

*Matriz de capacitancia y ecuación de Laplace,
propiedades y aplicaciones*

MAYCKOL JESID MORALES CASTRO

FÍSICO

CÓDIGO: 01835253



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

BOGOTÁ, D.C.

JUNIO DE 2017

*Matriz de capacitancia y ecuación de Laplace,
propiedades y aplicaciones*

MAYCKOL JESID MORALES CASTRO

FÍSICO

CÓDIGO: 01835253

DISERTACIÓN PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGÍSTER EN CIENCIAS – FÍSICA

DIRECTOR

WILLIAM JAVIER HERRERA, PH.D.

DOCTOR EN FÍSICA

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN

MÉTODOS CONCEPTOS Y ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

GRUPO DE INVESTIGACIÓN

MÉTODOS CONCEPTOS Y ENSEÑANZA DE LA FÍSICA



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

BOGOTÁ, D.C.

JUNIO DE 2017

Título en español

Matriz de capacitancia y ecuación de Laplace, propiedades y aplicaciones

Title in English

Matrix of capacitance and Laplace's Equation, properties and applications

Resumen: Encontramos soluciones para la ecuación de Laplace con condiciones de frontera especiales en un sistema de coordenadas curvilíneo y usando las propiedades de la matriz de capacitancia, desarrollamos un método que permite determinar la solución de la ecuación de Laplace y la capacitancia asociadas geometrías complejas de forma simple.

Abstract: We found solutions to the Laplace's equation with special boundary conditions in a curvilinear coordinate system and with the properties of the capacitance matrix, we develop a method that allows to find the solution of the Laplace's equation and the capacitance associated with a complex geometry in a simple way

Palabras clave: Ecuación de Laplace, Condiciones de Frontera, Coordenadas Curvilíneas, Capacitancia eléctrica, Separación de variables

Keywords: Laplace Equation, Boundary Condition, Curvilinear coordinates, Electric Capacitance, Separation of Variables

Nota de aceptación

Trabajo de tesis

Aprobado

“Mención Meritoria”

Jurado

José Daniel Muñoz Castaño

Jurado

Juan Domingo Baena Doello

Director

William Javier Herrera, Ph.D.

Bogotá, D.C., Noviembre 20 de 2017

Dedicado a

A la memoria mi profesor y maestro: Rodolfo Alexander Diaz Sanchez.

Agradecimientos

Al profesor William Javier Herrera por su continuo apoyo y consejos en el desarrollo de este trabajo y por acogerme bajo su tutela cuando el destino nos fue adverso.

Índice general

Índice general	I
Índice de tablas	IV
Índice de figuras	V
Introducción	VII
1. Ecuación de Laplace	1
1.1. Definición	1
1.2. Fronteras y Condiciones de Frontera	1
1.3. Separación de variables	2
1.4. Tipos de separabilidad	2
1.4.1. Separabilidad Simple	3
1.4.2. <i>R</i> -Separabilidad	3
1.5. Propiedades de las funciones armónicas y la ecuación de Laplace	3
1.5.1. Linealidad	3
1.5.2. Principio de Superposición	3
1.5.3. Leyes de la media	3
1.5.4. Mínimos y máximos locales	4
1.5.5. Unicidad	4
1.6. Ecuación de Laplace y sistemas ortogonales	4
1.6.1. Sistemas Ortogonales y factores de escala	4
1.6.2. Ecuación de Laplace en sistemas ortogonales	5
2. Funciones Armónicas Básicas	7
2.1. Definición	7

2.2. Solución	8
2.2.1. Solución al problema complementario	10
2.3. Funciones armónicas base para un caso particular de factores de escala	11
2.3.1. Simetrías cilíndricas y mapeos conformes	11
2.4. Invarianza gauge	12
2.5. Soluciones a la ecuación de Laplace en casos más generales	13
2.6. Resumen	14
3. Cálculos de Funciones Armónicas Básicas en diferentes geometrías	16
3.1. Sistemas cilíndricos	16
3.1.1. Dos cilindros concéntricos	16
3.1.2. Dos Cilindros Elípticos Confocales	17
3.1.3. Dos cilindros circulares no concéntricos	20
3.2. Sistemas rotacionales	23
3.2.1. Dos cilindros concéntricos	23
3.2.2. Dos esferas concéntricas	24
3.2.3. Esferoides Prolatos Confocales	25
3.2.4. Esferoides Oblatos Confocales	28
3.3. Resumen	30
4. Capacitancia	31
4.1. Definición	31
4.2. Funciones armónicas base en n superficies	32
4.2.1. Propiedades de f_j	33
4.3. Capacitancia definida en términos de las funciones armónicas base	33
4.3.1. Propiedades de C_{ij}	34
4.3.2. Propiedades de la matriz de capacitancia	35
5. Capacitancia y funciones armónicas base	36
5.1. Capacitancia de dos conductores embebidos	36
5.2. Capacitancias para simetrías cilíndricas	37
5.2.1. Dos Cilindros Concéntricos	38
5.2.2. Dos Cilindros Elípticos Confocales	38
5.2.3. Dos cilindros circulares no concéntricos	39
5.3. Capacitancias para Sistemas Rotacionales	41
5.3.1. Dos Esferas Concéntricas	41

5.3.2. Esferoides Prolatos Confocales	42
5.3.3. Esferoides Oblatos Confocales	43
Conclusiones	45
Bibliografía	46

Índice de tablas

Índice de figuras

2.1. Problema de dos superficies cuando una contiene a la otra.	8
2.2. Problema de dos superficies cuando una contiene a la otra y cada una se encuentra a un potencial diferente.	13
3.1. Dos cilindros concéntricos, el exterior de radio b y el interior de radio a	17
3.2. a) Coordenadas elípticas. b) Cilindros de corte transversal elíptico. Las elipses son confocales, los semiejes mayores se encuentran sobre el eje X y los menores sobre el eje Y	18
3.3. Cilindros no concéntricos. El cilindro exterior tiene radio r_1 y contiene al cilindro interior de radio r_2 , sus centros se encuentran separados una distancia D	21
3.4. Sistema coordenado bipolar con los focos $F_1 = (-a, 0)$ y $F_2 = (a, 0)$. Se muestra que las curvas asociadas con los valores constantes positivos de τ ($\tau > 0$) son círculos que contienen el foco F_2 , mientras que valores constantes negativos de τ ($\tau < 0$) son círculos que contienen el foco F_1	22
3.5. Un cascarón esférico de radio r_2 que contiene a una esfera sólida de radio r_1 y comparten el mismo centro.	24
3.6. Dos cascarones esferoidales prolatos. Los esferoides son elipses de revolución confocales, el corte en el plano XY corresponde una sección circular cuyos radios son los semiejes menores.	25
3.7. Dos esferoides oblatos confocales. Los esferoides son elipses de revolución confocales. El corte en el plano XY es a una sección circular cuyos radios corresponden a los semiejes mayores de las elipses.	28
4.1. Un sistema de N conductores internos con un conductor $N + 1$ encerrándolos. φ_i es el potencial de cada conductor. La superficie S_i encierra al conductor i y se encuentra arbitrariamente cercana y es localmente paralela a la superficie real del conductor.	32
5.1. Dos cilindros de corte transversal elíptico confocales	40
5.2. Dos esferas concéntricas de radio r_1 y r_2	42

5.3. Dos cascarones esferoidales prolatos	42
5.4. Dos esferoides oblatos confocales.	43

Introducción

La ecuación de Laplace es importante en muchas áreas de la física y la ingeniería[1], siendo ampliamente conocidas sus aplicaciones en electrostática (ecuación del potencial eléctrico)[2, 3, 4], la hidrodinámica (la ecuación de continuidad para un fluido incompresible), la termodinámica (difusión del calor independiente del tiempo) y la gravitación (campo gravitacional). Recientemente Xue, M. et al la emplean en el estudio de la relación del potencial y el campo eléctrico y su relación con la rugosidad de las superficies[5].

Las propiedades de la ecuación de Laplace son bien conocidas [6], así como las diferentes metodologías de solución. En varios trabajos se ha estudiado la separación de variables y su uso como método de solución para la ecuación de Laplace [7, 8, 9, 10], siendo estos resumidos por Moon & Spencer[11]. El formalismo de las funciones de Green y los mapeos conformes como metodología para solucionar problemas asociados a la ecuación de Laplace con fronteras esféricas y cilíndricas han sido estudiados por J. T. Chen et al. [12, 13, 14]. También se emplean diferentes métodos numéricos en la solución de de la ecuación de Laplace, Ghassemi et al. han estudiado y comparado los métodos de elementos finitos y de elementos de frontera tanto para condiciones de fronteras mixtas [15], cómo simples[16], mientras que J. T. Chen & W. C. Shen emplearon la metodología semianalítica de los kernel degenerados en fronteras circulares [17]. La solución de la ecuación de Laplace con condiciones de fronteras simple y su aplicación a diversas simetrías ha sido estudiada por Morales et al. [48].

En el área de la electrostática, el problema del potencial eléctrico está directamente relacionado a la ecuación de Laplace este combinado con la distribución de carga en la superficie de un conductor nos lleva al problema de la capacitancia eléctrica, es decir, solucionar el problema de la capacitancia eléctrica implica solucionar el problema del potencial eléctrico. La naturaleza geométrica de la capacitancia es mencionada en muchos textos de electricidad y magnetismo [2, 3, 4] sin embargo las aproximaciones formales para mostrar este hecho suelen basarse en el formalismo de las funciones de Green [18, 19, 20], lo que lo hacía de difícil acceso a los cursos básicos de electricidad y magnetismo donde suele introducirse el concepto de capacitancia eléctrica. Es por esto que William J. Herrera y Rodolfo A. Diaz desarrollan un trabajo sobre la naturaleza geométrica de la capacitancia empleando la ecuación de Laplace [21] que permite estudiar las propiedades de los coeficientes de la matriz de capacitancia de una forma más simple. Esta formulación permite estudiar algunas propiedades más generales como la positividad de la matriz y sus valores propios [22], y posibilitando el desarrollo de un método más eficiente para la determinación de la matriz de capacitancia en configuraciones de múltiples conductores[23] y redes de conductores[24].

El cálculo de la capacitancia de diferentes configuraciones de conductores ha sido abordada por varios autores [25]-[36], aplicando generalmente la misma metodología: hallar el potencial eléctrico, determinar la distribución superficial de carga y realizar el cociente entre ambos. Para configuraciones de conductores embebidos o superficies conductoras en tres dimensiones O.D. Momoh, M. N. O. Sadiku, y C. M. Akujuobi han desarrollado trabajos analíticos y numéricos enfocándose en los esferoides[38] prolatos [37] y oblatos [39] y Nechaev desarrolló cálculos de las capacitancias y polarizaciones para los elipsoides [40], Lekner trabajó con esferas [41, 42]. Cálculos para configuraciones cilíndricas se encuentran en el trabajo de Dawes [43] y Das et al [44] hay ejemplos de cálculos para más geometrías [26, 45]. El texto de Estermann[46] tiene un amplio compendio de casos. También hay aproximaciones empleando el método de mapeos conformes para simetrías cilíndricas que aprovecha resultados de cálculos previos [47].

Sin embargo, usando los desarrollos previos de William J. Herrera y Rodolfo A. Diaz [21, 22] se ha desarrollado una metodología que basada en la ecuación de Laplace y haciendo uso de las propiedades de la matriz de capacitancia permite simplificar de forma considerable todos estos cálculos analíticos y encuentra que los cálculos basados en mapeos conformes son sólo un caso particular de aplicación del método desarrollado.

En esta tesis se presentan los desarrollos que se hicieron alrededor de la ecuación de Laplace para unas condiciones de fronteras específicas y su aplicación a la determinación de la capacitancia para diferentes geometrías. Los resultados de este trabajo fueron publicados en *Journal of Electrostatics*[48].

En el capítulo 1, se estudian las propiedades de la ecuación de Laplace, su formulación en sistema de coordenadas generalizadas, y en sistemas de coordenadas ortogonales, repasamos las condiciones de frontera, el método de separación de variables como método de solución y las propiedades de la ecuación de Laplace y sus soluciones.

En el capítulo 2 se introduce el formalismo de las funciones armónicas base. Estas son las que nos permiten resolver la ecuación de Laplace en un volumen entre de dos fronteras cerradas con condiciones de Dirichlet como condiciones de frontera. Gracias a esta aproximación problemas de geometrías que usualmente se consideran complejos, como los cilindros no concéntricos [43], los esferoides prolatos [37], esferoides oblatos [39] se solucionan de una forma simple. En el caso particular de los sistemas de simetría cilíndrica encontramos que satisfacen una forma general de solución que depende únicamente de la coordenada que genera el “cilindro”, solución que tiene gran aplicación en el estudio de los sistemas que se puedan estudiar por medio de la teoría de los mapeos conformes [47][13].

En el capítulo 3 se determinan las funciones armónicas base para seis geometrías diferentes: cilindros concéntricos, corte transversal elíptico y no concéntricos, esferas concéntricas y esferoidales oblatos y prolatos. Así mismo se escriben estos resultados en términos propios de la geometría[46] que nos permiten verificar los límites cuando se levantan a geometrías usuales, bien sean cilindros concéntricos o esferas concéntricas.

En el capítulo 4 se reproducen los resultados de la formulación de la capacitancia basada en la ecuación de Laplace[21, 22], se notan las ventajas de la formulación y se ve cómo las propiedades de la matriz de capacitancia surgen naturalmente de una formulación puramente geométrica.

En el capítulo 5 todos los desarrollos realizados en los capítulos previos son combinados para obtener la capacitancia de las configuraciones correspondientes a cilindros concéntricos, cilindros de corte transversal elíptico, cilindros no concéntricos[43], cascarones esféri-

cos, cascarones esferoidales prolatos[37] y cascarones esferoidales oblatos[39][12]. También se muestra la “generalización” de la capacitancia para sistemas de simetría cilíndrica y se encuentra como las diferentes geometrías convergen a los valores clásicos.

CAPÍTULO 1

Ecuación de Laplace

En este capítulo estudiamos la definición de la ecuación de Laplace y las superficies de frontera. Repasamos los diferentes tipos de condiciones de frontera, seguimos con una descripción general del método de separación de variables como método de solución de ecuaciones parciales y estudiamos los diferentes tipos de separabilidad que hay. Seguimos con un repaso a las propiedades de la ecuación de Laplace y de sus soluciones y terminamos con la formulación de la ecuación de Laplace en un sistema coordenado tridimensional.

1.1. Definición

Supongamos que ψ es una función real de N variables, definida en un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. La ecuación

$$\nabla^2 \psi(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 \psi(x_1, \dots, x_n)}{x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \psi(x_1, \dots, x_n)}{x_n^2} = 0 \quad (1.1)$$

se llama *ecuación de Laplace*. El operador ∇^2 se conoce como *operador Laplaciano* y las soluciones a la ecuación de Laplace, son llamadas *Funciones Armónicas*. Estas son la base de la teoría de potenciales y se han estudiado en diversidad de situaciones, geometrías y condiciones de frontera[37, 47, 17, 13, 43].

1.2. Fronteras y Condiciones de Frontera

Existen dos tipos generales de superficies de frontera:

- **Cerradas** Aquella superficie de frontera que encierra completamente a la solución, confinándola a un espacio de volumen finito.
- **Abiertas** Aquella que permite que la solución se extienda al infinito en al menos una dirección.

Por ejemplo, una esfera es una frontera cerrada para el espacio al interior de ella, pero representa una frontera abierta para el espacio por fuera.

Para poder obtener una solución única a la ec. (1.1) se requiere conocer el valor de $\psi(S)$ en la superficie de frontera S o el de su derivada normal en dicha superficie $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_S$. Según sea el caso se tiene:

- **Condiciones de Dirichlet** El valor de $\psi(S)$ en la frontera S está definido.
- **Condiciones de Neumann** El la derivada normal $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_S$ en la frontera S están definido.
- **Condiciones de Cauchy** El valor de $\psi(S)$ y su derivada normal $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_S$ en la frontera S están definidos.

Cuando las condiciones de Neumann¹ o Dirichlet están en una superficie S cerrada, la solución es única y estable, mientras que las condiciones de Cauchy son muy restrictivas. Si la superficie S es una superficie abierta las condiciones de Neuman o Dirichlet son insuficientes para obtener una solución y las condiciones de Cauchy no llevan a una solución estable. Cabe anotar que, muchas veces las condiciones Dirichlet o Neumann, se consideran *homogéneas* si $\psi(S) = 0$ o $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_S = 0$ e *inhomogéneas* si $\psi(S) = F(S)$ o $\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_S = F(S)$. [6, Cap 6]

1.3. Separación de variables

La separación de variables es un método para resolver ecuaciones diferenciales parciales. El procedimiento puede resumirse así

1. Escribir la ecuación diferencial parcial en un sistema coordenado que se ajuste a la geometría del problema.
2. Separar esta ecuación en tres ecuaciones diferenciales ordinarias.
3. Obtener la solución de estas ecuaciones.
4. Construir la solución única que satisfaga las condiciones de frontera, empleando las soluciones obtenidas en el paso (3).

En resumen, este método consiste en reescribir la ecuación parcial en un conjunto de ecuaciones ordinarias, obteniendo una ecuación independiente para cada variable involucrada en la ecuación parcial inicial.

1.4. Tipos de separabilidad

Teniendo en cuenta lo discutido en la sección 1.3, podemos distinguir dos tipos de separación de variables[11].

¹Como las condiciones de frontera corresponden a gradientes y no a valores, al menos el valor de un punto de ψ debe ser conocido para que la solución sea única.

1.4.1. Separabilidad Simple

Cuando la suposición

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n X_j(j) \quad (1.2)$$

permite separar la ecuación (1.1) en n ecuaciones diferenciales ordinarias. Se dice que la solución es *Separable Simple*

1.4.2. R -Separabilidad

Cuando la suposición

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{R(x_1, \dots, x_n)} \prod_{j=1}^n X_j(j) \quad (1.3)$$

permite separar la ecuación (1.1) en n ecuaciones diferenciales ordinarias. Se dice que la solución es *R Separable*.

1.5. Propiedades de las funciones armónicas y la ecuación de Laplace

La ecuación de Laplace y sus soluciones tienen las siguientes propiedades:

1.5.1. Linealidad

Sean k_i y k_j escalares de valor real ($k_i, k_j \in \mathbf{R}$) y las funciones de variable real ψ_i y ψ_j , tenemos que

$$\nabla^2(k_i\psi_i + k_j\psi_j) = k_i\nabla^2\psi_i + k_j\nabla^2\psi_j. \quad (1.4)$$

1.5.2. Principio de Superposición

Sean k_i y k_j escalares de valor real y ψ_i y ψ_j funciones que son soluciones de (1.1). Entonces la combinación lineal $k_i\psi_i + k_j\psi_j$ también es solución,

$$\frac{1}{2\pi} \nabla^2(k_i\psi_i + k_j\psi_j) = \underbrace{k_i\nabla^2\psi_i}_{=0} + \underbrace{k_j\nabla^2\psi_j}_{=0} = 0. \quad (1.5)$$

1.5.3. Leyes de la media

El valor de una función armónica en el centro de una esfera es igual al valor medio de la integral de la función sobre la superficie de la esfera. Es decir, si $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ y una esfera centrada en \mathbf{x}_0 y con radio R tal que $B(\mathbf{x}_0; R) \subset \Omega$ con Ω un abierto $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ y ψ una

función armónica, entonces

$$\psi(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{S(\mathbf{x}_0, R)} \psi(\mathbf{x}) dS, \quad (1.6)$$

donde $S(\mathbf{x}_0, R) = \partial B(x_0; R)$ es la superficie de la esfera unitaria $B(x_0; R)$.

1.5.4. Mínimos y máximos locales

Las leyes de la media permiten concluir que si ψ es solución de (1.1) en el dominio Ω entonces ψ no tiene máximos o mínimos locales en el interior del dominio Ω .

1.5.5. Unicidad

Si ψ_n y ψ_m son funciones que son solución de la ecuación de Laplace (1.1) en el volumen V y que satisfacen as condiciones de frontera (ver 1.2) entonces $\psi_n = \psi_m + l$ siendo l una constante de valor real. Es decir, la solución a la ecuación de Laplace es única, salvo una constante aditiva si se especifican los valores de frontera que limitan a V .

1.6. Ecuación de Laplace y sistemas ortogonales

La ecuación de Laplace es separable (Simple o R) en una amplia variedad de sistemas coordenados²[11], aunque muchos son tan matemáticamente complejos que es poco probable encontrarles una aplicación en la física. Los casos de uso más comunes de la ecuación de Laplace (1.1) mencionados en la introducción (electrostática, hidrodinámica, termodinámica, gravitación) corresponden a sistemas tridimensionales ortogonales con diversos tipos de simetrías.

1.6.1. Sistemas Ortogonales y factores de escala

Un *sistema de coordenadas ortogonales* puede definirse a partir del sistema de coordenadas cartesianas. Si x, y, z son las coordenadas cartesianas, entonces las coordenadas ortogonales, u, v, w , pueden escribirse cómo funciones de x, y, z ³:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Consideremos el elemento diferencial $d\mathbf{r} \equiv (dx, dy, dz)$, usando la definición en la ecuación (1.7), tenemos que:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} dw \quad (1.8)$$

²por lo menos 60, incluyendo la familia coordenadas cíclicas y sus inversiones

³Las funciones inversas se escribirían cómo $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ y $z = z(u, v, w)$

Donde $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ y $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$ son vectores tangentes, a las curvas constantes de u , v y w , respectivamente. Ahora, consideremos los vectores unitarios \mathbf{e}_u , \mathbf{e}_v y \mathbf{e}_w como vectores paralelos a $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ y $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}$, respectivamente. Definimos los *factores de escala* h_u , h_v y h_w como:

$$h_u \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| ; h_v \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| ; h_w \equiv \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| \quad (1.9)$$

Por lo que elemento infinitesimal de la ecuación (1.8) se puede escribir de la siguiente forma:

$$d\mathbf{r} = h_u du \mathbf{e}_u + h_v dv \mathbf{e}_v + h_w dw \mathbf{e}_w \quad (1.10)$$

A partir de la fomra del elemento diferencial $d\mathbf{r}$ dado en la ecuación (1.10) podemos escribir otros elementos cómo: el elemento de volumen:

$$dV \equiv [(\mathbf{e}_u \cdot d\mathbf{r}) \mathbf{e}_u] \cdot \{[(\mathbf{e}_v \cdot d\mathbf{r}) \mathbf{e}_v] \times [(\mathbf{e}_w \cdot d\mathbf{r}) \mathbf{e}_w]\} = h_u h_v h_w du dv dw \quad (1.11)$$

Los elementos de superficie:

$$dS_u = h_v h_w dv dw ; dS_v = h_u h_w du dw ; dS_w = h_u h_v du dv \quad (1.12)$$

y el gradiente de una función f

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \mathbf{e}_w \quad (1.13)$$

1.6.2. Ecuación de Laplace en sistemas ortogonales

En términos de un sistema tridimensional ortogonal (u, v, w) la ecuación de Laplace (1.1) se puede escribir como

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_w h_u}{h_v} \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) \right] = 0, \quad (1.14)$$

donde u, v, w son superficies coordenadas que se pueden expresar como funciones suaves de las coordenadas cartesianas x, y, z y h_u, h_v, h_w , los respectivos factores de escala.

Existen casos en los que la superficie de frontera S y los nodos de ψ coinciden exactamente con los valores constante de una coordenada o son ortogonales a la misma. En ese caso la solución se puede escribir de la forma

$$\psi(u, v, w) = U(u) \Theta(v, w). \quad (1.15)$$

En casos más limitados se puede separar como un producto de tres funciones, cada una dependiente de una sola coordenada

$$\psi(u, v, w) = U(u) V(v) W(w) \quad (1.16)$$

$$\psi(u, v, w) = U(u) V(v) W(w) / R(u, v, w). \quad (1.17)$$

Hay un total de 11 sistemas coordenados ortogonales tridimensionales donde se cumple la ecuación (1.16) y dos para los que se la ecuación (1.17) se cumple [6], cabe anotar que

esto no necesariamente restringe la cantidad de sistemas donde se satisface la ecuación (1.15).

En este capítulo abordamos, la ecuación de Laplace, los sistemas coordenados ortogonales, el método de solución por separación de variables y lo aplicamos para sistemas coordenados ortogonales tridimensionales. Las propiedades de la ecuación y su solución son empleadas en capítulos posteriores.

Funciones Armónicas Básicas

Consideremos la solución de la ecuación de Laplace en la región entre dos fronteras cerradas y tenemos condiciones de Dirichlet (ver sección 1.2), vemos que si se puede encontrar un sistema coordenado ortogonal tal que por lo menos una de sus coordenadas coincida con las superficies de frontera del problema que se ajuste a la geometría y la solución al problema de Laplace sea separable en esa coordenada, podemos obtener la solución a partir de los factores de escala del sistema de coordenado empelado. A estas soluciones les llamamos funciones armónicas básicas.

2.1. Definición

Consideremos el sistema de coordenadas ortogonales (u, v, w) , con sus correspondientes factores de escala (h_u, h_v, h_w) . Asumiremos que las fronteras consisten de dos superficies cerradas S_1 y S_2 en las que la coordenada u toma los valores constantes u_1 y u_2 en S_1 y S_2 , respectivamente. Suponiendo que una de las superficies contiene a la otra, el volumen V es el volumen encerrado por las superficies, entonces nos interesa encontrar la solución $f_j(u, v, w)$ de la ecuación de Laplace (1.14) en el volumen V , con las siguientes condiciones de frontera

$$f_j(u_j, v, w) = 1, \quad f_j(u_i, v, w) = 0 \quad ; \quad \text{con } i, j = 1, 2 \text{ y } i \neq j \quad (2.1)$$

donde $i, j = 1, 2$ son los índices de las funciones que determinan la frontera. Es decir, u_i se refiera al valor constante de la coordenada u en la superficie S_i . En términos de las coordenadas (u, v, w) la ecuación de Laplace en tres dimensiones (1.14) para f_j se convierte en

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f_j}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_w h_u}{h_v} \frac{\partial f_j}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial f_j}{\partial w} \right) \right] = 0 \quad (2.2)$$

A las funciones $f_j(u, v, w)$ que sean solución de (2.2) con las condiciones de frontera (2.1) las llamaremos *funciones armónicas básicas*.

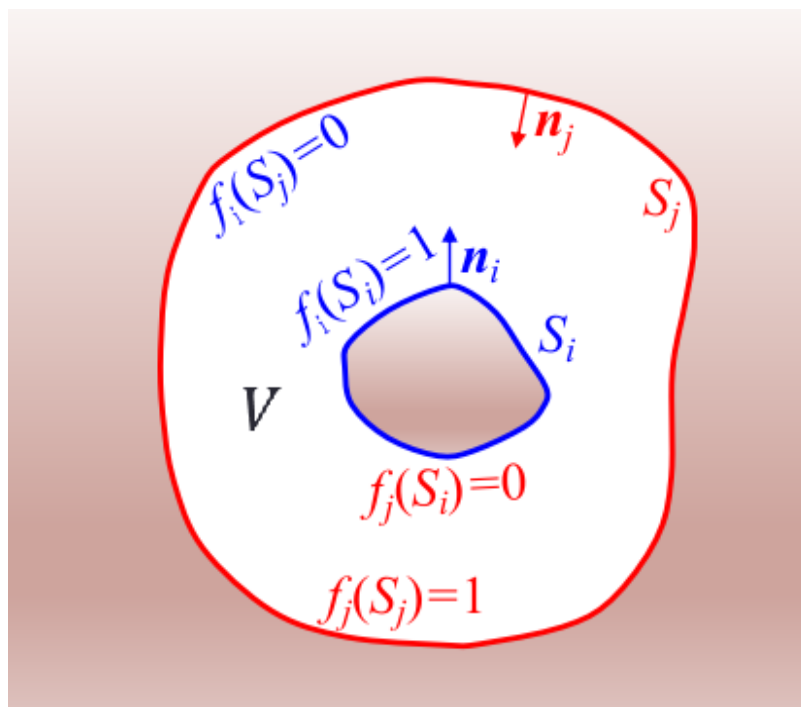


FIGURA 2.1. Problema de dos superficies cuando una contiene a la otra.

2.2. Solución

Suponiendo que la función $f_j(u, v, w)$ se puede separar de la forma[6] (1.15)

$$f_j(u, v, w) = U_j(u)\Theta_j(v, w) \quad ; \quad j = 1, 2 \quad (2.3)$$

Las condiciones de frontera (2.1) nos llevan a

$$f_j(u_j, v, w) = U_j(u_j)\Theta_j(v, w) = 1 \quad ; \quad j = 1, 2 \quad (2.4)$$

$$f_j(u_i, v, w) = U_j(u_i)\Theta_j(v, w) = 0 \quad ; \quad \text{con } i, j = 1, 2 \text{ y } i \neq j. \quad (2.5)$$

En adelante se asume que $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$, a menos que se indique lo contrario. Como las coordenadas v y w toma cualquier valor sobre cualquier superficie de frontera, es necesario que $U_j(u_i) = 0$, para satisfacer la condición de frontera (2.5) y obtener una solución no trivial. Por otro lado la condición (2.4) nos lleva a que

$$\Theta_j(v, w) = \frac{1}{U_j(u_j)} \equiv A_j, \quad (2.6)$$

donde A_j son constantes que solo dependen de u_j . Entonces podemos reescribir la solución $f_j(u, v, w)$ en (2.3) como

$$f_j(u, v, w) \equiv A_j U_j(u) \equiv f_j(u) \quad (2.7)$$

y como la solución depende únicamente de la coordenada u , tenemos que (2.1) toma la forma

$$f_j(u_i) = 0 \quad ; \quad f_j(u_j) = 1. \quad (2.8)$$

A partir de la ecuación (2.7) sabemos que $\partial_v f_j = \partial_w f_j = 0$ y gracias a la ecuación (2.2) tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f_j(u)}{\partial u} \right) = 0, \quad (2.9)$$

por lo tanto

$$\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f_j(u)}{\partial u} = k_j(v, w). \quad (2.10)$$

Se nota que no hay dependencia de u al lado derecho de la ecuación (2.10). Por lo que la dependencia de u que viene $\partial_u f_j(u)$ del lado izquierdo de la ecuación (2.10) debe cancelarse con el factor remanente $h_v h_w / h_u$. Por lo que es razonable asumir que

$$\frac{h_v h_w}{h_u} = G(u) H(v, w) \quad (2.11)$$

Cabe anotar que la validez de esta suposición esta condicionada por el sistema coordenado que se este empleando.

A partir de (2.11) tenemos que el Laplaciano (2.9) toma la forma

$$H(v, w) \frac{\partial}{\partial u} \left[G(u) \frac{\partial f_j(u)}{\partial u} \right] = 0, \quad (2.12)$$

como $H(v, w) \neq 0$ tenemos

$$\frac{d}{du} \left[G(u) \frac{df_j(u)}{du} \right] = 0, \quad (2.13)$$

entonces

$$G(u) \frac{df_j(u)}{du} = B_j \quad (2.14)$$

donde B_j son dos constantes dependientes de S_j . Ahora, encontramos la solución $f_j(u)$

$$df_j(u) = \frac{B_j}{G(u)} du \quad (2.15)$$

integrando a ambos lados de la ecuación

$$f_j(u) = B_j \int \frac{du}{G(u)} + C_j \quad (2.16)$$

siendo C_j otra constante asociada a las superficies de frontera. Definimos $Z(u)$ como

$$\frac{dZ(u)}{du} \equiv \frac{1}{G(u)}, \quad (2.17)$$

entonces obtenemos que $f_j(u)$ se puede escribir como

$$f_j(u) = B_j Z(u) + C_j \quad (2.18)$$

Combinando la ecuación (2.18) con las condiciones de frontera de (2.8) obtenemos

$$f_j(u_i) = 0 = B_j Z(u_i) + C_j \quad (2.19)$$

$$f_j(u_j) = 1 = B_j Z(u_j) + C_j \quad (2.20)$$

Usando la ecuación (2.19) obtenemos el coeficiente C_j

$$C_j = -B_j Z(u_i), \quad (2.21)$$

para encontrar el coeficiente debemos sustituir la ecuación (2.21) en la ecuación (2.20),

$$1 = B_j Z(u_j) - B_j Z(u_i), \quad (2.22)$$

al despejar B_j se obtiene

$$B_j = \frac{1}{[Z(u_j) - Z(u_i)]}. \quad (2.23)$$

Finalmente, al sustituir las ecuaciones (2.21) y (2.23) en (2.18) llegamos a una expresión general de $f_j(u)$

$$f_j(u) = \frac{Z(u) - Z(u_i)}{[Z(u_j) - Z(u_i)]}. \quad (2.24)$$

La expresión de la ecuación (2.24) corresponde a la solución de la ecuación de Laplace en cualquier sistema de coordenadas tridimensional ortogonal donde se satisfaga las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5).

2.2.1. Solución al problema complementario

En el problema complementario deseamos encontrar la función f_i que es solución a la ecuación

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f_i}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_w h_u}{h_v} \frac{\partial f_i}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial f_i}{\partial w} \right) \right] = 0, \quad (2.25)$$

con las condiciones de frontera

$$f_i(u_j, v, w) = U_i(u_i) \Theta_i(v, w) = 1 \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (2.26)$$

$$f_i(u_j, v, w) = U_i(u_j) \Theta_i(v, w) = 0 \quad ; \quad \text{con } i, j = 1, 2 \text{ e } i \neq j \quad (2.27)$$

Haciendo las mismas suposiciones y empleando el mismo procedimiento podemos encontraremos $f_i(u)$

$$f_i(u) = \frac{Z(u) - Z(u_j)}{[Z(u_i) - Z(u_j)]} \quad (2.28)$$

Al sumar las ecuaciones (2.24) y (2.28) tenemos

$$\begin{aligned} f_j(u) + f_i(u) &= \frac{Z(u) - Z(u_i)}{[Z(u_j) - Z(u_i)]} + \frac{Z(u) - Z(u_j)}{[Z(u_i) - Z(u_j)]} \\ &= \frac{Z(u) - Z(u_i) - Z(u) + Z(u_j)}{[Z(u_j) - Z(u_i)]} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Podemos notar que las soluciones $f_1(u)$ y $f_2(u)$ ($i = 1, j = 2$) cumplen la ligadura

$$f_1(u) + f_2(u) = 1, \quad (2.30)$$

en la región V en la cual se satisface la ecuación (2.2) con las condiciones de frontera (2.1). Por lo que con sólo $f_2(u)$ podemos obtener la solución del problema complementario ya que $f_1(u)$, se obtiene usando la ligadura (2.30).

2.3. Funciones armónicas base para un caso particular de factores de escala

En el caso particular en que

$$\frac{h_v h_w}{h_u} = 1 \quad (2.31)$$

se tiene que la expresión (2.11) toma la forma

$$G(u) H(v, w) = 1$$

esto implica que

$$G(u) = H(v, w) = 1 \quad (2.32)$$

por lo que partiendo de la definición de $Z(u)$ dada en la ecuación (2.18)

$$\frac{dZ(u)}{du} \equiv \frac{1}{G(u)} \quad (2.33)$$

Integrado ambos lados de la igualdad con respecto a u

$$Z(u) = \int u du \quad (2.34)$$

$$Z(u) = u + C \quad (2.35)$$

Haciendo uso de la invarianza gauge de $f_j(u)$, (ver 2.4) se puede ver que la ecuación (2.24) toma una forma más simple

$$f_j(u) = \frac{u - u_i}{u_j - u_i}. \quad (2.36)$$

2.3.1. Simetrías cilíndricas y mapeos conformes

Si una función compleja es un *mapeo* si la función es continua y tiene una única derivada. Un mapeo del plano XY al plano UV , se considerará conforme si se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Si proyectamos este mapeo sobre el eje Z ($x = u$, $y = v$ y $z = z$) tendríamos un sistema ortogonal tridimensional con los factores de escala (ver ec. (1.9))

$$h_u = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right| ; h_v = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right) \right| ; h_z = \left| \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right) \right| = 1 \quad (2.38)$$

Debido a que el mapeo es una función analítica, se tiene que $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}$ y $\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\partial x}{\partial v}$, entonces

$$h_u = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right| = \left| \left(\frac{\partial y}{\partial v}, -\frac{\partial x}{\partial v} \right) \right| = h_v. \quad (2.39)$$

La ecuación (2.39) implica que para el caso de mapeos conformes la condición (2.31) siempre se cumple [6]. Aunque esta condición es sólo una condición suficiente, porque el resultado en (2.36) solo requiere que se cumpla (2.31).

2.4. Invarianza gauge

Al observar detenidamente las definiciones de $G(u)$, $H(v, w)$ y $Z(u)$ (ecuaciones (2.11) y (2.18)) fácilmente se puede ver que estas funciones no son únicas, aunque esto no representa un problema ya que no corresponden a observables físicos. Sin embargo consideremos las funciones

$$\bar{G}(u) \equiv kG(u), \quad \bar{H}(v, w) \equiv \alpha H(v, w), \quad \bar{Z}(u) = \frac{1}{\kappa} Z(u) + \beta \quad (2.40)$$

Donde κ y β son constantes arbitrarias. Al reemplazar (2.40) en (2.11) se puede observar que

$$\begin{aligned} \frac{h_v h_w}{h_u} &= \bar{G}(u) \bar{H}(v, w) \\ \frac{h_v h_w}{h_u} &= kG(u) \alpha H(v, w). \end{aligned}$$

Como estamos estudiando la misma geometría los factores de escala no han sido modificados, por lo que se requiere que $\alpha = \frac{1}{\kappa}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{h_v h_w}{h_u} &= kG(u) \frac{1}{\kappa} H(v, w) \\ &= G(u) H(v, w), \end{aligned}$$

es decir que $\bar{G}(u) \equiv kG(u)$ y $\bar{H}(v, w) \equiv \alpha H(v, w)$ no afectan los resultados obtenidos. Ahora, si se reemplaza $\bar{Z}(u)$ de (2.40) en la solución $f_j(u)$ obtenida en (2.18) se tiene que

$$\begin{aligned} f_j(u) &= B_j \bar{Z}(u) + C_j \\ &= B_j \left(\frac{1}{\kappa} Z(u) + \beta \right) + C_j. \end{aligned}$$

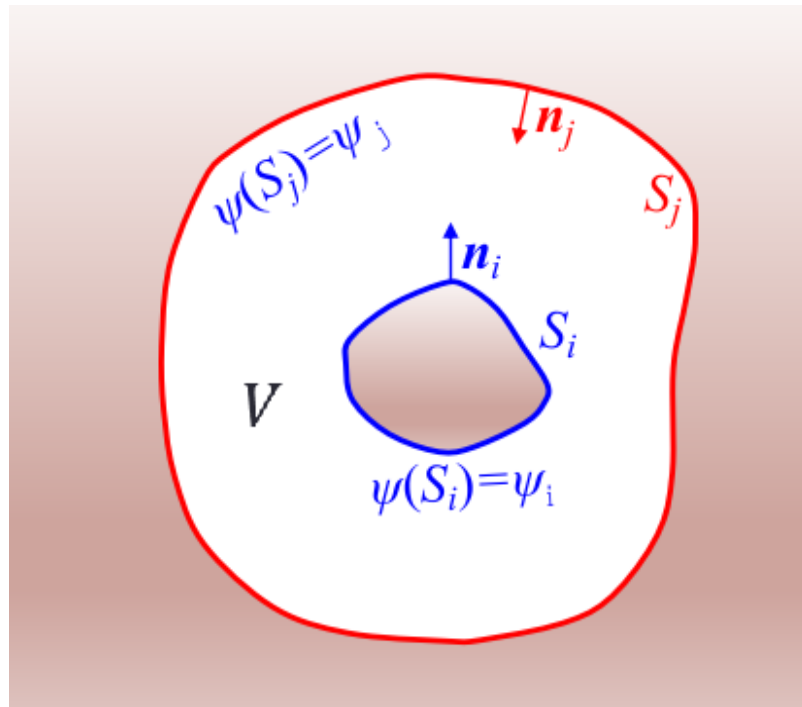


FIGURA 2.2. Problema de dos superficies cuando una contiene a la otra y cada una se encuentra a un potencial diferente.

Distribuyendo las constantes obtenemos

$$f_j(u) = B_j \left(\frac{1}{\kappa} Z(u) + \beta \right) + C_j \quad (2.41)$$

$$= \frac{B_j}{\kappa} Z(u) + B_j \beta + C_j. \quad (2.42)$$

Como las constantes B_j y C_j se obtienen a partir de los valores de frontera, podemos definir

$$\bar{B}_j \equiv \frac{B_j}{\kappa} \text{ y } \bar{C}_j \equiv B_j \beta + C_j,$$

lo que nos permite escribir $f_j(u)$ de la forma

$$f_j(u) = \bar{B}_j Z(u) + \bar{C}_j,$$

con lo que se comprueba que f_j son invariantes ante transformaciones gauge, es decir existe una sola f_j para cada j .

2.5. Soluciones a la ecuación de Laplace en casos más generales

Consideraremos un caso más general. Sea una función $\psi(u, v, w)$ que satisface la ecuación de Laplace en el volumen V con las condiciones de frontera $\psi(S_1) = \psi_1$ y $\psi(S_2) = \psi_2$, es decir

$$\nabla^2 \psi = 0 \text{ con } \psi(S_1) = \psi_1 \text{ y } \psi(S_2) = \psi_2. \quad (2.43)$$

Usando el principio de superposición (1.5) y la propiedad de linealidad (1.4), podemos escribir

$$\psi(u) = \psi_1 f_1(u) + \psi_2 f_2(u). \quad (2.44)$$

Es fácil comprobar que con la definición de ψ dada en (2.44) se satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi(u) = \psi_1 \nabla^2 f_1(u) + \psi_2 \nabla^2 f_2(u) \quad (2.45)$$

así como las condiciones de frontera

$$\psi(u_1) = \psi_1 \underbrace{f_1(u_1)}_{=1} + \psi_2 \underbrace{f_2(u_2)}_{=0} \quad \text{y} \quad \psi(u_2) = \psi_1 \underbrace{f_1(u_2)}_{=0} + \psi_2 \underbrace{f_2(u_1)}_{=1}.$$

La ecuación (2.30) nos permite escribir la ecuación (2.44) como

$$\psi(u) = \psi_2 + f_1(u) (\psi_1 - \psi_2), \quad (2.46)$$

y gracias a la unicidad (1.5.5) tenemos que la función $\psi(u)$ definida en (2.46) es la solución a la ecuación de Laplace (2.43).

Este resultado significa que podemos llevar la teoría de las funciones armónicas base a diferentes problemas físicos. En este trabajo lo enfocaremos a la electrostática y el cálculo de capacitancias.

2.6. Resumen

- Considerando una configuración geométrica de dos superficies S_1 y S_2 en las cuales una de las superficies contiene a la otra. El volumen V es el que queda entre las superficies.
 - Asumimos un sistema de coordenadas (u, v, w) , con factores de escala (h_u, h_v, h_w) tal que la coordenada u es constante en cada superficie S_1 y S_2 . (las constantes u_1 y u_2 deben ser diferentes para obtener una solución no trivial).
- Teniendo las anteriores condiciones, consideremos la ecuación de Laplace al interior del volumen V

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_v h_w}{h_u} \frac{\partial f_j}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{h_w h_u}{h_v} \frac{\partial f_j}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{h_u h_v}{h_w} \frac{\partial f_j}{\partial w} \right) \right] = 0$$

- con las condiciones de frontera

$$f_j(u_j, v, w) = 1, \quad f_j(u_i, v, w) = 0 \quad ; \quad \text{con } i, j = 1, 2 \quad \text{y} \quad i \neq j, \quad (2.47)$$

- Las soluciones $f_j(u_j, v, w)$ tienen las siguientes características
 - Las funciones f_j sólo dependen de la variable u y se pueden construir usando el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$f_j(u) = \frac{Z(u) - Z(u_i)}{[Z(u_j) - Z(u_i)]}; \quad \text{con } i, j = 1, 2 \quad \text{y} \quad i \neq j \quad (2.48)$$

$$\frac{h_v h_w}{h_u} \equiv G(u) H(v, w) \quad ; \quad \frac{dZ(u)}{du} \equiv \frac{1}{G(u)}. \quad (2.49)$$

- En la región V en la cual se satisface la ecuación de Laplace, las funciones $f_1(u)$ y $f_2(u)$ satisfacen

$$f_1(u) + f_2(u) = 1 \quad (2.50)$$

- Cuando $\frac{h_v h_w}{h_u} = 1$, tenemos que $G(u) = H(v, w) = 1$ y en ese caso $Z(u) = u$ y

$$f_j(u) = \frac{u - u_i}{u_j - u_i}. \quad (2.51)$$

- Las funciones armónicas base $f(u)$ sólo dependen de la geometría, son adimensionales y son únicas para cada j .
- Se pueden solucionar problemas más generales, del tipo $\nabla^2 \psi = 0$ con $\psi(S_1) = \psi_1$ y $\psi(S_2) = \psi_2$ haciendo $\psi(u) = \psi_2 + f_1(u)(\psi_1 - \psi_2)$.

Cálculos de Funciones Armónicas Básicas en diferentes geometrías

Para ilustrar los resultados obtenidos para las funciones armónicas básicas en el capítulo (2) se desarrolla el problema en seis sistemas geométricos ortogonales. En el grupo de los *Cilíndricos* (sección (3.1)) se estudian los casos de los cilindros concéntricos, de corte transversal elíptico y cilindros no concéntricos y en el grupo de los *Rotacionales* se estudia el caso de los cilindros concéntricos, esferas concéntricas y los sistemas esferoidales oblatos y prolatos.

3.1. Sistemas cilíndricos

Cualquier sistema de coordenadas bidimensional que se proyecte sobre un eje perpendicular al plano que lo contiene genera un sistema de coordenadas cilíndricas. Están formados por una familia de planos paralelos y dos familias de cilindros, ortogonales entre sí. Son de nuestro particular interés aquellos que son generados con un mapeo que proviene de una transformación conforme, porque en ese caso los factores de escala satisfacen la condición (2.31) y las soluciones armónicas base se obtienen de forma directa al aplicar la relación (2.36).

3.1.1. Dos cilindros concéntricos

Consideremos dos cilindros concéntricos de longitud infinitos con radios a y b respectivamente, siendo $b > a$. Esta geometría se adapta de manera intuitiva al sistema coordenadas polares cilíndricas (r, φ, z) , pero como estamos interesados en sistema de coordenado que satisfaga la relación (2.31), por lo que es mejor tomar un sistema que provenga de una transformación conforme, y ese es el caso de las *coordenadas polares cilíndricas conformes* (ρ, φ, z) que se obtienen al trasladar las *coordenadas polares conformes*¹ sobre el eje Z y

¹También se les llama coordenadas polares logarítmicas

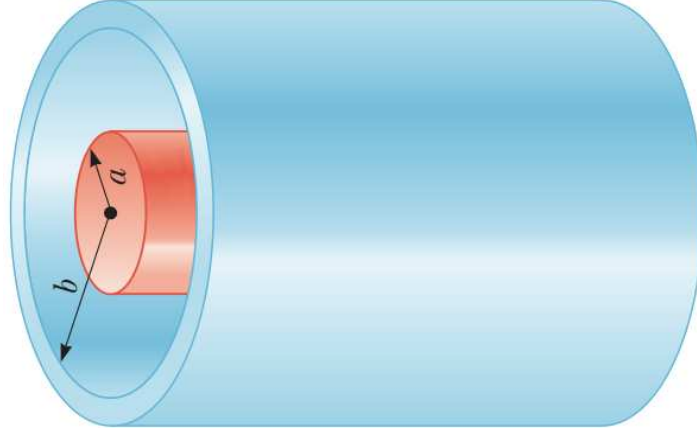


FIGURA 3.1. Dos cilindros concéntricos, el exterior de radio b y el interior de radio a .

se definen como,

$$x = e^\rho \cos \varphi ; \quad y = e^\rho \sin \varphi ; \quad z = z \quad (3.1)$$

$$h_\rho = e^\rho ; \quad h_\varphi = e^\rho ; \quad h_z = 1. \quad (3.2)$$

Estas coordenadas están definidas en los intervalos

$$\rho \geq 0 ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi ; \quad -\infty < z < \infty.$$

Dado que

$$x^2 + y^2 = (e^\rho)^2,$$

las superficies de ρ constante corresponden a cilindros concéntricos de radio² $r = e^\rho$. Para este caso $(u, v, w) \rightarrow (\rho, \varphi, z)$, como los factores de escala (3.1) y (3.2) satisfacen la condición (2.31), las soluciones armónicas base se obtienen de forma directa. (2.36)

$$f_j(\rho) = \frac{\rho - \rho_i}{\rho_j - \rho_i} = \frac{\ln(r/r_i)}{\ln(r_j/r_i)} ; \quad r_1 = a \quad r_2 = b \quad \text{con } i, j = 1, 2 \text{ y } i \neq j, \quad (3.3)$$

que es el resultado usual para esta geometría.

3.1.2. Dos Cilindros Elípticos Confocales

Consideremos dos cilindros de corte transversal elíptico, confocales, sobre el plano XY , y de longitud infinita. Los semiejes menores se encuentran en el eje Y y los semiejes mayores se encuentran sobre el eje X .

El semieje menor del cilindro interno es b_1 y el semieje mayor es a_1 , mientras que para el cilindro externo a_2 corresponde al semieje mayor y b_2 es el semieje menor. El sistema de coordenadas elíptico cilíndrico es el que mejor se adapta a esta geometría y está definido

²Siendo estrictos deberíamos, para conservar las dimensiones se debe definir $r = r_0 e^\rho$, en este caso tomamos $r_0 = 1$.

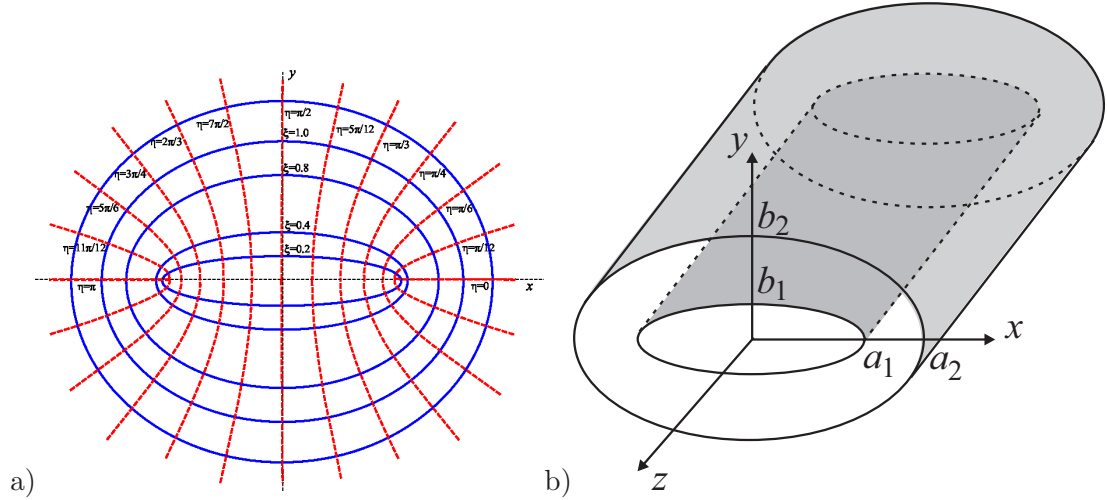


FIGURA 3.2. a) Coordenadas elípticas. b) Cilindros de corte transversal elíptico. Las elipses son confocales, los semiejes mayores se encuentran sobre el eje X y los menores sobre el eje Y .

por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$x = a \cosh \xi \cos \eta ; y = a \sinh \xi \sin \eta ; z = z \quad (3.4)$$

$$h_\xi = h_\eta = a \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta} ; h_z = 1, \quad (3.5)$$

donde las coordenadas (ξ, η, z) están definidas en

$$\xi \geq 0 ; 0 \leq \eta < 2\pi ; -\infty < z < \infty \quad (3.6)$$

y $a = \frac{d}{2}$, con d la distancia entre los focos.

De las ecuaciones (3.4) y (3.5) se puede ver que

$$\frac{x^2}{a^2 \cosh^2 \xi} = \cos^2 \eta \text{ y } \frac{x^2 + y^2}{a^2 \sinh^2 \xi} = \sin^2 \eta \quad (3.7)$$

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \eta} = \cosh^2 \xi \text{ y } \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \eta} = \sinh^2 \xi. \quad (3.8)$$

Al combinar las ecuaciones (3.7) y (3.8) se encuentra que las coordenadas (ξ, η, z) satisfacen identidades trigonométricas e hiperbólicas

$$\frac{x^2}{a^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{a^2 \sinh^2 \xi} = \cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1 \quad (3.9)$$

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \eta} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \eta} = \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1. \quad (3.10)$$

La relación (3.10) muestra que las superficies de ξ constante son los cilindros elípticos confocales, mientras que la ecuación (3.10) muestra que las superficies de η constante corresponden a superficies hiperbólicas confocales. Por lo que, tomaremos $\xi \rightarrow u$, es decir ξ es la superficies donde se definen las condiciones de frontera.

Este es otro ejemplo en el que se cumple la condición (2.31). Entonces las funciones armónicas base están dadas por (2.36), y que en este caso son

$$f_j(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_j - \xi_i} ; \quad i, j = 1, 2 \text{ e } i \neq j. \quad (3.11)$$

Para expresar la ecuación (3.11) en términos geométricos, usaremos el hecho de que cuando consideramos un ξ_k cualquiera, de la ecuación (3.4) sabemos el punto sobre el eje X que corresponde al semieje mayor es $(x, y) = (a_k, 0)$ y $\eta = 0$, es decir

$$a_k = a \cosh \xi_k,$$

y que cuando sobre el eje Y nos encontramos en el punto $(x, y) = (0, b_k)$ y $\eta = \pi/2$ tenemos (ver 3.2)

$$b_k = a \sinh \xi_k.$$

Entonces se puede ver que

$$\tanh \xi_k = \frac{b_k}{a_k}. \quad (3.12)$$

Recordando que por ser elipses se cumple la relación

$$a = \sqrt{b_k^2 - a_k^2}. \quad (3.13)$$

Ya que cada valor de ξ define un elipse con un semieje menor b único, podemos escribir (3.11) en función del semieje menor b como

$$f_j(b_k) = \frac{\tanh^{-1}\left(\frac{b_k}{\sqrt{b_k^2 - a^2}}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{b_i}{a_i}\right)}{\tanh^{-1}\left(\frac{b_j}{a_j}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{b_i}{a_i}\right)} ; \quad i, j = 1, 2 \text{ e } i \neq j. \quad (3.14)$$

Ahora, como $a_k > b_i$, $\frac{b_k}{a_k} < 1$, podemos hacer uso de la relación

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right); |x| < 1.$$

Entonces tenemos que

$$\xi_k = \tanh^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{b_k}{a_k}}{1 - \frac{b_k}{a_k}} \right). \quad (3.15)$$

Aplicando las propiedad de los logaritmos $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ y desarrollando el cociente al interior del paréntesis,

$$\begin{aligned} \xi_i = \tanh^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{b_k}{a_k}}{1 - \frac{b_k}{a_k}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{1 + \frac{b_k}{a_k}}{1 - \frac{b_k}{a_k}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \ln \left(\frac{\sqrt{a_k + b_k}}{\sqrt{a_k - b_k}} \right). \end{aligned}$$

Multiplicando el argumento al interior del logaritmo natural por $1 = \frac{\sqrt{a_k+b_k}}{\sqrt{a_k+b_k}}$ y desarrollando el producto notable

$$\begin{aligned}\xi_i &= \ln \left(\frac{\sqrt{a_k+b_k} \sqrt{a_k+b_k}}{\sqrt{a_k-b_k} \sqrt{a_k+b_k}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{a_k+b_k}{\sqrt{a_k^2-b_k^2}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{a_k+b_k}{a} \right),\end{aligned}$$

es decir

$$\xi_k = \tanh^{-1} \left(\frac{b_k}{a_k} \right) = \ln \left(\frac{a_k+b_k}{a} \right) \quad (3.16)$$

por lo que

$$\begin{aligned}\xi_j - \xi_i &= \ln \left(\frac{a_j+b_j}{a} \right) - \ln \left(\frac{a_i+b_i}{a} \right) \\ &= \ln \left(\frac{a_j+b_j}{a_i+b_i} \right),\end{aligned}$$

Usando la relación de la elipse (3.13) para reescribir los semiejes menores $b_k = \sqrt{a_k^2 - a^2}$, se tiene que

$$\xi_j - \xi_i = \ln \left(\frac{a_j + \sqrt{a_j^2 - a^2}}{a_i + \sqrt{a_i^2 - a^2}} \right). \quad (3.17)$$

Así que (3.11) también se puede escribir como

$$f_j(a_k) = \frac{\ln \left(\frac{a_k + \sqrt{a_k^2 - a^2}}{a_i + \sqrt{a_i^2 - a^2}} \right)}{\ln \left(\frac{a_j + \sqrt{a_j^2 - a^2}}{a_i + \sqrt{a_i^2 - a^2}} \right)} ; \quad i, j = 1, 2 \text{ e } i \neq j, \quad (3.18)$$

La ventaja de la formulación 3.18 es que es fácil ver que en el límite $a \rightarrow 0$, se tiene la función armónica base para cilindros concéntricos (3.3).

3.1.3. Dos cilindros circulares no concéntricos

Los cilindros circulares no concéntricos son otro caso donde se cumple la condición (2.31) consideremos la geometría que se ilustra en la figura 3.3, el cilindro externo tiene radio r_2 , y el interno tiene radio r_1 . Los centros de los cilindros están localizados en los puntos $(x_{c1}, 0)$ y $(x_{c2}, 0)$, separados una distancia D .

Para la ecuación de Laplace asociadas a estas superficies el sistema coordenado que mejor se adapta es el sistema bipolar cilíndrico, que es una proyección sobre el eje Z del sistema coordenado bipolar (ver 3.4).

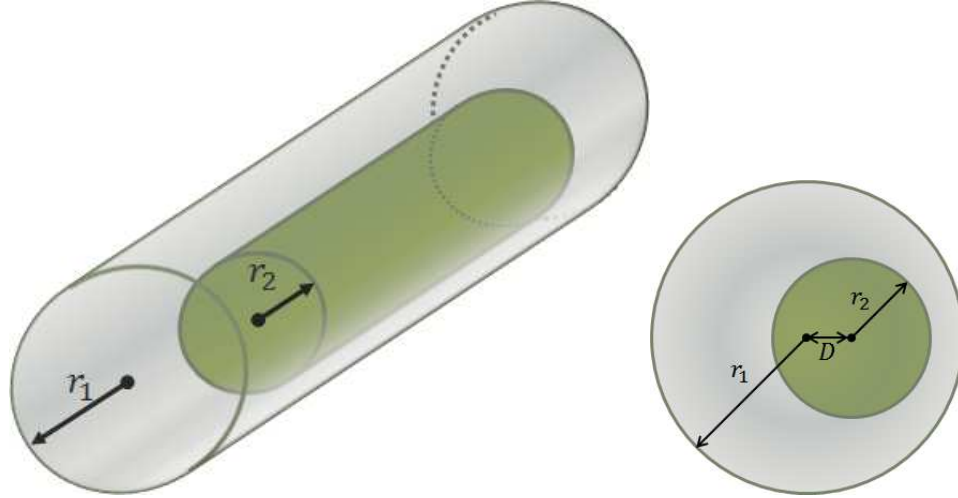


FIGURA 3.3. Cilindros no concéntricos. El cilindro exterior tiene radio r_1 y contiene al cilindro interior de radio r_2 , sus centros se encuentran separados una distancia D .

El sistema coordenado bipolar tiene dos focos, F_1 y F_2 , usualmente localizados en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, respectivamente y separados una distancia $D = 2a$. Usando las coordenadas (τ, σ, z) , las transformaciones a coordenadas cartesianas (x, y, z) están dadas por

$$x = \frac{a \sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} ; y = \frac{a \sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma} ; z = z \quad (3.19)$$

$$h_\sigma = h_\tau = \frac{a}{\cosh \tau - \cos \sigma} ; h_z = 1, \quad (3.20)$$

Las coordenadas (τ, σ, z) están definidas en los intervalos

$$0 \leq \sigma < 2\pi ; -\infty < \tau < +\infty ; -\infty < z < +\infty. \quad (3.21)$$

Sea P un punto arbitrario en el plano (x, y) . Entonces la distancia d_1 desde el foco F_1 a P esta dada por

$$d_1^2 = (x + a)^2 + y^2,$$

y la distancia d_2 desde el foco F_2 a P está dada por

$$d_2^2 = (x - a)^2 + y^2.$$

Entonces la coordenada σ representa el ángulo entre las líneas d_1 y d_2 que unen cada foco con P , y la coordenada τ corresponde a (ver 3.4)

$$\tau = \ln \left(\frac{d_1}{d_2} \right). \quad (3.22)$$

A partir las ecuaciones (3.19) y (3.20) se puede llegar a las identidades

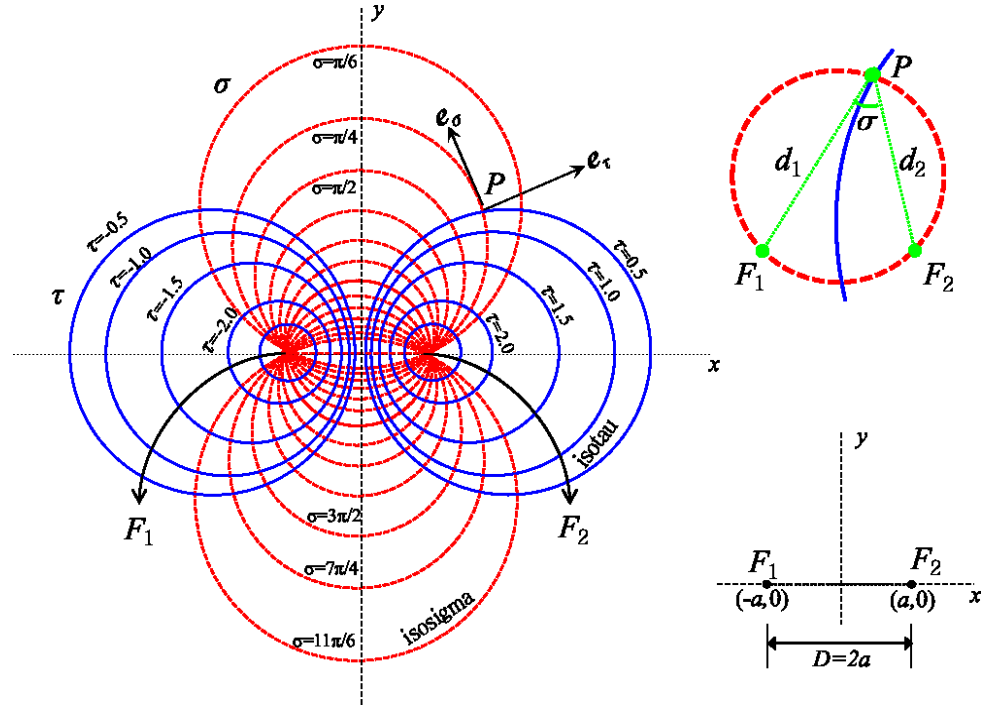


FIGURA 3.4. Sistema coordenado bipolar con los focos $F_1 = (-a, 0)$ y $F_2 = (a, 0)$. Se muestra que las curvas asociadas con los valores constantes positivos de τ ($\tau > 0$) son círculos que contienen el foco F_2 , mientras que valores constantes negativos de τ ($\tau < 0$) son círculos que contienen el foco F_1 .

$$x^2 + (y - a \cot \sigma)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \sigma} \quad (3.23)$$

$$y^2 + (x - a \coth \tau)^2 = \frac{a^2}{\sinh^2 \tau}. \quad (3.24)$$

Las ecuaciones (3.23) y (3.24) nos permiten ver que en el plano los valores constantes de σ corresponden a círculos no concéntricos que únicamente se intersectan en los dos focos (líneas rojas en la figura 3.4), mientras que las curvas de τ constante corresponden a círculos que no se intersectan, tienen diferentes radios y centros (líneas azules en la figura 3.4). Añadiendo la coordenada z , obtenemos la configuración de cilindros no concéntricos³. Entonces tomamos $(u, v, w) \rightarrow (\tau, \sigma, z)$, es decir que los valores constantes de τ son las superficies donde se definen las condiciones de frontera. Este sistema de coordenadas también satisface (2.31), por lo que las soluciones armónicas básicas se obtienen directamente de la ecuación (2.36).

$$f_j(\tau) = \frac{\tau - \tau_i}{\tau_j - \tau_i} ; \quad i, j = 1, 2 \text{ y } i \neq j \quad (3.25)$$

Cabe anotar que para que el círculo C_2 definido por el valor constante τ_2 contenga al círculo C_1 que está definido por el valor constante τ_1 se requiere que $|\tau_2| < |\tau_1|$. La inversión del numerador de la función (3.25) en términos geométricos no es trivial. Sin embargo el denominador es más fácil de obtener. (ver sección 5.2.3).

³Los valores negativos de τ son círculos que contienen a F_1 .

3.2. Sistemas rotacionales

Los sistemas rotacionales o de simetría axial consisten en superficies axialmente simétricas que se intersectan perpendicularmente más un conjunto de semiplanos que terminan en el eje de rotación. Se pueden generar al tomar un sistema de coordenadas bidimensional, hacer coincidir uno de sus planos con el Z y girarlo alrededor del eje Z . Según la simetría del sistema bidimensional, este puede tener uno o dos sistemas rotacionales asociados.

3.2.1. Dos cilindros concéntricos

Al hacer coincidir el eje Y de plano cartesiano con el eje Z y rotarlo sobre el mismo se obtiene el *sistema coordenadas de cilíndricas*. En la sección (3.1.1) ya estudiamos este problema cuando el sistema proviene de una transformación conforme que se proyecta sobre el eje Z que nos permite usar las propiedades que derivan de (2.31). Sin embargo, este es un caso particular del resultado más general (ver sección (2.6)). Si abordamos el problema de la figura (3.1) desde su formulación más usual, tenemos el sistema coordenadas cilíndricas

$$x = r \cos \varphi ; \quad y = r \sin \varphi ; \quad z = z \quad (3.26)$$

$$h_r = 1 ; \quad h_\varphi = r ; \quad h_z = 1. \quad (3.27)$$

Las que están definidas en los intervalos

$$r \geq 0 ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi ; \quad -\infty < z < \infty.$$

Las superficies de r constante corresponden a cilindros concéntricos con radio r y eje de simetría en Z , por lo que tomamos $(u, v, w) \rightarrow (r, \varphi, z)$. Tomando la expresión de (2.11) tenemos que

$$\frac{h_\varphi h_z}{h_r} = G(r) H(\varphi, z) \quad (3.28)$$

$$= r \cos \varphi \sin \varphi, \quad (3.29)$$

así que una posible solución es

$$G(r) = r ; \quad H(\varphi, z) = H(\varphi) = -\cos \varphi \sin \varphi \quad (3.30)$$

Es bueno notar que $\bar{G}(r) = r^2$ y $\bar{H}(\varphi) = \sin \varphi$ también son una solución, y que estas dos soluciones se conectan tomando $\kappa = -1$ y $\beta = 0$ en las ecuaciones (2.40). Preferimos la solución (3.30) que nos lleva a una forma positiva de $Z(u)$.

Ahora, de la segunda de las ecuaciones de (2.18) obtenemos la solución para $Z(u) = Z(r)$

$$Z(r) = \int \frac{dr}{r} = \ln r, \quad (3.31)$$

y combinando (3.31) con (2.17), obtenemos

$$f_j(\rho) = \frac{\ln r - \ln r_i}{\ln r_j - \ln r_i} = \frac{\ln(r/r_i)}{\ln(r_j/r_i)} ; \quad \text{con } i, j = 1, 2 \text{ y } i \neq j, \quad (3.32)$$

que es la expresión usual que ya habíamos obtenido en la ecuación (3.3).

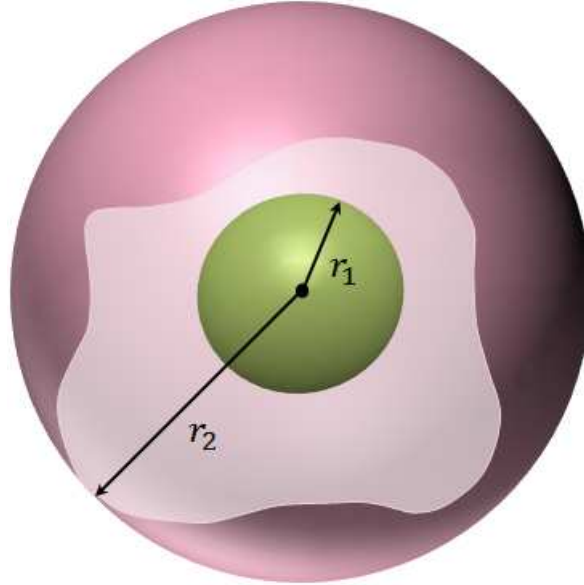


FIGURA 3.5. Un cascarón esférico de radio r_2 que contiene a una esfera sólida de radio r_1 y comparten el mismo centro.

3.2.2. Dos esferas concéntricas

Consideramos superficies como las de la figura 3.5, en ese caso tenemos que el sistema coordenado que mejor se adapta al problema de Laplace son las coordenadas esféricas, que en su definición usual son (r, θ, ϕ) , con

$$x = r \cos \theta \sin \phi ; \quad y = r \sin \theta \sin \phi ; \quad z = r \cos \phi \quad (3.33)$$

$$h_r = 1 ; \quad h_\theta = r ; \quad h_\phi = r \sin \theta, \quad (3.34)$$

y se encuentran en el dominio

$$r \geq 0 ; \quad 0 \leq \phi < 2\pi ; \quad 0 < \theta < \pi.$$

Ahora, la relación

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (3.35)$$

muestra cómo las superficies de r constante corresponde a cascarones esféricos, por lo que escogemos $(u, v, w) \rightarrow (r, \theta, \phi)$. De la ecuación (2.11) tenemos que

$$\frac{h_\theta h_\phi}{h_r} = G(r) H(\theta, \phi) = r^2 \sin \theta. \quad (3.36)$$

Entre las diferentes posibles soluciones, escogemos

$$G(r) = -r^2 ; \quad H(\theta, \phi) = H(\theta) = -\sin \theta. \quad (3.37)$$

Otra posible solución es $\bar{G}(r) = r^2$ y $\bar{H}(\theta) = \sin \theta$, tomando $\kappa = -1$ y $\beta = 0$ en las ecuaciones (2.40), pero la solución (3.37) nos lleva a una forma positiva de $Z(u)$. Ahora,

de la segunda de las ecuaciones de ((2.18)) obtenemos la solución para $Z(u) = Z(r)$

$$Z(r) = - \int \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r}, \quad (3.38)$$

y combinando la ecuación (3.38) con la ecuación (2.17), obtenemos

$$f_j(r) = \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i}}{\left[\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_i} \right]}, \quad i, j = 1, 2 \quad \text{y} \quad i \neq j. \quad (3.39)$$

Asumiendo $r_j = r_2$ y $r_i = r_1$, con $r_2 > r_1$, la ecuación (3.39) se reduce a

$$f_2(r) = \left(\frac{r_2 r_1}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (3.40)$$

Este es el resultado esperado para esta geometría. Los casos de los esferoides prolatos y oblatos deben poder llegar a este resultado como caso límite.

3.2.3. Esferoides Prolatos Confocales

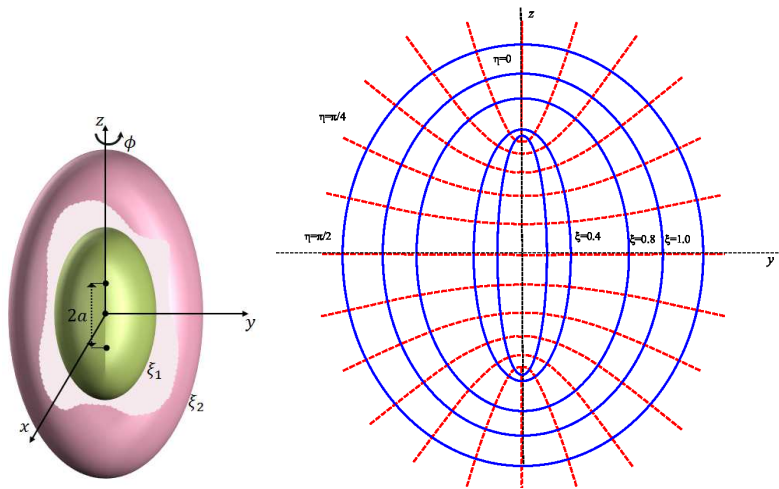


FIGURA 3.6. Dos cascarones esferoidales prolatos. Los esferoides son elipses de revolución confocales, el corte en el plano XY corresponde una sección circular cuyos radios son los semiejes menores.

Consideremos la región definida por dos cascarones esferoidales prolatos confocales como los de la figura 3.6. El el sistema coordenado que mejor se adapta al problema de Laplace de esta geometría es el sistema coordenado esferoidal prolato.

El sistema coordenado esferoidal prolato se obtiene al hace coincidir el eje que contiene a los semiejes mayores del sistema de coordenadas elípticas (ξ, η) con el eje Z , y hacer la rotación alrededor del semieje mayor de las elipses. En su definición usual tenemos (ξ, η, φ)

$$x = a \sinh \xi \sin \eta \cos \varphi ; \quad y = a \sinh \xi \sin \eta \sin \varphi ; \quad z = a \cosh \xi \cos \eta, \quad (3.41)$$

donde ξ, η son las coordenadas elípticas (en el plano), φ es el ángulo azimutal y $a = \frac{d}{2}$ es la semidistancia ente los focos de la elipse. El dominio de las coordenadas es

$$\xi \geq 0, \quad \eta \in [0, \pi], \quad a = \frac{d}{2} ; \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Los factores de escala están dados por

$$h_\xi = h_\eta = a \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta} ; \quad h_\varphi = a \sinh \xi \sin \eta. \quad (3.42)$$

A partir de las ecuaciones (3.41) podemos ver que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (a \sinh \xi \sin \eta)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = (a \sinh \xi \sin \eta)^2 \\ z^2 &= (a \cosh \xi \cos \eta)^2 \end{aligned}$$

a partir de allí podemos obtener las relaciones

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 \sinh^2 \xi} = \sin^2 \eta \quad \text{y} \quad \frac{z^2}{a^2 \cosh^2 \xi} = \cos^2 \eta \quad (3.43)$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 \sin^2 \eta} = \sinh^2 \xi \quad \text{y} \quad \frac{z^2}{a^2 \cos^2 \eta} = \cosh^2 \xi, \quad (3.44)$$

de donde obtenemos las identidades hiperbólicas y trigonométricas

$$\frac{z^2}{a^2 \cosh^2 \xi} + \frac{x^2 + y^2}{a^2 \sinh^2 \xi} = \cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1 \quad (3.45)$$

$$\frac{z^2}{a^2 \cos^2 \eta} - \frac{x^2 + y^2}{a^2 \sin^2 \eta} = \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1. \quad (3.46)$$

La ecuación (3.46) nos indica que las superficies de ξ constante corresponden a esferoides prolatos, mientras que la ecuación (3.45) nos muestra que las superficies de η constante corresponden a hiperboloides de revolución. Entonces, para la geometría que nos interesa, las condiciones de frontera son valores constantes de ξ , por lo que tomamos $(u, v, w) \rightarrow (\xi, \eta, \varphi)$.

Al combinar las ecuaciones (3.42) y (2.11), obtenemos

$$\frac{h_\eta h_\varphi}{h_\xi} = h_\varphi = a \sinh \xi \sin \eta \equiv G(\xi) H(\eta, \varphi),$$

por lo que $G(\xi)$ y $H(\eta, \varphi)$ están dadas por

$$G(\xi) = a \sinh \xi ; \quad H(\eta, \varphi) = \sin \eta. \quad (3.47)$$

Ahora, combinando (2.17), (3.47), obtenemos $Z(\xi)$

$$Z(\xi) = \int \frac{d\xi}{G(\xi)} \quad (3.48)$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sinh \xi} d\xi. \quad (3.49)$$

Resolviendo la integral se tiene

$$Z(\xi) = \frac{1}{a} \ln \left(\tanh \frac{\xi}{2} \right). \quad (3.50)$$

finalmente, al reemplazar (3.50) en (2.24) obtenemos las funciones armónicas base para esta geometría,

$$f_j(\xi) = \frac{Z(\xi) - Z(\xi_i)}{[Z(\xi_j) - Z(\xi_i)]}. \quad (3.51)$$

El resultado anterior se puede expresar en forma explícita como

$$f_j(\xi) = \frac{\ln \left(\tanh \frac{\xi}{2} \right) - \ln \left(\tanh \frac{\xi_i}{2} \right)}{\ln \left(\tanh \frac{\xi_j}{2} \right) - \ln \left(\tanh \frac{\xi_i}{2} \right)} = \frac{\ln \left(\frac{\tanh \frac{\xi}{2}}{\tanh \frac{\xi_i}{2}} \right)}{\ln \left(\frac{\tanh \frac{\xi_j}{2}}{\tanh \frac{\xi_i}{2}} \right)} ; \quad i, j = 1, 2 \text{ y } i \neq j, \quad (3.52)$$

donde ξ_i y ξ_j son los valores constantes asociados a las superficies S_i y S_j .

Para escribir la función $f_j(\xi)$, de la ecuación (3.52) usamos la ecuación de un esferoide prolato (elipsoide de revolución alrededor del eje- Z), que es

$$\frac{z^2}{a_k^2} + \frac{x^2 + y^2}{b_k^2} = 1. \quad (3.53)$$

En el caso de un esferoide prolato, a_k es el semieje mayor y b_k el semieje menor del elipsoide de revolución correspondiente a la superficie ξ_k . Al comparar las ecuaciones (3.45), (3.53) y teniendo en cuenta que las funciones $\cosh \xi$ y $\sinh \xi$ son positivas para $\xi > 0$, tenemos que

$$\cosh \xi_k = \frac{a_k}{a} \text{ y } \sinh \xi_k = \frac{b_k}{a}. \quad (3.54)$$

Además, en esta geometría también se cumple la relación entre los semiejes y la semidistancia focal (3.13), usando la identidad hiperbólica combinada con (3.54) obtenemos

$$\begin{aligned} \tanh \frac{\xi_k}{2} &= \frac{\sinh \xi_k}{1 + \cosh \xi_k} = \frac{b_k/a}{1 + \frac{a_k}{a}} = \frac{b_k}{a + a_k} \\ \tanh \frac{\xi_k}{2} &= \frac{\sqrt{a_k^2 - a^2}}{a + a_k} \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde la distancia focal $d = 2a$ es la misma para todas las elipses, por ser confocales. Al reemplazar (3.55) en el denominador de (5.31) encontramos que podemos escribir la función $f_j(\xi)$ de la ecuación (3.52) en términos de un semijemayor a_k , así:

$$f_j(a_k) = \frac{\ln \left(\frac{\sqrt{a_k^2 - a^2}(a + a_k)}{(a + a_i)\sqrt{a_k^2 - a^2}} \right)}{\ln \left(\frac{\sqrt{a_j^2 - a^2}(a + a_i)}{(a + a_j)\sqrt{a_i^2 - a^2}} \right)} ; \quad i, j = 1, 2 \text{ y } i \neq j \quad (3.56)$$

La ecuación (3.56) no está definida en $a = 0$, pero el límite $a \rightarrow 0$ existe y se reduce al caso de las dos esferas concéntricas.

3.2.4. Esferoides Oblatos Confocales

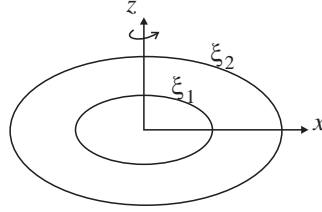


FIGURA 3.7. Dos esferoides oblatos confocales. Los esferoides son elipses de revolución confocales. El corte en el plano XY es a una sección circular cuyos radios corresponden a los semiejes mayores de las elipses.

Consideremos un cascarón como el conformado por la figura 3.7. El sistema coordenado esferoidal oblato es el que mejor se adapta a esta geometría. Este sistema coordenado se obtiene al rotar el sistema coordenado elíptico (ξ, η) alrededor del semieje menor de las elipses. Las coordenadas son (ξ, η, φ) y la transformación de coordenadas cartesianas a coordenado esferoidal oblatas está dada por

$$x = a \cosh \xi \cos \eta \cos \varphi ; \quad y = a \cosh \xi \cos \eta \sin \varphi ; \quad z = a \sinh \xi \sin \eta. \quad (3.57)$$

Estas coordenadas se definen en el dominio

$$\xi \geq 0, \quad \eta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi \in [0, 2\pi) ; \quad a = \frac{d}{2}, \quad (3.58)$$

y sus factores de escala están dados por

$$h_\xi = h_\eta = a \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta} ; \quad h_\varphi = a \cosh \xi \cos \eta. \quad (3.59)$$

A partir de las ecuaciones (3.57) podemos ver que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (a \cosh \xi \sin \eta)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = (a \cosh \xi \sin \eta)^2, \\ z^2 &= (a \sinh \xi \cos \eta)^2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

A partir de allí podemos obtener las relaciones

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 \cosh^2 \xi} = \cos^2 \eta \quad \text{y} \quad \frac{z^2}{a^2 \sinh^2 \xi} = \sin^2 \eta, \quad (3.61)$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 \cos^2 \eta} = \cosh^2 \xi \quad \text{y} \quad \frac{z^2}{a^2 \sin^2 \eta} = \sinh^2 \xi. \quad (3.62)$$

Por medio de las ecuaciones (3.62) y (3.61) se obtienen las identidades trigonométricas e hiperbólicas

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 \cosh^2 \xi} + \frac{z^2}{a^2 \sinh^2 \xi} = \cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1 \quad (3.63)$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 \cos^2 \eta} - \frac{z^2}{a^2 \sin^2 \eta} = \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1. \quad (3.64)$$

La ecuación (3.63) muestra que las superficies de η constante corresponden a hiperboloides de revolución, mientras que la ecuación (3.64) muestran que las superficies de ξ constante

corresponden a esferoides oblatos. Así que para el problema de la figura 3.7 escogemos $(u, v, w) \rightarrow (\xi, \eta, \varphi)$. Combinando (2.11) y (3.59), se obtiene

$$\frac{h_\eta h_\varphi}{h_\xi} = h_\varphi = a \cosh \xi \cos \eta \equiv G(\xi) H(\eta, \varphi). \quad (3.65)$$

Entonces

$$G(\xi) \equiv a \cosh \xi \quad ; \quad H(\eta, \varphi) \equiv \cos \eta, \quad (3.66)$$

por lo que para este caso $Z(\xi)$ está dada por

$$\begin{aligned} Z(\xi) &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\cosh \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{a} \sin^{-1}(\tanh \xi). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Combinando (3.66) y (3.67) con (2.24) obtenemos

$$f_j(\xi) = \frac{Z(\xi) - Z(\xi_i)}{[Z(\xi_j) - Z(\xi_i)]}. \quad (3.68)$$

Reemplazando (3.67) en (3.68) obtenemos

$$f_j(\xi) = \frac{\sin^{-1}(\tanh \xi) - \sin^{-1}(\tanh \xi_i)}{\sin^{-1}(\tanh \xi_j) - \sin^{-1}(\tanh \xi_i)} \quad ; \quad i, j = 1, 2 \quad \text{y} \quad i \neq j \quad (3.69)$$

Para escribir la ecuación (3.69) en términos de factores geométricos debemos usar las propiedades geométricas de un elipsoide oblatado de revolución,

$$\frac{z^2}{b_i^2} + \frac{x^2 + y^2}{a_i^2} = 1. \quad (3.70)$$

Comparando las ecuaciones (3.70), (3.63) y (3.13), tenemos que

$$\begin{aligned} a^2 \sinh^2 \xi_k &= b_k^2 \quad ; \quad a^2 \cosh^2 \xi_k = a_k^2 \Rightarrow \tanh \xi_k = \frac{b_k}{a_k} = \frac{\sqrt{a_k^2 - a^2}}{a_k} \\ \tanh \xi_k &= \sqrt{1 - \frac{a^2}{a_k^2}} = \sqrt{1 - \epsilon_k^2} \end{aligned} \quad (3.71)$$

En la última expresión usamos el hecho que $a/a_k = \epsilon_k$, donde ϵ_k representa la excentricidad de la elipse asociada a la coordenada ξ_i . Al reemplazar la ecuación (3.71) en (5.33), podemos obtener una expresión para $f_j(\xi)$ de la ecuación (3.69) en términos de la excentricidad ϵ_k .

$$f_j(\epsilon_k) = \frac{\sin^{-1}(\sqrt{1 - \epsilon_k^2}) - \sin^{-1}(\sqrt{1 - \epsilon_i^2})}{\sin^{-1}(\sqrt{1 - \epsilon_j^2}) - \sin^{-1}(\sqrt{1 - \epsilon_i^2})}. \quad (3.72)$$

La identidad $\cos^{-1} x = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$; $0 \leq x \leq 1$ nos da una versión aún más simple

$$f_j(\epsilon_k) = \frac{\cos^{-1} \epsilon_k - \cos^{-1} \epsilon_i}{\cos^{-1} \epsilon_j - \cos^{-1} \epsilon_i}. \quad (3.73)$$

Para encontrar el caso límite de (3.73) se debe volver a la expresión (3.71).

3.3. Resumen

Encontramos las funciones armónicas básicas para seis geometrías diferentes: cilindros concéntricos, corte transversal elíptico y no concéntricos, esferas concéntricas y esferoidales oblatos y prolato. Se nota cómo el procedimiento se simplifica y el algoritmo se aplica igual en los diferentes casos. Para el caso particular de los sistemas de simetría cilíndrica que cumplen la relación de los factores de escala (ec. (2.31)) desarrollado en la sección 2.3 se desarrollaron tres casos en la sección de sistemas cilíndricos 3.1. En la sección 3.2 se desarrollaron cuatro casos donde se usó la suposición de la separación de los factores de escala contemplados en la ecuación (2.11). El caso de los cilindros concéntricos se resolvió por las dos metodologías. Este es de especial de interés, ya que el sistema coordenado cilíndrico tradicional no proviene directamente de una transformación conforme, lo que nos permite verificar que la metodología no se restringe a sistemas ortogonales que se originen a partir de transformaciones conforme.

Capacitancia

En este capítulo analizamos cómo encontrar la matriz de capacitancia a partir de la ecuación de Laplace asociada al grupo de conductores, las condiciones de frontera y funciones armónicas base asociadas, llegando así a una formulación basada en factores geométricos únicamente. Las propiedades ya conocidas de la matriz de capacitancia se pueden deducir a partir de esta formulación, así como varias nuevas, que son propias del nuevo método. Algunas propiedades, como la simetría $C_{ij} = C_{ji}$, emplean el principio de superposición[2, 3]. Sin embargo emplear el enfoque de N conductores rodeados por un conductor $N + 1$ en combinación con funciones armónicas base para solucionar el problema de Laplace asociado que se presenta en [21] hace que muchas de estas propiedades sean más directas y evita tener que acudir al formalismo de las funciones de Green[19, 18]. En este capítulo estudiaremos, a partir de dicha aproximación, la capacitancia como un factor que depende únicamente de la geometría, y obtendremos sus propiedades a partir de la ecuación de Laplace que se asocia a la configuración de conductores asociada, así como varias propiedades de la matriz de capacitancia y sus elementos.

4.1. Definición

Si un conductor aislado con una carga Q tiene un cierto potencial de ϕ_0 , con el cero de potencial en el infinito. Q es proporcional a ϕ_0 y coeficiente de proporcionalidad es conocido como *capacitancia*, C .

$$Q = C\phi_0. \tag{4.1}$$

Cuando se tienen un conjunto de N conductores y un conductor adicional que los encierra ($N + 1$), con sus respectivas cargas q_1, \dots, q_N, q_{N+1} y potenciales $\varphi_1, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1}$ asociados, el factor de proporcionalidad se vuelve una matriz. (ver la configuración de conductores en la figura 4.1).

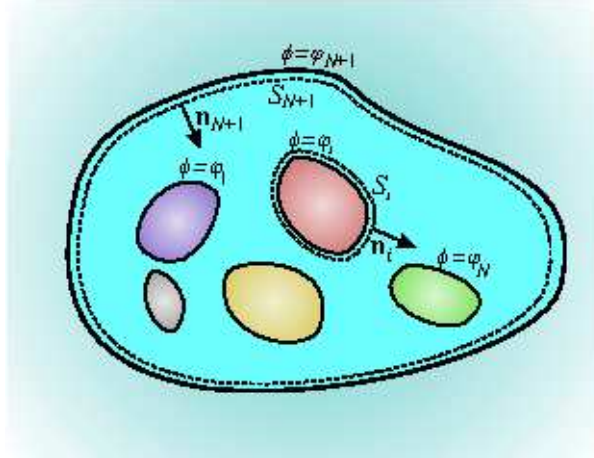


FIGURA 4.1. Un sistema de N conductores internos con un conductor $N+1$ encerrándolos. φ_i es el potencial de cada conductor. La superficie S_i encierra al conductor i y se encuentra arbitrariamente cercana y es localmente paralela a la superficie real del conductor.

4.2. Funciones armónicas base en n superficies

La densidad superficial de carga de un conductor electrostático está dada por

$$\sigma_i = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_i = -\varepsilon_0 \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_i \quad (i = 1, \dots, N+1), \quad (4.2)$$

donde \mathbf{n}_i es un vector unitario normal a la superficie S_i con dirección al exterior del conductor i , \mathbf{E} el campo eléctrico y ϕ el potencial eléctrico. La carga en cada conductor se determina como

$$Q_i = \oint_{S_i} \sigma_i dS = -\varepsilon_0 \oint_{S_i} \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_i dS. \quad (4.3)$$

El potencial ϕ en el volumen V_{S_T} , que es el volumen al interior de la superficie externa S_{N+1} y al exterior de las N superficies internas S_i y cuya superficie total es $S_T = S_1 + \dots + S_N + S_{N+1}$, debe satisfacer la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (4.4)$$

con condiciones de fronteras

$$\phi(S_i) = \varphi_i \quad (i = 1, \dots, N+1). \quad (4.5)$$

Gracias a la propiedad de linealidad de la ecuación de Laplace (1.4), la solución para ϕ puede ser parametrizada como

$$\phi = \sum_{j=1}^{N+1} \varphi_j f_j, \quad (4.6)$$

donde las funciones f_i satisfacen la ecuación de Laplace en el volumen V_{S_T} cumpliendo las condiciones de frontera

$$\nabla^2 f_j = 0, \quad f_j(S_i) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, N+1), \quad (4.7)$$

mientras el factor φ conserva los valores del potencial eléctrico. Estas condiciones nos permiten establecer que el problema tiene solución única (ver 1.2) y, además, que las funciones f_j dependen únicamente de la geometría.

4.2.1. Propiedades de f_j

Como las funciones f_j toman valores constantes en las superficies S_i , con $i = 1, \dots, N+1$, es fácil ver que ∇f_j es ortogonal a dichas superficies.

$$\nabla f_j(S_i) \cdot \mathbf{n}_i = (1 - 2\delta_{ij}) \|\nabla f_j(S_i)\|, \quad (4.8)$$

como f_j es solución de la ecuación de Laplace, no tiene máximos ni mínimos locales (ver (1.5.4)), esto combinado con las condiciones de fronteras establecidas en la ecuación (4.7) que establecen que el mínimo de la función $f_j = 0$ en cualquier superficie S_i con $i \neq j$, por lo que

$$0 \leq f_j \leq 1. \quad (4.9)$$

La linealidad de la ecuación de Laplace nos permite ver que la función

$$F = \sum_{j=1}^{N+1} f_j, \quad (4.10)$$

es solución de la ecuación de Laplace con las condiciones de frontera

$$\nabla^2 F = 0, \quad F(S_i) = 1 \quad (i = 1, \dots, N+1), \quad (4.11)$$

cómo $F = 1$ a lo largo de S_T la unicidad de la ecuación de Laplace nos indica que $F = 1$ a lo largo de V_{S_T} también, por lo que

$$\sum_{j=1}^{N+1} f_j = 1. \quad (4.12)$$

Estas propiedades son complementarias a las que habíamos encontrado en el capítulo (2) dedicado a funciones armónicas básicas, extendiéndolas a varias superficies equipotenciales. [21, 22]

4.3. Capacitancia definida en términos de las funciones armónicas base

Al relacionar la carga eléctrica de la ecuación (4.3) con la redifinición del potencial ϕ en la ecuación (4.6), se tiene que

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N+1} C_{ij} \varphi_j, \quad (4.13)$$

con C_{ij} definida usando las funciones f_j

$$C_{ij} \equiv -\varepsilon_0 \oint_{S_i} \nabla f_j(S_i) \cdot \mathbf{n}_i = -\varepsilon_0 \oint_{V_{ST}} \nabla f_i \cdot \nabla f_j \quad (4.14)$$

Con esto se puede construir la matriz

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + \cdots + C_{1N+1}\varphi_{N+1} \\ q_2 &= C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 + \cdots + C_{2N+1}\varphi_{N+1} \\ &\vdots \\ q_{N+1} &= C_{N+11}\varphi_1 + C_{N+12}\varphi_2 + \cdots + C_{N+1N+1}\varphi_{N+1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.3.1. Propiedades de C_{ij}

A partir la definición de C_{ij} dada en (4.14) se obtiene

$$C_{ij} = C_{ji}. \quad (4.16)$$

Al combinar la propiedad de la simetría de C_{ij} de la ecuación (4.16) con la propiedad de la suma de las f_j de la ecuación (4.12), se obtiene que la suma de los elementos de una fila o columna de la matriz C_{ij} son cero,

$$\sum_{j=1}^{N+1} C_{ij} = \sum_{i=1}^{N+1} C_{ij} = 0. \quad (4.17)$$

Otra propiedad que se obtiene de la definición de C_{ij} en ec. (4.14) es $C_{ii} \geq 0$. Para C_{ij} tenemos que apoyarnos en las propiedades de f_j dadas por las ecuaciones (4.8) y (4.9),

$$C_{ii} \geq 0, \quad C_{ij} \leq 0, \quad (i \neq j). \quad (4.18)$$

Al combinar las propiedades de C_{ij} dadas en las ecuaciones (4.16),(4.17) y (4.18), se obtienen más propiedades de C_{ij} (ec. (4.19)),

$$\sum_{i=1}^N C_{iN+1} \leq 0, \quad \sum_{i=1}^N C_{ij} \geq 0 \quad (4.19)$$

$$|C_{jj}| \geq \sum_{i \neq j}^N |C_{ij}|, \quad C_{ii}C_{jj} \geq C_{ij}^2 \quad (4.20)$$

$$|C_{N+1,N+1}| = \sum_{i=1}^N |C_{i,N+1}|, \quad |C_{N+1,N+1}| \geq |C_{i,N+1}|. \quad (4.21)$$

4.3.2. Propiedades de la matriz de capacitancia

Es fácil ver que la matriz es real y simétrica C_{ij} de dimensión $(N + 1) \times (N + 1)$, pero observando las propiedades (4.16) se nota que sus grados efectivos de libertad son $\frac{N(N+1)}{2}$, que equivalen a los grados de libertad de una matriz real y simétrica de dimensión $N \times N$.

La matriz de capacitancia formada con los elementos C_{ij} con $i, j = 1, 2, \dots, N$ (también llamada matriz restringida o matriz- r) es una matriz definida positiva, por lo que sus valores propios son positivos. En cambio, la matriz formada con los elementos C_{ij} con $i, j = 1, 2, \dots, N, N + 1$ es una matriz singular positiva, tiene un valor propio nulo (no degenerado) y sus demás valores propios son positivos[22].

También se tienen expresiones para la energía interna del sistema de conductores mostrado en la figura 4.1,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{N+1} C_{ij} \varphi_j \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{N+1} Q_i \varphi_i, \quad (4.22)$$

así como el teorema de reciprocidad,

$$\sum_{i=1}^{N+1} Q_i \varphi'_i = \sum_{j=1}^{N+1} Q'_j \varphi_j, \quad (4.23)$$

donde $\{Q_i, \varphi_i\}$ y $\{Q'_i, \varphi'_i\}$ son dos grupos de combinaciones de cargas y potenciales para la misma configuración de conductores.

En las definiciones usuales de capacitancia que se usan en las ecuaciones (4.1) y (4.15) no es clara la naturaleza puramente geométrica de los elementos de la matriz de capacitancia. De hecho, es común que en cursos de electromagnetismo se expongan argumentos para demostrar que la matriz de capacitancia depende solo de la geometría [3],[2], algunos emplean métodos más avanzados como el formalismo de Funciones de Green para demostrar este carácter geométrico, y para la realización de algunos cálculos de capacitancia [19, 18, 20], y algunos otros autores hacen diferentes acercamientos para el cálculo de capacitancia en geometrías muy específicas [30, 28, 29].

Sin embargo, en la formulación expuesta en este capítulo (ec. (4.14)) la naturaleza geométrica es directa. Las características geométricas de los coeficientes C_{ij} , así como sus propiedades, bien resultan evidentes como el caso de la simetría (ec. (4.16)) o bien se pueden obtener al combinarlas con las propiedades de las funciones f_j (sec. (4.2.1)), como es el caso de la nulidad de la suma de las filas o de las columnas de la matriz de capacitancia (ec. (4.17)), la positividad de los elementos C_{ij} (ec. (4.18)) y el conjunto de propiedades (ec. (4.19)).

Otras propiedades de la matriz de capacitancia se obtienen de esta formulación, como el hecho de que la matriz- r (formada por los C_{ij} con $i, j = 1, 2, \dots, N$) es una matriz definida positiva, y que la matriz- e (formada con los elementos C_{ij} con $i, j = 1, 2, \dots, N, N + 1$) es una matriz singular positiva. Estas propiedades, combinadas con la energía interna del sistema, (ec. (4.22)), permiten encontrar configuraciones para minimizar la energía interna del sistema descrito en la figura 4.1 [22].

Capacitancia y funciones armónicas base

En este capítulo estudiaremos la capacitancia para dos conductores embebidos. Tomando como base el desarrollo de las funciones armónicas base que se hizo en el capítulo 2 y combinándolo con lo desarrollado para las capacitancias en el capítulo 4 veremos la forma que toma la capacitancia en cada caso estudiado y realizaremos las transformaciones necesarias para escribirla en términos puramente geométricos.

5.1. Capacitancia de dos conductores embebidos

En el capítulo 4 la capacitancia fue definida en relación a las funciones base según la ecuación (4.14), a saber,

$$C_{ij} \equiv -\varepsilon_0 \oint_{S_i} \nabla f_j(S_i) \cdot \mathbf{n}_i.$$

como las funciones armónicas base f_j toman valores constantes en cada superficie, siendo $f_j(S_j) = 1$ y $f_j(S_i) = 0$, entonces ∇f_j es perpendicular a dichas superficies. De hecho se puede probar que[21]

$$\nabla f_j(u_i, v, w) \cdot \mathbf{n}_i \geq 0 \quad \text{para } i \neq j. \quad (5.1)$$

Esto significa que el gradiente $\nabla f_j(u_i, v, w)$ es paralelo al vector \mathbf{n}_i , que es el vector normal a la superficie S_i en cada punto (u_i, v, w) sobre la superficie S_i , por lo que, usando las ecuaciones (2.24), (2.11), y recordando que estamos suponiendo que $f_j(u, v, w)$ depende únicamente de la coordenada u , tenemos que

$$\nabla f_j(u_i, v, w) \cdot \mathbf{n}_i = \|\nabla f_j(u_i, v, w)\| = \left| \frac{1}{h_u(u_i, v, w)} \frac{df_j(u_i)}{du} \right|. \quad (5.2)$$

La ecuación (2.17) nos permite escribir (5.2) como

$$\nabla f_j(u_i, v, w) \cdot \mathbf{n}_i = \left| \frac{1}{h_u(u_i, v, w) [Z(u_j) - Z(u_i)] G(u_i)} \right|. \quad (5.3)$$

Ahora, como todas las funciones de la integral (4.14) deben ser evaluadas en la superficie S_i , que significa evaluarlas en $u = u_i$, y como el vector $\mathbf{n}_i dS$ es ortogonal a los vectores

unitarios \mathbf{e}_v y \mathbf{e}_w asociados a las coordenadas v, w , tenemos que

$$dS = |h_v(u_i, v, w) h_w(u_i, v, w)| dv dw, \quad (5.4)$$

donde hemos tenido en cuenta que dS es definida positiva. Usando la ecuación (2.11) en la ecuación (5.4) encontramos que el diferencial de superficie es

$$dS = |h_u(u_i, v, w) G(u_i) H(v, w)| dv dw. \quad (5.5)$$

Al sustituir las ecuaciones (5.3) y (5.5) en la ecuación (4.14), los coeficientes no diagonales de la capacitancia toman la forma

$$C_{ij} = -\frac{\varepsilon_0}{|Z(u_j) - Z(u_i)|} \oint_{S_i} |H(v, w)| dv dw; \quad \text{con } i, j = 1, 2 \text{ y } i \neq j. \quad (5.6)$$

Se debe recalcar que mientras (4.1) es válida para cualesquiera valores i y j , las ecuaciones (5.3) y (5.1) sólo lo son para $i \neq j$. Para obtener los valores diagonales sólo es necesario usar las propiedades. [21]

$$C_{i1} + C_{i2} = 0; \quad C_{ij} = C_{ji} \Rightarrow C_{ii} = -C_{ij} \quad \text{con } i, j = 1, 2 \text{ y } i \neq j,$$

o explícitamente

$$C_{11} = C_{22} = -C_{12} = -C_{21}. \quad (5.7)$$

Vale la pena recalcar que la ecuación (5.6) también es invariante ante transformaciones gauge del potencial eléctrico (5.3). Por otro lado las ecuaciones (5.6) y (5.7) nos llevan a [21, 22]

$$C_{ii} > 0 \text{ y } C_{ij} < 0 \quad \text{con } i \neq j. \quad (5.8)$$

De (5.7) podemos ver que los valores propios de la matriz de capacitancia (2×2) son 0 y $2C_{11}$. Esto combinado con la ecuación (5.8) verifican el hecho de que la matriz de capacitancia es *singular positiva* [22]. Recordando (4.1) podemos reescribir (5.7) como

$$Q_1 = C_{11}(\phi_1 - \phi_2) = C_{22}(\phi_1 - \phi_2) = -Q_2. \quad (5.9)$$

Cuando S_i corresponde al conductor interno, Q_i es la carga total. Pero si S_i corresponde a la cara interior del conductor externo, Q_i es la carga acumulada en la superficie. Por último, cabe añadir que si el conductor interno es hueco, la superficie de tal cavidad no contribuye a la integral de superficie que hemos usado para calcular la capacitancia [21].

5.2. Capacitancias para simetrías cilíndricas

Cuando las superficies de los conductores corresponden a sistemas coordenados que cumplen la relación (2.11). La capacitancia también toma formas simples. Recordemos que cuando

$$\frac{h_v h_w}{h_u} = 1,$$

las $G(u)$, $H(v, w)$ y $Z(u)$ toman la forma

$$G(u) = H(v, w) = 1 \text{ y } Z(u) = u. \quad (5.10)$$

Usando las ecuaciones de (5.10) podemos escribir la capacitancia como

$$C_{ij} = -\frac{\varepsilon_0}{|u_j - u_i|} \oint_{S_i} dv dw \quad ; \quad i \neq j, \quad (5.11)$$

y para los elementos diagonales

$$C_{ii} = -C_{ij} = \frac{\varepsilon_0}{|u_j - u_i|} \oint_{S_i} dv dw \quad ; \quad \text{con } i, j = 1, 2 \text{ y } i \neq j. \quad (5.12)$$

La ecuación (5.12) recuerda la estructura de la capacitancia de dos placas paralelas con un «área»

$$A_{eff} \equiv \oint_{S_i} dv dw \quad (5.13)$$

y separadas una «distancia» $|u_j - u_i|$, aunque la integral (5.13) no es un área propiamente dicha (por ejemplo, si las coordenadas v y w corresponden a ángulos angular, A_{eff} es adimensional) así como la magnitud $|u_j - u_i|$ no siempre corresponde a una distancia. Este resultado, aunque no es exclusivo de las transformaciones conformes sí se puede obtener usando ese formalismo, ya que las transformaciones conformes vistas a la inversa mapean *curvas paralelas* en líneas *rectas paralelas*.

5.2.1. Dos Cilindros Concéntricos

Consideremos los cilindros concéntricos de la figura 3.1, ya vimos que el sistema de coordenadas polares cilíndricas conformes (ρ, φ, z) , definido por las ecuaciones (3.1) y (3.2) son las que mejor se adaptan para usar la ecuación (5.12). Asumiendo que $z \in [-L/2, L/2]$ con $L \gg a$, es fácil ver que

$$\begin{aligned} C_{ii} &= \frac{\varepsilon_0}{|\rho_j - \rho_i|} \oint_{S_i} d\varphi dz \\ C_{ii} &= \frac{\varepsilon_0}{|\rho_j - \rho_i|} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-L/2}^{L/2} dz \\ C_{ii} &= -C_{ij} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{|\rho_j - \rho_i|} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{|\ln(r_2/r_1)|} \quad ; \quad i, j = 1, 2 \text{ y } i \neq j. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como $\rho = \ln(r)$, $r_2 = b$ y $r_1 = a$, tenemos que

$$C_{ii} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{|\ln b - \ln a|} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{|\ln(b/a)|}, \quad (5.15)$$

que es el resultado usual para esta configuración.

5.2.2. Dos Cilindros Elípticos Confocales

Consideremos dos cilindros de corte transversal elípticos, confocales, de longitud mucho mayor que su distancia focal $d = 2a$ esto es $L \gg 2a$. Tomanos b_1 y b_2 como los semiejes menores y a_1 y a_2 como los semiejes mayores del cilindro interno y externo respectivamente, como se muestra en la figura 3.2. En la sección 3.1.2 vimos las coordenadas cilíndricas elípticas (ξ, η, z) definidas en las ecuaciones (3.4), (3.5) y (3.6) son las que mejor se adaptan

a esta configuración. En este caso los coeficientes de capacitancia (5.12) son

$$\begin{aligned} C_{11} &= -C_{12} = \frac{\varepsilon_0}{|\xi_2 - \xi_1|} \int_0^{2\pi} d\eta \int_{-L/2}^{L/2} dz \\ C_{11} &= -C_{12} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{|\xi_1 - \xi_2|} . \end{aligned} \quad (5.16)$$

Aunque la expresión en (5.16) es simple, resulta más útil expresarla en términos geométricos propios de la configuración. Para esto podemos usar las relaciones (3.16)

$$C_{11} = -C_{12} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\left| \tanh^{-1}\left(\frac{b_j}{a_j}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{b_i}{a_i}\right) \right|} . \quad (5.17)$$

Sin embargo, preferimos usar la relación (3.17) que nos lleva a

$$C_{11} = -C_{12} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\left| \ln\left(\frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - a^2}}{a_2 + \sqrt{a_2^2 - a^2}}\right) \right|} . \quad (5.18)$$

Se nota que el límite $a \rightarrow 0$ lleva a la capacitancia de dos cilindros concéntricos.

5.2.3. Dos cilindros circulares no concéntricos

Los cilindros circulares no concéntricos son otro buen ejemplo donde se cumple la condición (2.31), así que la capacitancia está dada por (5.12)

$$C_{11} = \frac{\varepsilon_0}{|\tau_2 - \tau_1|} \int_0^{2\pi} d\sigma \int_{-L/2}^{L/2} dz \quad (5.19)$$

$$C_{11} = -C_{12} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{|\tau_2 - \tau_1|} \quad (5.20)$$

que es un resultado bastante simple. Sin embargo, aún se debe escribir la expresión $|\tau_2 - \tau_1|$ en términos geométricos conocidos de los cilindros, es decir, el radio de cada cilindro y la separación entre sus centros. Para llevar la ecuación (5.20) a términos geométricos nos apoyaremos en la figura 5.1

El cilindro externo tiene un radio r_2 y su centro se encuentra en el punto $(x_{c_2}, 0)$ del plano cartesiano. El cilindro interno tienen un radio r_1 y su centro se encuentra en el punto $(x_{c_1}, 0)$ del plano cartesiano. Sus centros están separados una distancia D .

Primero recordamos que la ecuación cartesiana para un cilindro cuyo centro se encuentra en el punto $(0, x_c)$ está dada por

$$(x - x_c)^2 + y^2 = r^2. \quad (5.21)$$

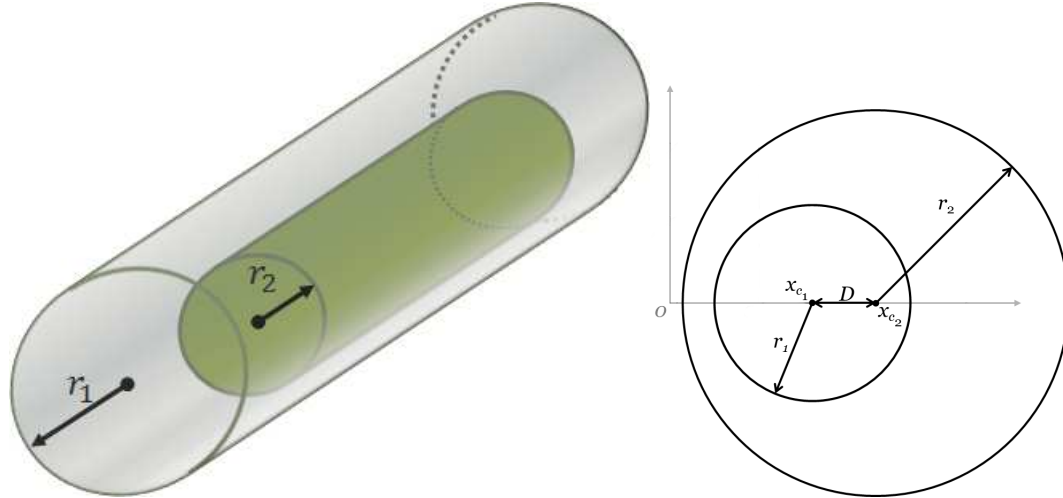


FIGURA 5.1. Dos cilindros de corte transversal elíptico confocales

Al comparar la ecuación 3.24 con la ecuación 5.21 es fácil ver que

$$a = r \sinh \tau \quad (5.22)$$

$$x_c = a \coth \tau$$

$$x_c = r \sinh \tau \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} \quad (5.23)$$

$$x_c = r \cosh \tau.$$

Consideraremos los círculos de la figura (5.1). Se nota que $D = x_{c_2} - x_{c_1}$. Usando la ecuación (5.23) correspondiente a cada círculo, tenemos que

$$r_2 \cosh \tau_2 - r_1 \cosh \tau_1 = D. \quad (5.24)$$

Ahora, al estar los dos cilindros en el mismo sistema de coordenadas bipolares cilíndricas, el foco a es el mismo para ambos cilindros, por lo que, usando la ecuación 5.22, tenemos que

$$r_1 \sinh \tau_1 - r_2 \sinh \tau_2 = 0. \quad (5.25)$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación 5.24 obtenemos

$$r_2^2 \cosh^2 \tau_2 + r_1^2 \cosh^2 \tau_1 - 2r_1 r_2 \cosh \tau_1 \cosh \tau_2 = D^2.$$

Empleando la identidad hiperbólica $\cosh^2 \tau - \sinh^2 \tau = 1$, tenemos que

$$r_2^2 + r_1^2 + r_2^2 \sinh^2 \tau_2 + r_1^2 \sinh^2 \tau_1 - 2r_1 r_2 \cosh \tau_1 \cosh \tau_2 = D^2.$$

Empleando la relación de la ecuación (5.22) y agrupando términos, obtenemos

$$r_2^2 + r_1^2 + 2r_1 r_2 \underbrace{(\sinh \tau_2 \sinh \tau_1 - \cosh \tau_1 \cosh \tau_2)}_{-\cosh(\tau_2 - \tau_1)} = D^2,$$

es decir

$$\cosh(\tau_2 - \tau_1) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - D^2}{2r_1 r_2}.$$

Como $(\tau_2 - \tau_1) > 0$ la función $\cosh(\tau_2 - \tau_1)$ es positiva

$$|\tau_2 - \tau_1| = \cosh^{-1} \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - D^2}{2r_1r_2} \right), \quad (5.26)$$

por lo que la ecuación (5.20) se puede reescribir en términos propios de la geometría como

$$C_{11} = -C_{12} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\cosh^{-1} \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - D^2}{2r_1r_2} \right)}. \quad (5.27)$$

Los dos cilindros concéntricos se obtienen para el caso $D = 0$, usando la relación

$$\cosh^{-1}(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right); x \geq 1, \quad (5.28)$$

y teniendo en cuenta que $(r_1^2 + r_2^2) / (2r_1r_2) > 1$, y asumiendo que $r_2 > r_1$, tenemos que, gracias a la ecuación (5.28) podemos escribir (5.26) como

$$\begin{aligned} \cosh^{-1} \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2r_1r_2} \right) &= \ln \left[\left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2r_1r_2} \right) + \sqrt{\left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2r_1r_2} \right)^2 - 1} \right] \\ \cosh^{-1} \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2r_1r_2} \right) &= \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad \text{for } r_2 > r_1. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Esto demuestra que la relación (5.29) toma la forma de (5.15) cuando $D = 0$.

5.3. Capacitancias para Sistemas Rotacionales

La expresión (5.6) facilita enormemente el cálculo de las capacitancias para conductores con Simetría Axial. Consideremos las tres geometrías estudiadas en el capítulo 2.

5.3.1. Dos Esferas Concéntricas

La capacitancia de dos esferas concéntricas es un resultado bien conocido. Sin embargo, con la (5.6) es muchísimo más fácil, si tenemos en cuenta las ecuaciones (3.37) y (3.38) en ec. (5.6) y además suponemos que $r_2 > r_1$ obtenemos

$$\begin{aligned} C_{12} &= -\frac{\epsilon_0}{|Z(r_2) - Z(r_1)|} \oint_{S_1} |H(\theta, \varphi)| d\theta d\varphi = -\frac{\epsilon_0}{\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right|} \oint_{S_1} |\sin \theta| d\theta d\varphi, \\ C_{12} &= -\frac{\epsilon_0}{\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right|} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{4\pi\epsilon_0 ab}{(a-b)}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que $C_{21} = -C_{12}$, por lo que el coeficiente de la capacitancia, es el esperado

$$C_{ii} = -C_{ij} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{a-b}. \quad (5.30)$$

de los factores propios de la geometría, así que los coeficientes de capacitancia para un cascarón esferoidal prolato son

$$C_{ii} = -C_{ij} = \frac{4\pi a \varepsilon_0}{\left| \ln \left(\frac{(a+a_i)\sqrt{a_j^2-a^2}}{(a+a_j)\sqrt{a_i^2-a^2}} \right) \right|} \quad (5.32)$$

La ecuación (5.32) no está definida en $a = 0$, pero el límite $a \rightarrow 0$ existe y se reduce al caso de las dos esferas concéntricas. Para hallar el límite debemos usar la regla de L'Hopital. Suponiendo que $a_j > a_i$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{4\pi \varepsilon_0}{C_{ii}} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln \left[(a+a_i)\sqrt{a_j^2-a^2} \right] - \ln \left[(a+a_j)\sqrt{a_i^2-a^2} \right]}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\sqrt{a_j^2-a^2} - \frac{(a+a_i)a}{\sqrt{a_j^2-a^2}} \right)}{(a+a_i)\sqrt{a_j^2-a^2}} - \frac{\left(\sqrt{a_i^2-a^2} - \frac{(a+a_j)a}{\sqrt{a_i^2-a^2}} \right)}{(a+a_j)\sqrt{a_i^2-a^2}} \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{(a_i-a)(a_j^2-2a^2-a_i a) - (a_j-a)(a_i^2-2a^2-a_j a)}{(a_i^2-a^2)(a_j^2-a^2)} \right] \\ \lim_{a \rightarrow 0} \frac{4\pi \varepsilon_0}{C_{ii}} &= \frac{(a_j-a_i)}{a_i a_j}, \end{aligned}$$

que es la relación geométrica que se encuentra en (5.30) por lo que el límite converge correctamente.

5.3.3. Esferoides Oblatos Confocales

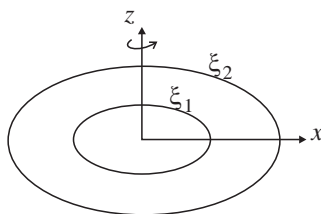


FIGURA 5.4. Dos esferoides oblatos confocales.

Para determinar la capacitancia de los cascarones oblatos confocales usamos las ecuaciones (3.66), (3.67) y (5.6), obteniendo

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \frac{-\varepsilon_0}{\left| \frac{1}{a} \sin^{-1}(\tanh \xi_j) - \frac{1}{a} \sin^{-1}(\tanh \xi_i) \right|} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \eta \, d\eta, \\ C_{ii} &= -C_{ij} = \frac{4\pi a \varepsilon_0}{\left| \sin^{-1}(\tanh \xi_j) - \sin^{-1}(\tanh \xi_i) \right|} \quad ; \quad i, j = 1, 2 \quad \text{and} \quad i \neq j \quad (5.33) \end{aligned}$$

este procedimiento comparado con el usado en [39], es considerablemente simple. Para escribir (5.33) en términos de factores geométricos debemos usar las propiedades geométricas

de un elipsoide oblató de revolución,

$$\frac{z^2}{b_i^2} + \frac{x^2 + y^2}{a_i^2} = 1. \quad (5.34)$$

Comparando las ecuaciones (5.34), (3.63) y (3.13), tenemos que

$$\begin{aligned} a^2 \sinh^2 \xi_i &= b_i^2; \quad a^2 \cosh^2 \xi_i = a_i^2 \Rightarrow \tanh \xi_i = \frac{b_i}{a_i} = \frac{\sqrt{a_i^2 - a^2}}{a_i} \\ \tanh \xi_i &= \sqrt{1 - \frac{a^2}{a_i^2}} = \sqrt{1 - \epsilon_i^2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

En la última expresión usamos el hecho que $a/a_i = \epsilon_i$, donde ϵ_i representa la excentricidad de la elipse asociada a la coordenada ξ_i . Al reemplazar la ecuación (5.35) en (5.33), podemos obtener la capacitancia en términos propios de la geometría

$$C_{ii} = \frac{4\pi a \epsilon_0}{\left| \sin^{-1} \left(\sqrt{1 - \epsilon_j^2} \right) - \sin^{-1} \left(\sqrt{1 - \epsilon_i^2} \right) \right|}$$

la identidad $\cos^{-1} x = \sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$; $0 \leq x \leq 1$ nos da una versión aún más simple

$$C_{ii} = \frac{4\pi a \epsilon_0}{\left| \cos^{-1} \epsilon_j - \cos^{-1} \epsilon_i \right|} \quad (5.36)$$

Para estudiar el límite cuando $a \rightarrow 0$ empleamos la relación $\epsilon_i = a/a_i$ y recurrimos a la expansión en serie de Taylor de $(\cos^{-1} \epsilon_j - \cos^{-1} \epsilon_i)$ alrededor de cero, a saber,

$$\left(\cos^{-1} \epsilon_j - \cos^{-1} \epsilon_i \right) \approx a \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_j} \right) + \frac{1}{6} a^3 \left(\frac{1}{a_i^3} - \frac{1}{a_j^3} \right) + \frac{3}{40} a^5 \left(\frac{1}{a_i^5} - \frac{1}{a_j^5} \right) + O(a^7). \quad (5.37)$$

Por lo que en el límite tenemos que se recupera la relación de las esferas concéntricas.

Conclusiones

- Los problemas de la ecuación de Laplace en una región entre dos fronteras cerradas y con condiciones de Dirichlet donde la frontera asociada a la condición de Dirichlet se pueda asociar a una coordenada de un sistema de coordenadas ortogonales y esta sea separable en la solución se pueden solucionar por el método planteado en este trabajo de forma independiente de la naturaleza física del problema.
- Cualquier problema de simetría cilíndrica asociado con la ecuación de Laplace y condiciones de Dirichlet cuya geometría pueda asociarse a una transformación conforme se pueden solucionar de forma simple y directa con el método desarrollado en el presente trabajo.
- Problemas de simetría cilíndrica más complejos que los abordados en este trabajo: Cilindros concéntricos de corte transversal elíptico y no concéntricos, pueden abordarse con la misma metodología.
- El formalismo de las funciones armónicas básicas se presenta como una metodología para resolver problemas asociados a curvas equipotenciales de forma mucho más simple.
- Las propiedades de las funciones armónicas básicas, como se vio en el caso de la capacitancia, facilitan el cálculo, ahorran muchos pasos intermedios e incluso permiten encontrar nuevas propiedades, al aplicarlas a cálculo de observables físicos.
- El estudio de la naturaleza geométrica de la capacitancia permite encontrar las propiedades de la matriz de capacitancia de una forma mucho más simple que con otros formalismos, abriendo posibilidades para implementar procesos que permitan optimizar, minimizar o maximizar las propiedades requeridas en la configuración de múltiples conductores.
- La combinación del formalismo de las funciones armónicas básicas y la formulación geométrica de la capacitancia nos permitió resolver el problema de dos conductores embebidos de una forma general y mucho más simple que la que requieren los métodos tradicionales.
- La capacitancia de sistemas de geometría cilíndrica guarda similitudes con la de los sistemas de placas paralelas. Para los sistemas provenientes de transformaciones conformes esto equivale a que la transformación conforme lleva el problema cilíndrico a un problema de placas paralelas.

Bibliografía

- [1] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists 6th Ed.* Elsevier Academic Press, 2005.
- [2] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall, N. J, 3rd edition, 1999.
- [3] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Jhon Wiley & Sons,, 3rd edition, 1998.
- [4] W. Taussig Scott, *The Physics of Electricity and Magnetism* (John Wiley & Sons, New York, 1966), 2nd ed.; Gaylord P. Harnwell, *Principles of Electricity and Electromagnetism* (McGraw-Hill, New York, 1949); Leigh Page and Norman I. Adams Jr., *Principles of Electricity* (D. Van Nostrand, New Jersey, 1958), 3rd ed.; A. N. Matveev, *Electricity and Magnetism* (Mir, Moscow, 1988).
- [5] Xue, M., Peng, S., Wang, F., Ou, J., Li, C., and Li, W. *Linear relation between surface roughness and work function of light alloys*. Journal of Alloys and Compounds, 692, 903-907.2017
- [6] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill, Part I, 22+998+40 pp.; Part II, 18+979 pp. (1953)
- [7] Eisenhart L.P., *Separable Systems in Euclidean 3-Space*, Phys. Rev. 45, 427 – Published 15 March 1934
- [8] R. M. Redheffer, *Separation of Laplace Equation*, Tech. Report No. 68, Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology, p. 60. 1948
- [9] P. Moon and D. E. Spencer, *Separability in a Class Of Coordinate Systems* Proc. Amer. Math. Soc. vol. 3 (1952) p. 635.
- [10] P. Moon and D. E. Spencer, *Theorems on separability in Riemannian n-space*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 3 (1952) p. 635.
- [11] P. Moon and D. E. Spencer, *Recent Investigations of the Separations of Laplace's Equation*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 4, No. 2 (Apr., 1953), pp. 302-307
- [12] J.T. Chen, H.C. Shieh, Y.T. Lee , J.W. Lee, *Bipolar coordinates, image method and the method of fundamental solutions for Green's functions of Laplace problems containing circular boundaries*. Engineering Analysis with Boundary Elements **35** (2011) 236-243.

-
- [13] J.-T. Chen, M.-H. Tsai, C.-S. Liu, *Conformal Mapping and Bipolar Coordinate for Eccentric Laplace Problems*. Comput. Appl. Eng. Educ. **17** (2009) 314-322. DOI: 10.1002/cae.20208
- [14] J.-T. Chen, H.-C. Shieh, Y.-T. Lee, J.-W. Lee *Image solutions for boundary value problems without sources*. Applied Mathematics and Computation **216** (2010) 1453–1468
- [15] Ghassemi, Hassan, Saeid Panahi, and Ahmad Reza Kohansal. *Solving the Laplace's Equation by the FDM and BEM Using Mixed Boundary Conditions*. American Journal of Applied Mathematics and Statistics, 4.2: 37-42. 2016.
- [16] Panahi, Saeid, and Hassan Ghassemi. Comparison Solutions of the Laplace's Equation by the FDM and BEM with Simple Boundary Conditions. *International Journal of Multidisciplinary Sciencies and Engineering*, Vol. 7, No. 3, March 2016.
- [17] J.-T. Chen, W.-C. Shen. *Null-Field Approach for Laplace Problems with Circular Boundaries Using Degenerate Kernels*. Numer. Methods Partial Differential Eq. **25** (2009) pages 63–86. DOI: 10.1002/num.20332
- [18] V. Lorenzo and B. Carrascal. *Green's functions and symmetry of the coefficients of a capacitance matrix*. Am. J. Phys., **56** (565) (1988).
- [19] M. Uehara. *Green's functions and coefficients of capacitance*. Am. J. Phys., **54** (184-185) (1986).
- [20] C. Donolato. *Approximate evaluation of capacitances by means of green's reciprocity theorem*. Am. J. Phys., **64** (1049-1054) (1996).
- [21] William J. Herrera, Rodolfo A. Diaz. *The geometrical nature and some properties of the capacitance coefficients based on Laplace's equation*. Am. J. Phys. **76** (1) (2008) pages 55-59.
- [22] Rodolfo A. Diaz, William J. Herrera. *The positivity and other properties of the matrix of capacitance: Physical and mathematical implications*. J. Electrostat. **69** (2011) 587-595.
- [23] Shui-Ping Luo and Zheng-Fan Li, *An Efficient Method for Computing the Capacitance Matrix of Multiconductor Interconnects in Very High-speed Integrated Circuit Systems*, IEEE Transactions on microwave theory and techniques, Vol. 43, #1. (JAN. 1995). Pages 225-227.
- [24] C. Stephenson, D. Lyon & A. Hübler. *Topological properties of a self-assembled electrical network via ab initio calculation.*, Sci. Rep. 7, 41621; doi: 10.1038/srep41621 (2017).
- [25] V. A. Erma, *Perturbation Approach to the Electrostatic Problem for Irregularly Shaped Conductors*, J. Math. Phys. 4 (1963) 1517-1526.
- [26] W. R. Smythe, *Charged Spheroid in Cylinder*, J. Math. Phys. 4 (1963) 833-837.
- [27] G. J. Sloggett, N. G. Barton, and S. J. Spencer. *Fringing fields in disc capacitors*. J. Phys. A: Math. Gen., **19** 2725–2736, 1986.
- [28] E. Bodegom and P. T. Leung, *A surprising twist to a simple capacitor problem*, Eur. J. Phys. **14** (1993) 57-58.

-
- [29] G. P. Tong, *Electrostatics of two conducting spheres intersecting at angles*. Eur. J. Phys., **17** 244–249, 1996.
- [30] Y. Cui, *A simple and convenient calculation of the capacitance for an isolated conductor plate*, Eur. J. Phys. **17** (1996) 363–364.
- [31] H. J. Wintle, *A note on capacitors with wide electrode separation*. J. Phys. A: Math. Gen., **25**, 1992.
- [32] H. J. Wintle, *The capacitance of the cube and square plate by random walk methods*, Journal Electrostat. **62** (2004) 51–62.
- [33] Y. Du and Q. B. Zhou, *Capacitance matrix of screened/insulated single-core cables of finite length*. IEE Proc.-Sci. Meas. Technol., **5** (152), September 2005.
- [34] D. Palaniappan, *Classical image treatment of a geometry composed of a circular conductor partially merged in a dielectric cylinder and related problems in electrostatics*. J. Phys. A: Math. Gen., **38** 6253–6270, 2005.
- [35] Y. Xiang, *Further study on electrostatic capacitance of an inclined plate capacitor*. Journal Electrostat., **66** 366–368, 2008.
- [36] S. Ghosh and A. Chakrabarty, *Estimation of capacitance of different conducting bodies by the method of rectangular subareas*. J. Electrostat., **66** 142–146, 2008.
- [37] O. D. Momoh, M. N. O. Sadiku, and C. M. Akujubi, *Analytical and numerical computation of prolate spheroidal shell capacitance*, Microwave and Optical Technology Letters **51** (10) (2009), 2361–2365.
- [38] O. D. Momoh, M. N. O. Sadiku, and C. M. Akujubi, *Numerical method of solving singularity problems on potential computation in spheroidal systems*. IEEE Transactions on Magnetics, **47** (5) 1454–1457, May 2011.
- [39] O. D. Momoh, M. N. O. Sadiku, and C. M. Akujubi, *Numerical computation of capacitance of oblate spheroidal conducting shells*. PIERS Proceedings, 2010.
- [40] M. A. Nechaev, *Polarizability and capacitance of a conducting ellipsoid*. Russian Physics Journal, **52** (10) 1098–1110, 2009.
- [41] John Lekner, *Analytical expression for the electric field enhancement between two closely-spaced conducting spheres*. J. Electrostat. **68** (2010) 299–304.
- [42] John Lekner, *Capacitance coefficients of two spheres*. J. Electrostat. **69** #1 (2011) 11–14
- [43] Chester L. Dawes, *Capacitance and Potential Gradients of Eccentric Cylindrical Condensers*. Physics (Updated name: Journal of Applied Physics) **4**, 81 (1933); doi: 10.1063/1.1745162.
- [44] B. N. Das, S. Das, and Debashis Parida, *Capacitance of Transmission Line of Parallel Cylinders with Variable Radial Width*. IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, **40** (4), (1998). Pages 325–330.
- [45] R. Cade, *Approximate capacities of some toroidal condensers*, J. Phys. A: Math. Gen. **13** (1980) 333–346.

-
- [46] Immanuel Estermann, *Methods of Experimental Physics: Classical Methods* (Academic Press, London New York, 1959), Vol 1 - Page 436.
- [47] W. P. Calixto, et. al. *Electromagnetic Problems Solving by Conformal Mapping: A Mathematical Operator for Optimization*. *Mathematical Problems in Engineering* **2010**, Article ID 742039, 19 pages. Doi:10.1155/2010/742039
- [48] Mayckol J Morales, Rodolfo A. Diaz, William J. Herrera. *Solutions of Laplace's equation with simple boundary*. *J. Electrostat.* **69** (2015) 31-45.
- [49] J. Jain, C.-K. Koh, and V. Balakrishnan, *Exact and Numerically Stable Closed-Form Expressions for Potential Coefficients of Rectangular Conductors*. *IEEE Transactions on circuits and systems—II: Express Briefs*, **53** (6), (2006). DOI: 10.1109/TC-SII.2006.870548