac{1}{m},$$
entonces
$$\frac{1}{2}\int_{\Omega(0,0,r_m)} \tilde{\phi}_n^2 dxdy > q - \frac{1}{m},$$
donde, $\tilde{\phi}_n(x,y) = \phi_n(x-a_n, y-b_n)$, además, del Lema 6.2 se tiene que $\|\tilde{\phi}_n\|_{\frac{1+\alpha}{2},1} \leq B$, es decir, la sucesión $(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\tilde{\phi}_n)_n$ es acotada en $H^{0,1}(\mathbb{R}^2)$; y como, este espacio está inmerso de manera compacta en L^2_{loc}, se garantiza la existencia una sub-sucesión, que se notará de la misma manera, $(\tilde{\phi}_n)_n$ la cual converge fuertemente a una función ϕ en $L^2(\Omega(0,0,r_m))$. El razonamiento anterior, implica que, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe r_m tal que,
$$q - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega(0,0,r_m)} \phi^2 dxdy \leq q.$$
Puesto que, $Q(\tilde{\phi}_n) = q$ para todo n, se tiene $Q(\phi) = q$. Y como $(D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\tilde{\phi}_n)_n$ converge a $D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}\phi$ en $L^2(\mathbb{R}^2)$, se tiene la convergencia débil de $\tilde{\phi}_n$ a ϕ en $H^{\frac{1+\alpha}{2},1}$. La desigualdad ,
$$\|\tilde{\phi}_n - \phi\|_{p+2} \leq \left\|D_x^{\frac{1+\alpha}{2}}(\tilde{\phi}_n - \phi)\right\|_0^{\gamma} \left\|\tilde{\phi}_n - \phi\right\|_0^{1-\gamma} \leq C\left\|\tilde{\phi}_n - \phi\right\|_0^{1-\gamma},$$
garantiza la convergencia en L^{p+2}.

Como $\|\phi\|_{\frac{1+\alpha}{2},1} \leq$ lím inf$_{n\to\infty} \|\tilde{\phi}_n\|_{\frac{1+\alpha}{2},1}$, entonces
$$I(\phi) \leq \lim_{n\to\infty} I(\tilde{\phi}_n) = I_q,$$
por lo tanto, $I(\phi) = I_q$. Así $\lim_{n\to\infty} I(\tilde{\phi}_n) = I(\phi)$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|\tilde{\phi}_n\|_{\frac{1+\alpha}{2},1} = \|\phi\|_{\frac{1+\alpha}{2},1}$, consiguiendo así la convergencia en $H^{\frac{1+\alpha}{2},1}$.

Caso 2: El argumento para el primer numeral es idéntico al del caso anterior. Mientras que, para el segundo numeral, la justificación dada del caso anterior se puede ajustar para el espacio $H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2)$, sin mayores contratiempos.

□

Los resultados obtenidos durante el capítulo, permiten mostrar el Teorema 6.1:

Demostración del Teorema 6.1: Es consecuencia del Lema 1.14 y de los Lemas 6.1 - 6.8. □

Nota 6.1.

La inmersión de Sobolev garantiza que, los resultados del caso 2 son válidos para $p > 2$, siempre que $\alpha \in \left[\frac{p-2}{p+2}, 1\right]$.

Nota 6.2.

En los espacios $H^{\frac{1+\alpha}{2},1}(\mathbb{R}^2)$ se tiene garantizada la existencia de onda solitaria (Teorema 6.1), y también el buen planteamiento local (Teorema 3.4), siempre que $\frac{5}{8} < \alpha \leq 1$. Mientras que, en los espacios $H^{\frac{1+\alpha}{2}}(\mathbb{R}^2)$ hace falta establecer un resultado de buen planteamiento para el caso diagonal ($\alpha = \beta,\ 0 \leq \alpha \leq 1$).

Trabajo futuro

Las técnicas aplicadas al problema dieron muy buenos frutos, sin embargo, no se pudo cubrir la totalidad de los casos, por ello, los siguientes problemas quedaron abiertos:

- Mejorar el buen planteamiento, para valores arbitrarios de α y β, en el intervalo $[0, 1]$.
- Obtener mejores resultados, en cuanto al buen planteamiento, para la no linealidad con $p \geq 3$.
- Estudiar la estabilidad de las ondas solitarias obtenidas en el capítulo 6.
- Establecer si hay más casos o no, de existencia de ondas solitarias.

Bibliografía

[1] G. P. Agrawal. *Fiber-optic communication systems*, volume 222. John Wiley & Sons, 2012.

[2] J. P. Albert. *Concentration compactness and the stability of solitary-wave solutions to nonlocal equations. Contemporary Mathematics*, 221:1–30, 1999.

[3] T. B. Benjamin. *Internal waves of permanent form in fluids of great depth. Journal of Fluid Mechanics*, 29(3):559–592, 1967.

[4] T. B. Benjamin, J. L. Bona, and J. J. Mahony. *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 272(1220):47–78, 1972.

[5] H. A. Biagioni and F. Linares. *Well-posedness Results for the Modified Zakharov-Kuznetsov Equation*, pages 181–189. Birkhäuser Basel, Basel, 2003.

[6] J. F. Bolaños Méndez. *El problema de Cauchy asociado a una generalización de la ecuación ZK-BBM*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia-Sede Bogotá, 2018.

[7] J. L. Bona and R. L. Sachs. *Global existence of smooth solutions and stability of solitary waves for a generalized Boussinesq equation. Communications in mathematical physics*, 118(1):15–29, 1988.

[8] J. L. Bona and R. Smith. *The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 278(1287):555–601, 1975.

[9] J. Boussinesq. *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. Journal de mathématiques pures et appliquées*, pages 55–108, 1872.

[10] E. Bustamante, J. J. Urrea, and J. Mejia. *The Zakharov–Kuznetsov equation in weighted Sobolev spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 433(1):149–175, 2016.

[11] A. Cunha and A. Pastor. *The IVP for the Benjamin–Ono–Zakharov–Kuznetsov equation in weighted Sobolev spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 417(2):660–693, 2014.

[12] A. Cunha and A. Pastor. *The IVP for the Benjamin–Ono–Zakharov–Kuznetsov equation in low regularity Sobolev spaces. Journal of Differential Equations*, 261(3):2041–2067, 2016.

[13] A. Cunha and A. Pastor. *Persistence properties for the dispersion generalized BO-ZK equation in weighted anisotropic Sobolev spaces*. *Journal of Differential Equations*, 274:1067–1114, 2021.

[14] L. Dawson, H. McGahagan, and G. Ponce. *On the decay properties of solutions to a class of Schrödinger equations*. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(6):2081–2090, 2008.

[15] A. De Bouard. *Stability and instability of some nonlinear dispersive solitary waves in higher dimension*. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 126(1):89–112, 1996.

[16] S. S. Dragomir. *Some Gronwall type inequalities and applications*. Nova Science, 2003.

[17] O. Duque. *Sobre una versión bidimensional de la ecuación Benjamin-Ono generalizada*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2014.

[18] A. Esfahani and A. Pastor. *Instability of solitary wave solutions for the generalized BO–ZK equation*. *Journal of Differential equations*, 247(12):3181–3201, 2009.

[19] A. Esfahani, A. Pastor, and J. L. Bona. *Stability and decay properties of solitary-wave solutions to the generalized BO–ZK equation*. *Advances in Differential Equations*, 20(9/10):801–834, 2015.

[20] A. V. Faminskii. *The Cauchy problem for the Zakharov–Kuznetsov equation*. *Differentsial'nye Uravneniya*, 31(6):1070–1081, 1995.

[21] L. Farah and M. Scialom. *On the periodic "good" Boussinesq equation*. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 138(3):953–964, 2010.

[22] L. G. Farah. *Global rough solutions to the critical generalized KdV equation*. *Journal of Differential Equations*, 249(8):1968–1985, 2010.

[23] L. G. Farah, F. Linares, and A. Pastor. *Global well-posedness for the k-dispersion generalized Benjamin-Ono equation*. *Differential and Integral Equations*, 27(7/8):601–612, 2014.

[24] L. G. Farah and H. Wang. *Global solutions in lower order Sobolev spaces for the generalized Boussinesq equation*. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2012(41):1–13, 2012.

[25] G. Fonseca, F. Linares, and G. Ponce. *The IVP for the dispersion generalized Benjamin–Ono equation in weighted Sobolev spaces*. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 30, pages 763–790. Elsevier, 2013.

[26] G. Fonseca and M. Pachón. *Well-posedness for the two dimensional generalized Zakharov–Kuznetsov equation in anisotropic weighted Sobolev spaces*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 443(1):566–584, 2016.

[27] G. Fonseca and G. Ponce. *The IVP for the Benjamin–Ono equation in weighted Sobolev spaces*. *Journal of Functional Analysis*, 260(2):436–459, 2011.

[28] A. Grünrock and S. Herr. *The Fourier restriction norm method for the Zakharov-Kuznetsov equation*. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 34(5):2061–2068, 2014.

[29] A. Halanay. *Differential equations stability, oscillations, time lags*. Academic Press inc., Londres, 23 edition, 1966.

[30] A. D. Ionescu and C. E. Kenig. *Local and global wellposedness of periodic KP-I equations*. In *Mathematical Aspects of Nonlinear Dispersive Equations (AM-163)*, pages 181–212. Princeton University Press, 2009.

[31] R. J. Iório. *KdV, BO and friends in weighted Sobolev spaces*. In *Functional-analytic methods for partial differential equations*, pages 104–121. Springer, 1990.

[32] J. R. J. Iório and V. de Magalhães Iório. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[33] M. Jorge, G. Cruz-Pacheco, L. Mier-y Teran-Romero, and N. F. Smyth. *Evolution of two-dimensional lump nanosolitons for the Zakharov-Kuznetsov and electromigration equations*. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 15(3):037104, 2005.

[34] R. José Iório, Jr. *On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation*. *Communications in partial differential equations*, 11(10):1031–1081, 1986.

[35] T. Kato. *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*. *Studies in applied mathematics*, 8:93–128, 1983.

[36] T. Kato and G. Ponce. *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41(7):891–907, 1988.

[37] G. Keiser. *Optical fiber communications*. Wiley Online Library, 2003.

[38] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. *On the (generalized) Korteweg-de Vries equation*. *Duke Mathematical Journal*, 59(3):585–610, 1989.

[39] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. *Well-posedness and scattering results for the generalized korteweg-de vries equation via the contraction principle*. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 46(4):527–620, 1993.

[40] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*. *Journal of the American Mathematical Society*, 9(2):573–603, 1996.

[41] C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. *On the unique continuation of solutions to the generalized KdV equation*. *Mathematical Research Letters*, 10(5/6):833–846, 2003.

[42] S. Kinoshita. *Global well-posedness for the Cauchy problem of the Zakharov-Kuznetsov equation in 2D*. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, 38:451–505, 2021.

[43] N. Kishimoto. *Sharp local well-posedness for the "good" Boussinesq equation*. *Journal of Differential Equations*, 254(6):2393–2433, 2013.

[44] H. Koch and N. Tzvetkov. *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono equation in $H^s(\mathbb{R})$*. *International Mathematics Research Notices*, 2003(26):1449–1464, 2003.

[45] D. Korteweg and G. de Vries. *On the change of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary wave*. *Philosophical Magazine*, 39:422–443, 1895.

[46] E. W. Laedke and K.-H. Spatschek. *Nonlinear ion-acoustic waves in weak magnetic fields*. *The Physics of Fluids*, 25(6):985–989, 1982.

[47] D. Lannes, F. Linares, and J.-C. Saut. *The Cauchy problem for the Euler–Poisson system and derivation of the Zakharov–Kuznetsov equation*. In *Studies in phase space analysis with applications to PDEs*, pages 181–213. Springer, 2013.

[48] J. C. Latorre, A. Minzoni, C. Vargas, and N. F. Smyth. *Evolution of Benjamin-Ono solitons in the presence of weak Zakharov-Kutznetsov lateral dispersion*. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 16(4):043103, 2006.

[49] F. Linares, M. Panthee, T. Robert, and N. Tzvetkov. *On the periodic Zakharov-Kuznetsov equation*. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 39(6):3521–3533, 2019.

[50] F. Linares and A. Pastor. *Well-posedness for the two-dimensional modified Zakharov–Kuznetsov equation*. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 41(4):1323–1339, 2009.

[51] F. Linares and A. Pastor. *Local and global well-posedness for the 2D generalized Zakharov–Kuznetsov equation*. *Journal of Functional Analysis*, 260(4):1060–1085, 2011.

[52] F. Linares, A. Pastor, and J.-C. Saut. *Well-posedness for the ZK equation in a cylinder and on the background of a KdV soliton*. *Communications in Partial Differential Equations*, 35(9):1674–1689, 2010.

[53] F. Linares and G. Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Springer, 2 edition, 2014.

[54] F. Linares and J.-C. Saut. *The Cauchy problem for the 3D Zakharov-Kuznetsov equation*. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 24(2):547, 2009.

[55] P.-L. Lions. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1*. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, 1(2):109–145, 1984.

[56] P.-L. Lions. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 2*. *Annales de l'I.H.P. Analyse non linéaire*, 1(4):223–283, 1984.

[57] P.-L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics: Volume 2: Compressible Models*, volume 2. Oxford University Press on Demand, 1996.

[58] J. d. C. Lizarazo Osorio. *El problema de Cauchy de la clase de ecuaciones de dispersión generalizada de Benjamin-Ono bidimensionales*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia-Sede Bogotá, 2018.

[59] L. Molinet and D. Pilod. *Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov–Kuznetsov equation and applications*. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, 32(2):347–371, 2015.

[60] A. Moliton. *Solid-State physics for electronics*. John Wiley & Sons, 2013.

[61] J. Nahas and G. Ponce. *On the persistent properties of solutions to semi-linear Schrödinger equation*. *Communications in Partial Differential Equations*, 34(10):1208–1227, 2009.

[62] A. Nascimento. *On special regularity properties of solutions of the benjamin-ono-zakharov-kuznetsov (bo-zk) equation*. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 19(9):4285, 2020.

[63] L. Nirenberg. *On elliptic partial differential equations*. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa 3*, 13:115–162, 1959.

[64] H. Ono. *Algebraic solitary waves in stratified fluids*. *Journal of the Physical Society of Japan*, 39(4):1082–1091, 1975.

[65] M. A. Pachón Higuera. *Sobre el estudio del buen planteamiento de ecuaciones dispersivas en espacios con peso*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia-Sede Bogotá, 2016.

[66] M. Panthee. *A note on the unique continuation property for Zakharov–Kuznetsov equation*. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 59(3):425–438, 2004.

[67] J. A. Pava. *Nonlinear dispersive equations: existence and stability of solitary and periodic travelling wave solutions*. American Mathematical Soc., 2009.

[68] O. G. Riaño. *The IVP for a higher dimensional version of the Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces*. *Journal of Functional Analysis*, 279(8):108707, 2020.

[69] F. Ribaud and S. Vento. *A Note on the Cauchy problem for the 2D generalized Zakharov–Kuznetsov equations*. *Comptes Rendus Mathématique*, 350(9-10):499–503, 2012.

[70] F. Ribaud and S. Vento. *Well-Posedness Results for the Three-Dimensional Zakharov–Kuznetsov Equation*. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 44(4):2289–2304, 2012.

[71] F. Ribaud and S. Vento. *Local and global well-posedness results for the Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equation*. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - A*, 37(1):449, 2017.

[72] W. Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill Science, Engineering & Mathematics, 2 edition, 1991.

[73] F. S. Salazar. *El problema de Cauchy asociado a una ecuación del tipo rBO-ZK*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Colombia-Sede Bogotá, 2015.

[74] R. Schippa. *On the Cauchy problem for higher dimensional Benjamin-Ono and Zakharov-Kuznetsov equations*. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 40(9):5189–5215, 2020.

[75] E. M. Stein. *The characterization of functions arising as potentials*. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 67(1):102–104, 1961.

[76] T. Tao. *Global well-posedness of the Benjamin–Ono equation in* $H^1(\mathbb{R})$. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 1(01):27–49, 2004.

[77] V. Zakharov and E. Kuznetsov. *On threedimensional solitons*. *Zhurnal Eksp. Teoret. Fiz*, 66:594–597, 1974.

Índice alfabético