UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Valoración de flujos de pagos estocásticos utilizando simulación Monte Carlo con suavizadores y modelos para la estructura temporal de tasas

Diego Fernando Rangel Arciniegas

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia
2021

Valoración de flujos de pagos estocásticos utilizando simulación Monte Carlo con suavizadores y modelos para la estructura temporal de tasas

Diego Fernando Rangel Arciniegas

Tesis o trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Estadística

Director:
Norman Diego Giraldo Gómez, Mat, MSc
Profesor Asociado

Línea de Investigación:
Modelación Estocástica

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Estadística
Medellín, Colombia
2021

Dedicatoria

A mis padres Esperanza Arciniegas y Fidel Rangel por acompañarme siempre en el proceso de aprendizaje.

Agradecimientos

Al profesor Norman Diego Giraldo Gómez de la escuela de Estadística por su conocimiento, tiempo y apoyo incondicional para la culminación de este trabajo.

Resumen

Los métodos Monte Carlo son una alternativa utilizada para la valoración de productos financieros. Los productos financieros a los que se refiere este trabajo son las anualidades de las cuales hay varios tipos, que son las rentas vitalicias y los retiros programados y en ambas su expresión para el precio corresponde a una esperanza condicional que depende de dos procesos estocásticos en tiempo continuo: las tasas de interés variables denominadas spot y el rendimiento del fondo, asumidas ambas como proceso de difusión.
Esta esperanza puede evaluarse mediante métodos Monte Carlo simulando los respectivos procesos, pero la forma especial del valor esperado permite valorarla también, con cierta restricción, mediante una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico con condiciones iniciales y de frontera, conocida como ecuación Feynman-Kăc. Esta restricción es que la tasa de interés sea determinística.
Como el modelo la asume variable, en este trabajo se examinarán al menos dos alternativas para reemplazar las tasas variables por funciones determinísticas de t: una es la posibilidad de reemplazarlas por una serie suavizada redefinida como función mediante filtros lineales conocidos: Savitzky-Golay, ℓ_1, splines, entre otros. Otra consiste en estimar una estructura temporal de tasas de interés usando modelos Nelson-Siegel o Vasicek y utilizar valores de pronósticos con estos modelos.

Palabras clave: Anualidades de vida dependientes de fondos, modelos para estructura temporal de tasas, Nelson-Siegel, modelo Vasicek, procesos de difusión, valores presentes de flujos de caja descontados con tasas variables, método Monte Carlo, valoración de pólizas contingentes dependientes de trayectorias, filtros lineales.

Valuation of stochastic payment flows using Monte Carlo simulation with smoothing and models for the time structure of rates

Abstract

Monte Carlo methods are widely used as an alternative for valuation of financial products. The financial products to which this work refers are annuities of which there are several types, which are life annuity and programmed retirement and in both their expression for the price corresponds to a conditional expectation of an expression that depends on two stochastic processes in continuous time: the variable interest rates called spot rate and

the fund's performance, both assumed as a diffusion process.
This expectation can be valued through Monte Carlo methods by simulating the respective processes, but the special form from the expected value also allows to value it, with certain restriction, by a partial differential equation of parabolic-type with initial and boundary conditions, known as the Feynman-Kăc equation. This restriction needs the interest rate to be deterministic.
As the model assumes it as variable, this work is going to study at least two alternatives to replace the variable rates with deterministic functions of t: one of them is the possibility of exchanging the variable rates for a smoothed serie redefined as a function using well-known linear filters: Savitzky-Golay, ℓ_1, splines, among others. The other one consists of estimating a term structure of interest rates using the Nelson-Siegel and Vasicek models and using forecast values with these models.

Keywords: Fund-dependent life annuities, models for interest rates term structure, Nelson-Siegel, Vasicek model, diffusion processes, present values of discounted cash flows with variable rates, Monte Carlo method, valuation of contingent policies dependent on trajectories, linear filters.

Índice general

Agradecimientos **VII**

Resumen **IX**

1. Introducción **3**

2. Revisión de Literatura **5**

2.1. Modelos estocásticos para nuevos tipos de anualidades 5

2.2. El sistema pensional de Retiro Programado 7

3. Modelos para la tasa instantánea de interés **9**

3.1. La estructura temporal de tasas de interés 9

3.2. Modelos para la tasa instantánea de interés 13

3.3. Recursos del lenguaje R para Ecuaciones Diferenciales Estocásticas 13

3.4. Simulación Monte Carlo de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas 14

3.5. Modelo Vasicek 15

3.6. Modelo Cox Ingersol Ross 19

4. Anualidades de vida **21**

4.1. Distribuciones de Supervivencia 21

4.2. Anualidades de vida 24

4.3. Reservas en anualidades de vida 26

4.4. Resultados auxiliares sobre esperanza condicional 29

4.5. Reservas en anualidades de vida con tasas aleatorias 30

5. Valoración de flujos de pagos estocásticos **33**

5.1. Flujos de pagos estocásticos y pólizas contingentes 33
5.2. Valoración de varias pólizas contingentes 35
5.2.1. Seguros de vida con participación en un índice financiero 36
5.2.2. Anualidad con participación en un índice financiero, EIA 37
5.2.3. Anualidad de vida tipo Retiro Programado 39

6. Estrategia de suavizar la tasa instantánea de interés 43
6.1. Definición del procedimiento de suavización 43
6.1.1. Filtro Whittaker-Henderson 44
6.1.2. Filtro ℓ_1 45
6.2. Aplicación 47

7. Implementación numérica de la valoración 49
7.1. Ejemplo 1. Anualidad de vida con tasa aleatoria 49
7.2. Ejemplo 2. Anualidad tipo Retiro Programado 52

8. Deducción de ecuaciones Feynman-Kăc 61
8.1. Introducción a la fórmula Feynman-Kăc 61
8.2. Ejemplo 1. Anualidad de vida con tasa aleatoria 62
8.3. Ejemplo 2. Anualidad tipo Retiro Programado 63

9. Conclusiones 65

10. Anexos 67
10.1. Anexo A. Valoración Neutral al Riesgo 67
10.1.1. Valoración Neutral al Riesgo en Vasicek 67
10.2. Anexo B. Filtro Hodrick-Prescott 69
10.3. Anexo C. Códigos en R 71
10.3.1. Códigos para la sección §3.5 71
10.3.2. Códigos para la sección §7.1 72
10.3.3. Códigos para la sección §7.2 76

Índice de figuras

3.1. DTF 90 y TES 1 año (https://www.banrep.gov.co/es) 12

3.2. Gráfica de la serie TES 1 años (rojo) versus trayectorias simuladas con el modelo Vasicek (gris) 18

3.3. Gráfica de la serie DTF 90 días (rojo) versus trayectorias simuladas con el modelo Vasicek (gris) 18

3.4. Gráfica de la estructura temporal (izquierda) y precio del bono cupon cero (derecha) con el modelo Vasicek para la DTF90 (rojo) y TES 1 año (negro) 19

4.1. Comparación de las probabilidades de supervivencia $T(e) > t$, para una vida de edad $e = 62$, para $t \in [62, 110]$, para Hombres y Mujeres, según una ley de mortalidad Gompertz-Makeham, con base en la Tabla Colombiana de Mortalidad, experiencia 2000-2005 23

5.1. gráfica de: tasa $(1 + \alpha(Y_t/Y_0 - 1))$ (negro), tasa $\exp(\gamma t)$ (rojo), la tasa de pagos instantánea $b(t)$ (azul, línea punteada), en la anualidad EIA, con base en el índice Colcap, período 07/06/2001 - 11/09/2005 38

6.1. Tasas de rendimiento diarias de un portafolio de fiducias entre 2000/01/01 y 2009/12/30, (en gris), con la suavización con el filtro ℓ_1 (en café), junto con una simulación de la tasa (en rojo) y su respectiva suavización (en azul). 47

7.1. paneles: (1,1): gráfica de ${}_tp_x$, (1,2): gráfica de la fuerza de mortalidad μ_{x+t}, (2,1): gráfica de la tasa de pagos instantánea $b(t)$,(2,2): trayectoria de r_t simulada 51

7.2. (a) n=100 simulaciones del proceso S_t, del valor de una Anualidad de vida con tasa aleatoria, de la vida (e), con la probabilidad de supervivencia de (e) (azul), y V_t estimada como el promedio (rojo). (b) densidad de los valores simulados de V_0, con el valor medio de éstos, 192.8006 (azul) y el valor teórico 193.642 (rojo) 52

7.3. $n = 30$ simulaciones del proceso X_t, el saldo del fondo de inversiones en Retiro Programado de la vida (62), con la probabilidad de supervivencia de (62) en color azul, y trayectoria promedio en rojo. Valor inicial es $X_0 = 12\bar{a}_{62}$, hombres, tabla colombiana mortalidad 2000-2008 ISS. Panel (a) $\gamma = 0.035$, Panel (b) $\gamma = 0.07$ 55

7.4. Dos simulaciones del proceso S_t, del valor de la cuenta de ahorro en Retiro Programado de la vida (x). En la derecha, la probabilidad de supervivencia de una vida de 62 años, mujer, en color rojo. En azul aparecen las trayectorias promedio en ambos casos. 57

7.5. Diferentes visualizaciones de la distribución empírica de S_0 58

7.6. Estimación de la Vida Media Residual con base en una muestra simulada de tamaño $n = 200$ de S_0 58

Índice de códigos en R

3.1. Valor del bono cupon cero en el modelo CIR 20
4.1. Comparación de las probabilidades de supervivencia 23
4.2. Fórmula artículo Mingari 25
4.3. Resultado ejemplo costo Renta vitalicia 26
4.4. función para prima neta anualidad de vida pagos crecientes geométricamente 29
6.1. Programacion de suavizamiento de tasas de interés 46
7.1. ajuste de los cinco mejores modelos con respecto al AIC 58
10.1. Valor del bono cupon cero en el modelo Vasicek 71
10.2. Valor del bono cupon cero en el modelo Vasicek 72
10.3. Simulación reservas anualidad de vida 72
10.4. simulación de trayectorias de la tasa instantánea 76

Índice de tablas

3.1. Modelos de EDE, lista parcial tomada de Duffie (2010, Table 2.1, pag. 133) 13
3.2. Coeficientes estimados qmle modelo Vasicek DTF 90 días 17
3.3. Coeficientes estimados qmle modelo Vasicek TES 1 año 17
3.4. Tabla 3.3, TES 1 año, intervalos de confianza Wald 17
3.5. Tabla 3.2, DTF 90 dias, intervalos de confianza Wald 17

4.1. Parametros Gompertz-Makeham Hombres(H)-Mujeres(M), con base en datos del ISS 1980-1990, y 2000-2008 22

7.1. Tabla comparativa de costo aproximado de Retiro Programado versus una tasa de interés adicional en el portafolio 56

Capítulo 1

Introducción

El tema principal de esta tesis de Maestría en Investigación es la aplicación de la metodología de simulación Monte Carlo aplicada en el cálculo de esperanzas condicionales de integrales definidas de ciertos procesos estocásticos en tiempo continuo. Estas esperanzas condicionales en un contexto financiero y actuarial, corresponden al concepto de valoración de una póliza contingente.

Una póliza contingente es un producto que ofrece un flujo de pagos que depende de factores aleatorios, a cambio de una prima inicial. Como resultado el valor presente de este flujo de pagos cambia aleatoriamente en el tiempo, modelar y valorar este cambio es el objetivo. La metodología utilizada para calcular esta valoración se basa en ecuaciones diferenciales estocásticas, su simulación y estimación.

La variedad de pólizas contingentes hoy en día es muy amplia, sobre todo en los mercados de Estados Unidos (EU) y Europa, un ejemplo de esto es un producto conocido como anualidad de vida con rendimientos según un índice que varía aleatoriamente (*Equity Linked Annuity*, en inglés). El objetivo de estos productos es ofrecer un pago que compense el costo de vida. Este trabajo se enfoca en la valoración de una póliza contingente en particular, que corresponde al sistema de retiro programado, introducido en el país en la Ley 100/93 como una de las modalidades de pensión en el sistema administrado por los fondos privados de pensiones, denominado Régimen de Ahorro Individual con Solidaridad, RAIS, y en otros países de la región en la década de los 90 del siglo XX.

Esta esperanza no se puede representar mediante fórmulas cerradas pero existen métodos alternos como la simulación Monte Carlo, la fórmula Feynman-Kăc, entre otros. El primer método se abordará completamente, mientras que en el segundo se explorará la forma de estas ecuaciones sin entrar a resolverlas. Las ecuaciones de Feynman-Kăc proporcionan la expresión para el precio, pero no se podían utilizar ditectamente porque en la fórmula original de Feynman-Kăc aparece r_t no como un proceso sino como una funcion del tiempo, y por lo tanto se propuso la alternativa de reemplazar r_t por una función determinística, ya que la forma especial del valor esperado de la póliza contingente correspondiente al retiro programado solo permite valorarla mediante la ecuación Feynman-Kăc con cierta

restricción, y esta restricción es que la tasa de interés sea determinística.

Dos modelos muy conocidos asumen esta tasa como estocástica, los dos modelos son: Vasicek y Cox-Ingersol-Ross. Dichos modelos serán implementarlos con dos series de tiempo: la DTF 90 días y TES 1 año, además se aplicará Vasicek en la valoración Monte Carlo, en este trabajo se introduce un método para reemplazar las tasas variables por una función a partir de una serie suavizada mediante filtro lineales como ℓ_1, y definida mediante ciertas funciones de interpolación disponibles en el lenguaje R.

El resultado final de la tesis consiste en se que realiza una valoración entre dos productos: la renta vitalicia con corrección por costo de vida y el retiro programado. El costo del retiro programado es significativamente menor que la renta vitalicia pero no ofrece la protección contra la pérdida de poder adquisitivo. Un resultado adicional, de tipo empírico, es que la distribución del valor presente de los pagos del retiro programado sugiere una distribución de tipo Inversa Gamma, que es un resultado conocido en la literatura para las anualidades con tasas aleatorias.

Capítulo 2

Revisión de Literatura

2.1. Modelos estocásticos para nuevos tipos de anualidades

Este capítulo hace un acercamiento al tema de la valoración de ciertos productos financieros actuales, utilizados en el sector de seguros y de pensiones, más que todo en los mercados de Estados Unidos y Europa. Estos productos se denominarán en este trabajo pólizas contingentes, aunque en la literatura pueden haber otras definiciones. La introducción de pólizas contingentes en estos mercados ha generado una intensa actividad investigativa con relación al diseño, valoración, cobertura, etc, para lo cual se utilizan conceptos y herramientas del análisis estocástico y de simulación Monte Carlo. El concepto de la valoración se traduce en términos del área de procesos estocásticos como el cálculo de esperanzas condicionales de ciertos procesos. Una introducción a estos productos está por ejemplo, en Gatzert & Schmeiser (2013) y también en Feng (2018, pag. 10). Estos productos también han generado intensos debates acerca de su conveniencia como proveedores de un servicio público (pensiones, seguros) desde el sector privado, ver Blakey (2006). Algunos de estos productos son:

1) Anualidades Variables (en EU *variable annuities*, *segregated funds* en Canadá). Son anualidades que se financian mediante un fondo de inversiones especializado. Son productos diseñados para ahorro pero también para el pago de pensiones. Las anualidades variables utilizan fondos de inversión para el pago de una renta y ofrecen cláusulas adicionesles (*riders*) como por ejemplo, seguros de vida, garantías asociadas como rendimientos mínimos y otros tipos. Están en el mercado de los EU desde la década de los 60 del s.XX, ver Deprez & Schaetzle (1964). Una exposición tutorial está en el texto Feng (2018), una implementación en el lenguaje R está en la librería Zoccolan (2018), y un artículo tutorial es Bacinello et al. (2011)

2) Seguros de vida temporales, con participación en un Índice Bursátil (en inglés *Unit-linked Insurance*). El pago depende del valor de la unidad de un fondo de

inversiones ó de un índice bursátil. Ver Xia & Huihui (2013).

3) Anualidades de vida con participación en un Índice Bursátil (en inglés *Unit-linked annuities*). Las anualidades variables en EU se conocen como *unit-linked annnuities*. Ver el texto Lin (2006).

Cada producto mencionado está asociado, o se puede describir, mediante un flujo de pagos, en inglés *stream of benefits*. La definición de flujo de pagos en tiempo continuo y en tiempo discreto se puede encontrar en (Dietz 1992, pag. 301). Según este artículo la valoración de un flujo de pagos es un tema básico en matemática financiera y de seguros. Un flujo de pagos se puede describir por ejemplo, mediante una ecuación diferencial estocástica en la cual hay un término que modela los pagos, sujetos a fluctuaciones aleatorias, y otros términos que modelan las variaciones en el fondo de donde se extraen estos pagos.

El concepto de valoración aparece como la combinación de dos operaciones: el valor descontado de los valores del flujo mediante un factor de descuento aleatorio y el valor esperado de este valor, en Carrière (2004) y Biffis (2005) se desarrollan estos conceptos. Con relación a valoración de flujos asociados a pensiones, ver Hilli et al. (2011*a*), para productos de seguros de vida, ver Chen & Xiang (2003), y para anualides variables en Bacinello et al. (2011). Pero hay muchas más referencias en los artículos citados en esos trabajos y en el texto de Feng (2018). Un trabajo que utiliza control singular óptimo en la valoración de un tipo de renta vitalicia es Huang et al. (2012), Huang et al. (2009).

Resulta interesante observar que hay un tema de teoría de probabilidades relacionado con este cálculo de valores descontados que consiste en el análisis de variables aleatorias denominadas en inglés perpetuities. Ver por ejemplo, Goldie & Grübel (1996).

Los conceptos, métodos y herramientas utilizados son partes de un área más general, denominada Análisis Estocástico. Dos textos que exponen algunos temas, de manera tutorial, son Yan (2018) y Choe (2016). En la literatura se pueden identificar, al menos, las técnicas siguientes para la valoración numérica de muchos tipos de pólizas contingentes, que incluyen las mencionadas anteriormente, y otras más, como opciones exóticas, bonos con riesgo de default, etc.

1) La fórmula Feynman-Kăc. En Papanicolaou (2019, sec. 2): "La fórmula de Feynman-Kăc es fundamental para fijar el precio de las opciones europeas...Si se puede identificar el vínculo fundamental entre el precio de un activo y una ecuación diferencial estocástica, debe tratarse de la fórmula de Feynman-Kăc." El Teorema de representación de Feynman-Kăc es un instrumento para establecer la conexión entre el valor con base en una esperanza y el valor como solución de una EDP parabólica. Dos artículos de referencia con el tema de esta tesis y la fórmula son Djehiche & Löfdahl (2016) y Djehiche & Löfdahl (2014).

En el caso de anualidades de vida y seguros, su valor o precio de mercado se puede encontrar resolviendo una esperanza con base en una medida neutral al riesgo o con base en una ecuación diferencial parcial parabólica, similar a la ecuación Black-Scholes, que se ha denominado Black-Scholes-Thiele, ya que en el área de seguros y pensiones se conocía desde hace el siglo XIX que la reserva satisfacía una ecuación diferencial ordinaria

denominada ecuación de Thiele. Para una exposición de esta ecuación ver Ramlau-Hansen (1990).

Una contribución inicial que estableció la ecuación Black-Scholes-Thiele utilizando la representación Feynman-Kăc para la reserva de un seguro de vida con pago Unit-Linked es Persson & Aase (1997) y Aase & Persson (1994). Un trabajo de resumen de investigaciones en esta línea es el texto Møller & Steffensen (2007).

2) La simulación Monte Carlo. Una técnica ampliamente utilizada para valoración de pólizas contingentes incluyendo opciones dependientes de la trayectoria del subyacente y otras opciones denominadas exóticas. Las referencias incluyen, por ejemplo, Feng (2018) y Korn et al. (2010).

3) Expansiones asintóticas. En Iacus & Yoshida (2018, sec. 2.13) se muestra un ejemplo para valoración de una opción asiática, utilizando otra alternativa a las anteriores, una expansión asintótica obtenida con base en cálculo de Malliavin, ver Kunitomo & Takahashi (2001).

Un tema relacionado con lo mencionado anteriormente, es el de los modelos estocásticos para de la estructura temporal de tasas de interés. Es un tema muy documentado y conocido, que se puede consultar en Medvedev (2019), Gibson et al. (2010), Privault (2012), Duffie (2010) y Møller & Steffensen (2007, sec. 3.3). Los modelos utilizados en esta tesis están expuestos en esas referencias.

Un aspecto relacionado con la valoración y que ha generado mucha actividad es la reciente regulación europea conocida con el nombre de Solvency II. Uno de los requerimientos es que los productos de seguros y pensiones que, hasta la fecha, no se negocian en un mercado financiero, deben valorarse como si lo fueran. Esta regulación posiblemente se implemente en el futuro en el país, lo que va a demandar un mayor manejo de los modelos para valoración de pólizas contingentes. Un trabajo de grado de la Escuela en el que se analizaron los riesgos de rentas vitalicias mediante la metodología de este trabajo es Osorno-Gómez (2012).

El tema de la tesis es aplicar estas metodologías mencionadas para la valoración del sistema de Retiro Programado de la Ley 100/93 del país, entendido como una póliza contingente del tipo Anualidad variable. El por qué se puede asimilar este sistema a este tipo de anualidad se discute en la sección siguiente.

2.2. El sistema pensional de Retiro Programado

El tema de la tesis consiste en valorar un tipo particular de producto utilizando modelos y técnicas del área de ecuaciones diferenciales estocásticas y la simulación Monte Carlo.

El sistema pensional de retiro programado se introdujo en la Ley 100/93 como una de las tres modalidades de pensión en el régimen de ahorro individual o sistema privado de pensiones. También está implementado en los sistemas pensionales de varios países,

principalmente en Latinoamérica, siendo Chile el país que lo implementó inicialmente.

En la sección 5.2.3 se desarrolla un modelo estocástico para el Retiro Programado. La definición del mismo dada en la Ley 110/93, se reproduce aquí con el artículo correspondiente.

> ARTÍCULO 81. Retiro Programado. El retiro programado es la modalidad de pensión en la cual el afiliado o los beneficiarios obtienen su pensión de la sociedad administradora, con cargo a su cuenta individual de ahorro pensional y al bono pensional a que hubiera lugar. Para estos efectos, se calcula cada año una anualidad en unidades de valor constante, igual al resultado de dividir el saldo de su cuenta de ahorro y bono pensional, por el capital necesario para financiar una unidad de renta vitalicia para el afiliado y sus beneficiarios. La pensión mensual corresponderá a la doceava parte de dicha anualidad.
>
> $$\text{pensión mensual} = saldo/(12\bar{a}_x)$$
>
> El saldo de la cuenta de ahorro pensional, mientras el afiliado disfruta de una pensión por retiro programado, no podrá ser inferior al capital requerido para financiar al afiliado y sus beneficiarios una renta vitalicia de un salario mínimo legal mensual vigente.

En 1996, el Decreto 832 del MHyCP estableció, en el artículo 12, "Control de Saldos en el Pago de Pensiones bajo la Modalidad de RP", que

> En todo caso deberá incorporarse en el contrato de retiro programado o en el reglamento respectivo, una cláusula que aluda al artículo 81 de la Ley 100 de 1993...indicando que por tal razón, en el momento en que el saldo deje de ser suficiente, deberá adquirirse una póliza de Renta Vitalicia (por valor de un salario mínimo mensual legal vigente).

Este sistema es similar al sistema "income drawdown pension scheme" (esquema pensional de ingreso decreciente), vigente actualmente en el Reino Unido. El surgimiento de este producto financiero en los inicios de la década de 1990, se debió, según D. Blake, a que "La percepción del valor empobrecido de las anualidades tradicionales motivó la búsqueda de nuevos 'retiros programados atados a inversiones', con los ejemplos principales de ingreso decreciente y anualidades con inversiones." (ver pag. 162 de Blake (2006)). Una presentación y análisis actuarial del esquema pensional "income drawdown", utilizando técnicas de control óptimo estocástico, se pueden consultar en Emms & Haberman (2008) y DiGiacinto et al. (2014).

Capítulo 3

Modelos para la tasa instantánea de interés

3.1. La estructura temporal de tasas de interés

Los conceptos y variables son:

1. Un bono cupón cero se asumirá como un producto similar a un CDT del mercado colombiano que paga \$1 al vencimiento de un período $[0, T]$ donde T es tiempo en años o fracción de años, por ejemplo $T = 1/4$ se refiere a un período de 3 meses o 90 días de un año de 360 días.

2. El precio de un bono cupón cero en el tiempo $t \leq T$, antes de su vencimiento se denota por $P(t, T)$.

3. Una tasa efectiva anual es un valor $i_T \in (0, 1)$ tal que el precio de un bono cupón cero con vencimiento en T, emitido a esa tasa, tiene valor $P(0, T) = (1 + i_T)^{-T}$. La tasa de interés continuo δ_T correspondiente cumple $P(0, T) = e^{-T\delta_T}$ y por tanto es $\delta_T = \ln(1 + i_T)$.

4. La tasa de interés compuesto continua para el período $[t, t + \tau]$ para un bono cupón cero con vencimiento en $t + \tau$ se denota por $R(t, \tau)$, se asume constante durante el período $[t, t + \tau]$ y cumple la identidad

$$P(t, t + \tau) = e^{-\tau R(t,t+\tau)}. \tag{3.1.1}$$

   Con $t = 0$ se tiene

$$P(0, \tau) = e^{-\tau R(0,\tau)}.$$

   El valor $P(0, \tau)$ se denomina también factor de descuento.

5. La estructura temporal de tasas en el tiempo t se define como la función $\tau \to R(t, t+\tau)$ para $\tau \geq 0$. En inglés también se conoce como "the yield curve". En $t = 0$ es la función $\tau \to R(0, \tau)$. Y la función $R(0, \tau)$ en inglés es "the yield function".

6. La tasa instantánea hacia adelante (tasa forward, tasa a plazos) en t, $f_w(t, s)$, se define como

$$P(t, s) = e^{-\int_t^s f_w(t,u)du}, \ t < s, \tag{3.1.2}$$

tal que su valor es la tasa determinística para el período $t < s \leq T$. Es decir

$$f_w(t, s) = -\frac{\partial}{\partial s} \log(P(t, s)), \ t < s.$$

Las tasas a plazo en $t = 0$ cumplen

$$P(0, t) = e^{-\int_0^t f_w(0,u)du}, \ t < s. \tag{3.1.3}$$

7. De las identidades anteriores se tiene

$$-\frac{1}{t} \log(P(0, t)) = \frac{1}{t} \int_0^t f_w(0, u)du = R(0, t). \tag{3.1.4}$$

El modelo Nelson-Siegel para las tasas $f_w(0, t)$ se introdujo en Nelson & Siegel (1987). Se define como un modelo de regresión no lineal para la tasa efectiva anual $f(0, t)$ dado, ver Møller & Steffensen (2007, sec. 3.6.2, pag. 75). El modelo siguiente es una extensión por Svensson (1994).

$$f_w(0, t) = \beta_0 + \left(\beta_1 + \beta_2 \frac{t}{\tau_1}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + \beta_3 \frac{t}{\tau_2} \exp\left(\frac{t}{\tau_2}\right), t \geq 0 \tag{3.1.5}$$

para $\beta_j, j = 1, 2, 3$, $\tau_1, \tau_2 > 0$ parámetros.

En Colombia, el conjunto de las tasas $f_w(0, t)$ se denomina curva de rendimientos de tasas a plazo conocidas, según la Resolución 200/1995 de la Superintendencia Bancaria y la Circular Externa 20/1995 de la misma entidad.

Ejemplo 3.1.1. *Un ejemplo de las tasas $f_w(0, t)$ es el mercado para títulos CDT para períodos determinados, $t_m = 30, 60, 180, ..$ días, para los cuales las tasas de captación promedio del mercado las fija en una estructura temporal. Por ejemplo $f(0, t) = 0.03$ para $t = 1/2$ significa que un CDT a 180 día se vende en promedio a una tasa de $3\,\%$ efectiva anual.*

Las definiciones 1-7 anteriores son determinísticas, pero interesa considerarlas como procesos estocásticos también. Para esto se considera que la funciones del tiempo son trayectorias observadas de ciertos procesos estocásticos, y éstas se asumen al menos continuas. Para indicar que se trata de una trayectoria se añade una variable $\varpi \in \Omega$, donde Ω

es el espacio muestral asumido. Por ejemplo, $f_w(t,u)$ y $R(t,u)$ se escriben $f_w(t,u,\varpi)$ y $R(t,u,\varpi)$.

En este caso se define la tasa instantánea de interés (ó tasa *spot*) como una tasa forward instantánea definida por el límite, tomado sobre trayectorias de los procesos $f_w(t,u,\varpi)$ y $R(t,u,\varpi)$

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+\tau} f_w(t,u,\varpi)du &= \tau R(t,t+\tau,\varpi) \\
\therefore R(t,t+\tau,\varpi) &= \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} f_w(t,u,\varpi)du \\
\therefore \lim_{\tau\to 0} R(t,t+\tau,\varpi) &= f_w(t,t,\varpi) = r_t(\varpi)
\end{aligned}$$

Esta última identidad define el proceso $\{r_t, t \geq 0\}$, la tasa instantánea de interés, o tasa continua de interés.

Se asumen varias hipótesis con relación a $\{r_t, t \geq 0\}$.

1. Es un proceso estocástico con trayectorias continuas.

2. Es un proceso Markov que satisface una ecuación diferencial estocástica lineal

$$dr_t = \mu(t,r_t)dt + \sigma(t,r_t)dW_t,\ t \geq 0, \tag{3.1.6}$$

   donde r_0 está definida y $W_t, t \geq 0$ es un proceso de Wiener (ó proceso movimiento Browniano), y las funciones $\mu(t,x)$, $\sigma(t,x)$ son continuas y satisfacen ciertas condiciones de regularidad en una región del plano (x,t) que garantizan que la ecuación anterior tiene una solución única bien definida.

3. Los precios o factores de descuento dependen de r_t, $P(t,\tau,r_t)$

Estos supuestos implican que

$$P(t,\tau,r_t) = \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^\tau r_u du} \mid r_t\right). \tag{3.1.7}$$

Como anotan Møller & Steffensen (2007, pag. 61), no se puede concluír que el precio del bono cupón cero sea de la forma

$$P(t,s) = e^{-\int_t^s r(u)du}. \tag{3.1.8}$$

Para que esta fórmula resultara cierta se necesitaría que se conocieran los precios futuros de los bonos, lo que equivale a asumir que la tasa instantánea es determinística.

Asímismo Møller & Steffensen (2007, pag. 61) anotan que hay tres estrategias para modelar los precios de los bonos

1. Especificar los precios $P(t,T)$ para $0 \leq t \leq T \leq T'$ para T' algún tiempo futuro máximo

2. Especificar las tasas $f(t,T)$ para $0 \leq t \leq T \leq T'$ para T' algún tiempo futuro máximo. Esta es la estrategia con los modelos Nelson-Siegel y Svensson.

3. Especificar la tasa r_t con un modelo de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, como se expone en la sección siguiente.

Si se especifica $f_w(t,s)$ se pueden obtener $P(t,s)$. Pero, utilizando r_t mediante un modelo estocástico, requiere mayor elaboración. En la sección §3.5 se muestra un ejemplo. El proceso r_t representa la tasa instantánea de interés sin riesgo de no pago del mercado, y, para el caso colombiano, consideramos al menos dos opciones. La tasa DTF a 90 días, efectiva anual y la tasa de títulos TES a 1 año. La primera opción es similar a la que se hace en el mercado de los EU, en donde se utiliza la tasa interna de retorno de los T-bill para tres meses (cf. Chen (1996), pag.109).
La DTF no es una tasa sin riesgo de no pago sino más bien un promedio de las tasas con riesgo de no pago, realizado entre las distintas ofertas del mercado por agentes que tienen distintas calificaciones de riesgo.

Según Topa (1999) (pags. 31, 32), la tasa debería ser la de los TES, que son deuda pública sin riesgo de no pago. En la Figura 3.1 se compararon las series de datos de la DTF a 90 días, con frecuencia semanal, y de la TES a 1 año, con frecuencia diaria, para el período 01/04/2010 a 01/04/2021. Se puede concluír que las tendencias promedio de ambas tasas son similares. Un análisis de correlación no aportaría mucho ya que lo importante es chequear que las dos tasas eran más o menos equivalentes y que la TES es la que se debe utilizar. En la parte final se observa una caída abrupta de ambas series debido al efecto del inicio de la pandemia de Covid-19 o también un efecto de la caída de las tasas en EU.

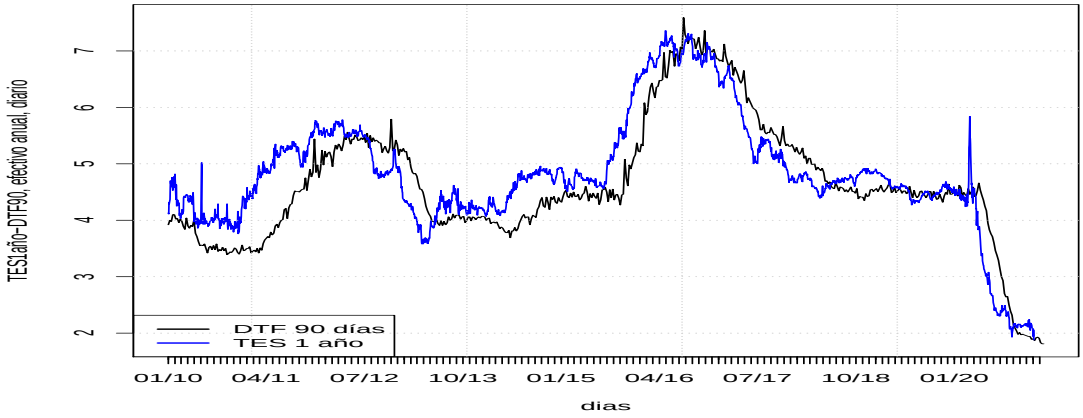


Figura 3.1: DTF 90 y TES 1 año (https://www.banrep.gov.co/es)

3.2. Modelos para la tasa instantánea de interés

Como se mencionó, un supuesto básico es que el proceso r_t tiene una dinámica con reversión en la media y por tanto puede describirse mediante Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDE) que tengan esta propiedad.

En esta sección se exponen varios modelos de EDE que se han desarrollado en la literatura para modelar la tasa instantánea r_t de interés. Un texto de referencia es Medvedev (2019). Un ejemplo de aplicación de los modelos para la estructura temporal de tasas de interés se puede encontrar en Parisi (1998).

El proceso $\{r_t, t \geq 0\}$ está adaptado a la filtración generada por el proceso de Wiener estándar $\{W_t, t \geq 0\}$, de varianza t, indicada por $\mathcal{F}_t$, y se asume que sigue un modelo general de la forma siguiente,

$$dr_t = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)r_t + \alpha_3(t)r_t \log(r_t)]dt + [\beta_1(t) + \beta_2(t)r_t]^\nu dW_t, \tag{3.2.1}$$

que engloba varios modelos particulares, como se muestra en la Tabla en Duffie (2010, Table 2.1, pag. 133), que se reproduce parcialmente a continuación.

Tabla 3.1: Modelos de EDE, lista parcial tomada de Duffie (2010, Table 2.1, pag. 133)

Modelo	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	ν
Vasicek	$\surd$	$\surd$		$\surd$		1.0
Cox-Ingersoll-Ross	$\surd$	$\surd$			$\surd$	0.5
Brennan-Schwartz	$\surd$	$\surd$			$\surd$	1.0
Pearson-Sun	$\surd$	$\surd$		$\surd$	$\surd$	0.5

3.3. Recursos del lenguaje R para Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Los recursos para la estimación y simulación de los modelos anteriores de EDE están en varias librerías en R. Estos recursos fueron fundamentales para desarrollar este trabajo, por lo que interesa resaltarlos aquí.

- La librería `sde`, ver Iacus (2016), implementa varios tipos de difusiones y su estimación con el método de cuasi-máxima verosimilitud (QMLE). Para la definición de estimacióm QMLE ver Brouste et al. (2014, sec.6.2 pag. 30) en este contexto y más general Martin et al. (2013, Cap. 9).

- La librería `yuima`, ver Iacus & Yoshida (2018) incluye estimación QMLE y simulación, con base en objetos S4, que incluye la posibilidad de generar modelos combinando características particulares de cada uno. Incluye procesos Levy L_t, de varios

tipos, por ejemplo, con distribuciones NIG. Con lo que el modelo básico se puede ampliar para incluír saltos y colas pesadas.

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t + dL_t,\ t \geq 0, \tag{3.3.1}$$

- Los modelos Vasicek y CIR están implementados en la librería `SMFI5`, ver Remillard (2013).
- La librería `valuer`, para la valoración de pólizas contingentes del tipo anualidades variables (en inglés *variable annuities*), ver Zoccolan (2018). Además de las referencias en la ayuda una referencia completa sobre este tipo de pólizas es Feng (2018). Depende de `yuima`.
- `Sim.DiffProc`, ver Guidoum & Boukhetala (2020), que se utilizará para simulación de varios modelos de ecuaciones diferenciales estocásticas para la estructura temporal de tasas de interés. Ver https://cran.r-project.org/web/packages/Sim.DiffProc/vignettes/snssde.html
- La librería `DiffusionRgqd`, ver Pienaar & Varughese (2015), implementa estimación en modelos de difusión.

3.4. Simulación Monte Carlo de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

La simulación del modelo de ecuación diferencial estocástica de Ito

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,\ 0 \leq t \leq T, \tag{3.4.1}$$

requiere un procedimiento de discretización. El esquema de Euler utiliza la aproximación

$$\frac{dX_t}{dt} \simeq \frac{X_{t+h} - X_t}{h}, \tag{3.4.2}$$

donde $h = \Delta t = T/N$, con N número de particiones del intervalo $[0, T]$, es suficientemente pequeño. En un intervalo $[t, t+h]$, la ecuación integrada se puede aproximar por

$$X_{t+h} \simeq X_t + \int_t^{t+h} \mu(s, X_s)ds + \int_t^{t+h} \sigma(s, X_s)dW_s. \tag{3.4.3}$$

El proceso aproximante se denota x_t y se genera asumiendo que las integrales son constantes en el intervalo $[t, t+h]$, utilizando la letra minúscula para indicar la aproximación numérica,

$$x_{t+h} = x_t + h\mu(t, x_t) + \sigma(t, x_t)(W_{t+h} - W_t), \tag{3.4.4}$$

indicando por $x_n = x_{t_n} = x_{nh}$, $z_n = W_{h(n+1)} - W_{nh}$, $n = 0, 1, \ldots, N$,

$$x_{n+1} = x_n + h\mu(nh, x_n) + \sigma(nh, x_n)\sqrt{h}z_n \tag{3.4.5}$$

La sucesión $\underline{x} = (x_n, n = 0, 1, \ldots, N)$ es la aproximación a $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ por el esquema de Euler. Se cumple que, bajo condiciones de crecimiento tipo Lipschitz y Hölder, de las funciones $\mu(t, x), \sigma(t, x)$, x_n converge a X_t en la norma en media cuadrática, y se tiene el acotamiento

$$||X - \underline{x}||_{L^2}^2 = \mathbb{E}\left(\sup_{0 \le t \le T} (X_t - x_t)^2\right) \le C/N. \tag{3.4.6}$$

ver Jedrzejewski (2009, pags. 308-309). La fórmula recursiva en (3.4.5) permite la simulación Monte Carlo del proceso X_t. Cuando $N \to \infty$, por el acotamiento anterior se tiene que las muestras simuladas deben converger en media cuadrática al valor teórico.

La librería de r `Sim.DiffProc`, ver Guidoum & Boukhetala (2020), tiene la función `snssde1d` que implementa la simulación asumiendo el método de Euler, entre otros. Por ejemplo, Euler-Maruyama Orden 0.5, Milstein Orden 1, Milstein Segundo Orden, método Predictor-Corrector, Ito-Taylor Orden 1.5, Heun Order 2 y Runge-Kutta Order 1, 2 y 3.

3.5. Modelo Vasicek

Supongamos que $r(t)$ se modela mediante un proceso r_t definido por la ecuación diferencial estocástica:

$$dr_t = \alpha(b - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{3.5.1}$$

para $t \ge 0$, y con $d_0 \sim N(b, \sigma^2/(2\alpha))$.
Este modelo se conoce en economía y finanzas como el modelo de Vasicek, ver Vasicek (1977) y Møller & Steffensen (2007, sec 3.8.1, pag. 95).

Si $0 \le s < t$ se tiene la identidad:

$$r_t = r_s e^{-\alpha(t-s)} + b(1 - e^{-\alpha(t-s)}) + \sigma e^{-\alpha t} \int_s^t e^{\alpha u} dW_u, \tag{3.5.2}$$

además, se cumple que r_t es proceso de Markov, Gaussiano y estacionario en covarianza, ver Karatzas & Shreve (1991). Adicionalmente, se tiene que

$$r_t | r_s = x \sim N(\mu_r, \sigma_r^2), \tag{3.5.3}$$

donde $\mu_r = b + (x - b)e^{-\alpha(t-s)}$ y $\sigma_r^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(t-s)})$.

El proceso $\{r_t, t \le 0\}$ es un proceso de tipo Gaussiano, lo que significa que la distribución conjunta de vectores aleatorios $(r_{t_1} \le x_1, \ldots, r_{t_k} \le x_k)$ es normal multivariada con cierta media y cierta matriz de varianzas-covarianzas. Entonces también se cumple:

$$\int_s^t (r_u | r_s = x) du \sim N(\mu(s, t, x), \sigma^2(s, t, x))$$

donde $\mu(s,t,x) = \mathbb{E}(\int_s^t (r_u|r_s = x)du)$ y

$$\mu(s,t,x) = b(t-s) + \frac{x-b}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-s)}) \tag{3.5.4}$$

Defina la covarianza condicional como:

$$cov(r_u, r_v|r_s = x) = E\left[(r_u - \mathbb{E}(r_u|r_s = x))(r_v - \mathbb{E}(r_v|r_s = x))\right]$$

y aplique la identidad

$$Var(\int_s^t (r_u|r_s = x)du) = \int_s^t \int_s^t cov(r_u, r_v|r_s = x)dudv$$

Se comprueba que si $Var(\int_s^t (r_u|r_s = x)du) = \sigma^2(s,t,x)$, entonces:

$$\sigma^2(s,t,x) = \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}(2\alpha(t-s) + 4e^{-\alpha(t-s)} - e^{-2\alpha(t-s)} - 3)$$

El precio en s de un bono cupón cero con pago de \$1 en s, en el período $[t,s]$, se define como

$$P(t,s,x) = \mathbb{E}(e^{-\int_t^s r_u du} \mid r_t = x), \tag{3.5.5}$$

y se calcula con base en la expresión de la función generadora de momentos de una variable normal como en la ecuación 3.5.6

$$\begin{aligned} P(t,s,x) &= \exp\left(\mathbb{E}\left(-\int_t^s r_u du \mid r_t = x\right) + \frac{1}{2}Var\left(-\int_t^s r_u du \mid r_t = x\right)\right) \\ &= \exp(-A(t,s)r_t + D(t,s)), \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

donde

$$\begin{aligned} A(t,s) &= \frac{1 - e^{-a(s-t)}}{a}, \\ D(t,s) &= \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)[A(t,s) - (s-t)] - \frac{\sigma^2 A(t,s)^2}{4a^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.1. *Se tomó la información de la DTF 90 días, trimestral, y el TES a 1 año, diario, para el período 2010-01-04 a 2020-06-01. Se ajustó un modelo Vasicek a ambas series. Los resultados están en las Tablas 3.2 y 3.3.*

Se procedió a simular 30 trayectorias con ambos modelos y la comparación con las series originales está en las Figuras 3.2, para TES y 3.3 para DTF.

Finalmente, se comparó la estructura temporal y los precios de los bonos con ambas modelos en la Figura 3.4. Obsérvese la diferencia tan evidente en la forma de las tasas forward para el caso de la DTF y el TES. Para los parámetros obtenidos en las tablas 3.2 y 3.3 se tiene que theta1=αb, theta2=α y theta3=σ.

Tabla 3.2: Coeficientes estimados qmle modelo Vasicek DTF 90 días

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)
θ_3	0.94567	0.03056	30.94006	0.00000
θ_1	2.27167	1.49042	1.52419	0.12746
θ_2	0.46951	0.30526	1.53807	0.12403

Tabla 3.3: Coeficientes estimados qmle modelo Vasicek TES 1 año

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)
θ_3	1.02536	0.01458	70.30922	0.00000
θ_1	3.78905	1.93200	1.96121	0.04985
θ_2	0.75223	0.38144	1.97205	0.04860

Se corrieron pruebas Wald utilizando la función `coeftest` de la librería `lmtest`. De la ayuda de la función: "coeftest is a generic function for performing z and (quasi-)t Wald tests of estimated coefficients. coefci computes the corresponding Wald confidence intervals. "

Tabla 3.4: Tabla 3.3, TES 1 año, intervalos de confianza Wald

	2.5 %	97.5 %
θ_3	0.99678	1.05394
θ_1	0.00240	7.57569
θ_2	0.00461	1.49985

Tabla 3.5: Tabla 3.2, DTF 90 dias, intervalos de confianza Wald

	2.5 %	97.5 %
θ_3	0.88577	1.00558
θ_1	-0.64949	5.19283
θ_2	-0.12879	1.06781

Efectivamente para el caso de la DTF 90 los parametros $\theta 1$ y $\theta 2$ no son significativos. Para el caso de TES 1 año , todos son significativos, es decir, si pasa en test de Wald. Las simulaciones se realizaron con la serie TES 1 año.

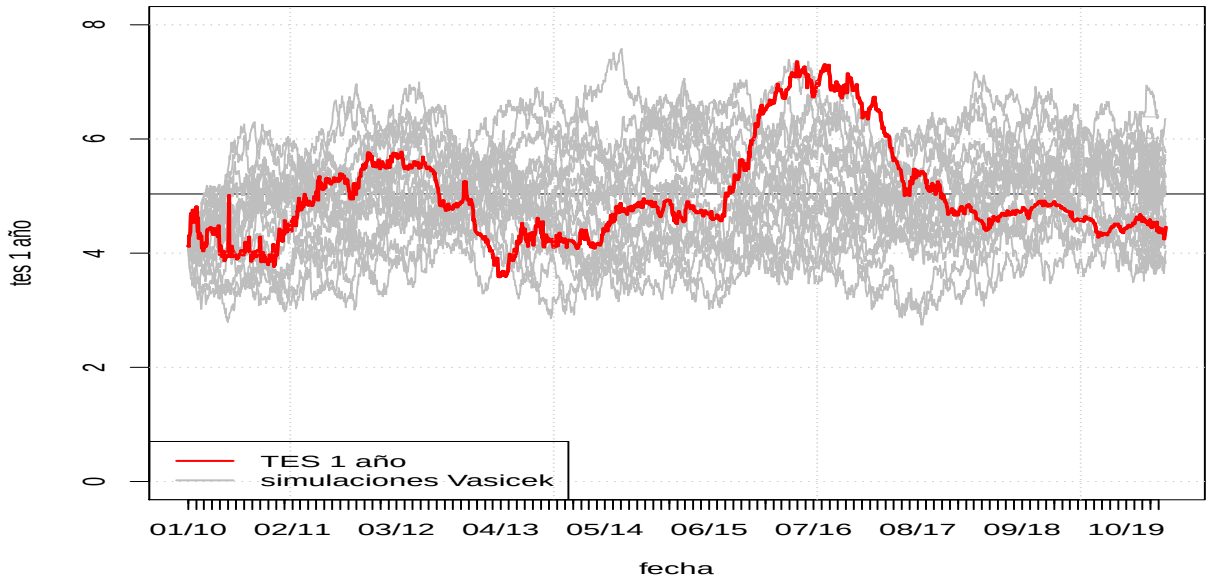


Figura 3.2: Gráfica de la serie TES 1 años (rojo) versus trayectorias simuladas con el modelo Vasicek (gris)

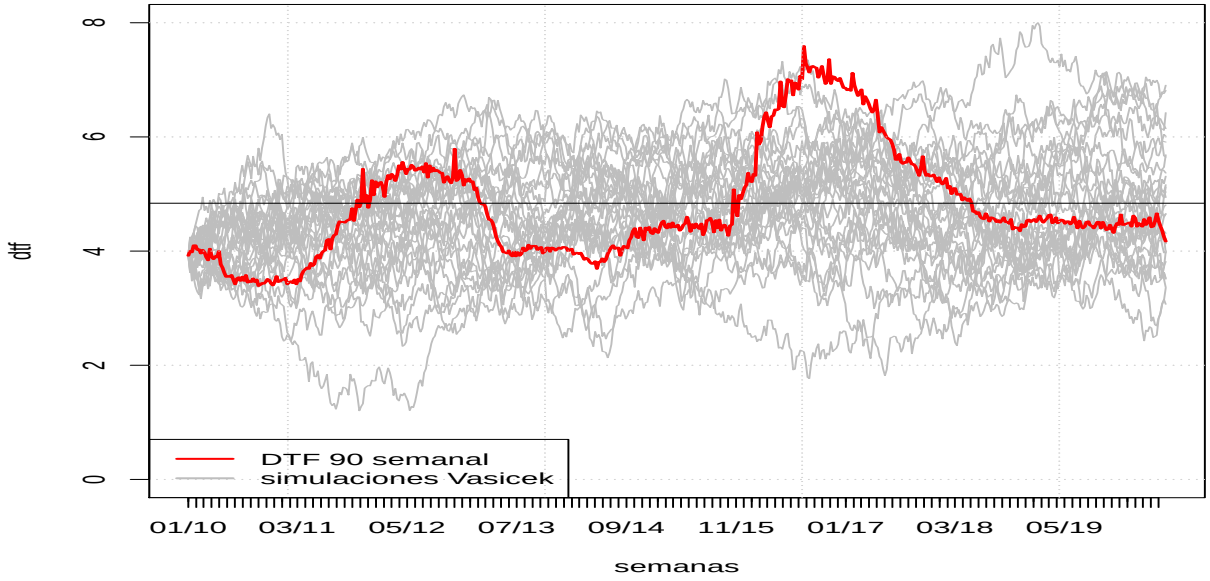


Figura 3.3: Gráfica de la serie DTF 90 días (rojo) versus trayectorias simuladas con el modelo Vasicek (gris)

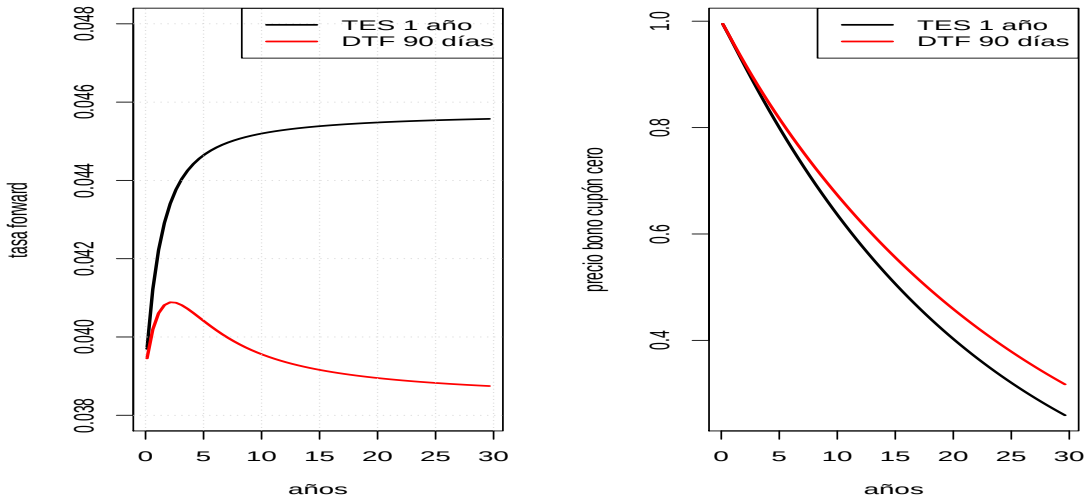


Figura 3.4: Gráfica de la estructura temporal (izquierda) y precio del bono cupon cero (derecha) con el modelo Vasicek para la DTF90 (rojo) y TES 1 año (negro)

3.6. Modelo Cox Ingersol Ross

El Modelo Cox Ingersol Ross se puede consultar en (Møller & Steffensen 2007, sec 3.8.1, pag. 95), tiene similitudes con el modelo Vasicek. Se define por la ecuación,

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t,\ t \geq 0. \tag{3.6.1}$$

Se define la condición $\frac{4ab}{\sigma^2} \geq 2$. Si se cumple, entonces r_t es positivo con probabilidad uno. El proceso r_t es Markoviano y posee una distribución invariante. Además la expresión para el precio de un bono cupón cero en $t = 0$ se puede encontrar.

El precio en s de un bono cupón cero con pago de \$1 en s, en el período $[t, s]$, se define como, ver Chen (1996, pag. 31)

$$P(t, s, x) = \mathbb{E}(e^{-\int_t^s r_u du} \mid r_t = x) \tag{3.6.2}$$

Y se calcula como

$$P(t, s, x) = A(t, s)e^{-xB(t,s)}, s \geq t, \tag{3.6.3}$$

donde

$$A(t, s) = \left(\frac{2\gamma \exp((a + \lambda + \gamma)(s - t)/2)}{(a + \lambda + \gamma)(\exp(\gamma(s - t)) - 1) + 2\gamma}\right)^{2ab/\sigma},$$
$$B(t, s) = \frac{2(\exp(\gamma(s - t)) - 1)}{(a + \lambda + \gamma)(\exp(\gamma(s - t)) - 1) + 2\gamma},$$

$$\gamma = \sqrt{(a+\lambda)^2 + 2\sigma^2}.$$

donde λ es un parámetro de riesgo implicado por la función de utilidad de un agente (ver Chen (1996, pag. 31)). En esta referencia Chen (1996, pag. 31) se muestra un ejemplo con los valores

$$a = 0.2456,\ b = 0.0648,\ \sigma = 0.1499,\ \lambda = -0.129,\ x = 0.06$$

Una implementación de esta fórmula en R con `k=a,theta=b,vola=sigma,init=x`, para el caso $P(0,t,x)$ está en el código R siguiente.

Nota 1. *Nótese que, debido principalemente a la extensión de este trabajo, se optó por no incluír ejemplos de estimación de la DTF 90 y TES 1 con el modelo CIR, ya que, en realidad, los resultados son similares al modelo Vasicek, puesto que éste no presenta la posibilidad de generar valores negativos con los parámetros utilizados.*

Código R 3.1: Valor del bono cupon cero en el modelo CIR

```
CIR.Bond <- function(t, k, theta, vola, init)
{
  h <- sqrt(k^2 + 2 * vola^2);
  denominator <- 2 * h + (k + h) * (exp(t * h) - 1)
  A <- (2 * h * exp((k + h) * t / 2)
/ denominator)^(2 * k * theta / vola^2)
  B <- 2 * (exp(t * h) - 1)/ denominator
  A * exp(-B * init)
}
```

Capítulo 4

Anualidades de vida

4.1. Distribuciones de Supervivencia

Un ingrediente básico en el modelo de este trabajo son las anualidades de vida, que se introducen junto con unas definiciones y notaciones necesarias. Parte del material de este capítulo es con base en Giraldo (2017, Cap. 7).

Denotando por X una variable aleatoria continua que represente el tiempo en años que habrá de vivir una persona recién nacida. La vida remanente de una persona de edad e se define como la variable condicional $T(e) = X - e|X > e$, con dominio $T(e) \in [0, \omega - e]$, donde ω es la edad máxima que sobrevive un ser humano. En este trabajo se asume $\omega = 110$.

La función de distribución acumulada de $T(e)$ está dada, con notación actuarial por:

$$ {}_tq_e := P(T(e) \leq t) = P(X \leq e + t|X > e),\ t \in [0, \omega - e]. \tag{4.1.1} $$

Además, ${}_tp_e = 1 - {}_tq_e = \mathbb{P}(T(e) \geq t)$, con ${}_0q_e = 0$. La función ${}_tp_e$ es clave para el cálculo de las rentas vitalicias. Depende del modelo de mortalidad humana que se adopte. En este trabajo consideramos el modelo Gompertz-Makeham. Se define especificando la función de intensidad de mortalidad, definida a continuación.

La intensidad de mortalidad o función hazard de la variable $T(e)$ se define como la función

$$ \mu_{e+t} = \lim_{h \to 0+} \frac{\mathbb{P}(t \leq T(e) < t + h|T(e) > t)}{h},\ 0 \leq t \leq \omega - e. \tag{4.1.2} $$

El valor $h\mu_{e+t}$ mide el riesgo de fallecer en un intervalo de tiempo $[t, t+h)$, con $h > 0$ muy pequeño, para una vida (e), dado que sobrevive t años. Se cumple la siguiente relación:

$$ {}_tp_e = \exp\left(-\int_0^t \mu_{e+s} ds\right). \tag{4.1.3} $$

Un modelo muy utilizado para distribuciones de supervivencia es el siguiente. Otros modelos se pueden consultar en Giraldo (2017, Cap. 7).

Definición 4.1.1. *Se dice que $T(e)$ sigue una distribución Gompertz-Makeham con parámetros (a, b, c) si se cumple*

$$\mu_{e+t} = a + b\, c^{e+t}, \tag{4.1.4}$$

con $a > 0$, $a + b > 0$, $c > 1$ y $0 \leq t < \omega - x$.

Introduciendo el cambio de parámetros $s = e^{-a}$, $g = \exp(-b/\ln(c))$, la probabilidad ${}_tp_e$ se expresa como

$${}_tp_e = e^{-\int_0^t \mu_{e+s} ds} = s^e g^{c^e(c^t-1)}. \tag{4.1.5}$$

Una ventaja de este modelo es que cumple ${}_tp_e \approx 0$ para $t \geq \omega - e$. En la Tabla 4.1 se muestran varios conjuntos de parámetros estimados por regresión no lineal con base en las tablas de vida colombianas experiencia Seguro Social períodos 1980-1990, y 2000-2008.

Tabla 4.1: Parametros Gompertz-Makeham Hombres(H)-Mujeres(M), con base en datos del ISS 1980-1990, y 2000-2008

	s	g	c
m80-89	0.99840	0.99951	1.09682
h80-89	0.99807	0.99974	1.10260
m00-08	0.99755	0.99999	1.14129
h00-08	0.99536	0.99999	1.13950

Ejemplo 4.1.2. *En la Figura 4.1 siguiente se muestra la comparación de las probabilidades de supervivencia $\mathbb{P}(T(e) > t)$ para una vida de edad 62, para los casos de hombres y mujeres, usando la ley de mortalidad Gompertz-Makeham, con base en la Tabla Colombiana de Mortalidad, experiencia 2000-2008. Se observa que las mujeres son más longevas ya que la curva de supervivencia es mayor que la de los hombres. El código R 4.1 implementa estas probabilidades, ([1]).*

[1] Un programa de radio reciente, en abril 21 de 2021, Radio UNAL (98.5 FM), difundió una entrevista con el geriatra Robinson Cuadro, de la Universidad Nacional de Colombia, en el cual afirmó que: "en promedio las mujeres viven 7 años más que los hombres, pero hay regiones donde viven 9 o 10 años más"

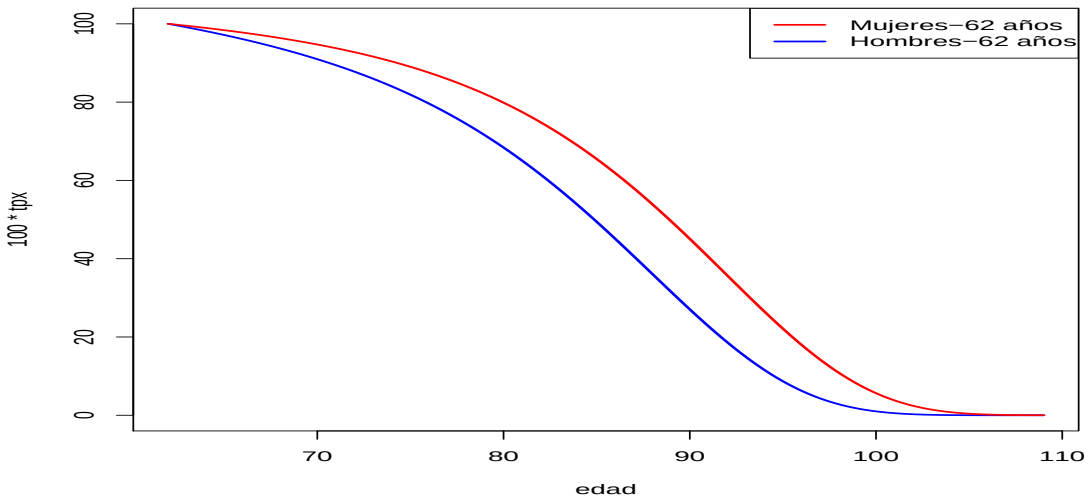


Figura 4.1: Comparación de las probabilidades de supervivencia $T(e) > t$, para una vida de edad $e = 62$, para $t \in [62, 110]$, para Hombres y Mujeres, según una ley de mortalidad Gompertz-Makeham, con base en la Tabla Colombiana de Mortalidad, experiencia 2000-2005

Código R 4.1: Comparación de las probabilidades de supervivencia

```
#————Uso de la ley Gompertz−Makeham
#————parametros
m.par = matrix(c(0.9984022, 0.9995144, 1.0968159,
0.9980725, 0.9997376, 1.1026006,
0.9975497, 0.9999949, 1.1412894,
0.9953583, 0.9999905, 1.1395016),4,3,byrow=TRUE)
colnames(m.par)=c("s","g","c")
rownames(m.par)=c("m80−89","h80−89","m00−05","h00−05")
#————caso hombres
s3 = m.par[3,1]
g3 = m.par[3,2]
c3 = m.par[3,3]
#————caso mujeres
s4 = m.par[4,1]
g4 = m.par[4,2]
c4 = m.par[4,3]
#————edades
e = 62; w = 110;
#——Gompertz−Makeham en libreria eha:
#——h(x) = a2 + a1 exp(x / b)
require(eha)
```

```
s=s4; g = g4; C=c4;
b = 1/log(c4)
a1 = -log(g4)*log(c4)*exp(e/b)
a2 = -log(s4)
tpx = pmakeham(tx, shape = c(a1, a2), scale = b,
lower.tail = FALSE)
plot(tx+e,100*tpx,type='l',col='blue',lwd=2,xlab='edad')
```

4.2. Anualidades de vida

Una renta vitalicia o anualidad de vida es un producto financiero que puede ser adquirido por una persona a cambio de una prima, pagable inmediata o diferida, el cual le garantiza una serie de pagos futuros, durante un período de tiempo determinado o hasta fallecer. El vendedor es usualmente una Compañía de Seguros.

La finalidad de una anualidad puede ser proveer una pensión o renta vitalicia, que es una forma de seguro de vejez (incapacidad laboral por senectud), o también una renta por invalidez (temporal o permanente), una renta como compensación por incapacidad temporal (caso de maternidad, accidente), o por desempleo (nótese que en la legislación laboral colombiana las cesantías cumplen un papel similar a un seguro de desempleo). Se incluyen los pagos en forma de atención médica especializada en casos de enfermedades terminales.

Definición 4.2.1. *Una renta vitalicia o anualidad de vida completa en tiempo continuo, que paga a una tasa instantánea de una unidad monetaria, a una vida de edad inicial e, indicada por* (e)*, mientras sobreviva, financiada a una tasa instantánea* r*, tiene un valor presente dado por la variable aleatoria*

$$\bar{a}_{\overline{T(e)|}} = \int_0^{T(e)} e^{-rt} dt = \frac{1 - e^{-rT(e)}}{r}. \tag{4.2.1}$$

Y prima neta dada por

$$\bar{a}_e = \mathbb{E}\left(\int_0^{T(e)} e^{-rt} dt\right) = \int_0^{T(e)} e^{-rs} {}_s p_e ds. \tag{4.2.2}$$

La prima neta para una anualidad temporal a t *años se define como*

$$\bar{a}_{e:\overline{t|}} = \mathbb{E}\left(\int_0^{min(t,T(e))} e^{-rs} ds\right) = \int_0^{t} e^{-rs} {}_s p_e ds. \tag{4.2.3}$$

Una observación importante sobre el modelo es que la definición de la tasa r en la fórmula (4.2.2), cuando la anualidad se utiliza para la valoración de rentas vitalicias y retiro programado, deben utilizarse las fórmulas recientes expedidas por el Ministerio de Hacienda

y Crédito Público, ver Cárdenas-Santamaría (2015). La estimación de esta tasas se hace periódicamente con base en las tasas que provee el modelo Nelson-Siegel, certificado por una entidad autorizada.

En el caso de asumir para $T(e)$ una distribución Gompertz-Makeham, con parámetros (s, g, c) se puede calcular explícitamente $\bar{a}_x$ utilizando la función Gamma-Incompleta superior $\Gamma(z, \beta) = \int_\beta^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, (implementada en la librería `expint`) ver Mingari et al. (2006, ec.(10)), Huang et al. (2012):

$$\bar{a}_e = \frac{(-c^e \ln(g))^{-\frac{\ln(sv)}{\ln(c)}}}{g^{c^e}\ln(c)} \left\{ \Gamma\left(\frac{\ln(sv)}{\ln(c)}, -c^e \ln(g)\right) - \Gamma\left(\frac{\ln(sv)}{\ln(c)}, -c^\omega \ln(g)\right) \right\}, \tag{4.2.4}$$

donde $v = e^{-r}$. Es importante anotar que a partir de la fórmula (4.2.4) se comprueba directamente que

$$\lim_{t \uparrow \omega - e} \bar{a}_{e+t} = 0. \tag{4.2.5}$$

El siguiente programa en R calcula (4.2.4)

Código R 4.2: Fórmula artículo Mingari

```
#———calculo anualidad de vida entera continua
acx = function(t){
# formula 10 articulo Mingari
# dadas:e,w,s,g,C,d
require(expint)
v = exp(-d)
a = log(v*s)/log(C)
f1 = gammainc(a,-C^(e+t) * log(g))
f2 = gammainc(a, -C^w * log(g))
fnum = (-C^(e+t) * log(g))^(-a)
fden = g^(C^(e+t)) * log(C)
ax = fnum * (f1 - f2)/fden
return(ax)}
```

Ejemplo 4.2.2. *La prima neta para una renta vitalicia con pago continuo de tal forma que al final del primer año se haya recibido un total equivalente a 12 mesadas de 2 millones cada una, para una vida de edad e=57, mujer, utilizando el modelo Gompertz-Makeham ajustado para la Tabla Colombiana de Mortalidad, experiencia 2000-2005, y utilizando una tasa de financiación* $i = 0.08$, *es* $\$250'769.400$.

Código R 4.3: Resultado ejemplo costo Renta vitalicia

```
#———parametros
e = 57; w=110;
s= 0.9998778; g=0.9998235; C= 1.1053084;
d = log(1+0.08)
(costo = 12*2*acx(e))
[1] 250.7694
```

4.3. Reservas en anualidades de vida

Asumiendo que hay una entidad (Banco, Aseguradora, Fondo de Pensiones, Fiduciaria, etc.) que realiza pagos a un cliente por algún contrato, por ejemplo, una cuenta de ahorros, una pensión, etc. a cambio de un depósito inicial o prima, mediante un contrato que tiene duración $T > 0$, que puede ser aleatoria o determinística. En Norberg (2005) hay un tratamiento completo del modelo para préstamos.

Una función $b(t)$, positiva, de variación finita en cualquier intervalo $[a, b]$, se denomina una tasa instantánea de pagos. Y el total pagado en el intervalo de tiempo $[0, t]$ está dado por $B(t) = \int_0^t b(s)ds$. El conjunto $\{b(t), t \in [0, T]\}$ se denomina flujo de pagos. En inglés, *rate of benefits*.

Si la tasa de pago es constante, $b(t) \equiv b$, donde $b > 0$, el total pagado en $[0, t]$ años es $B(t) = \int_0^t b(s)ds = bt$.

Un ejemplo de flujo de pagos $b(s)$ que sirve para modelar el efecto de la inflación o incremento por costo de vida, de manera aproximada, se introducen en el Ejemplo 4.3.2.

Proposición 4.3.1. *Se define el proceso estocástico $\{L_t^c, t \in [0, T]\}$ como la solución única de la siguiente ecuación diferencial*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L_t^c &= rL_t^c - \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}}b(t), t \in [0, T], \\ L_0^c &= L_0. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

para $L_0 > 0$ dado. Si se asume además la condición, de cierre,

$$\mathbb{E}(e^{-rT(e)}L_{T(e)}^c) = 0,$$

entonces, la solución de (4.3.1) satisface la identidad

$$\mathbb{E}(L_t^c \mid T(e) > t) = \int_t^T e^{-\int_t^s r+\mu_{e+s}ds}b(s)ds. \tag{4.3.2}$$

La demostración está a continuación. El proceso L_t^c se denomina pérdida prospectiva. La función indicadora $\mathbb{1}_{\{T(e)>t\}}$ define el proceso de salto unitario $N_t = \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}}, t \geq 0$. Es

inmediato que $\mathbb{E}(N_t) = {}_tp_e$. Se define la reserva prospectiva para una anualidad de vida como

$$V_t^c := \mathbb{E}(L_t^c \mid T(e) > t) = \int_t^T e^{-\int_t^s r+\mu_{x+u}du} b(s)ds. \tag{4.3.3}$$

Representa el pasivo de una Compañía de Seguros por un contrato de renta vitalicia, para una vida de edad inicial e, y vida residual $T(e)$, en el tiempo $t \in [0, T]$, con $T = \omega - e$. Nótese que se comprueba por derivación con respecto a t en (4.3.3)

$$\frac{d}{dt}V_t^c = (r + \mu_{x+t})V_t^c - b(t), 0 \leq t \leq T. \tag{4.3.4}$$

Esta ecuación diferencial se denomina Ecuación de Thiele para la reserva prospectiva de una anualidad de vida en tiempo continuo. Para el caso $b(t) \equiv 1$ se tienen las identidades clásicas, ver Berger (1939, pag. 83, eqs.(4)-(6))

$$V_t^c = \int_t^T e^{-\int_t^s r+\mu_{x+u}du} ds = \frac{e^{rt}}{{}_tp_x} \int_t^T e^{-rs} {}_sp_x ds = \frac{\bar{a}_e - \bar{a}_{e:\overline{t}|}}{e^{-rt}{}_tp_x} = \bar{a}_{e+t}. \tag{4.3.5}$$

Demostración. La solución de (4.3.1) es

$$L_t^c = e^{rt}\left(L_0 - \int_0^t e^{-rs}\mathbb{1}_{\{T(e)>s\}}b(s)ds\right).$$

Reemplazando $t = T(e)$ se obtiene

$$e^{-rT(e)}L_{T(e)}^c = L_0 - \int_0^{T(e)} e^{-rs}\mathbb{1}_{\{T(e)>s\}}b(s)ds,$$

y de la condición de cierre se tiene

$$\begin{aligned}
L_0 &= \mathbb{E}\left(\int_0^{T(e)} e^{-rs}b(s)ds\right) \\
&= \int_0^T \int_0^u e^{-rs}b(s)ds\, dF_{T(e)}(u) \\
&= \int_0^T e^{-rs}b(s)ds - \int_0^T e^{-rs}b(s)F_{T(e)}(s)ds \\
&= \int_0^T e^{-\int_0^s r+\mu_{e+u}du} b(s)ds.
\end{aligned}$$

Luego

$$L_t^c = \int_0^T e^{-r(s-t)-\int_0^s \mu_{e+u}du} b(s)ds - \int_0^t e^{-r(s-t)}\mathbb{1}_{\{T(e)>s\}}b(s)ds.$$

Se calcula a continuación la esperanza aplicando la identidad (4.1.3) y $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{T(e)>t\}}) = {}_tp_e$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_t^c) &= \int_0^T e^{-r(s-t)-\int_0^s \mu_{e+u}du} b(s)ds - \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-r(s-t)}\mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} b(s)ds\right) \\
&= \int_0^T e^{-r(s-t)-\int_0^s \mu_{e+u}du} b(s)ds - \int_0^t e^{-r(s-t)}{}_sp_e b(s)ds \\
&= \int_0^T e^{-r(s-t)-\int_0^s \mu_{e+u}du} b(s)ds - \int_0^t e^{-r(s-t)-\int_0^s \mu_{e+u}du} b(s)ds \\
&= \int_t^T e^{-r(s-t)-\int_0^s \mu_{e+u}du} b(s)ds.
\end{aligned}$$

Ahora como $\mathbb{E}(L_t^c \mid T(e) < t) = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_t^c) &= \mathbb{E}(L_t^c \mid T(e) > t)\mathbb{P}(T(e) > t) \\
\therefore \quad \mathbb{E}(L_t^c \mid T(e) > t) &= \frac{1}{{}_tp_x}\mathbb{E}(L_t^c) = \frac{1}{{}_tp_x}\int_t^T e^{-r(s-t)-\int_0^s \mu_{e+u}du} b(s)ds \\
&= \frac{\int_t^T e^{-r(s-t)-\int_0^s \mu_{e+u}du} b(s)ds}{e^{-\int_0^t \mu_{e+u}du}} \\
&= \int_t^T e^{-r(s-t)-\int_t^s \mu_{e+u}du} b(s)ds
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.3.2. *Un problema en los seguros de vida, anualidades de vida y pensiones es el riesgo de pérdida del valor adquisitivo de los pagos debido a la inflación, entendida como el incremento por costo de vida. Este ejemplo introduce una tasa instantánea de pagos que aproxima una corrección por costos de vida, denominada tasa geométrica. En el Capítulo 6 se introducen las anualidades con participación en índices financieros (unit linked annuities), que incorporan estos modelos en otros más realistas.*

Una tasa de pago creciente geométricamente, a una $i_q \in (0,1)$, *efectiva anual,* $q = 1, 2, 3, 4, 12$ *veces en el año, se define por*

$$b(t) = (1 + i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor}, \tag{4.3.6}$$

Una anualidad de vida con esta tasa de pagos tiene valor presente dado por la variable aleatoria

$$L_0^c = \int_0^T \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}} e^{-\delta t}(1 + i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor} dt, \tag{4.3.7}$$

Y tiene un costo actuarial neto dado por

$$\mathbb{E}(L_0^c) = \int_0^T e^{-\delta t}(1 + i_q)^{\frac{1}{q}\lfloor qt \rfloor} {}_tp_x dt. \tag{4.3.8}$$

Un programa R para evaluar esta prima neta es

Código R 4.4: función para prima neta anualidad de vida pagos crecientes geométricamente

```
gacx = function(s1,g1,c1,q,x,i,iq){
integrand <- function(u){
(1+iq)^(ceiling(q*u)/q)*(1+i)^(-u)*tpx(s1,g1,c1,x,u)}
a=integrate(integrand, lower = 0,
upper = 110-x, subdivisions = 200)
return(a$value)}
```

4.4. Resultados auxiliares sobre esperanza condicional

Una referencia para esta sección es Choe (2016, Cap. 6). Se asume dado un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un proceso $X = \{X_t, t \geq 0\}$, es una aplicación $X : \Omega \times [0, T) \to \mathbb{R}$, tal que $X(\omega, t) = X_t(\omega)$. Se asume que cada X_t es medible $\mathcal{F}$, y la imagen inversa por X_t de la sigma-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$, se denota por $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_t) = X_t^{-1}(\mathcal{B})$. La sigma-álgebra $\mathcal{F}_t^X$ es intuitivamente, el conjunto de toda la información generada por el proceso X en el tiempo t.

El conjunto $\mathbb{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\}$ se asume que cumple las condiciones de: ser creciente, con $\mathcal{F}_s^X \subseteq \mathcal{F}_t^X$, para $0 \leq s \leq t$. Entonces $\mathbb{F}^X$ se denomina la filtración generada por X o también la información generada por X.

La esperanza condicional de una variable aleatoria Y con respecto a una sigma-álgebra $\mathcal{G}_t$ se indica por

$$\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}_t) \tag{4.4.1}$$

El siguiente resultado, en Lando (1998, Prop. 3.1), es básico para la deducción de expresiones para las diferentes reservas.

Proposición 4.4.1. *Suponga que τ es una variable aleatoria positiva que representa el tiempo de primer salto del proceso de salto unitario $N_t = \{\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}, t \geq 0\}$, y λ_t es la función de intensidad de N_t. r_t es el proceso definido mediante el modelo Vasicek en la sección 3.5, pag. 15 y τ se define como la variable aleatoria $T(x)$ que está adaptada a $\mathcal{F}_t^N$*

Defina las siguientes informaciones:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_t^F &= \sigma\{r_s, 0 \leq s \leq t\} \\
\mathcal{F}_t^N &= \sigma\{\mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}, 0 \leq s \leq t\} \\
\mathcal{F}_t &= \mathcal{F}_t^F \vee \mathcal{F}_t^N, t \leq T.
\end{aligned}$$

Asuma que Y_t es un proceso adaptado a $\mathcal{F}_t^F$ y que los valores esperados siguientes son finitos:

1. $\mathbb{E}\left(|Y_t| \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) ds\right)$

2. $\mathbb{E}\left(\int_t^T |Y_s| \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) ds\right)$

3. $\mathbb{E}\left(\int_t^T |Z_s \lambda_s| \exp\left(-\int_t^s (r_u + \lambda_u) du\right) ds\right)$

donde Z_t se define como otro proceso estocásticos adaptado a la sigma-álgebra $\mathcal{F}_t^F$. Entonces se tiene

$$1) \quad \mathbb{E}\left(Y_t \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \exp\left(-\int_t^T r_u du\right) ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}\left(\int_t^T Y_t \exp\left(-\int_t^s (r_u + \lambda_u) du\right) ds \mid \mathcal{F}_t^F\right). \tag{4.4.2}$$

$$2) \quad \mathbb{E}\left(\int_t^T Y_s \mathbb{1}_{\{\tau > s\}} \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}\left(\int_t^T Y_s \exp\left(-\int_t^s (r_u + \lambda_u) du\right) ds \mid \mathcal{F}_t^F\right). \tag{4.4.3}$$

$$3) \quad \mathbb{E}\left(Z_\tau \exp\left(-\int_t^\tau r_u du\right) ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}\left(\int_t^T Z_s \lambda_s \exp\left(-\int_t^s (r_u + \lambda_u) du\right) ds \mid \mathcal{F}_t^F\right). \tag{4.4.4}$$

4.5. Reservas en anualidades de vida con tasas aleatorias

En esta sección se reemplaza la tasa constante r en (4.3.1) por una tasa instantánea r_t que satisfaga alguna de la ecuaciones diferenciales estocásticas del Capítulo 3.

Se asume que r_t está adaptado a la información $\mathcal{F}_t^F$, generada por el proceso Wiener W_t, y el proceso $N_t = \mathbb{1}_{\{T(e) > t\}}$ genera la información $\mathcal{F}_t^N$. Las informaciones se asumen independientes. Defina $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\} = \{\mathcal{F}_t^F \vee \mathcal{F}_t^N, t \geq 0\} = \sigma\{\mathcal{F}_t^F \cup \mathcal{F}_t^N, t \geq 0\}$, la información generada por la unión de ambas.

Proposición 4.5.1. *Defina el proceso L_t^a como la solución de la ecuación diferencial estocástica siguiente*

$$dL_t^a = L_t^a dR_t - \mathbb{1}_{\{T(e) > t\}} b(s) ds, \ 0 \leq t \leq T. \tag{4.5.1}$$

Las condiciones que cumple r_t son las del proceso Orstein-Uhelenbek, es un proceso Gaussiano con trayectorias continuas, que además es continuo en media cuadrática, por lo que ecuacion 4.5.1 se puede asumir como una ecuación diferencial ordinaria por trayectorias, o también en media cuadrática, ver Bacinello et al. (2011)

Con $R_t = \int_0^t r_u du$, el interes acumulado en $[0,t]$, y $L_0^a > 0$ fijo. Si se asume además la condición de cierre,

$$\mathbb{E}\left(e^{-R_{T(e)}} L^a_{T(e)} \mid \mathcal{F}_t\right) = 0, \text{ con probabilidad uno,} \tag{4.5.2}$$

entonces, la solución de (4.5.1) satisface la identidad

$$\mathbb{E}(L_t^a \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}} \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u + \mu_{e+u} du} b(s) ds \mid \mathcal{F}_t^F\right). \tag{4.5.3}$$

El proceso $\{L_t^a, 0 \leq t \leq \omega - x\}$ representa el balance en el tiempo t de la cuenta del titular de la anualidad y se denominada la pérdida prospectiva en t.

Demostración. La solución de (4.5.1) es

$$L_t^a = e^{R_t}\left(L_0^a - \int_0^t e^{-R_s} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} b(s) ds\right),$$

reemplazando $t = T(e)$ se obtiene

$$e^{-R_{T(e)}} L^a_{T(e)} = L_0^a - \int_0^{T(e)} e^{-R_s} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} b(s) ds,$$

y de la condición de cierre se tiene

$$\mathbb{E}(L_0^a \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(\int_0^{T(e)} e^{-R_s} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} b(s) ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^{T(e)} e^{-R_s} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} b(s) ds \mid \mathcal{F}_t\right)$$

Pero $e^{R_t} L_0^a = \mathbb{E}\left(e^{R_t} L_0^a \mid \mathcal{F}_t\right)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_t^a \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}\left(e^{R_t} L_0^a \mid \mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\int_t^s r_u du} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} b(s) ds \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\int_t^s r_u du} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} b(s) ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\int_t^s r_u du} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} b(s) ds \mid \mathcal{F}_t\right), \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\int_t^s r_u du} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} b(s) ds - \int_0^t e^{-\int_t^s r_u du} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} b(s) ds \mid \mathcal{F}_t\right), \\
&= \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} b(s) ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_t^T \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} e^{-\int_t^s r_u du} b(s) ds \mid \mathcal{F}_t^F \vee \mathcal{F}_t^N\right)
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u+\mu_{e+u}du} b(s)ds \mid \mathcal{F}_t^F\right).$$

Se concluye que,

$$\mathbb{E}(L_t^a \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u+\mu_{e+u}du} b(s)ds \mid \mathcal{F}_t^F\right).$$

□

Se define la reserva prospectiva en el tiempo t como

$$V_t^a = \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u+\mu_{e+u}du} b(s)ds \mid \mathcal{F}_t^F\right). \tag{4.5.4}$$

Como r_t es Markov, la condición $\mathcal{F}_t^F$ se puede reemplazar por el valor de r_t. Concretamente, asumiendo $r_t = x$, se puede colocar $V_t^a = V^a(x,t)$.

Nota 2. *La condición de cierre dada en (4.5.2) puede parecer poco natural. En Duffie et al. (1996, Lemma 1, pag. 1086) hay una demostración de un resultado similar, utilizando la condición más simple* $\mathbb{P}(L_T^a = 0) = 1$. *Pero la ecuación de la pérdida prospectiva ya no es (4.5.1) sino que se reeplaza por*

$$dL_t^a = L_t^a dR_t - \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}} b(s)ds + dm_t,\ 0 \le t \le T,$$

donde m_t *es una martingala uniformemente integrable.*

Nota 3. *El supuesto de la mortalidad como función determinística del tiempo* μ_{x+t} *se considera irrealista, debido a que la mortalidad humana cambia entre generaciones de manera aleatoria. Por ejemplo, en el artículo Blake et al. (2013) se afirma*

> *The huge economic significance of longevity risk for corporations, governments and individuals has begun to be recognized and quantified. By virtue of its size and prevalence, longevity risk is the most significant life-related risk exposure in financial terms and poses a potential threat to the whole system of retirement income provision*

Por lo que en la literatura se han incorporado modelos aleatorios para la mortalidad, por ejemplo, con base en procesos de Cox en los cuales μ_{x+t} *es una función de un proceso aleatorio, por ejemplo, una difusión. Esta variación no fué incorporada en este ocasión.*

Capítulo 5

Valoración de flujos de pagos estocásticos

5.1. Flujos de pagos estocásticos y pólizas contingentes

Una póliza convencional es un tipo de seguro de vida y/o anualidad de vida que genera pagos según que la vida de edad inicial (e) experimente diferentes contingencias de vida, como enfermedad temporal, discapacidad, invalidez, muerte.

Para describir el flujo de pagos (en inglés, *stream of liabilities*) relacionado con estas pólizas, se utiliza el siguiente modelo general, que se basa en una cadena de Markov finita con espacio de estados $\mathcal{J} = \{0, 1, \ldots, k\}$, donde el estado 0 se asocia con un estado de saludable y k con el estado de fallecido. Los estados intermedios representan diferentes contingencias de salud, jubilación, etc. Según que se permanezca en el estado j se asocia un pago instantáneo $b_j(t)$, y según que se pase de j a k se realiza un pago instantáneo $b_{j,k}(t)$. La función $N_{j,k}(t, t+h)$ cuenta el número de transiciones de j a k, con $k \neq j$, en el intervalo $[t, t+h]$. La suma de todos los pagos netos en el intervalo $[0, t]$ se denota por $B(t)$, (ver, por ejemplo, Asmussen & Steffensen (2020, Cap. 7, sección 7)),

$$B(t) = \sum_{j \in \mathcal{J}} \left\{ \int_0^t \mathbb{1}_{\{S_s = j\}} b_j(s) ds + \sum_{k \neq j} \int_0^t b_{j,k}(s) dN_{j,k}(s) \right\}. \tag{5.1.1}$$

Se define un flujo de pagos estocástico cuando las tasas instantáneas de pago $b_j(t), b_{j,k}(t)$ dependen de un proceso estocástico $\{Y_t, t \geq 0\}$. En este caso se escribe $b_j(t, Y_t)$, $b_{j,k}(t, Y_t)$. Este proceso está adaptado a la información $\mathbb{F}^Y = \{\mathcal{F}_t^Y, t \geq 0\}$. Y se asumirá que ésta es independiente de la información de la mortalidad $\mathbb{F}^N$ y de la información de la tasa instantánea de interés $\mathbb{F}^F$. Se considera una filtración aumentada que incluya a $\mathcal{F}^F$ y a $\mathcal{F}_t^Y$, indicada por $\mathcal{F}_t = \sigma\{\mathcal{F}^F \cup \mathcal{F}^Y\}_t = (\mathcal{F}^F \vee \mathcal{F}^Y)_t$. Adicionalmente, para simplificación, se asumirá que $\mathbb{F}^F$ y $\mathbb{F}^Y$ son independientes.

En esta tesis se considera el caso de una vida (e) y un modelo con sólo dos estados $\mathcal{J} = \{0, 1\}$. La vida (e) recibe un pago hasta que fallece, a una tasa instantánea $b(t)$, y/o también un pago en el momento de fallecer, $b_{0,1}(T(e))$.

Cuando Y_t describe el valor monetario de la unidad de un índice bursátil, el pago de las pólizas depende de éste mediante un mecanismo (fórmula) denominado: con participación en un índice, en inglés, *unit-linked*.

Ejemplos de algunos tipos de flujos de pagos, denotados por C_t, asumidos como procesos acotados y adaptados a $\mathcal{F}_t^Y$, relacionados con seguros y anualidades de vida tradicionales, están en Biffis (2005, pag. 450), y se reproducen aquí con algunas modificaciones (se incluyó las funciones indicadoras en la definición de C_t):

1. Seguro de vida Dotal puro a T años,

$$C_t \equiv \mathbb{1}_{\{T<T(e)\}} b(T, Y_T). \tag{5.1.2}$$

   En inglés Dotal se traduce como *Endowment*. Es un pago único, por eso es constante y se indica con el símbolo identidad.

2. Seguro de vida Temporal a T años,

$$C_t = \mathbb{1}_{\{t \leq T(e) \leq T\}} b(T(e), Y_{T(e)}). \tag{5.1.3}$$

3. Seguro de vida Dotal a T años,

$$C_t = \mathbb{1}_{\{t \leq T(e) \leq T\}} b(T(e), Y_{T(e)}) + \mathbb{1}_{\{T<T(e)\}} b(T, Y_T). \tag{5.1.4}$$

4. Anualidad de vida Temporal a T años,

$$C_t = \mathbb{1}_{\{t \leq T(e) \leq T\}} b(t, Y_t). \tag{5.1.5}$$

Las funciones $b(t, y)$ se asumen acotadas e integrables localmente.

Una persona puede comprar una de estas pólizas, denominadas pólizas contingentes (en inglés *contingent claim*), pero lo que compra es un flujo de pagos cuyo valor depende de un resultado aleatorio, en un intervalo finito de tiempo, por un precio V_0. Este valor evoluciona con el tiempo a un precio V_t, para $0 \leq t \leq T$, donde T es un tiempo finito, de terminación del contrato. Para encontrar el valor de V_t se han introducido diferentes metodologías. El objetivo es encontrar expresiones para V_t.

La definición de póliza contingente hace referencia a las anualidades variables y los seguros y anualidades unit-linked, como un conjunto de productos financieros con participación en un índice financiero y que depende de la duración de una vida, definidas en Bacinello et al. (2011) y Feng (2018, pag. 10). En estas referencias se incluyen las anualidades variables (en inglés *variable annuities*) que son productos similares, implementadas en la librería `valuer` de R, ver Zoccolan (2018).

El término reserva prospectiva es un término actuarial en seguros de vida para V_t. Hay diferentes métodos de valoración de un flujo de pagos contingentes para determinar V_t.

1. Valoración Actuarial: Consiste en tomar el valor esperado del valor descontado del flujo, con una tasa de interés constante o con base en un modelo de estructura temporar de tasas de interés.

2. Valoración Neutral al Riesgo: Es también un valor esperado del valor descontado del flujo. Pero el valor esperado se toma asumiendo una probabilidad $\mathbb{Q}$, equivalente a la probabilidad física $\mathbb{P}$, de tal manera que no exista la posibilidad de un arbitraje. $\mathbb{Q}$ se denomina probabilidad martingala. Ver algunas definiciones básicas en el Apéndice 10.1

   El valor Neutral al Riesgo implica utilizar una probabilidad martingala $\mathbb{Q}(.)$. Pero en el caso de valoración de reservas pensionales, debido a que no son activos transables en un mercado, no habría manera determinar esta probabilidad, ver Hilli et al. (2011*b*).

3. Valoración a precio de Mercado: En inglés es *Market consistent*. Se extiende el operador de valoración Neutral al Riesgo con una única medida de riesgo sobre el conjunto de pólizas contingentes actuariales que no son replicables mediantes un portafolio de activos financieros transables en la bolsa. Y en la cual hay que elegir de antemano la medida de probabilidad martingala.

4. Valoración de Precio Justo: En inglés *Fair Price*. Es una valoración a la vez Actuarial y a precio de Mercado.

5.2. Valoración de varias pólizas contingentes

Esta sección trata las valoraciones Actuarial. El valor esperado bajo la probabilidad física $\mathbb{P}$ se indica por $\mathbb{E}()$. Y bajo la probabilidad martingala $\mathbb{Q}$, por $E^{\mathbb{Q}}()$. Como en Biffis (2005), se desarrollan las fórmulas de valoración usando el símbolo $\mathbb{E}()$ sin especificar si se trata o no de valoración Neutral al Riesgo. En Carrière (2004) se explica cómo se pasa al caso $E^{\mathbb{Q}}()$. Pero, básicamente, los resultados se basan en supuestos que no son verificables directamente, por lo que no se entrará en la discusión del uso de la probabilidad martingala. Nótese que algunos autores optan por asumir que los valores esperados se calculan bajo $E^{\mathbb{Q}}()$, como si estuviera dada, lo que también podemos asumir aquí.

Una fórmula general para la valoración del flujo de pagos $\{C_t, t \in [0,T]\}$, en un tiempo t, se define por

$$V_t = \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} C_s ds + e^{-\int_t^T r_u du} C_T \mid \mathcal{F}_t\right), \tag{5.2.1}$$

ver, por ejemplo, Biffis (2005, eq. (4), pag. 447), Carrière (2004), Chen & Xiang (2003). Los modelos por ejemplo, Vasicek y Cox-Ingersol-Ross, se utilizan para especificar r_t.

Las fórmulas para valoración se desarrollan en Biffis (2005, Props. 5.1, 5.2, pag. 450). Se reproducen aquí para comentar sobre su demostración utilizando las identidades en

la Proposición 4.4.1 del Apéndice 4.4. Se utilizará el símbolo V_t^s (la s es un indicativo de "seguros") en todos los casos en la subsección siguiente para no sobresaturar las notaciones.

5.2.1. Seguros de vida con participación en un índice financiero

1. Suponga el flujo de caja estocástico de un Dotal puro, (5.1.2), donde $C_t \equiv \mathbb{1}_{\{T<T(e)\}} b(T, Y_T)$ está adaptado a la información $\mathcal{F}_t$. Entonces (5.2.1) toma la forma

$$V_t^s = \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^T r_u du} C_T \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{1}_{\{t<T(e)\}} \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^T r_u + \mu_{e+u} du} b(T, Y_T) \mid \mathcal{F}_t^F\right) \tag{5.2.2}$$

2. Suponga el flujo de caja estocástico de un seguro de vida temporal a T años, (5.1.3), que paga una unidad monetaria en caso de fallecer (x) en el intervalo $[0, T]$, donde $C_t = \mathbb{1}_{\{t \leq T(e) \leq T\}} b(T(e), Y_{T(e)})$ está adaptado a la información $\mathcal{F}_t$. Entonces (5.2.1) toma la forma

$$V_t^s = \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} C_s ds\right) = \mathbb{1}_{\{t<T(e)\}} \int_t^T \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^u r_s + \mu_{e+s} ds} \mu_{e+u} b(u, Y_u) \mid \mathcal{F}_t^F\right) du \tag{5.2.3}$$

3. El seguro de vida Temporal a T años, tipo Unit-Linked, está definido por el flujo de pagos

$$b(T(e), Y_{T(e)}) = \text{máx}\left(e^{\gamma T(e)}, \frac{Y_{T(e)}}{Y_0}\right) \tag{5.2.4}$$

donde $\gamma \in (0, 1)$ es una tasa de interés instantánea que representa un ajuste mínimo por costo de vida. El valor inicial que paga este seguro es una unidad monetaria, que se ajusta con el tiempo. El problema de la valoración de este tipo de seguros de vida está tratado en muchas referencias, por ejemplo, Persson (1993).

4. Suponga el flujo de caja estocástico de un Dotal a T años, (5.1.4), es una combinación de un Temporal más un Dotal puro, por lo que (5.2.1) toma la forma

$$\begin{aligned} V_t^s = {} & \mathbb{1}_{\{t<T(e)\}} \int_t^T \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^u r_s + \mu_{e+s} ds} \mu_{e+u} b(u, Y_u) \mid \mathcal{F}_t^F\right) du \\ & + \mathbb{1}_{\{t>T(e)\}} \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^T r_u + \mu_{e+u} du} b(T, Y_T) \mid \mathcal{F}_t^F\right) \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

5.2.2. Anualidad con participación en un índice financiero, EIA

Una clase de anualidades de vida Temporales a T años, es la denominada Anualidad con participación en un Índice financiero, o EIA por sus siglas en ingles, *Equity Indexed Annuity*. La que se expone aquí está tomada de Lin (2006, Chapter 7). Se conoce en inglés como *Point-to-Point* EIA.

Suponga el flujo de caja estocástico

$$\begin{aligned} b(t, Y_t) &= \beta e^{\gamma t} + \alpha \left[\left(\frac{Y_t}{Y_0} - k_1(t) \right)_+ - \left(\frac{Y_t}{Y_0} - k_2(t) \right)_+ \right], \ t \geq 0, \qquad (5.2.6) \\ k_1(t) &= \frac{1}{\alpha}(\beta e^{\gamma t} - 1 + \alpha), \\ k_2(t) &= \frac{1}{\alpha}(e^{\delta t} - 1 + \alpha), \end{aligned}$$

donde Y_t representa el valor del Índice financiero en el tiempo t, Y_0 se asume conocido y $(z)_+$ es la función parte positiva de z.

Los procesos r_t y Y_t pueden ser correlacionados. La relación entre los mercados de renta fija y renta variable (bonos versus acciones) es un problema de econometría, sujeto a mucho debate, y por razones de extensión del trabajo no se incorporará aquí, y se asumirá que son independientes. Además, se asumirá un modelo de ecuación diferencial estocástica tipo movimiento browniano geométrico (MBG) para Y_t, es decir

$$dY_t = Y_t(\mu_Y dt + \sigma_Y dW_t^Y), \ t \geq 0, \qquad (5.2.7)$$

$$\mathbb{E}(Y_t) = e^{(\mu_Y + \sigma_Y^2/2)t}. \qquad (5.2.8)$$

con Y_0 conocido. Los datos para calibrar este modelo puedes ser, por ejemplo, los del índice de la Bolsa de Valores de Colombia, colcap.

Los parámetros se interpretan mejor con base en una fórmula equivalente a (5.2.6), con $a \wedge b = min(a, b)$ y $a \vee b = max(a, b)$,

$$b(t, Y_t) = \left[(1 + \alpha(Y_t/Y_0 - 1)) \wedge e^{\delta t} \right] \vee [\beta e^{\gamma t}]. \qquad (5.2.9)$$

1. El modelo de anualidades EIA asume implícitamente que la tasa Y_t/Y_0 captura el costo de vida. El parámetro $\gamma \in (0, 1)$ es una tasa de incremento por costo de vida, mínima garantizada.

2. $\alpha \in [0, 1]$ es una tasa de participación del Índice financiero en la anualidad. Si es $\alpha = 0$ no hay influencia del Índice en la anualidad. En este caso se tiene de (5.2.9), $b(t, Y_t) = \beta e^{\gamma t}$.

3. La tasa δ es una tasa denominada *cap*, es un tope superior para $(1 + \alpha(Y_t/Y_0 - 1))$, por tanto, se requiere especifiar primero la tasa de participación α.

4. El valor β es el valor incial del pago, que se está tomando en los ejemplos como $\beta = 100/\bar{a}_e$, para $e = 62$, y los parámetros de una Ley de Mortalidad Gompertz-Makeham, con base en la Tabla de mortalidad Colombia ISS2000-2005, para hombres.

Ejemplo 5.2.1. *Se escogieron los valores para los parámetros de la tasa de pago garantizada en una anualidad de vida EIA, para el caso del índice Colcap, diario, entre 07/06/2001 - 11/09/2005. La gráfica de $b(t, Y_t/Y_0)$ está en la línea en color azul, punteada, en la Figura 5.1.*

```
y0 = 993.618
delta = 0.28
alpha = 0.7
gamma = 0.2
beta = 1.0
```

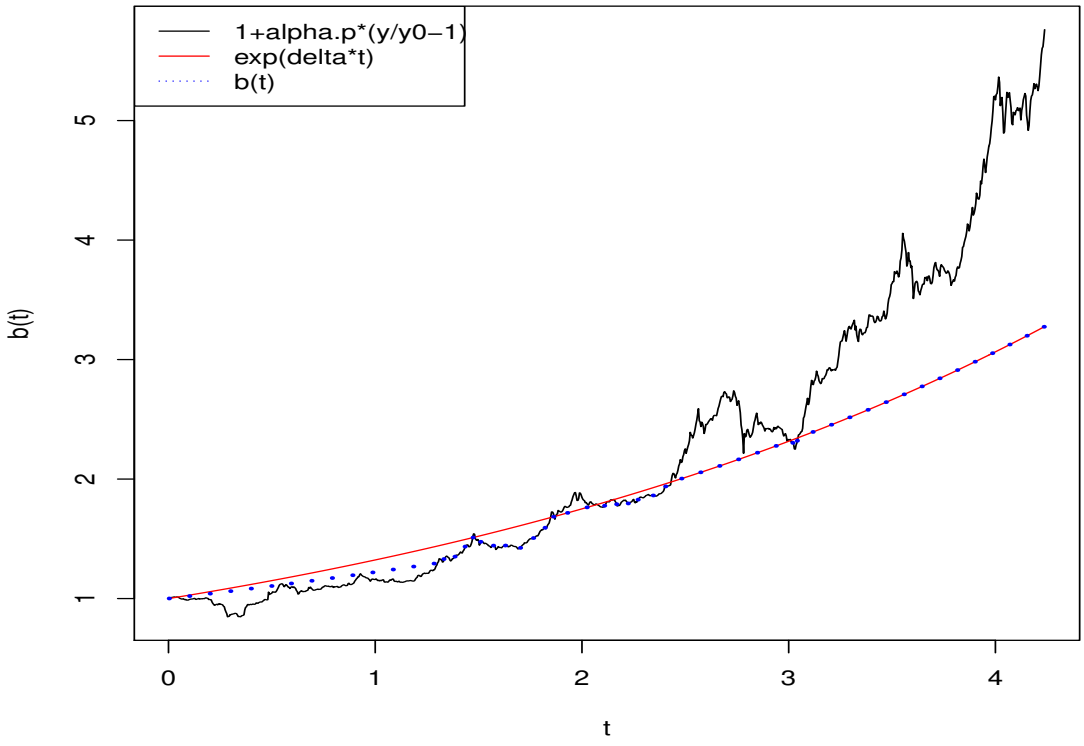


Figura 5.1: gráfica de: tasa $(1 + \alpha(Y_t/Y_0 - 1))$ (negro), tasa $\exp(\gamma t)$ (rojo), la tasa de pagos instantánea $b(t)$ (azul, línea punteada), en la anualidad EIA, con base en el índice Colcap, período 07/06/2001 - 11/09/2005

Entonces, con $C_t = \mathbb{1}_{\{t \leq T(e) \leq T\}} b(t, Y_t)$, (5.2.1) toma la forma, ver Biffis (2005, pag. 452)

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} C_s ds \mid \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{1}_{\{t < T(e)\}} \int_t^T \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^s r_u + \mu_{e+u} du} b(s, Y_s) \mid \mathcal{F}_t^F \right) ds \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Nótese que, como el integrando $\int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} C_s ds$, tiene esperanza en valor absoluto finita, por el Teorema de Fubini, ver (**??**), se tiene también

$$V_t = \mathbb{1}_{\{t < T(e)\}} \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u + \mu_{e+u} du} b(s, Y_s) ds \mid \mathcal{F}_t^F \right) \tag{5.2.11}$$

5.2.3. Anualidad de vida tipo Retiro Programado

Esta anualidad se define por su flujo de pagos

$$C_t = \mathbb{1}_{\{t \leq T(e) \leq T\}} \frac{X_t}{\bar{a}_{e+t}}, \tag{5.2.12}$$

donde X_t representa el valor monetario en t de una cuenta invertida en un fondo de inversiones, y $T = \omega - e$, donde e es la edad al inicio del contrato.

Se define un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ que representa el valor monetario de una cuenta de ahorro pensional al tiempo t, en un sistema de Retiro Programado, ver la sección §2.2. La tasa de consumo o pagos en este sistema se define como $b(t) = \frac{X_t}{\bar{a}_{e+t}}$. Se asumirá que X_t satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} \frac{dX_t}{X_t} &= \left[r_t - \frac{1}{\bar{a}_{e+t}} + \lambda \right] dt + \sigma \, dW_t^X \;\; t \in [0, T], \\ X_0 &> 0, \text{dado.} \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

con $\sigma > 0$, $T = \omega - x$, donde x es la edad en $t = 0$ del pensionado. Este modelo representa la evolución del saldo de la cuenta de ahorro, invertida en un portafolio que está conformado por efectivo a la tasa r_t, bonos valorados con la estructura temporal de r_t y acciones con volatilidad, representada por el proceso de Wiener estándar W_t^X, el cual se asume adaptado a la información $\mathcal{F}_t^X$. Además, se asume que r_t está adaptado a esa información. El modelo (5.2.13) es similar a un modelo para inversión en un fondo que replica un índice financiero, de la forma

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma \, dW_t^X,$$

pero se le añade el efecto de rentabilidad de los bonos y la tasa de consumo $\frac{X_t}{\bar{a}_{e+t}}$. Propuestas similares en Boulier et al. (2001), He & Liang (2013) y Han & Hung (2015). Defina

$\theta = \lambda - \frac{1}{2}\sigma^2$. Entonces, aplicando el resultado del Problem 6.15, pag. 360 in Karatzas & Shreve (1991), la solución de (5.2.13) está dada por

$$X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t r_s - \frac{1}{\bar{a}_{x+s}} ds + \theta t + \sigma W_t^X\right). \tag{5.2.14}$$

Se introduce una ecuación diferencial lineal estocástica para el proceso $L_t, t \geq 0$, definido como el balance en el tiempo t de una cuenta de ahorro a la tasa r_t, del titular de la anualidad. También se llama a L_t la variable pérdida (*loss variable*).

Proposición 5.2.2. *Defina el proceso $\{L_t, t \geq 0\}$ como la solución única de la ecuación diferencial estocástica*

$$dL_t = L_t dR_t - \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}} \frac{X_t}{\bar{a}_{e+t}} dt, \ 0 \leq t \leq T, \tag{5.2.15}$$

con $R_t = \int_0^t r_u du$, el interes acumulado en $[0, t]$, y $L_0 = X_0 > 0$ fijo. Si se asume la condición, de cierre

$$\mathbb{E}(e^{-R_{T(e)}} L_{T(e)} \mid \mathcal{F}_t) = 0, \ \textit{con probabilidad uno}, \tag{5.2.16}$$

entonces, la solución de (5.2.15) satisface la identidad

$$\mathbb{E}(L_t \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}} \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u + \mu_{e+u} du} \frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}} ds \mid \mathcal{F}_t^X\right). \tag{5.2.17}$$

El factor $\mathbb{1}_{\{T(e)>t\}} X_t$ en lugar de X_t obedece a que en el retiro programado la cuenta se cierra cuando fallece el titular y el saldo se convierte en masa sucesoral para sus beneficiarios.

Demostración. La solución de (5.2.15) es

$$L_t = e^{R_t}\left(L_0 - \int_0^t e^{-R_s} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} \frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}} ds\right),$$

reemplazando $t = T(e)$ se obtiene

$$e^{-R_{T(e)}} L_{T(e)} = L_0 - \int_0^{T(e)} e^{-R_s} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} \frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}} ds,$$

y de la condición de cierre se tiene

$$\mathbb{E}(L_0 \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(\int_0^{T(e)} e^{-R_s} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} \frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}} ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-R_s} \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}} \frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}} ds \mid \mathcal{F}_t\right)$$

Pero $e^{R_t}\mathbb{E}(L_0 \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left(e^{R_t}L_0 \mid \mathcal{F}_t\right)$, luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_t \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}\left(e^{R_t}L_0 \mid \mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\int_t^s r_u du}\mathbb{1}_{\{T(e)>s\}}\frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}}ds \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\int_t^s r_u du}\mathbb{1}_{\{T(e)>s\}}\frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}}ds \mid \mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\int_t^s r_u du}\mathbb{1}_{\{T(e)>s\}}\frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}}ds \mid \mathcal{F}_t\right), \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-\int_t^s r_u du}\mathbb{1}_{\{T(e)>s\}}\frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}}ds - \int_0^t e^{-\int_t^s r_u du}\mathbb{1}_{\{T(e)>s\}}\frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}}ds \mid \mathcal{F}_t\right), \\
&= \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u}\mathbb{1}_{\{T(e)>s\}}\frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}}ds \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\left(\int_t^T \mathbb{1}_{\{T(e)>s\}}e^{-\int_t^s r_u du}\frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}}ds \mid \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^N\right) \\
&= \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u+\mu_{e+u}du}\frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}}ds \mid \mathcal{F}_t^X\right),
\end{aligned}$$

aplicando en la última línea la Proposición 4.4.1, con $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^N$, donde X_t y r_t están adaptados a la información $\mathcal{F}_t^X$ y el proceso $N_t = \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}}$ genera la información $\mathcal{F}_t^N$, asumidas independientes, y donde $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^N$ es la información generada por la unión de ambas. □

Se define la reserva prospectiva en el tiempo t, para $T(e) > t$, como

$$V_t = \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u+\mu_{e+u}du}\frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}}ds \mid \mathcal{F}_t^X\right). \tag{5.2.18}$$

Los procesos X_t, r_t son procesos Markov con respecto a $\mathcal{F}_t^X$, por tanto, se puede reemplazar en el condicional, $\mathcal{F}_t^X$, en la última ecuación por $X_t = x, r_t = r$, con lo cual la reserva se define como una función $V : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de la forma

$$V(t,x,r) = \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u+\mu_{e+u}du}\frac{X_s}{\bar{a}_{e+s}}ds \mid X_t = x, r_t = r\right). \tag{5.2.19}$$

Capítulo 6

Estrategia de suavizar la tasa instantánea de interés

6.1. Definición del procedimiento de suavización

Dada una muestra finita de r_t, $\underline{r} = (r_{t_1}, \ldots, r_{t_n})$, en tiempos equidistantes t_j, el problema de suavizar la serie de tiempo resultante $r_j = r_{t_j}$, consiste en definir una estimación no paramétrica de la tendencia media, definida como el valor esperado condicional en el modelo siguiente

$$r_j = \mathbb{E}(r_j | r_{j-1}, r_{j-2}, \ldots) + \epsilon_j, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.1.1}$$

Estimar la tendencia media equivale a suavizar la serie (*smoothing*) ó eliminar el ruido ϵ_t (*denoising*).

Muchas de las técnicas de suavizamiento son estimaciones no paramétricas en series de tiempo. Buscan definir un estimador

$$\widehat{r}_j = \widehat{\mathbb{E}}(r_j | r_{j-1}, r_{j-2}, \ldots) \tag{6.1.2}$$

La motivación para incluír el tema de suavización de una serie de tiempo en este trabajo es que, en primer lugar, el factor de descuento estocástico $\exp(-\int_0^t r_s ds)$ se puede estimar mediante $\exp(-dt \sum_{t_j \leq t} r_{t_j})$, con $dt \equiv 1/(t_j - t_{j-1})$.

Pero, interesa definir un suavizador de $\{r_{t_j}, j = 1, \ldots, n\}$ como una función integrable de t, $r(t)$, definida en cualquier t incluído en el rango de valores de los t_j, y dependiente de esta muestra, de tal forma que se pueda aproximar $\exp(-\int_0^t r_s ds)$ por $\exp(-\int_0^t r(s) ds)$.

Ver una estrategia similar en Balter & Werker (2020).

Existen muchos suavizadores, de varios tipos, implementados en el software R. Un nombre equivalente a suavizador es filtro. Una lista parcial es la siguiente.

1. Filtro Whittaker-Henderson, ver Yamada & Jahra (2018), en Alexandrov et al. (2012)

2. Filtro Hodrick-Prescott, ver Kim et al. (2009) y Djehiche & Nassar (2013).

3. Con base en splines cúbicos, ver por ejemplo la función `cubicspline` en la librería `pracma`,

4. Filtros tipo Savitzky-Golay, ver Proietti et al. (2008)

5. El filtro ℓ_1, ver Kim et al. (2009).

6.1.1. Filtro Whittaker-Henderson

En: Yamada & Jahra (2018), en Alexandrov et al. (2012)

> The local polynomial regression predictor developed by Henderson (1916) and LOESS due to Cleveland (1979) are the most widely applied nonparametric local filtering methods to estimate the short-term trend of seasonally adjusted economic indicators

El filtro Whittaker-Henderson se define como la solución al siguiente problema de optimización. Denotando $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_N)'$ la serie original se trata de encontrar $\underline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_N)'$ que minimize la función objetivo

$$Q(\underline{Y}) = ||\underline{X} - \underline{Y}||^2 + \lambda ||\Delta^p(\underline{Y})||^2, \tag{6.1.3}$$

donde $||\underline{Y}||^2 = \sum_{j=1}^N Y_j^2$, $\Delta^p(\underline{Y})$ es la potencia $p = 1, 2, 3, \ldots$ del operador diferencia $\Delta = I - L$ y $\lambda > 0$ es un parámetro (tunning) que penaliza el grado de suavidad de la serie filtrada. A mayor λ más suavizada resulta la serie filtrada.

La operación $\Delta^p(\underline{Y})$ se puede expresar matricialmente como $D_p\underline{Y}$. Por ejemplo, la matriz D_1 es de dimensión $(N-1) \times N$, y su primera fila es $(-1, 1, 0, \ldots, 0)$, la segunda $(0, -1, 1, 0, \ldots, 0)$, etc.

Se puede encontrar la solución del problema observando que se puede encontrar el gradiente de $Q(\underline{Y})$ e igualarlo a cero

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{Y}} Q(\underline{Y}) &= -2(\underline{X} - \underline{Y}) + 2\lambda D_p' D_p \underline{Y} = \underline{0} \\ \therefore \quad \underline{Y} &= (I_N + \lambda D_p' D_p)^{-1} \underline{X}. \end{aligned}$$

El filtro original WH utiliza $p = 3$, suaviza con base en la tercera diferencia $\Delta^3(X_n) = X_n - 3X_{n-1} + 3X_{n-2} - X_{n-3}$. No es un filtro convolución.

```
#--------calculo WH directo
n = length(Xn)
E = mat.or.vec(n,n)
diag(E) = rep(1,n)
D3=diff(E,1,3)
lambda3 = 3000
Yn = solve(E+lambda3*t(D3)%*%D3,Xn)
#--------calculo con pracma
require(pracma)
# d order of differences in penalty (generally 2)
Yn.pracma = whittaker(Xn, lambda = lambda3, d = 3)
```

6.1.2. Filtro ℓ_1

Se va a utilizar el filtro ℓ_1. Éste se introdujo en Kim et al. (2009) como una modificación del filtro Hodrick-Prescott, modificando el problema de minimización en (6.1.3) mediante un procedimiento denominado mínimos cuadrados penalizados con norma ℓ_1, $||\underline{x}||_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$. El filtro ℓ_1 es la solución del problema de minimización, con función objetivo convexa. Esta solución se denota como $\widehat{\underline{r}}$, tal que $\widehat{r}(t_j) \equiv \widehat{r}(t_j \mid \lambda; r_{t_1}, \ldots, r_{t_T})$ y cumple

$$\widehat{\underline{r}} = \text{argmin}_{\underline{y} \in \mathbb{R}^n} \ \{||\underline{y} - \underline{r}||_2^2 + \lambda ||\Delta^2(\underline{y})||_1\}. \tag{6.1.4}$$

La función objetivo en (6.1.4) no es derivable con respecto a $\underline{y}$, ver (Gallieri 2016, pag. 48). Según Kim et al. (2009, pag. 342), el vector $\widehat{\underline{r}}$ no es una función lineal de $\underline{r}$. Pero se cumple que

$$\widehat{\underline{r}} \to \underline{r}, \text{ si } \lambda \to 0. \tag{6.1.5}$$

Una propiedad de esta solución $\widehat{\underline{r}}$ es que es una función seccionalmente lineal de los tiempos t_j. El filtro suaviza con base en segmentos de recta. Es decir, existen tiempos $t_1 = \tau_1 < \ldots < \tau_k = t_n$ tales que, si $\tau_s \leq t_j \leq \tau_{s+1}$ entonces

$$\widehat{r}(t_j) = \alpha_s + \beta_s t_j. \tag{6.1.6}$$

ver, Kim et al. (2009, pag. 343, eq(8)).

La estrategia de transformación consiste en dos pasos: se suaviza la serie con un filtro ℓ_1 y luego se define una función $t \to r(t)$ que devuelve el valor suavizado en cualquier t mediante intepolación con los valores observados más cercanos.

El filtro ℓ_1 se puede programar en lenguaje R con la librería `l1tf`, con parámetro de suavizamiento λ, que, mientras más cercano a cero tiende a reproducir los datos y, al aumentar, genera mayor suavizamiento.

Pero la función `l1tf` no devuelve los tiempos τ_s, sino sólo los valores suavizados de la serie. La implementación de suavizamiento propuesta utiliza las funciones de interpolación, disponibles en R, `splinefun` y `approxfun`. Estas funciones extienden los valores de $\widehat{r}(t_j)$ a valores intermedios $t_j < t < t_{j+1}$, mediante interpolación con polinomios hasta de orden tres (splines cúbicos), a elección del usuario. De tal forma que en un intervalo cualquiera estas funciones conservan la función seccionalmente lineal y proveen, a elección del usuario, una función seccionalmente diferenciable con continuidad. En todo caso sigue siendo un funcional de los datos que depende de λ. Se indicará por

$$t \to r(t \mid \lambda; r_{t_1}, \ldots, r_{t_T}),\ t \in [0, T]. \tag{6.1.7}$$

En lo sucesivo se omitirá la dependencia de la muestra y de λ y se escribirá simplemente $r(t)$.

En el código R 6.1 se implementan los pasos. En este código el vector de tasas simulado se indica por `r`. Luego a este vector se le aplica el suavizamiento con el filtro ℓ_1 usando un valor λ que se escoge de manera que se produzca una serie suficientemente suave pero todavía representativa de las variaciones. Un paso subjetivo, se admite.

Luego el valor suavizado, representado en el código por `r.l1` se ingresa como argumento en una de las funciones `splinefun` y `approxfun`. Se muestran dos opciones. Pero los detalles de, por ejemplo, los métodos `"linear"` y `"fmm"` no se exponen aquí y pueden ser consultados en las ayudas. El resultado en cualquier caso es un objeto tipo `function()`, que puede ser evaluado en un argumento escalar.

Código R 6.1: Programacion de suavizamiento de tasas de interés

```
#————————————————————————————————
require(l1tf)
r.l1 = l1tf(r, lambda = 1090)
T = length(tib)
tx = seq(1,T)/365
rt = approxfun(tx,rt.l1,method="linear")
rt = splinefun(tx,rt.l1,method = "fmm")
#—rt es una función definida en el rango de tx
```

Si el proceso es estacionario en sentido amplio sus distribuciones finito-dimensionales son invariantes en el tiempo, por lo que habría un argumento para utilizar $r(u)$ por fuera del intervalo $[0, T]$. Siempre se asumirá que la información de la muestra está dada en la información del proceso r_t, $\sigma\{r_t, s \leq t\}$.

Ejemplo 6.1.1. *Examinamos la tasa diaria efectiva anual de un portafolio de fiducias desde 2000-01-01 hasta 2009-12-30, efectiva anual, en decimales. En la Figura 6.1 aparecen valores suavizados mediante filtros ℓ_1 con parámetro de suavizamiento* `lambda = 1090`.

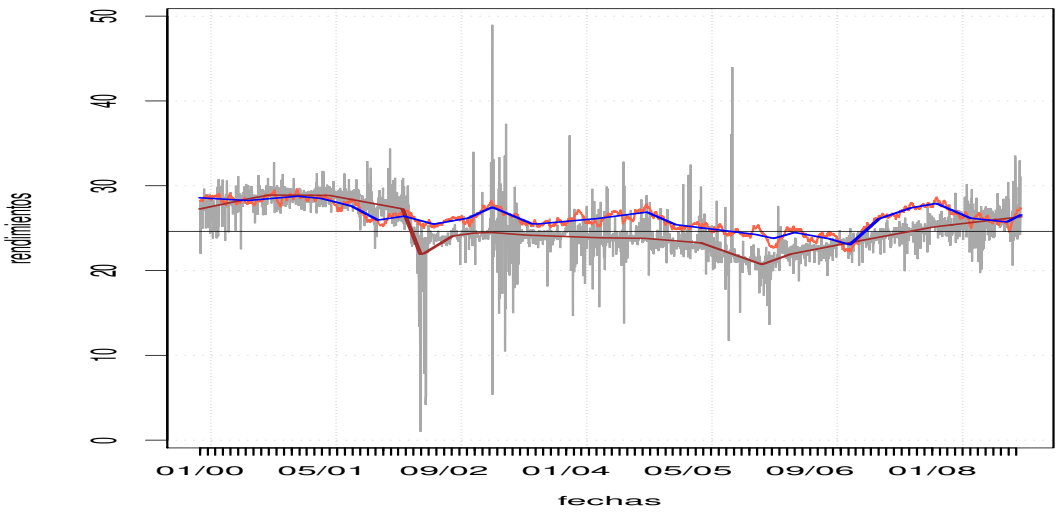


Figura 6.1: Tasas de rendimiento diarias de un portafolio de fiducias entre 2000/01/01 y 2009/12/30, (en gris), con la suavización con el filtro ℓ_1 (en café), junto con una simulación de la tasa (en rojo) y su respectiva suavización (en azul).

6.2. Aplicación

Las reservas prospectivas vistas en capítulos anteriores dependen del proceso estocástico r_t. Por ejemplo:

1. La reserva (4.5.4) en anualidades de vida con tasa aleatoria

$$V_t^a = \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u+\mu_{e+u}du} b(s)ds \mid \mathcal{F}_t^F\right).$$

2. La reserva en anualidades de vida EIA, dada en (5.2.11),

$$V_t = \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u+\mu_{e+u}du} b(s,Y_s)ds \mid \mathcal{F}_t^F\right)$$

3. La reserva en anualidades de vida tipo Retiro Programado, dada en (5.2.18)

$$V_t = \mathbb{1}_{\{T(e)>t\}}\mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u+\mu_{e+u}du} \frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}} ds \mid \mathcal{F}_t^X\right)..$$

4. La reserva para pólizas contingentes, de forma general, en (5.2.1)

$$V_t = \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} C_s ds + e^{-\int_t^T r_u du} C_T \mid \mathcal{F}_t\right),$$

Aplicando la transformación $r_t \to r(t)$ en cualquiera de las anteriores, por ejemplo, en la última, se redefine ésta como

$$V_t^s = \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r(u)du} C_s ds + e^{-\int_t^T r(u)du} C_T \mid \mathcal{F}_t\right). \tag{6.2.1}$$

Luego la diferencia es

$$\begin{aligned} V_t - V_t^s = \mathbb{E}&\left(\int_t^T e^{-\int_t^s \mu_{e+u}du}\left(e^{-\int_t^s r_u du} - e^{-\int_t^s r(u)du}\right) C_s ds \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &+ \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^s \mu_{e+u}du}\left(e^{-\int_t^s r_u du} - e^{-\int_t^s r(u)du}\right) C_T \mid \mathcal{F}_t\right). \end{aligned}$$

Para medir el efecto del suavizamiento, una alternativa es medir la diferencia entre el proceso $E_t = e^{-\int_0^t r_u du}$ y el estadístico $E_t^s = e^{-\int_0^t r(u)du}$, en el intervalo $0 \leq t \leq T$. Para medirla se requiere algún tipo de distancia o norma. Por ejemplo, la norma en media cuadrática

$$||E - E^s||_{L^2}^2 = \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T}(E_t - E_t^s)^{2p}\right). \tag{6.2.2}$$

para $1 \leq p < \infty$.

Asumimos ahora que los r_{t_j} son valores simulados y que al tender $n \to \infty$ convergen en media cuadrática a r_t, de acuerdo con (3.4.6). Entonces también

$$e^{-h\sum_{t_j\leq t} r_{t_j}} \xrightarrow{L^2} e^{-\int_0^t r_u du},\ n \to \infty.$$

Aplicando la convergencia $\widehat{\underline{r}} \to \underline{r},$ si $\lambda \to 0$, se debe complir que $r(t_j) \to r_{t_j},$ si $\lambda \to 0$, en cada tiempo t_j. Luego

$$e^{-\int_0^t r(u)du} = e^{-h\sum_{t_j\leq t} r(t_j)} \to e^{-h\sum_{t_j\leq t} r_{t_j}},\ \lambda \to 0.$$

Por tanto, se tiene que

$$e^{-\int_0^t r(u)du} \xrightarrow{L^2} e^{-\int_0^t r_u du},\ n \to \infty, \lambda \to 0.$$

de donde

$$||E - E^s||_{L^2}^2 \to 0,\ n \to \infty, \lambda \to 0.$$

Capítulo 7

Implementación numérica de la valoración

El procedimiento propuesto en esta tesis para estimar la reserva (5.2.1)

$$V_t = \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} C_s ds + e^{-\int_t^T r_u du} C_T \mid \mathcal{F}_t\right),$$

consiste en simular N trayectorias del proceso

$$S_t = \int_t^T e^{-\int_t^s r_u du} C_s ds + e^{-\int_t^T r_u du} C_T,$$

para $0 \leq t \leq T, T = \omega - x$, y promediarlas. El promedio en cada tiempo es un estimador $\widehat{V_t}$ de V_t, que converge con probabilidad uno a este valor cuando $N \to \infty$, por la Ley Fuerte de Grandes Números. Para la simulación es necesario especificar:

1. La frecuencia, es decir, las unidades de t: día, semana, mes, semestre.
2. La fuerza de mortalidad μ_{e+t}
3. El modelo para la estructura temporal de tasas r_t
4. La tasa de pagos $b(t, Y_t)$

7.1. Ejemplo 1. Anualidad de vida con tasa aleatoria

Considerando el caso de una vida de edad e=62 años, mujer, quien adquiere una renta vitalicia con una Aseguradora y se evalúa la reserva (4.5.4), pag. 32, simulando trayectorias del proceso

$$S_t^a = \int_t^T e^{-\int_t^s r_u + \mu_{e+u} du} b(s) ds,$$

Parámetros del modelo

- Mortalidad. Utilizando un modelo de supervivencia Gompertz-Makeham, con fuerza de mortalidad $\mu_x = a + bc^x$, con la reparametrización explicada en §4.1, para una vida de edad $e = 62$, hombre, con edad máxima 110.

```
 # Tabla ISS 2008-2010, Hombres,
c = 1.1395016
s = 0.9953583
g = 0.9999905
```

- Frecuencia de muestreo. Se utilizó una frecuencia mensual, para paso entre los tiempos $dt = 1/12 = 0.08333$.

- El modelo para la tasa instantánea se tomó Vasicek, (3.5.1), con los parámetros obtenidos al ajustar las tasas TES 1 año, como aparecen en la Tabla 3.3, parametrizado según la librería `yuima`

$$dr_t = (\theta_1 - \theta_2 r_t)dt + \theta_3 dW_t,\ t \geq 0.$$

- La tasa de pagos consiste en pagos con incrementos anuales de 2.5 % efectivo anual, como tasa de incremento de salario mínimo, y un valor inicial de 12 unidades monetarias. Implementada en el vector `bt`.

```
m =12; e = 62: w = 110; T = w-e;
tx = seq(0,T,1/m)
P = 12 # tasa de pago inicial : 1 unidad x mes
q = 1; iq = 0.025;
bt = P*(1+iq)^(floor(tx*q)/q)
```

  El valor inicial del pago es $P = 12$. Lo que significa que en el primer año se reciben 12 mesadas de una unidad monetaria cada una. Unidad monetaria puede ser un salario mínimo legal, etc.

En la Figura 7.1 aparecen graficado cuatro elementos básicos: ${}_tp_e$, μ_{e+t}, $b(t)$ y r_t. El eje x corresponde al intervalo $[0, 110 - 62]$ que corresponde al ciclo de vida para una persona de edad 62 años. La codificación en R se presenta en la sección §10.3.2, del Apéndice C.

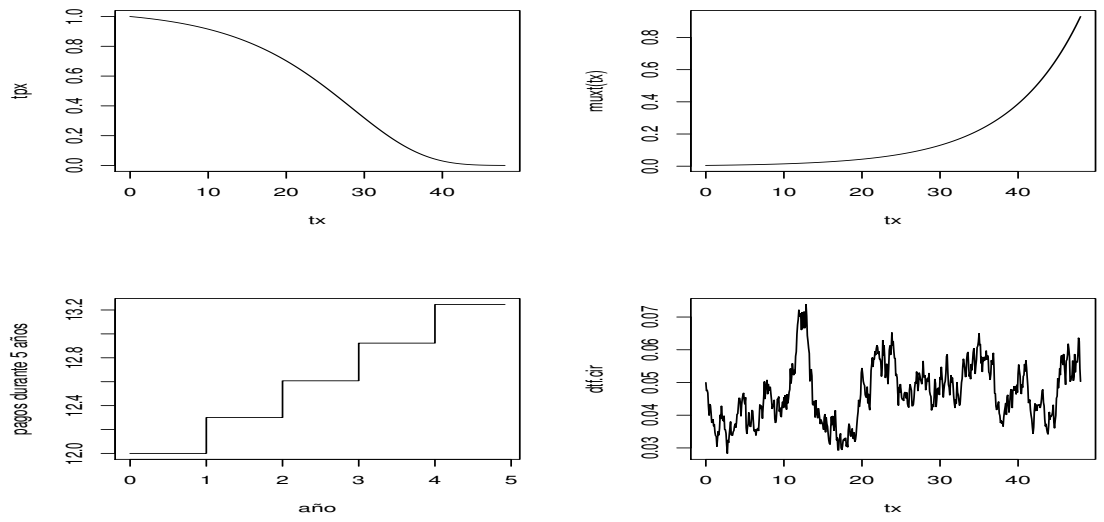


Figura 7.1: paneles: (1,1): gráfica de ${}_tp_x$, (1,2): gráfica de la fuerza de mortalidad μ_{x+t}, (2,1): gráfica de la tasa de pagos instantánea $b(t)$,(2,2): trayectoria de r_t simulada

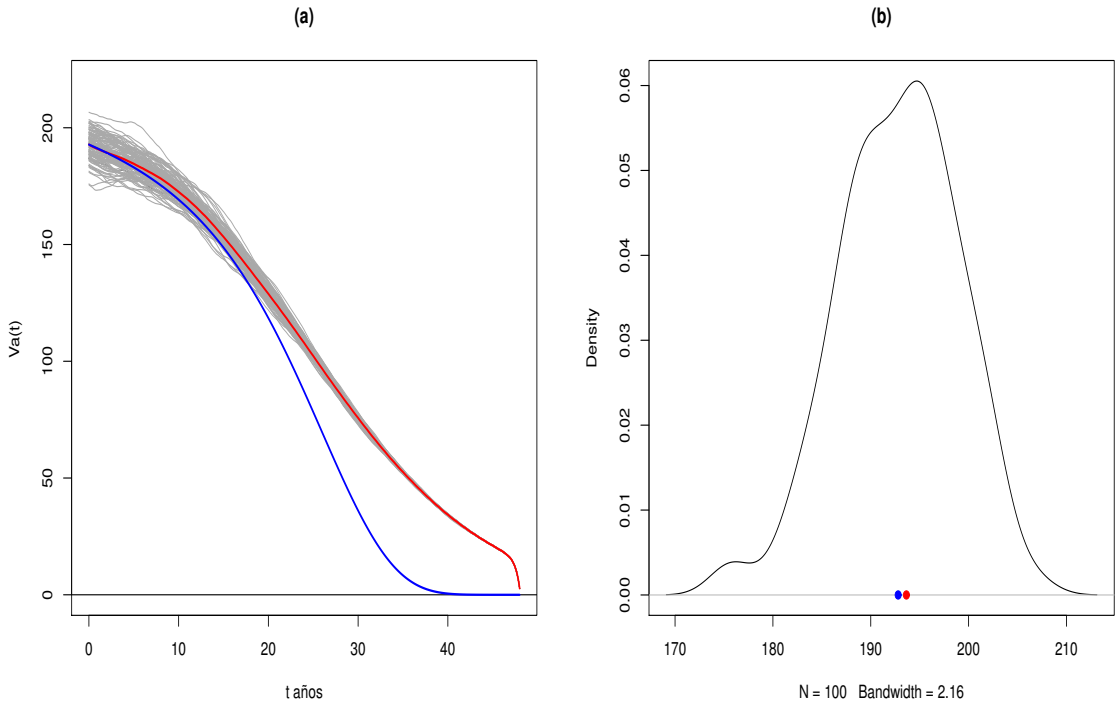
1. Calcula la distribución de supervivencia, la fuerza de mortalidad y la función de valor de la anualidad cierta $\bar{a}_x$.

2. Simula la tasa instantánea r_t.

3. Simula S_t^a.

Análisis

En la Figura 7.2(a) aparecen las gráficas de las simulaciones de $N = 100$ trayectorias del proceso S_t^a, con t en meses. Se obtiene un valor estimado para la reserva de $V_0 = 192.8006$ unidades monetarias por un pago de 12 unidades al año. Por ejemplo, recibir 1 salarios mínimos mensuales (smmv), con incrementos de 2.5 % anuales, costaría 192.8006 smmv. Un cálculo simple permite pasar a valores monetarios. Por ejemplo, para recibir el primer año una mesada mensual por 1 salario mínimo mensual legal de \$908.526 se requiere una reserva de \$175′164.300



(a) Simulación V_t

(b) densidad de V_0

Figura 7.2: (a) n=100 simulaciones del proceso S_t, del valor de una Anualidad de vida con tasa aleatoria, de la vida (e), con la probabilidad de supervivencia de (e) (azul), y V_t estimada como el promedio (rojo). (b) densidad de los valores simulados de V_0, con el valor medio de éstos, 192.8006 (azul) y el valor teórico 193.642 (rojo)

7.2. Ejemplo 2. Anualidad tipo Retiro Programado

En esta sección el objetivo es aplicar simulación Monte Carlo, para generar, por ejemplo N trayectorias del proceso $S_t, 0 \leq t \leq T$

$$S_t = \int_t^T \frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}} \exp\left(-\int_t^s r_u + \mu_{e+u} du\right) ds,$$

de longitud k cada una, indicadas por $S_{t_i}^{(j)}, j = 1, \ldots, N, i = 1, \ldots, k$, y promediar en cada tiempo t_i, para generar una trayectoria de la reserva estimada

$$\widehat{V}_{t_i} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} S_{t_i}^{(j)}. \tag{7.2.1}$$

El procedimiento Monte Carlo que se presenta a continuación consiste en los pasos.

1. Simular una trayectoria de $r_t, t \in [0, T]$ según un modelo Vasicek o Cox-Ingersoll-Ross. Este paso no se expone aquí porque ya se desarrolló en el Capítulo 4.

2. Simular una trayectoria de $X_t, t \in [0, T]$, según (5.2.13).

3. Simular una trayectoria de S_t, aplicando la transformación $r_t \to r(t)$ en (6.1.7), es decir, simular (usando el mismo símbolo S_t)

$$S_t = \int_t^T \frac{X_s}{\bar{a}_{e+s}} \exp\left(-\int_t^s r(u) + \mu_{e+u} du\right) ds \tag{7.2.2}$$

4. Promediar las trayectorias simuadas de S_t, en cada t, para calcular $\widehat{V}_t$.

A continuación se describen los pasos anteriores y se comentan los resultados. Ver el código R 10.4 en la sección §10.3.3 del Apéndice C. Todas las referencias al código en R se refieren a éste.

Paso 1. Primero se simulan trayectorias de r_t con un modelo para la estructura temporal. Escogimos el modelo Vasicek, ajustado a los datos de la serie TES 1 año, como se mostró en la sección §3.5.

Paso 2. Luego se simulan trayectorias de X_t en (5.2.13), usando las trayectorias de r_t lo que introduce dependencia entre X_t y r_t.

$$\frac{dX_t}{X_t} = \left[r_t - \frac{1}{\bar{a}_{e+t}} + \lambda\right] dt + \sigma\, dW_t^X \;\; t \in [0, T]. \tag{7.2.3}$$

Como se explicó en la sección §6.1, se usan suavizaciones de las trayectorias simuladas de r_t, definidas como funciones de t, $r(t)$, por lo que la ecuación base de la simulación es

$$\frac{dX_t}{X_t} = \left[r(t) - \frac{1}{\bar{a}_{e+t}} + \lambda\right] dt + \sigma\, dW_t^X \;\; t \in [0, T]. \tag{7.2.4}$$

Los parámetros que figuran en estos modelos se detallan a continuación.

- Mortalidad. Utilizando un modelo de supervivencia Gompertz-Makeham, con fuerza de mortalidad $\mu_x = a + bc^x$, con la reparametrización explicada en §4.1, para una vida de edad $e = 62$, hombre, con edad máxima 110. Permiten definir $\bar{a}_{e+t}$.

```
 # Tabla ISS 2008-2010, Hombres,
c = 1.1395016
s = 0.9953583
g = 0.9999905
```

- Frecuencia de muestreo. Se utilizó una frecuencia mensual, para paso entre los tiempos $dt = 1/12 = 0.08333$.

- La volatilidad asumida para el proceso Wiener W_t^X, es $\sigma = 0.09$, que corresponde a una volatilidad anual de 0.26.

- La tasa de la anualidad $\bar{a}_x$ es $i = 0.05$ efectiva anual.
- El valor inicial del fondo X_0 es igual a $12\bar{a}_e$. Lo que significa que en el primer año se reciben 12 mesadas de una unidad monetaria cada una. Unidad monetaria puede ser un salario mínimo legal, etc.
- El modelo para la tasa instantánea se tomó Vasicek, (3.5.1), con los parámetros obtenidos al ajustar las tasas TES 1 año, como aparecen en la Tabla 3.3, parametrizado según la librería `yuima`

$$dr_t = (\theta_1 - \theta_2 r_t)dt + \theta_3 dW_t,\ t \geq 0.$$

- La tasa de pagos es $b(t, X_t) = \frac{X_t}{\bar{a}_{e+t}}$

Para simular un proceso de difusión con tendencia (drift) dada por la expresión en corchetes, utilizamos la librería `Sim.DiffProc`. En el ejemplo que sigue reemplazamos dos valores: $\lambda = 0.07, 0.035$; este parámetro representa un porcentaje de rebalanceo de portafolios que representa la habilidad de una mesa de dinero para aumentar el rendimiento del portafolio. En los códigos R se añade esta constante al vector simulado r_t, antes de suavizarlo, como se muestra en la sección de código siguiente.

```
ysim = simulate(yuima,xinit=y[1])
rt = gamma+as.numeric(ysim@data@zoo.data$Series)/100
rt.l1 = l1tf(rt, prop = 0.00150)
rt.a = approxfun(tx,rt.l1,method="linear"
```

Implementar la función $r(t)$, indicada por `rt.a(t)`, mediante las funciones de interpolación, disponibles en R, `splinefun` y `approxfun`, es lo que permite incorporarla dentro del comando `expression()` de R en `Sim.DiffProc`, como se muestra aquí:

```
drift     <- expression( x*(rt.a(t)-1/acx(t)))
diffusion <- expression( (sigma*x) )
```

Un análisis simple de los resultados sobre la simulación de X_t.

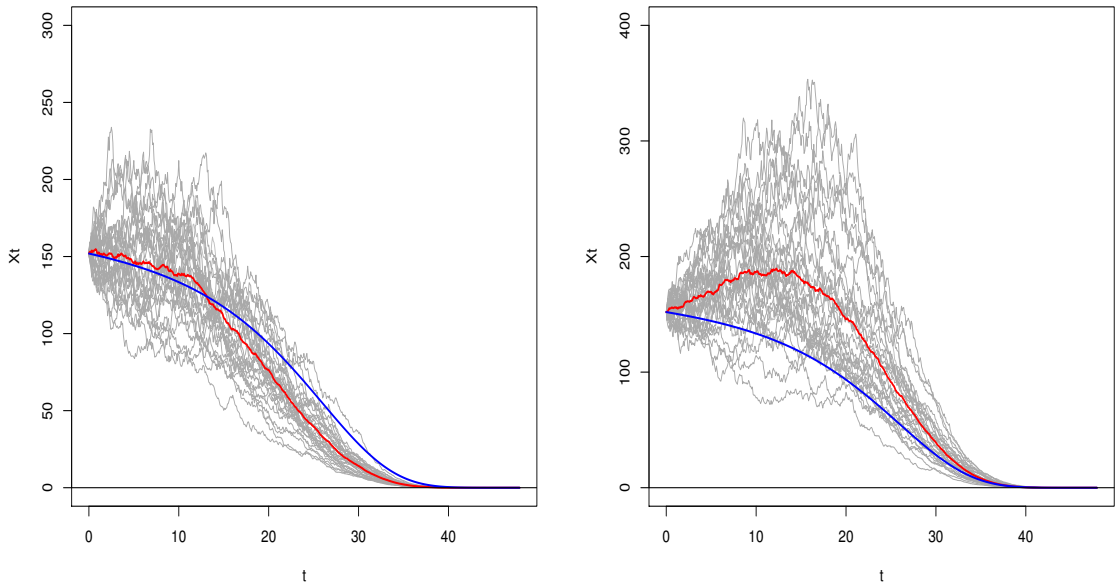
En la Figura 7.3 se muestran dos simulaciones de $n = 30$ trayectorias de X_t, asumiendo $X_0 = 12\bar{a}_{62}$.

La trayectoria resaltada en azul que se muestra en ambas gráficas de la Figura 7.3 corresponde a la probabilidad de supervivencia ${}_tp_x = \mathbb{P}(T(x) > t)$ para una vida de edad $x = 62$, con la ley Gompertz-Makeham para mujeres en la experiencia 2000-2008, que es la Tabla de Vida vigente en Colombia.

Notamos que las trayectorias de X_t tienden a cero casi de la forma en que lo hace ${}_tp_x$. El eje x de ambas gráficas está en años y recorre el intervalo $[0, 110 - 62]$. La conclusión es

que, en el sistema de Retiro Progamado, los recursos se van agotando al mismo ritmo que se envejece.

La trayectoria resaltada en rojo que se muestra en ambas gráficas es una trayectoria media.



(a) (b)

Figura 7.3: $n = 30$ simulaciones del proceso X_t, el saldo del fondo de inversiones en Retiro Programado de la vida (62), con la probabilidad de supervivencia de (62) en color azul, y trayectoria promedio en rojo. Valor inicial es $X_0 = 12\bar{a}_{62}$, hombres, tabla colombiana mortalidad 2000-2008 ISS. Panel (a) $\gamma = 0.035$, Panel (b) $\gamma = 0.07$

Paso 3. El paso siguiente es simular varias trayectorias de S_t, definido en (7.2.2).

Para esto se utilizan las trayectorias de r_t y X_t. Los resultados están en las Figuras 7.4, donde se muestran los resultados de dos simulaciones para S_t, con $n = 200$ datos, con valores $\gamma = 0.03$ para el panel (a) y $\gamma = 0.07$ para el panel (b)..

En ambas Figuras 7.4(a),(b) aparece adicionalmente la probabilidad de supervivencia $\mathbb{P}(T(x) > t)$ para una vida de edad $x = 62$, con la ley Gompertz-Makeham para mujeres en la experiencia 2000-2008, que es la Tabla de Vida vigente en Colombia.

Análisis

El sistema de Retiro Prograd contrasta fuertemente con un sistema basado en anualidades de vida con corrección por costo de vida, cuyas reservas se ejemplificaron en la Figura

7.2.

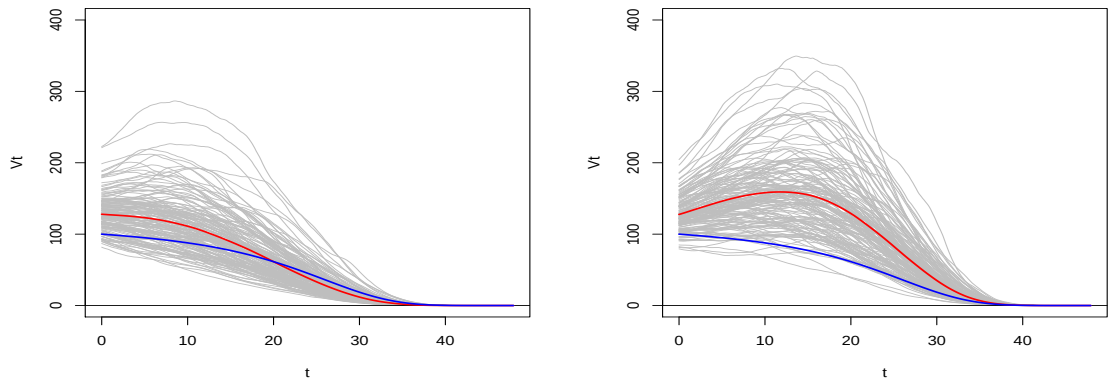
Para cuantificar la diferencia en los resultados calculamos un precio actuarial aproximado con la fórmula (7.2.5). Utilizamos el promedio de una simulación de r_t, $\bar{r}$, y se le añade una sobre tasa, con dos valores: un valor bajo $\gamma = 0.035$ y un valor alto $\gamma = 0.07$, para obtener $i = \bar{r} + \gamma$. Luego, usando $\delta = \log(1 + i)$, con la fórmula

$$V_0 = \int_0^{\omega - e} e^{-\delta t} {}_t p_e \mathbb{E}(X_t)/\bar{a}_{e+t} dt. \tag{7.2.5}$$

Estos resultados se compararon con los valores medios de las simulaciones de S_0 en (7.2.2), y además, se comparon con el valor de una renta vitalicia con corrección por costo de vida obtenido en el párrafo de análisis de la sección §7.1. Los resultados están en la Tabla 7.1. Es evidente que el costo de este tipo de anualidad es menor que la renta vitalicia, y no depende tanto del desempeño del portafolio, lo que a primera vista resulta sorpresivo. Una posible conclusión es: el sistema de retiro programado no genera rendimientos financieros que se transladen al titular, por eso su costo depende únicamente de lo que se invierte. En el caso de la renta vitalicia hay un mayor costo que puede deberse al hecho de que el riesgo de inflación lo asume el emisor de la anualidad.

Tabla 7.1: Tabla comparativa de costo aproximado de Retiro Programado versus una tasa de interés adicional en el portafolio

	λ	$V_0 \approx$	$\widehat{V_0}$
(a)	0.035	123.953	127.9708
(b)	0.070	125.844	127.6494
(An.vida)	0.000	193.642	192.8006



(a) Simulación de S_t, $n = 200$, $\gamma = 0.035$ (b) Simulación de S_t, $n = 200$, $\gamma = 0.07$

Figura 7.4: Dos simulaciones del proceso S_t, del valor de la cuenta de ahorro en Retiro Programado de la vida (x). En la derecha, la probabilidad de supervivencia de una vida de 62 años, mujer, en color rojo. En azul aparecen las trayectorias promedio en ambos casos.

Distribución del valor presente del Retiro Programado

De los resultados de las simulaciones de la sección anterior se desprende que también se puede analizar la distribución empírica de la variable

$$S_0 = \int_0^{\omega-e} \frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}} \exp\left(-\int_0^s r(u) + \mu_{e+u} du\right) ds \tag{7.2.6}$$

que se denominará valor presente del Retiro Programado. Por ejemplo, con base en $n = 200$ simulaciones, para el caso de $\gamma = 0.07$, se puedo observar la distribución a partir de diferentes estimadores de la densidad y diagramas como BoxPlot y DotChart, implementados de R.

En la Figura 7.5, por ejemplo, en el diagrama BoxCox, se observa la presencia de datos extremos. Las distribuciones denominadas de cola pesada, definidas en el semieje positivo, tienden a generar datos extremos en la cola derecha. Un estadístico utilizado para determinar si la distribución posee la característica de cola pesada, es la Vida Media Residual (en inglés: Mean Residual Life). Una tendencia creciente indicaría cola pesada mientras que una tendencia decreciente cola liviana.

La VMR está implementada en R en varias librerías. Por ejemplo, en `POT` se obtiene el estimador que se muestra en la Figura 7.6.

Se observa que la distribución tiene algunos datos extremos pero no llega a ser de cola pesada.

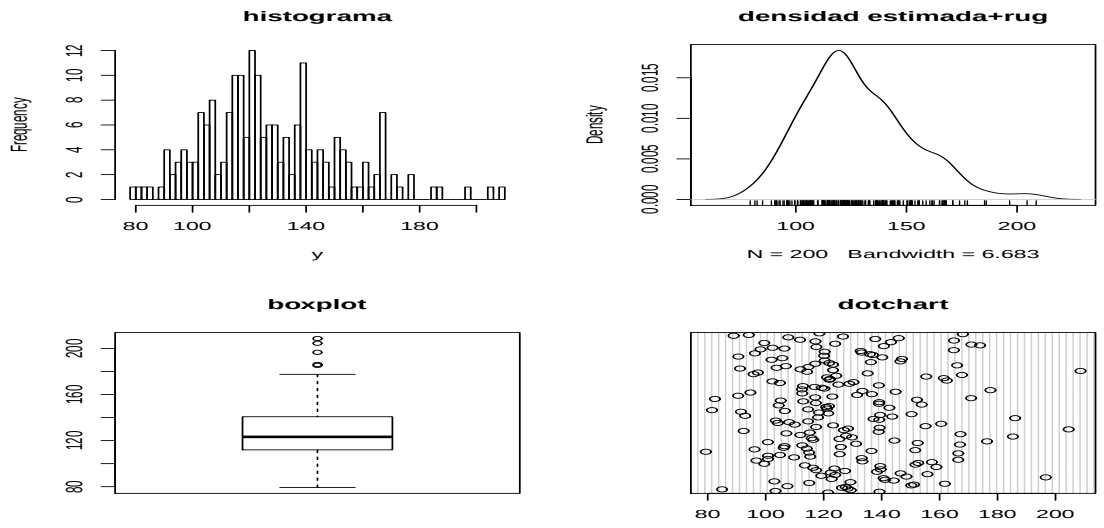


Figura 7.5: Diferentes visualizaciones de la distribución empírica de S_0

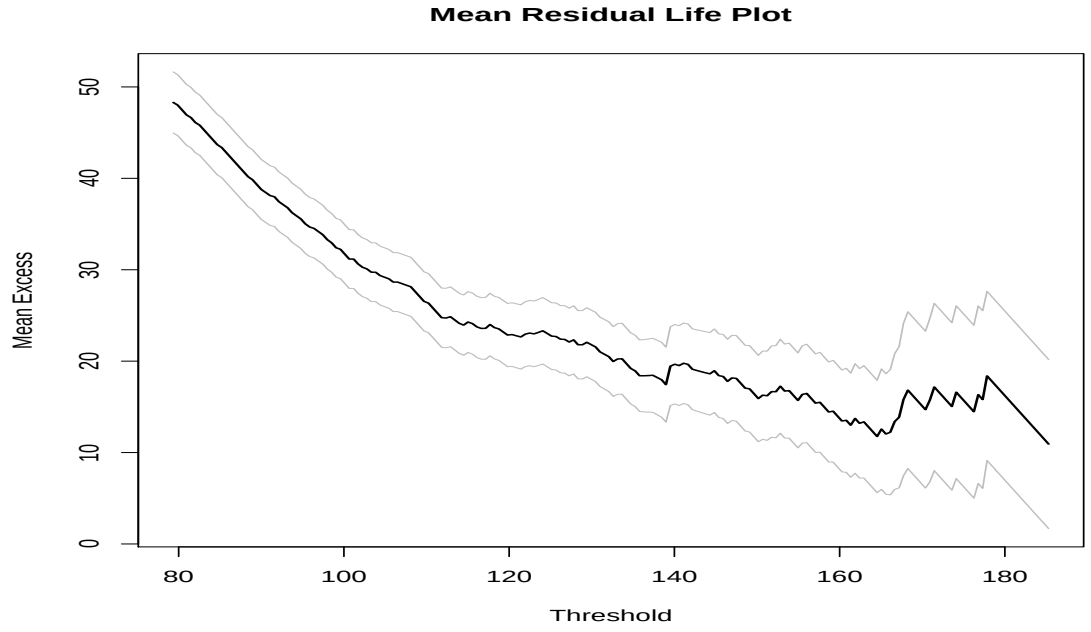


Figura 7.6: Estimación de la Vida Media Residual con base en una muestra simulada de tamaño $n = 200$ de S_0

Con estos resultados resulta interesante econtrar una familia paramétrica que mejor ajuste los datos. Para este fin utilizamos la librería `gamlss`, mediante el código R siguiente:

Código R 7.1: ajuste de los cinco mejores modelos con respecto al AIC

```
require(gamlss)
Sfit1 <- fitDist(y = y, type = "realplus")
Sfit1$fits[1:5]
#-------las  mejores 5 con respecto al AIC
Sfit1$fits[1:5]
IGAMMA       GG      BCCG     BCCGo       GIG
3931.163 3932.951 3932.968 3932.968 3932.995
```

La distribución que mejor ajustan los datos, con respecto al Criterio de Información de Akaike, AIC, es una Gamma Inversa. Una variable aleatoria $X \in (0, \infty)$ se distribuye Gamma Inversa si $X^{-1} \sim Gamma(\alpha, \beta)$, es decir si su inverso se distribuye Gamma.

Concluímos con un comentario adicional.

El problema de las anualidades de vida con tasas aleatorias ha recibido mucha antención en la literatura. Por ejemplo, en De Schepper & Goovaerts (1992) se analiza el caso de una anualidad cierta, definida como una modificación de (4.2.2), reemplazando ${}_tp_x = 1$, e introduciendo en el exponente el proceso Wiener estándar, $\{W_t, t \geq 0\}$,

$$\bar{a}_{\overline{T|}} = \int_0^T e^{-(\gamma t + \sigma W_t)} dt,$$

con $\gamma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ constantes (en caso de obtener tasas negativas, se podría hablar de retornos y no de tasas). En Dufresne (1990, Proposition 4.4.4, pag. 60) se demuesta el siguiente resultado, para $T = \infty$:

Proposición 7.2.1. *Suponga un proceso Wiener estándar, $W_t, t \geq 0$. Defina la variable aleatoria*

$$Z = \int_0^\infty e^{-(\gamma t + \sigma W_t)} dt$$

Entonces se cumple

$$\gamma \leq 0 \Rightarrow \ Z = \infty, \textit{con probabilidad uno}, \tag{7.2.7}$$

$$\gamma > 0 \Rightarrow \ Z^{-1} \sim Gamma(2\gamma/\sigma^2, \sigma^2/2) \tag{7.2.8}$$

Este resultado apareció inicialmente en Dufresne (1990), y con una demostración diferente en Milevsky (1997). Retomando aunque no podemos demostrar un resultado similar al de la Proposición 7.2.1 para la variable S_0, consideramos que los resultados empíricos permiten plantear la posibilidad de demostrar que S_0 se distribuye Gamma Inversa. Lo anterior consiste en observar que los datos simulados permiten concluír que la distribución que mejor ajusta, según el criterio de mínimo AIC, en el Código R 7.1 anterior, es precisamente una Inversa Gaussiana. Un resultado que no sería casual.

Capítulo 8

Deducción de ecuaciones Feynman-Kăc

8.1. Introducción a la fórmula Feynman-Kăc

La fórmula de Feynman-Kăc está en muchas referencias. Por ejemplo, ver Duffie (2010, Appendix E), Friedman (1976, pag. 147, eq. 5.12), Karatzas & Shreve (1991), Papanicolaou (2019, sec. 2.5), se formula con base en un problema de Cauchy para una ecuación diferencial parcial parabólica.

Este capítulo busca aplicar el teorema de Feynman-Kac para deducir una ecuación diferencial parcial parabólica, a partir de la cual se puede calcular la reserva prospectiva en la anualidad de vida con tasa aleatoria y en la anualidad de Retiro Programado. Siguiendo el ejemplo en Persson (1993) que la aplica para un seguro de vida tipo unit-linked.

Sin embargo, no se avanza en la solución numérica de estas ecuaciones. Este tema es bien conocido y está tratado en varios textos e implementado en varios lenguajes como Matlab y MAPLE.

Proposición 8.1.1. *Suponga que X_t es un proceso que satisface la ecuación diferencial estocástica siguiente en $[0, T)$,*

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t. \tag{8.1.1}$$

Suponga una función $f \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, T))$, que resuelve el problema de Cauchy

$$f_t(x,t) + \mu(x,t)f_x(x,t) + \frac{1}{2}\sigma(x,t)^2 f_{xx}(x,t) - q(x,t)f(x,t) + h(x,t) = 0, \tag{8.1.2}$$

$$f(x,T) = g(x). \tag{8.1.3}$$

donde $q(x,t)$, $h(x,t)$, $\mu(x,t)$, $\sigma(x,t)$ son funciones definidas es $\mathbb{R} \times [0, T)$ con valores en $\mathbb{R}$, y $g(x)$ está definida en $\mathbb{R}$ con valores en este conjunto. Entonces, si la solución de la

EDP (8.1.2) existe, está dada por

$$f(x,t) = \mathbb{E}\left[\int_t^T h(X_s,s)e^{-\int_t^s q(X_u,u)du}ds + e^{-\int_t^T q(X_s,s)ds}g(X_T)\Big|X_t = x\right] \tag{8.1.4}$$

La versión multidimensional en $\mathbb{R}^N$, $N = 2, ...$ está en Duffie (2010, Apendix E).

8.2. Ejemplo 1. Anualidad de vida con tasa aleatoria

Considerando la fórmula (8.1.4) anterior

$$f(x,t) = \mathbb{E}\left[\int_t^T h(X_s,s)e^{-\int_t^s q(X_u,u)du}ds + e^{-\int_t^T q(X_s,s)ds}g(X_T)\Big|X_t = x\right]$$

se compara con (4.5.4)

$$V^a(x,t) = \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u+\mu_{e+u}du}b(s)ds \mid r_t = x\right).$$

Se define $f(x,t) = V(x,t)$ para $t \in [0,T]$, $T = \omega - e$, $x > 0$. Tomando $X_t = r_t$, y por ejemplo, el modelo CIR para la tasa r_t, se definen

$$\begin{aligned}
\mu(x,t) &= a(b-x),\\
\sigma(x,t) &= \sigma\sqrt{x},\\
h(x,t) &= b(t),\\
q(x,t) &= x + \mu_{e+t},\\
g(x) &\equiv 0
\end{aligned}$$

Nótese que la constante b no debe confundirse con la función $b(t)$. La ecuación (8.1.2)

$$\begin{aligned}
&f_t(x,t) + \mu(x,t)f_x(x,t) + \frac{1}{2}\sigma(x,t)^2(x)f_{xx}(x,t) - q(x,t)f(x,t) + h(x,t) = 0,\\
&f(x,T) = g(x).
\end{aligned}$$

queda finalmente

$$\begin{aligned}
&f_t(x,t) + a(b-x)f_x(x,t) + \frac{1}{2}\sigma x f_{xx}(x,t) - (x+\mu_{e+t})f(x,t) + b(t) = 0, \qquad (8.2.1)\\
&f(x,T) = 0.
\end{aligned}$$

Si se retoma la ecuación de Thiele para anualidades de vida en (4.3.4)

$$\frac{d}{dt}V_t^c = (r+\mu_{e+t})V_t^c - b(t), 0 \le t \le T,$$

y se compara con (8.3.1) re-escribiéndola con $f(x,t) = V^a(x,t)$

$$V_t^a(x,t) = (x + \mu_{e+t})V^a(x,t) - b(t) - a(b-x)f_x(x,t) - \frac{1}{2}\sigma x f_{xx}(x,t), \tag{8.2.2}$$

La ecuación anterior es similar a la ecuación de Thiele (4.3.4), en los dos primeros términos del miembro derecho, pero tiene términos adicionales, y en la literatura se ha denominado ecuación Thiele-Black-Scholes.

8.3. Ejemplo 2. Anualidad tipo Retiro Programado

Se requiere examinar las condiciones para aplicar el teorema Feynman-Kăc en Proposicion 8.1.1. Considerando la fórmula (8.1.4)

$$f(x,t) = \mathbb{E}\left[\int_t^T h(X_s,s)e^{-\int_t^s q(X_u,u)du}ds + e^{-\int_t^T q(X_s,s)ds}g(X_T)\Big| X_t = x\right]$$

La evaluación de la reserva $V(t,x,r)$ en (5.2.19)

$$V(t,x,r) = \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r_u + \mu_{e+u}du}\frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}}ds \mid X_t = x, r_t = r\right).$$

no puede realizarse por la vía de la fórmula Feynman-Kăc multidimensional debido a que los procesos (r_t, X_t) no son procesos Wiener independientes. Si se sustituye r_t por una versión suavizada, definida como una función $r(t)$, con base en información histórica, la propuesta en esta tesis es que puede re-definirse la reserva $V(t,x,r)$ como

$$V(t,x) = \mathbb{E}\left(\int_t^T e^{-\int_t^s r(u) + \mu_{e+u}du}\frac{X_s}{\bar{a}_{x+s}}ds \mid X_t = x\right).$$

Se define $f(x,t) = V(x,t)$ para $t \in [0,T]$, $T = \omega - e$, $x > 0$, con coeficientes $\mu(t,x)$, $\sigma^2(t,x)$ según la ecuación (5.2.13),

$$\begin{aligned}
\mu(t,x) &= \left[r(t) - \frac{1}{\bar{a}_{e+t}} + \underline{\lambda}\right]x,\\
\sigma(t,x) &= \sigma x,\\
h(x,t) &= \frac{x}{\bar{a}_{e+t}},\\
q(x,t) &= r(t) + \mu_{e+t}\\
g(x) &\equiv 0.
\end{aligned}$$

La ecuación (8.1.2)

$$f_t(x,t) + \mu(x,t)f_x(x,t) + \frac{1}{2}\sigma(x,t)^2 f_{xx}(x,t) - q(x,t)f(x,t) + h(x,t) = 0,$$

$$f(x,T) = g(x).$$

queda finalmente

$$\begin{aligned} f_t(x,t) &= (r(t) + \mu_{e+t}) f(x,t) - \frac{x}{\bar{a}_{e+t}} \\ &\quad - x\left[r(t) - \frac{1}{\bar{a}_{e+t}} + \underline{\lambda}\right] f_x(x,t) - \frac{1}{2}(\sigma x)^2 f_{xx}(x,t), \\ f(x,T) &= 0. \end{aligned} \tag{8.3.1}$$

Evaluando $f(x,t)$ en $(x,t) = (X_t, t)$, for $0 \leq t \leq T$, se llega a la reserva de un sistema de retiro programado, $V_t = f(X_t, t)$. Si se retoma la ecuación de Thiele para anualidades de vida en (4.3.4)

$$\frac{d}{dt} V_t^c = (r + \mu_{e+t}) V_t^c - b(t), 0 \leq t \leq T,$$

la ecuación anterior (8.3.1) es similar a ésta en los dos primeros términos del miembro derecho, pero tiene términos adicionales. En la literatura se ha denominado (8.3.1) ecuación Thiele-Black-Scholes.

Capítulo 9

Conclusiones

Primero se van a mencionar los aportes de este trabajo y luego se van a explicar algunas conclusiones.

Los aportes consisten en:

1. El desarrollo de expresiones para las reservas prospectivas de anualidades de vida, anualidades de vida con tasas aleatorias y anualidades tipo Retiro Programado, como valores esperados condicionados de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas lineales. Estas reservas prospectivas coinciden con la expresión para la valoración de estas anualidades.

2. La prpopuesta de un procedimiento de estimación no paramétrica de la tasa r_t mediante un suavizamiento con filtros lineales, en tiempos finitos, seguido de una implementación como una función de t. Esto permitió utilizar las funciones de simulación de la librería `Sim.DiffProc`. También permite implementar la fórmula Feyman-Kăc en el caso de retiro programado que era un objetivo de la tesis. El procedimiento se discutión en el capítulo 6.

3. La implementación de expresiones en el lenguaje R y se pudo generar simulaciones Monte Carlo que permitieron valorar estos productos.

4. La obtención de expresiones para las ecuaciones Feynman-Kăc para las reservas de anualidades de vida con tasas aleatorias y anualidades tipo Retiro Programado. Aunque no se proporcionaron soluciones numéricas, obtener las expresiones es de utilidad.

Algunas conclusiones que se desprenden de este trabajo son

1. Las anualidades de vida con tasa aleatoria y corrección por costo de vida tienen un costo actuarial que puede estar por encima (más costosa) o por debajo (menos

costosa) que el costo de retiro programado, porque el costo de éste depende críticamente del manejo del administrador del portafolio como se muestra en la tabla 7.1, pag. 56.

2. El valor presente de una anualidad de vida en Retiro Programado tiene una distribución de cola pesada, lo que resulta muy interesante desde el punto de vista administrativo como se muestra en la sección 7.2.

Capítulo 10

Anexos

10.1. Anexo A. Valoración Neutral al Riesgo

La relación con la existencia de una medida martingala equivalente. Dado un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ se dice equivalente si existe una variable aleatoria finita, no negativa, ξ, tal que $d\mathbb{P}/d\mathbb{Q} = \xi$. La variable ξ es la derivada Radon-Nikodym. En algunos textos se denomina, en inglés, *shadow price*.

Un proceso $\{S_t, t \geq 0\}$ se denomina una martingala en tiempo continuo con respecto a su propia información, $\{\mathcal{F}_t^S, t \geq 0\}$, y con respecto a una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$ si se cumple que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(S_{s+t} \mid \mathcal{F}_s^S) = S_t. \tag{10.1.1}$$

El problema consiste en que, dado el proceso S_t, no siempre es posible encontrar una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$. Cuando se puede probar que existe entonces

Definición de un modelo completo. Un modelo para precios de activos en un mercado se dice completo si posee una representación martingala. Entonces cualquier producto con pago dependendiente de S_t puede ser replicado por un portafolio de precios con este modelo, mediante estrategia dinámica de rebalanceo capaz de reproducir el valor del producto en la fecha de vencimiento.

10.1.1. Valoración Neutral al Riesgo en Vasicek

El objetivo de esta parte es mostrar la equivalencia entre la fórmula de valoración (**??**) y la que se obtiene aplicando la Teoría de Valoración Neutral al Riesgo para Bonos. Esta teoría está desarrollada en varios textos, por ejemplo, Devolder (2016).

El modelo escogido por Longstaff y Schwartz es el proceso Ornstein-Uhlenbeck, o modelo

de Vasicek, definido por la ecuación diferencial estocástica lineal dado en (3.5.1):

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \tag{10.1.2}$$

Para deducir la expresión del precio del bono $P(t,T)$ con la dinámica de la tasa de interés dada por (3.5.1) se asume que el precio depende de r_t, colocando por abuso de notación $P(t,T) = P(t,T,r_t)$. Utilizando el lema de Ito se llega a que la dinámica del precio está descrita por

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \tag{10.1.3}$$

El proceso

$$\lambda_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t} \tag{10.1.4}$$

se denomina precio de mercado del riesgo de tasa de interés, y se puede comprobar que no depende de T. La valoración neutral al riesgo se basa en una probabilidad martingala $\mathbb{Q}$ definida mediante la relación:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^T \lambda_t^2 dt - \int_0^T \lambda_t dW_t\right) \tag{10.1.5}$$

Bajo esta probabilidad el precio del bono, descontado con la tasa r_t, $P(t,T)e^{-\int_0^t r_s ds}$, es una martingala con respecto a la filtración generada por W_t, $\mathcal{F}_t$. Luego,

$$P(t,T)e^{-\int_0^t r_s ds} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(P(T,T)e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t)$$

Como $P(T,T) = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \mathbb{E}(e^{-\int_t^T r_s ds - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda_t^2 dt - \int_0^T \lambda_t dW_t} \mid \mathcal{F}_t) \end{aligned} \tag{10.1.6}$$

Si se coloca $\lambda_t \equiv \lambda$, entonces escoger $\lambda > 0$ indicaría que el Emisor está asumiendo una preferencia por la liquidez, es decir, quiere captar capital, y, en los casos $\lambda < 0$ y $\lambda = 0$, asumiría aversión a la liquidez e indiferencia por la liquidez, respectivamente.

10.2. Anexo B. Filtro Hodrick-Prescott

Esta sección es con base en Kim et al. (2009). En Djehiche & Nassar (2013) se anota que

> The classical Hodrick-Prescott filter...is widely used in graduation or data smoothing, and remains a powerful tool to construct life tables in actuarial science and identify trends or business growth, structural breaks and anomalies in econometric data series

El filtro HP se define como la solución de un problema de mínimos cuadrados penalizados, similar a Whittaker-Henderson con $p = 2$. Dada $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_N)'$, encontrar $\underline{Y}^{hp} = (Y_1^{hp}, \ldots, Y_N^{hp})'$, que sea la solución del problema de minimización

$$\underline{Y}^{hp} = \text{argmin}_{\underline{Y} \in \mathbb{R}^N} \ \{||\underline{Y} - \underline{X}||^2 + \lambda ||\Delta^2(\underline{Y})||^2\} \tag{10.2.1}$$

donde $||X||^2 = \sum_{j=1}^N X_j^2$, es el cuadrado de la norma euclidiana en $\mathbb{R}^N$, y

$$||\Delta^2(\underline{Y})||_2^2 = \sum_{j=3}^N (\Delta^2(Y_j))^2,$$

con $\Delta^2 = (I - L)^2$, el operador segunda diferencia. El parámetro (tunning) $\lambda > 0$ lo fija el usuario como una penalización por el grado de falta de suavidad en la solución, medida con la norma euclidiana de la segunda diferencia. A mayor valor de λ más suave la serie filtrada. En Dermoune et al. (2008)

> There are two different approaches ... to the question of choosing the smoothing parameter. The first approach is to regard the free choice of smoothing parameter as an advantage...The other view advocates for a need of an automatic estimation method. Cross-validation and generalized cross-validation techniques are among the automatic methods used to estimate the smoothing parameter

La función objetivo del problema de minimización (10.2.1) es convexa, por lo que siempre existe una solución. Existe una expresión matricial para esta solución. Si se define la matriz $D_2 \in \mathbb{R}^{(N-2)\times N}$ como una matriz Toeplitz con primera fila $(1, -2, 1, 0, \ldots, 0)$, tal que la segunda fila es $(0, 1, -2, 1, 0, \ldots, 0)$, etc.. Entonces, la función objetivo es

$$||\underline{Y} - \underline{X}||^2 + \lambda ||\Delta^2(\underline{Y})||_2^2 = ||\underline{Y} - \underline{X}||^2 + \lambda \underline{Y}' D_2' D_2 \underline{Y}$$

tomando la derivada con respecto a $\underline{Y}$ e igualando a cero, se despeja $\underline{Y}$ y se obtiene

$$(I + \lambda D_2' D_2)\underline{Y} = \underline{X}.$$

Pero $I + \lambda D_2' D_2$ debe ser definida positiva por lo que puede despejar la solución:

$$\underline{Y}^{hp} = (I + \lambda D_2' D_2)^{-1} \underline{X}. \tag{10.2.2}$$

Una propiedad interesante del filtro HP es que existe una cota superior para el error relativo de aproximar $\underline{X}$ con $\underline{Y}^{hp}$, dada por

$$\frac{||\underline{X} - \underline{Y}^{hp}||_2}{||\underline{X}||_2} \leq \frac{32\lambda}{1 + 32\lambda}. \tag{10.2.3}$$

Con base en esta cota, se puede concluír que si $\lambda \to 0$ entonces $||\underline{X} - \underline{Y}^{hp}||_2 \to 0$, es decir, la serie filtrada converge a la serie original. Si $\lambda \to \infty$, la serie filtrada converge a una linea recta que provee el mejor ajuste a la serie observada, con mínimos cuadrados ordinarios.

El filtro Hodrick-Prescott se puede implementar en lenguaje R con la librería `mFilter` con

```
require(mFilter)
ipc.hp <- hpfilter(ipc,freq=1600)
ipc.hp.t = ipc.hp$trend

> str(ipc.hp)
List of 10
 $ cycle  : num [1:144] -0.265 -0.162 -0.448 -0.285 -0.14 ...
 $ trend  : num [1:144, 1] 0.585 0.592 0.598 0.605 0.61 ...
```

El filtro Hodrick-Prescott (HP) tiene otra caracterización como un filtro lineal IIR dado por

$$H(L) = \frac{1}{I + \lambda(I - L)^2 (I - L^{-1})^2} \tag{10.2.4}$$

La correspondiente función de transferencia $H(e^{-i\omega})$ es, con $e^{i\omega} = cos(\omega) + isen(\omega)$,

$$\begin{aligned} H(e^{-i\omega}) &= \frac{1}{1 + \lambda(1 - e^{-i\omega})^2 (1 - e^{i\omega})^2} \\ &= \frac{4\lambda(1 - \cos(\omega))^2}{1 + 4\lambda(1 - \cos(\omega))^2} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + 16\lambda sen^4(\omega/2)} \end{aligned}$$

Como esta función es real, la función de ganancia del filtro es

$$G(\omega) = |H(e^{-i\omega})| = H(e^{-i\omega}).$$

10.3. Anexo C. Códigos en R

10.3.1. Códigos para la sección §3.5

Código R 10.1: Valor del bono cupon cero en el modelo Vasicek

```
# leer datos dtf
D = read.table("dtf2010.2021.prn",
header = TRUE, stringsAsFactors=FALSE)
fechas = rev(as.Date(D$Vigencia,format="%d/%m/%Y"))
dtf = rev(D$DTF)
require(yuima)

vasicek <- setModel(drift="theta1-theta2*x",
diffusion="theta3")

#------usar dtf para ajuste y simulacion
yuima <- setYuima(data=setData(dtf), model=vasicek)


param.init <- list(theta3=0.5,theta2=0.5,theta1=0.5)
low.par <- list(theta1=0, theta2=0, theta3=0)
upp.par <- list(theta1=5, theta2=2,theta3=2)

#------estimacion QMLE
mle1 <- qmle(yuima, start = param.init,
lower = low.par, upper = upp.par,method="L-BFGS-B")

summary(mle1)

pars=mle1@coef

param <- list(theta1 = pars[2],
theta2 = pars[3], theta3 = pars[1])

m = 252
T = length(dtf)/m
xt = seq(0,T,1/m)
n = length(dtf)

sampling <- setSampling(Initial = 0.0,
Terminal = T, n =T*m-1, delta=1/m)
```

```
yuima<-setYuima(model=vasicek, sampling=sampling)

ysim<-simulate(yuima, xinit=dtf[1], true.parameter=param)

dtf.s = ts(ysim@data@zoo.data$Series, frequency=252)
```

Código R 10.2: Valor del bono cupon cero en el modelo Vasicek

```
CIR.Bond <- function(t, k, theta, vola, init)
{
  h <- sqrt(k^2 + 2 * vola^2);
  denominator <- 2 * h + (k + h) * (exp(t * h) - 1)
  A <- (2 * h * exp((k + h) * t / 2)
/ denominator)^(2 * k * theta / vola^2)
  B <- 2 * (exp(t * h) - 1)/ denominator
  A * exp(-B * init)
}
```

10.3.2. Códigos para la sección §7.1

Código R 10.3: Simulación reservas anualidad de vida

```
#-- ejemplo anualidad con tasas aleatorias
#-- usando un modelo Vasiccek con base en tasas TES 1
#-- con un modelo Gompertz-Makeham con ISS-05-08
#-- pagos crecientes geometricamente con 1 incremento cada año
#-- Modelo Gompertz-Makeham con ISS-05-08
#---------------- parametros con base en s,g,C
m.par = matrix(c(0.9984022, 0.9995144, 1.0968159,
0.9980725, 0.9997376, 1.1026006,
0.9975497, 0.9999949, 1.1412894,
0.9953583, 0.9999905, 1.1395016),4,3,byrow=TRUE)
colnames(m.par)=c("s","g","c")
rownames(m.par)=c("m80-89","h80-89","m00-08","h00-08")


s4 = m.par[4,1]
g4 = m.par[4,2]
c4 = m.par[4,3]

e = 62
w = 110
m =12
```

```
T = w-e
tx = seq(0,T,1/m)
#---Gompertz-Makeham en libreria eha:
#---h(x) = a2 + a1 exp(x / b)
require(eha)
b = 1/log(c4)
a1 = -log(g4)*log(c4)*exp(e/b)
a2 = -log(s4)
# calcular tpx, x (h-m) t=0,1,...,110-x
# calcular u(x+t)
tpx = pmakeham(tx, shape = c(a1, a2), scale = b,lower.tail = FALSE)
muxt = function(t){ hmakeham(t, shape = c(a1, a2), scale = b)}
uxt=muxt(tx)

par(mfrow=c(2,2))
plot(tx,tpx,type='l')
plot(tx,uxt,type='l')
#-------------generar la tasa de pagos, caso Geometrica
#              con incrementos trimestrales
#             m = q.r , 1/r = q/m
i = 0.05 #
delta = log(1+i)
s=s4; g = g4; C=c4; d = delta;
require(expint)
source("acx.r")
P = 12 # tasa de pago inicial : 1 unidad x mes
q = 1
iq = 0.025
r = m/q

bt = P*(1+iq)^(floor(tx*q)/q)
plot(tx[1:(5*m)],bt[1:(5*m)],type='s',
ylab='pagos durante 5 años',xlab='año')
#----simulacion de la tasa instantanea
#------  el modelo Vasicek con TES 1 año
# leer datos tes
D = read.table("TES2010.2021.dat",
header = TRUE, stringsAsFactors=FALSE)
y1 = rev(D$ya1)
#---------recortar y1: desde 2010-01-04 hasta 2020-03-02
y = ts(y1[1:2532],frequency=252)
#-------------------------------------
require(yuima)
```

```
vasicek <- setModel(drift="theta1-theta2*x",
diffusion="theta3")

param.init <- list(theta3=0.5,theta2=0.5,theta1=0.5)
low.par <- list(theta1=0, theta2=0, theta3=0)
upp.par <- list(theta1=5, theta2=2,theta3=2)

yuima <- setYuima(data=setData(y), model=vasicek)

#------estimacion QMLE
mle1 <- qmle(yuima, start = param.init,
lower = low.par, upper = upp.par,method="L-BFGS-B")

summary(mle1)

pars=mle1@coef

param <- list(theta1 = pars[2],
theta2 = pars[3], theta3 = pars[1])

#------simulacion
sampling <- setSampling(Initial = 0.0,
Terminal = T, n =T*m, delta=1/m)

yuima<-setYuima(model=vasicek, sampling=sampling)
ysim<-simulate(yuima,xinit=y[1],true.parameter=param)

#----------Nota: dividir por 100 para generar tasas continuas
rt = as.numeric(ysim@data@zoo.data$Series)/100
plot(tx,rt,type='l')

#----------------------Filtro l1
library(l1tf)
rt.l1 = l1tf(rt, prop = 0.00150)
rt.a = approxfun(tx,rt.l1,method="linear")
plot(tx,rt,type='l',col='darkgray')
lines(tx,rt.a(tx),col='red')

#---------------calculo actuarial reserva
fn = function(t){
exp(-delta*t)*P*(1+iq)^(floor(t*q)/q)*pmakeham(t, shape = c(a1, a2),
scale = b,lower.tail = FALSE)}
```

```
(V0 = integrate(fn,0,T,subdivisions=500)$value)

## ------simular reserva

library(foreach)
library(doParallel)
cl <- makeCluster(4)
registerDoParallel(cl)


n <- 100  # No simulaciones
dt <- 1/m  # paso en esquema Euler h
N = T*m+1
V <- matrix(0,N,n)

for(j in 1:n){
ysim<-simulate(yuima,xinit=y[1],true.parameter=param)
dtf.cir = as.numeric(ysim@data@zoo.data$Series)/100
for(t in 1:N){
S = 0
for(u in t:N){
S <- S+exp(-sum(dtf.cir[t:u]+uxt[t:u])*dt)*bt[u]*dt}
V[t,j] = S}
}

Vm = apply(V,1,mean)
head(Vm)

par(mfrow=c(1,1))
plot(tx,V[,1],type='l',ylab='Va(t)',xlab='t años',
ylim=c(0,220),main='(a)')
for(j in 1:n){
lines(tx,V[,j],col='darkgray')}
lines(tx,Vm,col='red',lwd=2)
abline(h=0)
lines(tx,Vm[1]*tpx,col='blue',lwd=2)

plot(density(V[1,]),main='(b)')
points(V0,0,pch=20,cex=1.5,col='red')
points(Vm[1],0,pch=20,cex=1.5,col='blue')
```

10.3.3. Códigos para la sección §7.2

Código R 10.4: simulación de trayectorias de la tasa instantánea

```
#———simulacion del modelo Retiro Programado

#——— definir mortalidad

m.par = matrix(c(0.9984022, 0.9995144, 1.0968159,
0.9980725, 0.9997376, 1.1026006,
0.9975497, 0.9999949, 1.1412894,
0.9953583, 0.9999905, 1.1395016),4,3,byrow=TRUE)

colnames(m.par)=c("s","g","c")
rownames(m.par)=c("m80-89","h80-89","m00-08","h00-08")


s4 = m.par[4,1]
g4 = m.par[4,2]
c4 = m.par[4,3]

e = 62
w = 110

m =12
T = w-e-1/m
tx = seq(0,T,1/m)

#————————parametros para la anualidad

i = 0.05 #
delta = log(1+i)

s=s4; g = g4; C=c4; d = delta;

require(expint)
source("acx.r")

#————————— parametros con base en s,g,C

require(eha)
#——Gompertz-Makeham en libreria eha:
#——h(x) = a2 + a1 exp(x / b)
```

```
b = 1/log(c4)
a1 = -log(g4)*log(c4)*exp(e/b)
a2 = -log(s4)

muxt = function(t){log(1/s)+(log(g)*log(1/C))*C^(e+t)}
uxt = muxt(tx)

tpx = pmakeham(tx, shape = c(a1, a2), scale = b,lower.tail = FALSE)

fte = function(t){
muxt(t)*pmakeham(t, shape = c(a1, a2), scale = b,lower.tail = FALSE)
}

ft = function(t){t*fte(t)}
(ex=integrate(ft,0,48)$value)

par(mfrow=c(2,2))
plot(tx,fte(tx),type='l')
points(ex,0,pch=20)


#------  el modelo Vasicek con TES 1 año
# leer datos tes
D = read.table("TES2010.2021.dat",
header = TRUE, stringsAsFactors=FALSE)


fechas = rev(as.Date(D$fecha,format="%d/%m/%Y"))
y1 = rev(D$ya1)
y5 = rev(D$ya5)
y10 = rev(D$ya10)
#---------recortar y1: desde 2010-01-04 hasta 2020-03-02
y = ts(y1[1:2532],frequency=252)
fecha = fechas[1:2532]
ts.plot(y)


require(yuima)
vasicek <- setModel(drift="theta1-theta2*x",
diffusion="theta3")

#------usar dtf para simular
#
```

```
param.init <- list(theta3=0.5,theta2=0.5,theta1=0.5)
low.par <- list(theta1=0, theta2=0, theta3=0)
upp.par <- list(theta1=5, theta2=2,theta3=2)

yuima <- setYuima(data=setData(y), model=vasicek)

#------estimacion QMLE
mle1 <- qmle(yuima, start = param.init,
lower = low.par, upper = upp.par,method="L-BFGS-B")

summary(mle1)

pars=mle1@coef

param <- list(theta1 = pars[2],
theta2 = pars[3], theta3 = pars[1])
#------simulacion
sampling <- setSampling(Initial = 0.0,
Terminal = T, n =T*m, delta=1/m)

yuima<-setYuima(model=vasicek, sampling=sampling)
ysim<-simulate(yuima,xinit=y[1],true.parameter=param)
#----------Nota: dividir por 100 para generar tasas continuas
rt = as.numeric(ysim@data@zoo.data$Series)/100

#------ simular el proceso Wiener Wt

require(Sim.DiffProc)
dt = 1/m
N = T*m
sigma = sqrt(0.0081) #--volatilidad mensual
(sqrt(252/30)*sigma)


W <- BM(N=N, M=1, x0=0, t0=0, T=T, Dt=dt)
Wt = sigma*W
length(Wt)

#--------los dos procesos basicos


plot(tx,Wt,type='l')
plot(tx,rt,type='l')
```

```
#------------------- suavizar rt
# install.packages("devtools")
# require(devtools)
# install_github("hadley/l1tf")
library(l1tf)
rt.l1 = l1tf(rt, prop = 0.00150)
rt.a = approxfun(tx,rt.l1,method="linear")
plot(tx,rt,type='l',col='darkgray')
lines(tx,rt.a(tx),col='red')

#--simular Xt
#----------incrementar la tasa del portafolio Xt
(param$theta1/param$theta2/100)
(mean(rt))
gamma = 0.035

axt = acx(tx)
plot(tx,rt-1/axt+gamma,type='l',ylim=c(-0.250,0.25))
abline(h=0)


X0 = acx(0)*12

Xt = matrix(0,length(tx),30)
for(j in 1:30){
ysim<-simulate(yuima,xinit=y[1])
rt = gamma+as.numeric(ysim@data@zoo.data$Series)/100
rt.l1 = l1tf(rt, prop = 0.00150)
rt.a = approxfun(tx,rt.l1,method="linear")
## sde by Heun Scheme
  drift     <- expression( x*(rt.a(t)-1/acx(t)))
  diffusion <- expression( (sigma*x) )
F = snssde1d(N=N,M=1,T=T,t0=0,x0=X0,Dt=dt,drift,
  diffusion,Output=FALSE,Methods="SchHeun")
Xt[,j] = F$X
}
Xm = apply(Xt,1,mean)

par(mfrow=c(1,1))

plot(tx,Xt[,1],type='l',ylim=c(0,300),col='gray',ylab="Xt",xlab="t")
for(j in 2:30){
```

```
lines(tx,Xt[,j],col='darkgray')}
lines(tx,Xm,col='red',lwd=2)
lines(tx,tpx*X0,col='blue',lwd=2)
abline(h=0)

#----------------calculo actuarial reserva

bt = splinefun(tx,Xm,method = "fmm")
delta.a = mean(rt)
fn = function(t){
exp(-delta.a*t)*bt(t)*pmakeham(t, shape = c(a1, a2),
scale = b,lower.tail = FALSE)/acx(t)}

(V0 = integrate(fn,0,T,subdivisions=500)$value)

B = cbind(c(0.07,0.035),c(226.8009, 165.137))
colnames(B)=c("lambda","Reserva en t=0")
rownames(B) = c("(b)","(a)")
(B)
require(xtable)
print(xtable(B))
#----------------Calcular la reserva, pag. 34, ec. 7.1.5
n = 200
Xt = matrix(0,length(tx),n)

Vt = matrix(0,length(tx),n)

for(j in 1:n){
ysim<-simulate(yuima,xinit=y[1],true.param=pars)
rt = gamma+as.numeric(ysim@data@zoo.data$Series)/100
rt.l1 = l1tf(rt, prop = 0.00150)
rt.a = approxfun(tx,rt.l1,method="linear")
#rt.a = splinefun(tx,rt.l1,method = "fmm")
#fn = function(t){muxt(t)+rt.a(t)}
## sde by Heun Scheme
  drift     <- expression( x*(rt.a(t)-1/acx(t)))
  diffusion <- expression( (sigma*x) )
F = snssde1d(N=N,M=1,T=T,t0=0,x0=X0,Dt=dt,drift,
  diffusion,Output=FALSE,Methods="SchHeun")
Xt[,j] = F$X
for(t in 1:(N+1)){
S = 0
for(u in t:(N+1)){
```

```
S <- S+exp(-sum(rt[t:u]+uxt[t:u])*dt)*Xt[u,j]/acx(tx[u])*dt}
Vt[t,j]=S
}
}
p0=Xt[1,j]/acx(tx[1])


mVt = apply(Vt,1,mean)

par(mfrow=c(1,1))

plot(tx,Vt[,1],type='l',ylim=c(0,          400),ylab="Vt",xlab="t")
for(j in 2:150){
lines(tx,Vt[,j],col='darkgray')}
lines(tx,Vt[,1],col='black')
abline(h=0)
lines(tx,mVt,col='red',lwd=2)

lines(tx,100*tpx,col='blue',lwd=2)

VP = Vt[1,]
plot(density(VP),main="",xlab="valor inicial")
points(mean(VP),0,pch=20,col='red')


hist(VP,40,main="",xlab="valor inicial")
points(mean(VP),0,pch=20,col='red')

require(MASS)
write.matrix(VP,"VP150.dat")
```

Bibliografía

Aase, K. K. & Persson, S.-A. (1994), 'Pricing of unit-linked life insurance policies', *Scandinavian Actuarial Journal* **1994**(1), 26–52.

Alexandrov, T., Bianconcini, S., Dagum, E. B., Maass, P. & McElroy, T. S. (2012), 'A review of some modern approaches to the problem of trend extraction', *Econometric Reviews* **31**(6), 593–624.

Asmussen, S. & Steffensen, M. (2020), *Risk and Insurance*, Springer.

Bacinello, A. R., Millossovich, P., Olivieri, A. & Pitacco, E. (2011), 'Variable annuities: A unifying valuation approach', *Insurance: Mathematics and Economics* **49**(3), 285–297.

Balter, A. G. & Werker, B. J. (2020), 'The effect of the assumed interest rate and smoothing on variable annuities', *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* **50**(1), 131–154.

Berger, A. (1939), *Mathematik der Lebensversicherung*, Springer-Verlag Wien.

Biffis, E. (2005), 'Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations', *Insurance: mathematics and economics* **37**(3), 443–468.

Blake, D. (2006), *Pension Finance*, John Wiley and Sons., Chichester.

Blake, D., Cairns, A., Coughlan, G., Dowd, K. & MacMinn, R. (2013), 'The new life market', *Journal of Risk and Insurance* **80**(3), 501–558.

Blakey, P. (2006), 'The false allure of equity indexed annuities', *IEEE Microwave Magazine* **7**(2), 16–22.

Boulier, J.-F., Huang, S.-J. & Taillard, G. (2001), 'Optimal management under stochastic interest rates: the case of a protected defined contribution pension fund', *Insurance: Mathematics and Economics* (28), 173–189.

Brouste, A., Fukasawa, M., Hino, H., Iacus, S. M., Kamatani, K., Koike, Y., Masuda, H., Nomura, R., Ogihara, T., Shimuzu, Y., Uchida, M. & Yoshida, N. (2014), 'The yuima project: A computational framework for simulation and inference of stochastic differential equations', *Journal of Statistical Software* **57**(4), 1–51.
URL: *http://www.jstatsoft.org/v57/i04/*

Carrière, J. F. (2004), 'Martingale Valuation of Cash Flows for Insurance and Interest Models', *North-americal Actuarial Journal* **8**(3), 150–210.

Chen, D.-f. & Xiang, G. (2003), 'Time-risk discount valuation of life contracts', *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* **19**(4), 647–662.

Chen, R.-R. (1996), *Understanding and managing interest rate risks*, Vol. 1, World Scientific.

Choe, G. H. (2016), *Stochastic analysis for finance with simulations*, Springer International Publishing Switzerland.

Cárdenas-Santamaría, M. (2015), Resolución 3099 de agosto 19 de 2015, Technical report, Ministerio de Hacienda y Crédito Público.

De Schepper, A. & Goovaerts, M. (1992), 'Some further results on annuities certain with random interest', *Insurance: Mathematics and Economics* **11**(4), 283–290.

Deprez, E. & Schaetzle, T. (1964), 'Variable Annuities', *17th International Congress of Actuaries* **3**(1), 108–120.

Dermoune, A., Djehiche, B. & Rahmania, N. (2008), 'A consistent estimator of the smoothing parameter in the hodrick-prescott filter', *Journal of the Japan Statistical Society* **38**(2), 225–241.

Devolder, P. (2016), *Finance stochastique*, Editions de l'Université de Bruxelles.

Dietz, H. M. (1992), 'A stochastic interest model with an application to insurance', *Insurance: Mathematics and Economics* **11**(4), 301–310.

DiGiacinto, M., Salvatore, F., Gozzi, F. & Vigna, E. (2014), 'Income drawdown option with minimum guarantee', *European Journal of Operational Research* **234**(3), 610–624.

Djehiche, B. & Löfdahl, B. (2014), 'Risk aggregation and stochastic claims reserving in disability insurance', *Insurance: Mathematics and Economics* **59**, 100–108.

Djehiche, B. & Löfdahl, B. (2016), 'Nonlinear reserving in life insurance: Aggregation and mean-field approximation', *Insurance: Mathematics and Economics* **69**, 1–13.

Djehiche, B. & Nassar, H. (2013), 'A functional hodrick prescott filter', *arXiv preprint arXiv:1312.4936* .

Duffie, D. (2010), *Dynamic asset pricing theory*, Princeton University Press.

Duffie, D., Schroder, M., Skiadas, C. et al. (1996), 'Recursive valuation of defaultable securities and the timing of resolution of uncertainty', *Annals of Applied Probability* **6**(4), 1075–1090.

Dufresne, D. (1990), 'The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding', *Scandinavian Actuarial Journal* **1990**(1), 39–79.

Emms, P. & Haberman, S. (2008), 'Income Drawdown Schemes for Defined-Contribution Pension Plan', *The Journal of Risk and Insurance* **75**(3), 739–761.

Feng, R. (2018), *An introduction to computational risk management of equity-linked insurance*, CRC Press, Boca Raton, FL, USA.

Friedman, A. (1976), *Stochastic Differential Equations and Applications, vol I*, Academic Press, Inc. London.

Gallieri, M. (2016), *Lasso-MPC–Predictive Control with l1-Regularised Least Squares*, Springer.

Gatzert, N. & Schmeiser, H. (2013), New life insurance financial products, *in* 'Handbook of insurance', Springer, pp. 1061–1095.

Gibson, R., Lhabitant, F.-S. & Talay, D. (2010), 'Modeling the term structure of interest rates: a review of the literature'.

Giraldo, N. (2017), *Actuaría de Contingencias de Vida, con R*, Escuela de Estadística. Universidad Nacional de Colombia.
URL: *http://bdigital.unal.edu.co/74027*

Goldie, C. M. & Grübel, R. (1996), 'Perpetuities with thin tails', *Advances in Applied Probability* pp. 463–480.

Guidoum, A. C. & Boukhetala, K. (2020), 'Performing parallel monte carlo and moment equations methods for itô and stratonovich stochastic differential systems: R package Sim.DiffProc', *Journal of Statistical Software* **96**(2), 1–82.

Han, N.-W. & Hung, M.-W. (2015), 'The investment management for a downside-protected equity-linked annuity under interest rate risk', *Finance Research Letters* pp. 113–124.

He, L. & Liang, Z. (2013), 'Optimal dynamic asset allocation strategy for ela scheme of dc pension plan during the distribution phase', *Insurance: Mathematics and Economics* **52**(2), 404–410.

Hilli, P., Koivu, M. & Pennanen, T. (2011*a*), 'Cash-flow based valuation of pension liabilities', *European Actuarial Journal* **1**(2), 329–343.

Hilli, P., Koivu, M. & Pennanen, T. (2011*b*), 'Cash-flow based valuation of pension liabilities', *European Actuarial Journal* **1**(2), 329.

Huang, H., Milevsky, M. & Salisbury, T. (2009), 'A different perspective on retirement income sustainability: The blueprint for a ruin contingent life annuity (RCLA)', *Journal of Wealth Management* (4), 89–96.

Huang, H., Milevsky, M. & Salisbury, T. (2012), 'Valuation and hedging of the ruin-contingent life annuity (RCLA)', *arXiv* **1205.3686**, 1–31.

Iacus, S. M. (2016), *sde: Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations.* R package version 2.0.15.
URL: *https://CRAN.R-project.org/package=sde*

Iacus, S. & Yoshida, N. (2018), 'Simulation and inference for stochastic processes with yuima', *A comprehensive R framework for SDEs and other stochastic processes. Use R* .

Jedrzejewski, F. (2009), *Modeles aleatoires et physique probabiliste*, Springer Science & Business Media.

Karatzas, I. & Shreve, S. E. (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag, New York.

Kim, S.-J., Koh, K., Boyd, S. & Gorinevsky, D. (2009), 'ℓ_1 trend filtering', *SIAM review* **51**(2), 339–360.

Korn, R., Korn, E. & Kroisandt, G. (2010), *Monte Carlo methods and models in finance and insurance*, CRC press.

Kunitomo, N. & Takahashi, A. (2001), 'The asymptotic expansion approach to the valuation of interest rate contingent claims', *Mathematical Finance* **11**(1), 117–151.

Lando, D. (1998), 'On Cox processes and credit risky securities', *Review of Derivatives research* **2**(2-3), 99–120.

Lin, X. S. (2006), *Introductory stochastic analysis for finance and insurance*, Vol. 557, John Wiley & Sons.

Martin, V., Hurn, S. & Harris, D. (2013), *Econometric modelling with time series: specification, estimation and testing*, Cambridge University Press.

Medvedev, G. A. (2019), *Yield Curves and Forward Curves for Diffusion Models of Short Rates*, Springer.

Milevsky, M. A. (1997), 'The present value of a stochastic perpetuity and the gamma distribution', *Insurance: Mathematics and Economics* **20**(3), 243–250.

Mingari, G., Ritelli, D. & Spelta, D. (2006), 'Actuarial values calculated using the incomplete gamma function', *Statistica* **66**(1), 77–81.

Møller, T. & Steffensen, M. (2007), *Market-valuation methods in life and pension insurance*, Cambridge University Press.

Nelson, C. R. & Siegel, A. F. (1987), 'Parsimonious modeling of yield curves', *Journal of business* pp. 473–489.

Norberg, R. (2005), 'Interest Guarantees in Banking', *Applied Mathematical Finance* **12**(4), 351–370.

Osorno-Gómez, J. (2012), Análisis de solvencia en anualidades de vida con tasas de interés aleatorias, Master's thesis, Escuela de Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10143.

Papanicolaou, A. (2019), 'Introduction to stochastic differential equations (sdes) for finance', *arXiv* **1504.05309**.

Parisi, F. (1998), 'Tasas de interés nominal de corto plazo en Chile: Una comparación empírica de sus modelos', *Cuadernos de Economía* pp. 161–182.

Persson, S.-A. (1993), 'Valuation of a multistate life insurance contract with random benefits', *Scandinavian Journal of Management* **9**, S73–S86.

Persson, S.-A. & Aase, K. (1997), 'Valuation of the Minimum Guaranteed Return Embedded in Life Insurance Products', *The Journal of Risk and Insurance* **64**(4), 599–617.

Pienaar, E. A. D. & Varughese, M. M. (2015), *DiffusionRgqd: An R Package for Performing Inference and Analysis on Time-Inhomogeneous Quadratic Diffusion Processes.* R package version 0.1.3.
URL: *https://CRAN.R-project.org/package=DiffusionRgqd*

Privault, N. (2012), *An elementary introduction to stochastic interest rate modeling*, World Scientific.

Proietti, T., Luati, A. et al. (2008), 'Real time estimation in local polynomial regression, with application to trend-cycle analysis', *The Annals of Applied Statistics* **2**(4), 1523–1553.

Ramlau-Hansen, H. (1990), 'Thiele's Differential Equation as a Tool in Product Development in Life Insurance', *Scandinavian Actuarial Journal* pp. 97–104.

Remillard, B. (2013), *SMFI5: R functions and data from Chapter 5 of 'Statistical Methods for Financial Engineering'.* R package version 1.0.
URL: *https://CRAN.R-project.org/package=SMFI5*

Svensson, L. E. O. (1994), Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994, Technical report, Technical Reports 4871,National bureau of economic research.

Topa, G. (1999), *La valoración de inversiones a precios de mercado en Colombia*, Universidad Externado de Colombia.

Vasicek, O. (1977), 'An equilibrium characterization of the term structure', *Journal of financial economics* **5**(2), 177–188.

Xia, Z. & Huihui, L. (2013), 'Actuarial present values of annuities under stochastic interest rate', *Int. Journal of Math. Analysis* **7**(59), 2923 – 2929.

Yamada, H. & Jahra, F. T. (2018), 'Explicit formulas for the smoother weights of the whittaker–henderson graduation of order 1', *Communications in Statistics-Theory and Methods* pp. 1–11.

Yan, J.-A. (2018), *Introduction to Stochastic Finance*, Springer International Publishing Switzerland.

Zoccolan, I. (2018), *valuer: Pricing of Variable Annuities.* R package version 1.1.2. **URL:** *https://CRAN.R-project.org/package=valuer*