CONTROL DEL HELICÓPTERO 2D USANDO MÉTODOS DE CONTROL ROBUSTO H_∞

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

EDILBERTO CARLOS VIVAS GONZÁLEZ

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

Bogotá, Febrero de 2011

CONTROL DEL HELICÓPTERO 2D USANDO MÉTODOS DE CONTROL ROBUSTO H_∞

EDILBERTO CARLOS VIVAS GONZÁLEZ

Director: Prof. LEONARDO ENRIQUE BERMEO CLAVIJO

Trabajo presentado como requisito parcial para optar por el título de Máster en Automatización Industrial

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

Bogotá, Febrero de 2011

A mis padres y mi hermana que con su amor,
cariño y valores han hecho de mi lo que soy,

A mi esposa Andrea quien llena llena mi vida de amor y felicidad

A toda mi familia por su apoyo Incondicional

A mis hijos, que son el motivo de tratar de ser cada día mejor

Agradecimientos

Al profesor Leonardo Enrique Bermeo Clavijo, por dirigir el presente trabajo.

A los jurados, por sus sugerencias y correcciones.

A mi esposa Andrea por haberme acompañado en este largo proceso.

Al Ingeniero Mauricio Vladimir Peña por sus aportes y amistad.

Al Ingeniero Diego Renza Torres, un gran amigo.

A mi Madre, quién siempre me bendice con sus oraciones.

Índice general

Resumen **1**

Abstract **2**

1. INTRODUCCIÓN **3**

2. ESTADO DEL ARTE Y MARCO TEORICO **5**

2.1. Estado del Arte 5
2.2. Control Robusto 6
2.3. Teorema de Baja Ganancia 8
2.4. Diseño de controladores 9
2.4.1. Configuración general de control con incertidumbre 9
2.5. El valor singular estructurado 11
2.5.1. Definición 11
2.6. Estabilidad y desempeño 12
2.6.1. Estabilidad robusta (RS) con incertidumbre estructurada . . . 12
2.6.2. Desempeño robusto (RP) con incertidumbre estructurada . . . 12
2.6.3. Condiciones para NP, RS y RP 13
2.7. Control H_∞ 13
2.7.1. Control óptimo H_∞ 14
2.7.2. Algoritmo general H_∞ 14
2.8. Identificación de Sistemas 15
2.8.1. Concepto de identificación de sistemas 15
2.8.2. Proceso de identificación 15
2.8.3. Fuentes de error en un proceso de identificación 18

2.8.4. Identificación de sistemas lineales 18

3. MODELO DEL HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD 22
3.1. Introducción 22
3.2. Cinemática 22
3.3. Energía cinética y potencial 25
3.4. Ecuaciones no lineales del movimiento 27
3.5. Variables de estado 29
3.6. Puntos de equilibrio 31
3.7. Ecuaciones de Estado Lineales 32
3.8. Sistema en Funciones de Transferencia 34
3.9. Análisis de la ubicación de los polos al variar el punto de operación en θ 34
3.9.1. Modelo lineal alrededor de $\theta = 0$ 35
3.9.2. Modelo lineal alrededor de $\theta = -30^o$ 36
3.9.3. Modelo lineal alrededor de $\theta = 40^o$ 37
3.10. Controlabilidad 38
3.11. Observabilidad 39
3.12. Conclusiones 40

4. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DEL HELICÓPTERO MEDIANTE PRUEBAS EN LAZO ABIERTO 41
4.1. Introducción 41
4.2. Ecuaciones lineales del movimiento 41
4.3. Montaje experimental 43
4.4. Identificación de l_{mc} y h 44
4.5. Identificación del Momento de inercia J_{eqp} y coeficiente de fricción B_p 46
4.6. Identificación del Momento de inercia J_{eqy} y coeficiente de fricción B_y 49
4.7. Identificación de K_{pp} y K_{py} 51
4.8. Identificacion de K_{yy} y K_{yp} 53
4.9. Valores de parámetros obtenidos 56
4.10. Conclusiones 56

5. IDENTIFICACIÓN DEL HELICÓPTERO USANDO MÉTODO DE PREDICCIÓN DE ERROR 58
5.1. Introducción 58
5.2. Consideraciones para el proceso de identificación en lazo cerrado . . . 59
5.3. Control LQR con efecto integral para identificación 60
5.4. Control basado en observador 62
5.5. Modelos lineales obtenidos 80

5.6. Comparación entre el modelo obtenido por identificación de parámetros y el obtenido utilizando algoritmo PEM 82
5.7. Conclusiones 84

6. DISEÑO DEL CONTROL ROBUSTO H_∞ DEL HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD 85
6.1. Introducción 85
6.2. Modelado de Incertidumbre 87
6.3. Esquema del Control Robusto H_∞ de dos grados de libertad 90
6.3.1. Pesos de Sensibilidad 91
6.3.2. Pesos de Sensibilidad Complementaria 92
6.3.3. Pesos de las Señales de Control 93
6.3.4. Pesos de perturbación 95
6.3.5. Modelos de referencia $ITAE$ 96
6.4. Algoritmo de Control H_∞ 97
6.5. M_u Análisis 103
6.5.1. Estabilidad Robusta 103
6.5.2. Desempeño Robusto 104
6.6. Resultados experimentales 106
6.7. Conclusiones 111

7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO 113
7.1. Trabajo Futuro 115

Índice de tablas

2.1. Identificación de modelos lineales en caja negra 21

3.1. Parámetros 30

4.1. Comparación con los datos proporcionados por Quanser 56

Índice de figuras

2.1. lazo $N - \triangle$ para análisis de estabilidad 8
2.2. Planta Generalizada 9
2.3. Configuración $M - \Delta$ 10
2.4. Configuración $N - \Delta$ 11
2.5. Proceso de identificación de sistemas 16

3.1. Dinámica del Helicóptero de 2DOF 23
3.2. Cinemática del Helicóptero de 2DOF 23
3.3. Movimiento de los polos en $P_{11}(s)$ y $P_{12}(s)$ al variar θ 35
3.4. Movimiento de los polos en $P_{21}(s)$ y $P_{22}(s)$ al variar θ 35
3.5. Respuesta temporal alrededor de $\theta = 0$ grados 36
3.6. Respuesta temporal alrededor de $\theta = -30^o$ 37
3.7. Respuesta temporal alrededor de $\theta = 40^o$ 38

4.1. Montaje experimental 44
4.2. Sistema con el centro de masa debajo del pivote al ubicar m_s 45
4.3. Centro de masa del sistema al desplazar m_s a la distancia x 46
4.4. Respuesta del sistema con motores apagados y condición inicial de $4,85^o$ 48
4.5. Diagrama de Simulink para la ecuación no lineal en Pitch 49
4.6. Diagrama de simulink usado para derivar la posición en Yaw ante el impacto 50
4.7. Comportamiento real y simulado de la respuesta del sistema ante un impulso 50
4.8. Torque en Pitch contra Voltaje en Pitch 52

4.9. Torque en Pitch contra Voltaje en Yaw 53
4.10. Velocidad en Yaw contra Voltaje en Yaw 54
4.11. Velocidad en Yaw contra voltaje en Pitch 55

5.1. Bode de la planta en lazo abierto para $\bar{\theta} = 0$ 62
5.2. Diagrama de bloques de controlador basado en observador 63
5.3. Diagrama de bloques del control basado en observador visto como controlador de 2DOF 64
5.4. Ajuste del modelo a los datos ($\theta = 0^o$) y ($\theta = 10^o$) 67
5.5. Ajuste del modelo a los datos ($\theta = 20^o$) y ($\theta = 30^o$) 68
5.6. Ajuste del modelo a los datos ($\theta = -10^o$) y ($\theta = -20^o$) 69
5.7. Ajuste del modelo a los datos ($\theta = -30^o$) 70
5.8. Análisis residual alrededor de cero grados 71
5.9. Referencia Vs Salida 72
5.10. Referencia Vs Salida 73
5.11. Referencia Vs Salida 74
5.12. Salidas Vs Señales de Control 75
5.13. Valores singulares del modelo reducido Vs modelo de alto orden . . . 76
5.14. Valores singulares del modelo reducido Vs modelo de alto orden . . . 77
5.15. Valores singulares del modelo reducido Vs modelo de alto orden . . . 78
5.16. Respuesta temporal del Modelo de orden alto Vs Modelo reducido . . 78
5.17. Respuesta temporal del Modelo de orden alto Vs Modelo reducido . . 79
5.18. Respuesta temporal del Modelo de orden alto Vs Modelo reducido . . 80
5.19. Comparación alrededor de $\theta = 0^o$ de $P_{11}(s)$ 83
5.20. Comparación alrededor de $\theta = 0^o$ de $P_{22}(s)$ 83

6.1. Incertidumbre multiplicativa a la salida 87
6.2. Respuesta en frecuencia de $\ell_{m\theta}(w)$ y $W_1(s)$ 89
6.3. Respuesta en frecuencia de $\ell_{m\psi}(w)$ y $W_2(s)$ 89
6.4. Control de 2DOF 90
6.5. Planta Generalizada 91
6.6. Pesos de Sensibilidad y Sensibilidad Complementaria 93
6.7. Pesos de las Señales de Control 95
6.8. Pesos de Perturbación 96
6.9. Respuesta temporal de las funciones $ITAE$ 97
6.10. Respuesta a referencia escalón en Pitch y Yaw 100
6.11. Rechazo de perturbaciones en Pitch 101
6.12. Rechazo de perturbaciones en Yaw 101
6.13. Magnitud de las Señales de Control 102
6.14. Diagrama de Simulink del modelo No Lineal 102
6.15. $M - \triangle$ 103
6.16. $N - \triangle$ 104

6.17. M_u plot de los márgenes de estabilidad robusta (escala invertida) . . 104
6.18. Sistema aumentado para el análisis de Desempeño Robusto 105
6.19. M_u plot de los márgenes de Desempeño Robusto 105
6.20. Diagrama de Simulink del 2DOF del sistema real 106
6.21. Respuesta temporal en Pitch alrededor de $\bar{\theta} = 0$ grados 107
6.22. Respuesta temporal en Yaw alrededor de $\bar{\theta} = 0$ grados 107
6.23. Rechazo a perturbación en Pitch alrededor de $\bar{\theta} = 0$ grados 108
6.24. Rechazo a perturbación en Yaw alrededor de $\bar{\theta} = 0$ grados 108
6.25. Respuesta temporal en Pitch alrededor de $\bar{\theta} = 30$ grados 109
6.26. Respuesta temporal en Yaw alrededor de $\bar{\theta} = 30$ grados 109
6.27. Rechazo a perturbación en Pitch alrededor de $\bar{\theta} = 30$ grados 110
6.28. Rechazo a perturbación en Yaw alrededor de $\bar{\theta} = 30$ grados 110

Resumen

El presente trabajo describe la metodología para hallar el modelo matemático, el diseño y la implementación de un controlador para un helicóptero con 2 grados de libertad cuyo modelo resultante es no lineal e inestable en lazo abierto. El modelo lineal resulta ser función del punto de operación. Los parámetros físicos del sistema fueron hallados de forma experimental y con base en estos se diseñaron controles estabilizantes que permitieron la obtención de modelos lineales en diferentes puntos de operación mediante el uso de técnicas de identificación en caja negra. A partir de los modelos lineales obtenidos, se diseñó e implementó un Control Robusto H_∞ de 2 grados de libertad usando herramientas de tiempo real y MATLAB. El control logró estabilidad robusta en diferentes puntos de operación, cumpliendo con características de desempeño deseadas.

Abstract

This work describes the methodology to find the mathematical model, design and implementation of a controller for a helicopter with 2 degrees of freedom whose resulting model is nonlinear and open loop unstable. The resulting linear model of this system is a function of operating point. The physical parameters of the system were found experimentally. Based on these parameters, stabilizing controller were designed, which allow to obtain linear models for different operating points by using black box identification techniques. From the linear models obtained, a H_∞ Robust Control of 2 degrees of freedom was designed. Finaly the controller was implemented by using real-time tools and MATLAB. The controller system achieved robust stability and performance in different operating points acording with specifications.

CAPÍTULO *1*

INTRODUCCIÓN

En las aplicaciones de control de procesos químicos, robótica, control de aeronaves entre otras, se requieren controlar diferentes variables físicas como son temperatura, presión , flujo, nivel, etc para llevar a cabo un determinado fin. Se hace uso del concepto de realimentación que consiste en comparar el valor deseado de una variable física frente al valor real y en base al error, ejecutar determinada acción de control. En sistemas químicos por ejemplo, es necesario hacer que las temperaturas o flujos permanezcan en los niveles dados a pesar de la influencia de señales externas no medibles. En el diseño de los sistemas de control realimentado es necesario encontrar un controlador para mantener o conseguir la estabilidad y atenuar las perturbaciones que son señales que tienden a afectar adversamente el valor de la señal o variable de salida.

Siempre van a existir incertidumbres en el comportamiento de la planta, es decir que la salida ante una entrada de control produce una respuesta que no está completamente determinada; eso se debe fundamentalmente a dos razones: primero, la dinámica de la planta no se conoce completamente. Segundo, perturbaciones desconocidas pueden influir en el comportamiento del sistema; entonces, la salida no es sólo la respuesta ante la señal de control, sino también a la perturbación.

La Universidad Nacional adquirió una planta de laboratorio que consiste de un helicóptero de 2 grados de libertad para ser utilizado en las prácticas de laboratorio. La planta es fuertemente no lineal, inestable en lazo abierto, hay incertidumbre en el valor de los parámetros y el modelo lineal obtenido es función del punto de operación, por lo tanto, el problema de usar técnicas convencionales de control, es que no garantizan la estabilidad del sistema y buen desempeño en todas las regiones de operación. El control robusto H_∞ consiste en mantener la estabilidad de un sistema ante un conjunto de posibles señales de perturbación, variación de parámetros y dinámicas no modeladas; de tal forma que se cumpla con ciertos criterios de desempeño. En esta tesis de grado se realizó el modelamiento matemático, identificación y control robusto del helicóptero de dos grados de libertad.

El documento tiene una parte de modelamiento, otra de identificación y finalmente la del diseño del sistema de control. En el capítulo 2 se muestran los conceptos teóricos mas importantes para realizar el proceso de identificación y teoría de control robusto H_∞.

En el capítulo 3 se obtiene el modelo del helicóptero usando las ecuaciones del movimiento de Lagrange. El modelo resultante es no lineal, entonces se halla un modelo lineal el cual es función del punto de equilibrio en Pitch (ángulo θ). Al final del capítulo se analizan la dinámica del modelo lineal obtenido.

En el capítulo 4 se obtienen de forma experimental los parámetros físicos del helicóptero como son las fricciones, las inercias, las constantes de voltaje a torque, etc. Estimar los parámetros físicos es necesario para realizar el diseño de los controladores estabilizantes para la identificación en lazo cerrado.

En el capítulo 5 se hacen las consideraciones necesarias para llevar a cabo un adecuado proceso de identificación en lazo cerrado y se obtienen modelos lineales alrededor de diferentes puntos de equilibrio usando el método de predicción de error. Al final del capítulo se muestran los modelos lineales obtenidos.

En el capítulo 6 se hace el modelado de incertidumbre y se definen los pesos de desempeño e incertidumbre. Se lleva el sistema a la forma de configuración general de control para realizar el diseño del controlador H_∞. Seguidamente se verifica la estabilidad robusta y desempeño robusto por medio de M_u análisis. Finalmente se muestran los resultados experimentales, comprobando que el controlador genera estabilidad robusta y desempeño robusto en diferentes puntos de operación.

CAPÍTULO 2

ESTADO DEL ARTE Y MARCO TEORICO

2.1. Estado del Arte

El control de helicópteros autónomos ha sido muy utilizado en el control clásico [8] [30] [18] [7] [6] [5]. Dentro de las diferentes técnicas de control basadas en modelos, es común encontrar trabajos donde los complejos modelos no lineales de helicópteros son linealizados alrededor de un punto de operación. Sin embargo, ante la presencia de perturbaciones considerables o trayectorias agresivas, las estrategias lineales no son suficientes [26]. Diferentes esquemas de control son aplicados como el enfoque orientado a la síntesis de un control adaptativo por realimentación de la salida, que requiere la estimación de estados [25] y [16] y por tanto se requiere conocimiento de la planta.

Por su parte, la técnica usada en [10] se olvida de las anteriores restricciones adoptando un enfoque de realimentación directa de la salida que no se basa en la estimación del estado. El diseño emplea el conocimiento del orden relativo, en paralelo con una red neuronal de base radial que se ajusta en línea para compensar los errores de modelamiento.

Otras técnicas de control son empleadas para control de seguimiento de un helicóptero (ver, e.g. [17]- [12]). Un método de control difuso basado en modelo [29],

y un algoritmo de control no lineal con saturación anidada fueron aplicados para resolver el problema de estabilización en tiempo real de plantas con tres o cuatro rotores (ver [15]- [2]). Aparte, el control de seguimiento del eje Yaw de helicopteros ha sido estudiado con el control robusto H_2 [33], mecanismos de adaptación [32] y métodos de control por realimentación no lineal compuesta [1].

Sin embargo, investigación adicional sobre el control de este tipo de helicópteros con el fin de mejorar el desempeño para el sistema en lazo cerrado está siendo explorado. Más aún, trabajos previos principalmente se enfocan en el problema de regulación de los ángulos de elevación y de Pitch [**?**] [23] del Quanser 3DOF mediante Control PID con observador en modo deslizante y control robusto de realimentación de estado.

En este trabajo de grado se diseñó un Control Robusto H_∞ de dos grados de libertad, lo cual permitió posicionar los ángulos de Pitch y Yaw del Quanser 2DOF en un amplio rango de valores garantizando su estabilidad, con respuesta temporal bien comportada, y buen rechazo de perturbaciones.

2.2. Control Robusto

La teoría de control como ciencia aplicada va dirigida al mundo real, por lo cual a la hora de diseñar un sistema de control se requiere que el comportamiento de los procesos reales se tenga que representar o modelar con el fin de facilitar el diseño y evaluación del sistema de control. Sin embargo, a la hora de modelar el comportamiento de sistemas se tiene un elevado grado de complejidad debido a la existencia de una gran variedad de parámetros que influyen sobre el mismo. Por lo tanto para la elaboración de un modelo que describa el comportamiento de un sistema, por lo general, es imprescindible simplificar dicho sistema de tal manera que sólo se tengan en cuenta los parámetros fundamentales de este [22].

Lo anterior redunda en que un modelo matemático no logra representar fielmente, en menor o mayor grado, el comportamiento de un sistema real. Es decir el proceso de modelado introduce errores o incertidumbres en el diseño de un sistema de control, debido a la simplificación aplicada en el proceso de modelado, como por ejemplo tratar de representar un sistema como un sistema lineal e invariante en el tiempo.

Con el fin de minimizar estas imprecisiones, a grandes rasgos se tendrían dos opciones: la primera sería aplicar mayor rigurosidad a la hora de modelar un sistema real, con el consecuente incremento de la complejidad en el diseño del sistema

de control. La segunda opción sería tener en cuenta las imprecisiones del modelo de un sistema real al diseñar un controlador, es decir que el controlador responda adecuadamente ante las imprecisiones y variaciones de un entorno real.

Es posible que no se conozca el origen de las incertidumbres o errores que presenta el modelo con respecto a la planta real, es decir sólo se conoce que existen diferencias entre las dos respuestas, caso en el cual se habla de incertidumbres no estructuradas. Para el caso de una incertidumbre originada por una causa conocida, como la ocasionada por tolerancias en los parámetros y que por ejemplo ocasionan incertidumbre en el valor de un polo se habla de incertidumbres estructuradas.

De acuerdo a lo comentado hasta aquí, en estos casos se requiere de sistemas de control que tengan en cuenta procesos con incertidumbres, siendo necesaria la definición del modelado de tales procesos, el análisis de un sistema de este tipo y el respectivo diseño del controlador. Este es el punto de partida de la disciplina denominada control robusto, que abarca casos caracterizados por considerar incertidumbres en el modelo de la planta tolerables por un controlador fijo lineal e invariante en el tiempo. En cualquier caso, el objetivo es obtener un sistema de control que funcione adecuadamente al implementarse sobre un proceso real, es decir se desea que el sistema se caracterice por [22]:

- Estabilidad Nominal: Estabilidad en lazo cerrado antes unas condiciones dadas (nominales).
- Desempeño Nominal: Además de lograr la estabilidad, se requiere que determinadas variables presenten una respuesta adecuada u óptima de acuerdo a una función de costo.
- Estabilidad Robusta: Estabilidad en lazo cerrado para las diferentes plantas posibles originadas por la incertidumbres del modelo.
- Desempeño Robusto: Cumplir especificaciones de funcionamiento deseadas para la planta incierta.

Algunos de los aportes más representativos en la teoría de control robusto son:

- Métodos H_∞
- Métodos LTR (Loop Transfer Recovery)
- Métodos de Kharitonov
- Método de síntesis-μ

2.3. Teorema de Baja Ganancia

El teorema de baja ganancia es el fundamento para las técnicas de control H_∞ [34] [27], para el análisis de estabilidad cuando se hace la descomposición en valores singulares (SVD) y para el análisis μ. A partir del diagrama de bloques de la figura 2.1 el teorema establece: suponga que $N \in \mathcal{RH}_\infty$, entonces el sistema es bien planteado e internamente estable para todo $\triangle(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ dadas cualquiera de las siguientes condiciones suficientes:

- $\|\triangle\|_\infty \leq 1$ si y solo si $\|N(s)\|_\infty < 1$
- $\|\triangle\|_\infty < 1$ si y solo si $\|N(s)\|_\infty \leq 1$

Es decir, si la ganancia de lazo es menor que 1 para todas las frecuencias, siendo el sistema en lazo abierto estable, entonces el sistema en lazo cerrado también es estable.

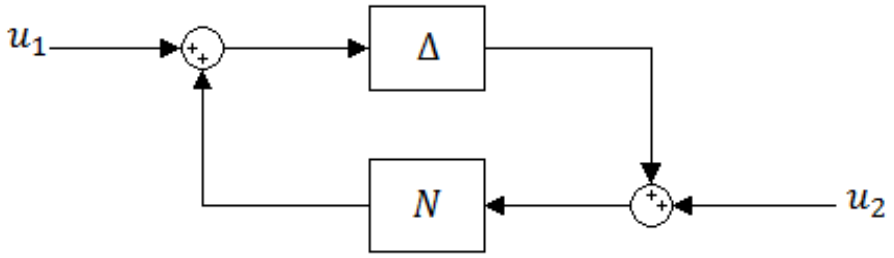


FIGURA 2.1: lazo $N - \triangle$ para análisis de estabilidad

Se puede relacionar el teorema con el criterio de Nyquist. En sistemas SISO si la magnitud de la ganancia de lazo $|L(s)| < 1$ para todas las frecuencias $s = j\omega$, entonces la cantidad $1 - L(s)$ no es posible que encierre al origen, por lo que el sistema será estable. En sistemas MIMO, si el máximo valor singular de la matriz ganancia de lazo $\bar{\sigma}[L(j\omega)] < 1$ para todas las frecuencias, entonces la cantidad $\det[I - L(s)]$ no es posible que encierre al origen. Es importante notar que el teorema solo se refiere a la magnitud de $L(s)$, no a su fase.

Debido a que en los sistemas de control normalmente la ganancia de lazo no es menor que 1, es necesario definir pesos de desempeño, pesos de incertidumbre y escalado para transformar los sistemas y aplicar el teorema de pequeña ganancia. El procedimiento consiste en extraer solamente la parte variable del sistema dinámico, en un lazo artificial y luego demostrar que la ganancia de lazo, vista solamente por la parte variable, es menor que uno.

2.4. Diseño de controladores

Para el diseño de controladores H_∞ es necesario llevar el sistema de control a la configuración de planta generalizada como se muestra en la figura 2.2 para aplicar las diferentes metodologías de diseño [34] [27] [4].

2.4.1. Configuración general de control con incertidumbre

En la Figura 2.2 se muestra el diagrama de la configuración general de control cuyos bloques representan:

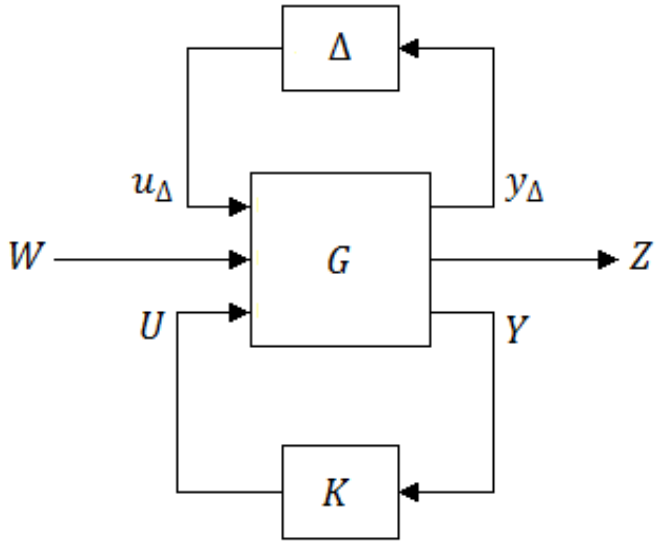


FIGURA 2.2: Planta Generalizada

1. Bloque de incertidumbre Δ: es una matriz diagonal por bloques (es decir, tiene estructura), en la cual aparecen perturbaciones complejas relacionadas con variación en los parámetros, ganancia de los sensores y actuadores, cambio del modelo al variar el punto de operación.

2. Planta generalizada G: es el modelo nominal en lazo abierto, la cual incluye los pesos de desempeño e incertidumbre.

3. Controlador K.

El sistema de interconexión tiene la forma:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & G_{13}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & G_{23}(s) \\ G_{31}(s) & G_{32}(s) & G_{33}(s) \end{bmatrix}$$

W es un vector de señales que incluye ruidos, perturbaciones y señales de referencia, Z es un vector de señales que incluye todas las señales controladas y errores de seguimiento, U son las señales de control y Y son las salidas medidas.

El sistema nominal M, es la transformación lineal fraccional inferior de G y K, cuyo diagrama se puede ver en la figura 2.3. La estructura $M - \Delta$ es usada para el análisis de desempeño robusto (RP).

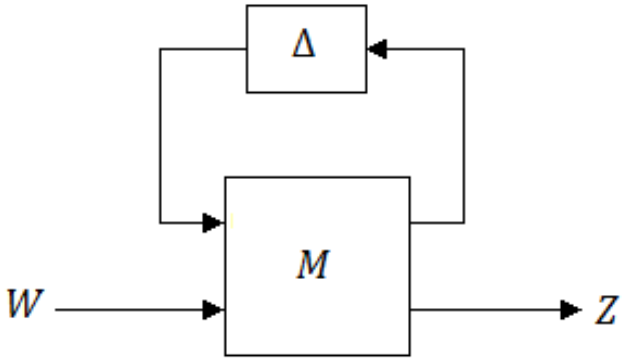


FIGURA 2.3: Configuración $M - \Delta$

$$M = F_L(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}$$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

La función de transferencia con incertidumbre en lazo cerrado de W a Z, es la transformación lineal fraccional superior de M y Δ.

$$T_{ZW} = F_u(M, \Delta) = M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}$$

Para el análisis de estabilidad robusta , se reorganiza el sistema en la estructura $N - \Delta$ de la Figura 2.4, donde $N = M_{11}$ es la función de transferencia de las salidas a las entradas de incertidumbre.

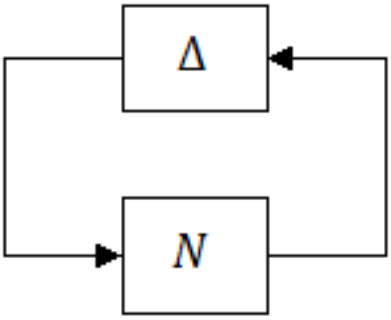


FIGURA 2.4: Configuración $N - \Delta$

2.5. El valor singular estructurado

Esta sección fue tomada de los libros de Kemin Zhou [34] y Sigurd Skogestad [27]. En general los sistemas tienen múltiples fuentes de incertidumbre, lo que lleva a que la matriz de incertidumbre es diagonal por bloques, es decir, tiene estructura. Si $\|N\|_\infty < 1$ implica estabilidad pero puede ser muy conservador porque hay sistemas con $\|N\|_\infty > 1$ estables. Analizar por separado cada Δ_i tiene el problema de que se ignoran las interacciones entre las Δ_i (muy optimista). El análisis de estabilidad y desempeño para sistemas con incertidumbre estructurada requiere una nueva función matricial llamada los valores singulares estructurados, la cual es denotada por μ.

El valor singular estructurado, μ da condiciones necesarias y suficientes para estabilidad y desempeño robustos. Para calcular μ se requiere encontrar la perturbación Δ más pequeña (medida en términos de $\bar{\sigma}(\Delta)$) tal que: $\det(I - N\Delta) = 0$; entonces $\mu(N) = 1/\bar{\sigma}(\Delta)$; el problema es que esto es sólo una condición de si o no. Se escaliza la incertidumbre Δ por K_m y se encuentra el K_m más pequeño que hace que $\det(I - K_m N\Delta) = 0$, y los valores singulares estructurados, μ, están simplemente definidos como $1/K_m$.

2.5.1. Definición

Sea N una matriz compleja y $\Delta = diag\{\Delta_i\}$ denota un conjunto de matrices complejas con $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ y con estructura diagonal por bloques (en la cual algunos bloques pueden ser repetidos o reales). La función real no negativa, llamada el valor singular estructurado está definida como

$$\mu(N) = \frac{1}{\text{mín}\left\{ \; k_m | \det(I - K_m N\Delta) = 0 \quad para \quad \Delta \quad estructurada, \quad \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1 \; \right\}}$$

Un valor de $\mu = 1$ significa que hay una perturbación con $\bar{\sigma}(\Delta) = 1$ que es suficientemente grande para hacer $I - N\Delta$ singular. Un valor grande de μ es malo, ya que una pequeña perturbación hace a $I - N\Delta$ singular, mientras que un valor pequeño de μ es bueno. Si Δ no existe entonces $\mu(N) = 0$.

2.6. Estabilidad y desempeño

La estabilidad nominal (NS) indica que el controlador K estabiliza internamente el modelo nominal, es decir, cuando no hay incertidumbres. Hace referencia a la estabilidad interna del sistema en lazo cerrado.

El desempeño nominal (NP) indica que el sistema cumple los objetivos de desempeño para la planta nominal [34] [27].

2.6.1. Estabilidad robusta (RS) con incertidumbre estructurada

Se supone que el sistema N y las incertidumbres Δ son estables. Entonces el sistema $N\Delta$ de la Figura 2.4 es estable para todas las incertidumbres permitidas con $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1, \forall\omega$, si y solo si: $\mu(N(j\omega)) < 1$. Si se considera la estructura $N\Delta$, para el caso donde Δ es un conjunto de perturbaciones diagonal por bloques con norma acotada entonces, de la condición de estabilidad que aplica para incertidumbres reales y complejas se tiene que $RS \Leftrightarrow \det(I - N\Delta(j\omega)) \neq 0$, $\forall\omega, \forall\Delta, \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1$, $\forall\omega$.

2.6.2. Desempeño robusto (RP) con incertidumbre estructurada

El desempeño robusto significa que los objetivos de desempeño se cumplen para todas las posibles plantas en el conjunto de incertidumbre, aun en el peor caso En realidad, para objetivos de desempeño H_∞ el desempeño robusto es igual a la estabilidad robusta con un bloque ficticio adicional de perturbación. Para verificar el desempeño robusto, se reordena el sistema incierto en la estructura $M\delta$. Los requerimientos de desempeño robustos están dados por la condición de que la norma H_∞ de la función de transferencia $T_{ZW} = F_u(M, \Delta)$, permanezca menor que 1 para todas las perturbaciones permitidas. Esto se puede comprobar exactamente al calcular $\mu(M)$.

Teorema: Desempeño Robusto. Reordenando el sistema incierto en la estructura $M\Delta$. Se supone la estabilidad nominal tal que M sea internamente estable. Entonces

$$RP \Leftrightarrow \|T\|_\infty = \|F_u(M, \Delta)\|_\infty < 1 \qquad \forall \|\Delta\|_\infty \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \mu_{\bar{\Delta}}\left(M\left(j\omega\right)\right) < 1$$

donde μ se calcula con respecto a la estructura de $\bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix}$ y Δ_p es una perturbación compleja llena con las mismas dimensiones de T^T.

2.6.3. Condiciones para NP, RS y RP

A partir del sistema en la estructura $M\Delta$ de la figura 2.3,donde el bloque diagonal de perturbaciones satisface

$$\left\|\Delta\right\|_\infty \leq 1$$

se tiene que:

$$T = F_u\left(M, \Delta\right) = M_{22} + M_{21}\Delta\left(I - M_{11}\Delta\right)^{-1} M_{12}$$

Y los requerimientos de desempeño robusto (RP) son $\left\|T\right\|_\infty \leq 1$ para todas las perturbaciones permitidas. Se dice que

$NS \Leftrightarrow N$, y NS
$NP \Leftrightarrow \bar{\sigma}\left(M_{22}\right) = \mu_{\Delta_P} < 1, \forall\omega$, y NS
$RS \Leftrightarrow \mu_\Delta\left(M_{11}\right) < 1, \forall\omega$ y NS
$RP \Leftrightarrow \mu_\Delta\left(M\right) < 1, \forall\omega, \bar{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix}$, y NS.

2.7. Control H_∞

El contenido de esta sección fue tomada de los libros de Kemin Zhou [34] y Sigurd Skogestad [27].
El control H_∞ iminimiza la norma H_∞ de $F_L\left(G, K\right)$ (Figura 2.2). Generalmente se hacen las siguientes suposiciones en los problemas H_∞:

1. $(A, B_2, C_2,)$ es estabilizable y detectable
2. D_{12} y D_{21} tienen rango completo.
3. $\begin{bmatrix} A - J\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ tiene rango completo de columnas para todo ω.
4. $\begin{bmatrix} A - J\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ tiene rango completo de filas para todo ω.

La suposición 1 se requiere para la existencia de controladores K que estabilicen la planta, y la suposición 2 es suficiente para asegurar que los controladores sean propios y realizables. Las suposiciones 3 y 4 aseguran que no ocurran cancelaciones de polos y ceros en el eje imaginario que generen inestabilidad en lazo cerrado.

2.7.1. Control óptimo H_∞

A partir de la configuración general de control (Figura 2.2), el problema estándar de control H_∞, consiste en encontrar todos los controladores estabilizadores K que minimizan $\|F_L(G,K)\|_\infty = \max_\omega \bar{\sigma}\left(F_L(G,K)(j\omega)\right)$. La norma H_∞, tiene diversas interpretaciones en términos del desempeño. Una de estas es que minimiza el pico del valor singular máximo de $F_L\left(G(j\omega), K(j\omega)\right)$. En la práctica, generalmente no es necesario obtener un controlador óptimo para el problema H_∞. Normalmente es más simple (desde el punto de vista teórico y computacional) obtener un controlador subóptimo, cercano al óptimo en el sentido de la norma H_∞ sea $\gamma_{\text{mín}}$ el valor mínimo de $\|F_L(G,K)\|_\infty$, de todos los controladores estabilizadores K. Entonces el problema de control subóptimo H_∞ es: dado un $\gamma > \gamma_{\text{mín}}$, encontrar todos los controladores estabilizadores K tales que $\|F_L(G,K)\|_\infty < \gamma$.

2.7.2. Algoritmo general H_∞

Para la configuración general de control y con las suposiciones mencionadas, existe un controlador $K(s)$ tal que $\|F_L(G,K)\|_\infty < \gamma$ si y solo si

1. $X_\infty \geq 0$ es una solución de la ecuación algebraica de Riccati.
   $A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty \left(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T\right) X_\infty = 0$
   tal que $Re\lambda_i \left[A + \left(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T\right) X_\infty\right] < 0, \forall_i$

2. $Y_\infty \geq 0$ es una solución de la ecuación algebraica de Riccati
   $AY_\infty + Y_\infty A^T + B_1 B_1^T + Y_\infty \left(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2\right) Y_\infty = 0$
   tal que $Re\lambda_i \left[A + Y_\infty \left(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2\right)\right] < 0, \forall_i$

3. $\rho\left(X_\infty Y_\infty\right) < \gamma^2$

Todos esos controladores están dados por $K = F_L(K_c, Q)$ donde

$$K_c(s) = \begin{bmatrix} A_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty, \quad L_\infty = -Y_\infty C_2^T, \quad Z_\infty = \left(I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty\right)^{-1}$$

$$A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$$

y $Q(s)$ es cualquier función de transferencia estable y propia tal que $\|Q\|_\infty < \gamma$. Para $Q(s) = 0$ se tiene: $K(s) = K_{c_{11}}(s) = -Z_\infty L_\infty (sI - A_\infty)^{-1} F_\infty$.

Este es conocido como el controlador central y tiene el mismo número de estados que la planta generalizada $G(s)$.

El controlador central puede ser separado en un observador de estado de la forma

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1\gamma^{-2}B_1^T X_\infty \hat{x} + B_2 u + Z_\infty L_\infty \left(C_2 \hat{x} - y\right)$$

y realimentación de estado $u = F_\infty \hat{x}$.

2.8. Identificación de Sistemas

En esta sección se presentan los conceptos fundamentales de identificación de sistemas, para luego ser aplicados en el capítulo de identificación del helicóptero usando el método de predicción de error.

Muchos sistemas físicos son de difícil modelamiento matemático, pues sus variables no se conocen, el valor de los parámetros no se puede estimar fácilmente, ó su dinámica es no lineal. Las técnicas de identificación permiten hallar un modelo a partir del análisis de las señales de entrada y salida del sistema, generalmente haciendo uso de regresiones lineales y no lineales.

2.8.1. Concepto de identificación de sistemas

Las técnicas de identificación consisten en excitar el sistema real con señales de prueba conocidas, leer las señales de salida y almacenar los vectores de datos de entrada y salida durante un intervalo de tiempo adecuado; luego, a partir de las señales de entrada y salida obtener un modelo matemático que representa la dinámica del sistema.

2.8.2. Proceso de identificación

Esta información fue tomada de la tesis de maestría de Mauricio Peña [21].
La identificación de sistemas [14] es un proceso iterativo con unos pasos básicos como se observa en la Figura 2.5:

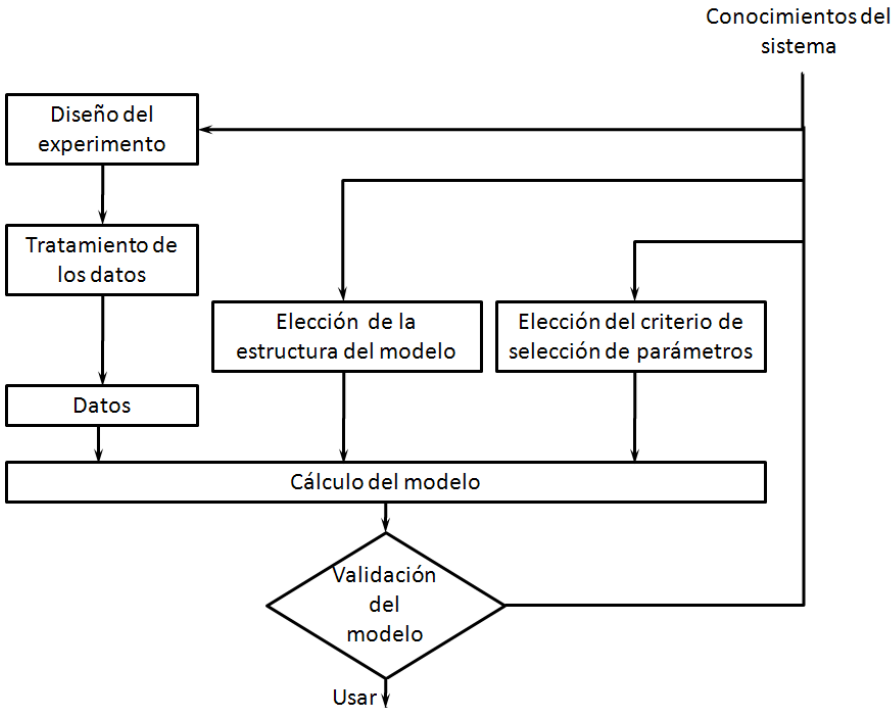


FIGURA 2.5: Proceso de identificación de sistemas

Veamos cada uno de los recuadros que aparecen en la figura 2.5

2.8.2.1. Conocimiento del sistema

En la medida de lo posible, es deseable para la identificación de sistemas tener un modelo teórico cuyos parámetros sean los que se identifiquen. Esto puede hacer que el modelo sea valido para rangos amplios y de buena precisión.

2.8.2.2. Diseño del experimento

En el diseño de experimentos se deben tener en cuenta el tipo de entrada, las perturbaciones y la forma de la salida, las entradas del sistema deben ser tal que excite todos los modos del sistema. Sólo pueden identificarse los modos que son observables desde las salidas y son suficientemente excitados desde las entradas (i.e., la parte controlable y observable del sistema), algunas de estas entradas son: Random Binary, Pseudo-Random Binary (PRBS), Escalones, Pulsos Múltiples, Sinusoidales, etc. Estas señales tienen algunos parámetros que deben identificarse como son: número

de registros en una PRBS, tiempo de conmutación, magnitud y duración de la señal.

2.8.2.3. Tratamiento de los datos

El tratamiento de los datos tiene que ver con el tipo de salida que se obtiene del sistema, para eso se seleccionan las variables a medir para seguir un proceso donde se obtiene una señal óptima, lo que se hace es eliminar los datos extremos y las tendencias, luego se elimina el ruido y finalmente se limita el ancho de banda entre otros tratamientos.

2.8.2.4. Elección de la estructura del modelo

La elección de la estructura depende de dos cosas, la primera es saber que tanto se conoce del sistema y la segunda es el tipo de datos que se van a obtener, teniendo en cuenta las dos situaciones anteriores se tienen tres enfoques que son:

- Modelo de caja transparente: la estructura de modelo se obtiene a partir de leyes fundamentales y los parámetros tienen una interpretación física.

- Modelo de caja negra: un modelo basado en leyes fundamentales es complicado o se desconoce, por lo que los parámetros del modelo no tienen una interpretación física.

- Modelo de caja gris: en este enfoque algunas partes del sistema son modeladas basándose en principios fundamentales y otras como una caja negra por lo que algunos de los parámetros del modelo pueden tener una interpretación física.

Es importante definir el tipo de modelo en caso en que el enfoque sea de caja transparente o de caja gris, por lo que se tienen modelos lineales o no lineales, en tiempo discreto o continuo, los de tiempo discreto pueden estar dados en ecuaciones de diferencia, funciones de transferencia en el dominio Z, modelos en espacio de estados, modelos auto regresivos y los modelos en tiempo continuo pueden estar dados en ecuaciones diferenciales, funciones de transferencia en el dominio de S y modelos en espacio de estados.

Para la selección de un modelo óptimo se debe seleccionar un criterio o función de costo a minimizar y la determinación del vector de parámetros que minimiza el criterio.

2.8.2.5. Validación del modelo

Significa obtener una medida de confiabilidad del modelo, esto es:Decidir si el modelo es lo suficientemente bueno para la aplicación para la cual fue derivado (capacidad de predicción), determinar cuan lejos del sistema real esta el modelo (medida de la incertidumbre del modelo), determinar si el modelo y los datos son consistentes con las hipótesis sobre la estructura de modelo. La validación requiere normalmente la realización de nuevos experimentos, modificando posiblemente la estructura de modelo, o las señales de excitación, el criterio, etc.

2.8.3. Fuentes de error en un proceso de identificación

Las fuentes de error en el proceso de identificacion son debidos basicamente a: BIAS y Varianza, descritas a continuacion:

2.8.3.1. BIAS

Son errores sistemáticos causados por: características de la señal de entrada, elección de la estructura de modelo (complejidad de la representación), modo de operación (lazo cerrado vs. lazo abierto).

2.8.3.2. Varianza

Son errores aleatorios introducidos por la presencia de ruido en los datos que impiden que el modelo reproduzca exactamente la salida de la planta. Esto afectado por los siguientes factores: néumero de parámetros del modelo, duración del experimento de identificación y la relación señal-ruido.

2.8.4. Identificación de sistemas lineales

En la identificación de sistemas lineales se reconocen varios tipos de modelos que se pueden describir brevemente como:

2.8.4.1. Modelos de entrada salida

Un modelo de entrada salida como su nombre lo indica es predecible en sus salidas si se conocen sus entradas y salidas pasadas.

2.8.4.2. Modelos parámetricos lineales

Los modelos parámetricos son descritos con una estructura y un número finito de parámetros que relacionan las señales de interés del sistema(entradas, salida y perturbaciones). Además por la naturaleza de la adquisición de los datos se encuentran en el dominio discreto la cual es fácilmente transferible al dominio continuo. Estos modelos derivan su razón de ser de la teoría clásica de regresiones y su entendimiento aplicado a la identificación de sistemas, es una potencial herramienta que todavía no es muy explorada y en las cuales cabe destacar los siguientes tipos de regresión:

Regresión lineal: una estructura tiene regresión lineal cuando la salida del sistema se puede expresar en la forma:

$$y_e(t,\theta) = \varphi^T(t)\theta$$

donde y_e es la salida estimada del sistema,φ es un vector de entradas y salidas pasadas o vector de regresión y θ el vector de parámetros del sistema.

El modelo paramétrico más general es aquel que retorna la salida medible a partir de las componentes debido a las entradas y a las perturbaciones, así:

$$Y_{Medida}(t) = Y_{entrada}(t) + Y_{Perturbacion}(t) \tag{2.1}$$

A la vez estos términos se pueden llevar a la forma:

$$\begin{aligned} Y_{entrada}(t) &= Y_E(R^{-1},\theta)\cdot u(t) \\ Y_{Perturbacion}(t) &= Y_P(R^{-1},\theta)\cdot p(t) \\ Y_{Medida}(t) &= Y_M(R^{-1},\theta)\cdot Y(t) \end{aligned}$$

Donde R^{-1} es el operador de retardo, θ es un vector de parámetros t $u(t)$, $p(t)$ y $Y(t)$ son la entrada al sistema, el ruido y la salida de interés del sistema. A la vez $Y_E(R^{-1},\theta)$ y $Y_P(R^{-1},\theta)$ se pueden representar como cocientes de polinomios en la forma de función de transferencia, así:

$$\begin{aligned} Y_E(R^{-1},\theta) = \frac{Y_{ED}(R^{-1})}{Y_{EN}(R^{-1})} &= \frac{ed_1\cdot R^{-nk} + ed_2\cdot R^{-nk-1} + \cdots + ed_{ned}\cdot R^{-nk-ned+1}}{1 + en_1\cdot R^{-1} + \cdots + en_{nen}\cdot R^{-nen}} \\ Y_P(R^{-1},\theta) = \frac{Y_{PD}(R^{-1})}{Y_{PN}(R^{-1})} &= \frac{1 + pd_1\cdot R^{-1} + \cdots + pd_{npd}\cdot R^{-npd}}{1 + pn_1\cdot R^{-1} + \cdots + pn_{npn}\cdot R^{-npn}} \end{aligned}$$

y $Y_M(R^{-1}, \theta)$ como un polinomio del tipo:

$$Y_M(R^{-1}, \theta) \;=\; 1 + m_1 \cdot R^{-1} + \cdots + m_{nm} \cdot R^{-nm}$$

Donde el vector de parámetros θ esta compuesto de los coeficientes $ed_i, en_i, pd_i, pn_i, m_i$ y la estructura general del modelo queda definida de la siguiente manera:

$$Y_M(R^{-1}, \theta) \cdot Y(t) = Y_E(R^{-1}, \theta) \cdot u(t) + Y_P(R^{-1}, \theta) \cdot p(t)$$

$$Y_M(R^{-1}, \theta) \cdot Y(t) = \frac{Y_{ED}(R^{-1})}{Y_{EN}(R^{-1})} \cdot u(t) + \frac{Y_{PD}(R^{-1})}{Y_{PN}(R^{-1})} \cdot p(t) \tag{2.2}$$

La selección del tipo de modelo depende del orden de cada uno de los polinomios $Y_{ED}, Y_{EN}, Y_{PD}, Y_{PN}$ y Y_M y el retardo entre la entrada y la salida nk. Con los valores anteriores, se determina el vector de coeficientes θ ed, en, pd, pn y m que ajustan al modelo a los datos de entrada y salida del sistema real.

A partir del modelo general de la ecuación 2.2 se desprenden modelos dependiendo de los valores que tomen los polinomios $Y_{ED}, Y_{EN}, Y_{PD}, Y_{PN}$ y Y_M. Esos modelos se muestran en la tabla 2.1:

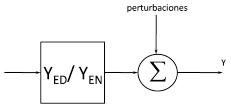
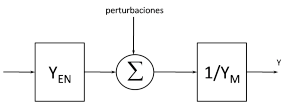
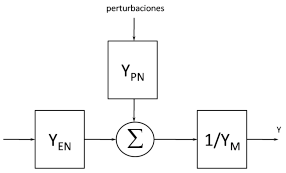
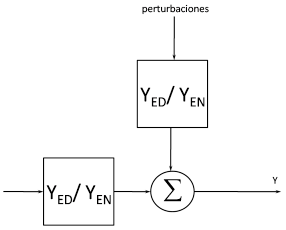
Modelo	Condición	Diagrama de bloque	Ecuación
OE (Output Error)	$Y_{PD}(R^{-1}) =$ $Y_{PN}(R^{-1}) =$ $...Y_M(R^{-1}) = 1$		$Y(t) = \frac{Y_{EN}(R^{-1})}{Y_{ED}(R^{-1})} \cdot u(t) + p(t)$
ARX (Auto-Regressive with eXogenous inputs)	$Y_{ED}(R^{-1}) =$ $Y_{PD}(R^{-1}) =$ $Y_{PN}(R^{-1}) = 1$		$Y_M(R^{-1}, \theta) \cdot Y(t) =$ $Y_{EN}(R^{-1}) \cdot u(t) + p(t)$
ARMAX (Auto-Regressive Moving Average with eXogenous inputs)	$Y_{ED}(R^{-1}) =$ $Y_{PD}(R^{-1}) = 1$		$Y_M(R^{-1}, \theta) \cdot Y(t) = Y_{EN}(R^{-1}) \cdot$ $u(t) + Y_{PN}(R^{-1}) \cdot p(t)$
Modelo BJ (Box Jenkins)	$Y_M(R^{-1}) = 1$		$YY(t) \frac{Y_{EN}(R^{-1})}{Y_{ED}(R^{-1})} \cdot u(t) +$ $\frac{Y_{PN}(R^{-1})}{Y_{EN}(R^{-1})} \cdot p(t)$

Tabla 2.1: Identificación de modelos lineales en caja negra

CAPÍTULO 3

MODELO DEL HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

3.1. Introducción

En este capítulo se describe la metodología utilizada para hallar el modelo matemático del Helicóptero. Se usó el método de Euler-Lagrange el cual está basado en el análisis de la energía cinética y potencial del sistema. Las ecuaciones resultantes son no lineales, entonces se hace la linealización del modelo alrededor de varios puntos de equilibrio y se muestran los aspectos más representativos de la dinámica de los modelos lineales obtenidos.

3.2. Cinemática

El helicóptero de dos grados de libertad está pivotado alrededor del eje Pitch por el ángulo θ y alrededor del eje Yaw por el ángulo ψ [11], como se muestra en la figura 3.1; el ángulo pitch es definido positivo cuando la nariz del helicóptero se eleva y el ángulo yaw es definido positivo para rotaciones en sentido de las manecillas del reloj. Durante todo el presente trabajo los ángulos de rotación del helicóptero serán llamados Pitch y Yaw puesto que es lo más común en la literatura.

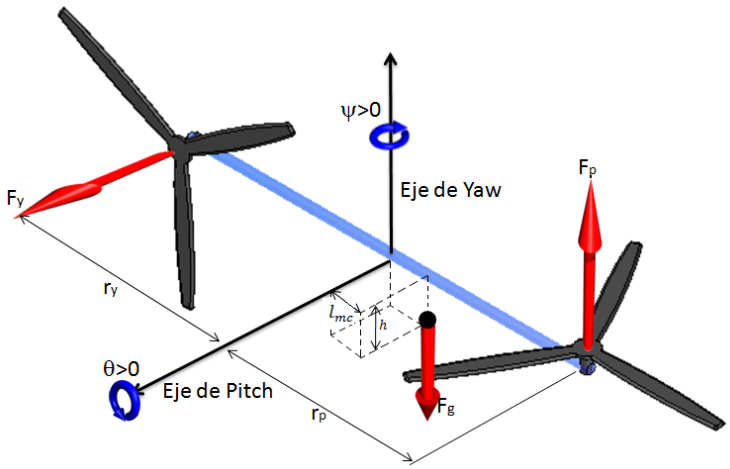


FIGURA 3.1: Dinámica del Helicóptero de 2DOF

Además, como se puede apreciar en la figura 3.1 hay una fuerza de empuje F_p la cual es normal al plano de la hélice frontal y una fuerza de empuje F_y normal al plano de la hélice trasera. Un torque en el eje pitch está siendo generado por causa de la fuerza de empuje F_p que se encuentra a una distancia r_p, y un torque en yaw está siendo aplicado por la fuerza F_y que se encuentra a una distancia r_y.

La fuerza gravitacional F_g genera un torque en el eje pitch que hace que la nariz del helicóptero caiga porque el centro de masa no se encuentra en el pivote sino a una distancia l_{mc} a lo largo de la longitud del fuselaje y a una altura h por debajo de este. En la figura 3.2 se puede ver la cinemática directa del helicóptero.

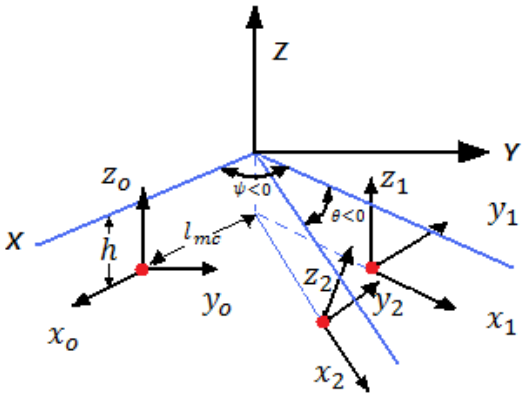


FIGURA 3.2: Cinemática del Helicóptero de 2DOF

Para hallar el modelo cinemático directo se usan matrices de transformación homogéneas que representan la posición y orientación del cuerpo en el espacio [28]. Las coordenadas homogéneas son la representación de un vector n-dimensional en $n+1$ coordenadas.

El helicóptero rota con respecto a Z un ángulo ψ y con respecto a Y un ángulo θ; luego, la posición del centro de masa del sistema (T_0^2) con respecto al sistema coordenado fijo (pivote) se halla haciendo uso de matrices de transformación homogéneas ($Rot_{z_0,\psi}$) ($Rot_{y_1,\theta}$) [34].

$$T_0^2 = Rot_{z_0,\psi} Rot_{y_1,\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{mc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{mc} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} \cos\psi\ \cos\theta & \sin\psi & -\cos\psi\ \sin\theta & l_{mc}\ \cos\psi\ \cos\theta + h\ \cos\psi\ \sin\theta \\ -\cos\theta\ \sin\psi & \cos\psi & \sin\psi\ \sin\theta & -l_{mc}\ \cos\theta\ \sin\psi - h\ \sin\psi\ \sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & l_{mc}\ \sin\theta - h\ \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las rotaciones se hicieron con ángulos negativos con el fin de que al momento de reemplazar en el modelo dinámico resultante un θ positivo, la nariz del helicóptero se eleve. Es necesario determinar las coordenadas cartesianas del centro de masa para hallar el modelo dinámico del sistema. La posición cartesiana del centro de masas es

$$\begin{aligned} X_{mc} &= (l_{mc}\ \cos\theta + h\ \sin\theta)\ \cos\psi \\ Y_{mc} &= (-l_{mc}\ \cos\theta - h\ \sin\theta)\ \sin\psi \\ Z_{mc} &= l_{mc}\ \sin\theta - h\ \cos\theta \end{aligned}$$

La masa del motor de Pitch se denota como m_{mp} y como m_{my} la del motor de Yaw, la masa de las hélices y sus protecciones como m_{shield}. El centro de masa es calculado con la expresión

$$M\, d_{mc} = \sum m_i r_i$$

Donde M es la masa total, r_i es el centro de masas de cada sección y m_i la masa de cada sección.

$$\begin{aligned} M\, l_{mc} &= (m_{mp} + m_{shield})x_p + (m_{my} + m_{shield})x_y \\ (m_{mp} + m_{my} + 2m_{shield})l_{mc} &= (m_{mp} + m_{shield})x_p + (m_{my} + m_{shield})x_y \\ l_{mc} &= \frac{(m_{mp} + m_{shield})x_p + (m_{my} + m_{shield})x_y}{(m_{mp} + m_{my} + 2m_{shield})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M\, h &= (m_{mp} + m_{shield})z_p + (m_{my} + m_{shield})z_y \\ (m_{mp} + m_{my} + 2m_{shield})h &= (m_{mp} + m_{shield})z_p + (m_{my} + m_{shield})z_y \\ h &= \frac{(m_{mp} + m_{shield})z_p + (m_{my} + m_{shield})z_y}{(m_{mp} + m_{my} + 2m_{shield})} \end{aligned}$$

x_p es la distancia entre el pivote y el centro del motor de pitch en x y x_y es la distancia entre el pivote y el centro del motor de Yaw en x. z_p es la distancia entre el pivote y el centro del motor de pitch en z y z_y es la distancia entre el pivote y el centro del motor de Yaw en z.

3.3. Energía cinética y potencial

La energía potencial debido a la gravedad es

$$P = m_{heli}\, g\, Z_{mc} = m_{heli}\, g\, (l_{mc}\, \sin\theta - h\, \cos\theta)$$

Donde m_{heli} es la masa móvil total del helicóptero.

La energía cinética total es

$$T = T_{r,p} + T_{r,y} + T_t$$

Es la suma de la energía cinética rotacional actuando sobre Pitch $T_{r,p}$ y sobre Yaw $T_{r,y}$ con la energía cinética traslacional generada por el movimiento del centro

de masa T_t.

La energía cinética rotacional en Pitch es

$$T_{r,p} = \frac{1}{2} J_{eqp} \dot{\theta}^2$$

Y la energía cinética rotacional en Yaw es

$$T_{r,y} = \frac{1}{2} J_{eqy} \dot{\psi}^2$$

Donde J_{eqp} y J_{eqy} son los momentos de inercia equivalentes en Pitch y Yaw respectivamente. La energía cinética traslacional es

$$T_t = m_{heli}(\dot{X_{mc}}^2 + \dot{Y_{mc}}^2 + \dot{Z_{mc}}^2) = \frac{1}{2} m_{heli} V^2$$

En términos de los ángulos de Pitch y Yaw la energía cinética traslacional es

$$\dot{X}_{mc} = \frac{\partial X_{mc}}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial X_{mc}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} = -(l_{mc}\cos\theta + h\sin\theta)\sin\psi\dot{\psi} - (l_{mc}\sin\theta - h\cos\theta)\cos\psi\dot{\theta}$$

$$\dot{Y}_{mc} = \frac{\partial X_{mc}}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial X_{mc}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} = -(l_{mc}\cos\theta + h\sin\theta)\cos\psi\dot{\psi} + (l_{mc}\sin\theta - h\cos\theta)\sin\psi\dot{\theta}$$

$$\dot{Z}_{cm} = \frac{\partial Z_{cm}}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial Z_{cm}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} = (l_{mc}\cos\theta + h\sin\theta)\dot{\theta}$$

$$V^2 = \left(h^2 + \cos^2\theta\,\left(l_{mc}{}^2 - h^2\right) + l_{mc}\,h\,\sin(2\,\theta)\right)\,\dot{\psi}^2 + \left(l_{mc}{}^2 + h^2\right)\,\dot{\theta}^2$$

Entonces

$$T_t = \frac{1}{2} M_{heli}\left[\left(h^2 + \cos^2\theta\,\left(l_{mc}{}^2 - h^2\right) + l_{mc}\,h\,\sin(2\,\theta)\right)\,\dot{\psi}^2 + \left(l_{mc}{}^2 + h^2\right)\,\dot{\theta}^2\right]$$

3.4. Ecuaciones no lineales del movimiento

Las ecuaciones del movimiento de Euler-Lagrange [20] [3] se definen como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= Q_1 \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= Q_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Recuérdese que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= \frac{\partial(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1})}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1})}{\partial \dot{q}_1}\ddot{q}_1 + \frac{\partial(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1})}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1})}{\partial \dot{q}_2}\ddot{q}_2 \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= \frac{\partial(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2})}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2})}{\partial \dot{q}_1}\ddot{q}_1 + \frac{\partial(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2})}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2})}{\partial \dot{q}_2}\ddot{q}_2 \end{aligned}$$

Donde L es la variable de Lagrange, la cual corresponde a la diferencia entre la energía cinética y potencial del sistema.

$$L = T - P$$

Las coordenadas generalizadas son

$$\begin{aligned} q &= [q_1 \quad q_2 \quad \dot{q_1} \quad \dot{q_2}]^T \\ q &= [\theta \quad \psi \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]^T \end{aligned} \tag{3.2}$$

Y las fuerzas generalizadas son

$$\begin{aligned} Q_1 &= \tau_p(V_{mp}, V_{my}) - B_p\dot{\theta} \\ Q_2 &= \tau_y(V_{mp}, V_{my}) - B_y\dot{\psi} \end{aligned} \tag{3.3}$$

La ecuación anterior incluye la fricción viscosa rotacional actuando en los ejes de pitch y yaw B_p y B_y . Los torques aplicados a los ejes de pitch y yaw son función de los voltajes aplicados a los motores.

En la elaboración del modelo se tuvo en cuenta que la dinámica de los motores es muy rápida comparada con la dinámica del helicóptero (la velocidad de los motores alcanza el estado estacionario en un tiempo cercano a $50ms$), entonces su dinámica es despreciable y se puede aproximar la conversión de voltaje a torque por una constante.

$$\begin{aligned} \tau_p(V_{mp}, V_{my}) &= \tau_{pp} + \tau_{py} \\ \tau_y(V_{mp}, V_{my}) &= \tau_{yp} + \tau_{yy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{pp} + \tau_{py} &= (K_{pp}V_{mp} + F_{cpp}) + (K_{py}V_{my} + F_{cpy}) \\ \tau_{yp} + \tau_{yy} &= (K_{yp}V_{mp} + F_{cyp})\cos\theta + (K_{yy}V_{my} + F_{cyy})\cos\theta \end{aligned}$$

Donde V_{mp} es la entrada de voltaje del motor de pitch y V_{my} es la entrada de voltaje al motor de yaw. Los torques que actúan en los ejes de pitch y yaw están acoplados.

τ_{pp}, τ_{yy}, τ_{py} y τ_{yp} son las funciones de torque , K_{pp}, K_{yy}, K_{py} y K_{yp} (de motor de pitch a ángulo de pitch, de motor yaw a ángulo yaw, de motor yaw a ángulo pitch y de motor pitch a ángulo yaw respectivamente) son las constantes de voltaje a torque de los motores de pitch y yaw encontradas experimentalmente; $F_{cpp}, F_{cpy}, F_{cyp}$ y F_{cyy} son los términos constantes que aparecen en la regresión lineal debido a la fricción de Coulomb; es decir, el voltaje necesario para que el sistema inicie el movimiento.

La fuerza de empuje cuando $V_{mp} > 0$ causa que la nariz del helicóptero se eleve, pero a la vez genera un torque sobre el eje yaw que hace rotar al helicóptero en Yaw debido a la resistencia del aire sobre el área transversal de la hélice generando un torque en el eje del motor y como el motor está fijo al sistema que es móvil con respecto al pivote, este torque se refleja en el pivote. El mismo efecto se presenta al aplicar voltaje al motor de Yaw. Evaluando las expresiones de Euler Lagrange en la ecuación 3.1 ,usando las coordenadas definidas en 3.2 y las fuerzas generalizadas en 3.3 resultan las ecuaciones no lineales del movimiento

$$\begin{aligned} (J_{eqp} + M_{heli}(l_{mc}^2 + h^2))\ddot{\theta} + M_{heli}\left[\frac{\sin 2\theta(l_{mc}^2 - h^2)}{2} - l_{mc}h\cos 2\theta\right]\dot{\psi}^2 + \\ M_{heli}g(l_{mc}\cos\theta + h\sin\theta) + B_p\dot{\theta} \\ = (K_{pp}V_{mp} + F_{cpp}) + (K_{py}V_{my} + F_{cpy}) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}&[J_{eqy} + M_{heli}\left[\cos^2\theta(l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc}h\sin 2\theta + h^2\right]]\ddot{\psi}\\ &+M_{heli}\left[\sin 2\theta(h^2 - l_{mc}^2) + 2l_{mc}h\cos 2\theta\right]\dot{\theta}\dot{\psi} + B_y\dot{\psi}\\ &= (K_{yp}V_{mp} + F_{cyp})\cos\theta + (K_{yy}V_{my} + F_{cyy})\cos\theta\end{aligned} \tag{3.5}$$

El momento de inercia equivalente sobre el centro de masa en las ecuaciones 3.4 y 3.5 es

$$\begin{aligned}J_{eqp} &= J_{bodyp} + J_p + J_y\\ J_{eqy} &= J_{bodyy} + J_p + J_y + J_{shaft}\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}J_{bodyp} &= \frac{m_{bodyp}L_{body}^2}{12}\\ J_{bodyy} &= \frac{m_{bodyy}L_{body}^2}{12}\\ J_{shaft} &= \frac{m_{shaft}L_{shaft}^2}{3}\\ J_p &= (m_{mp} + m_{shield})r_p^2\\ J_y &= (m_{my} + m_{shield})r_y^2\end{aligned}$$

Ver la tabla 3.1 donde se encuentran los valores de todos los parámetros, los cuales fueron obtenidos de forma experminetal.

3.5. Variables de estado

Si definimos como variables de estado

$$X = \begin{bmatrix}\theta & \psi & \dot{\theta} & \dot{\psi}\end{bmatrix}^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$$

Y como señales de control

$$U = [V_{mp} \quad V_{my}]^T = [u_1 \quad u_2]^T$$

Entonces

Tabla 3.1: Parámetros

Símbolo	**Descripción**	**Valor**	**Unidades**
K_{pp}	Constante de voltaje a torque actuando en el eje Pich debida al voltaje aplicado al motor de Pich	0.02638	N.m/V
K_{py}	Constante de voltaje a torque actuando en el eje Pich debida al voltaje aplicado al motor de Yaw	0.001894	N.m/V
K_{yp}	Constante de voltaje a torque actuando en el eje Yaw debida al voltaje aplicado al motor de Pich	0.002096	N.m/V
K_{yy}	Constante de voltaje a torque actuando en el eje Yaw debida al voltaje aplicado al motor de Yaw	0.01871	N.m/V
F_{cpp}	Constante debida a la fricción de coulomb	-0.208	N.m/V
F_{cpy}	Constante debida a la fricción de coulomb	0.0064	N.m/V
F_{cyp}	Constante debida a la fricción de coulomb	-0.0072	N.m/V
F_{cyy}	Constante debida a la fricción de coulomb	0.0796	N.m/V
B_p	Fricción viscosa del eje Pitch	0.01325	N/V
B_y	Fricción viscosa del eje Yaw	0.8513	N/V
M_{heli}	Masa móvil total del helicóptero	1.3872	kg
m_{mp}	Masa del motor de Pitch	0.292	kg
m_{my}	Masa del motor de Yaw	0.128	kg
m_{shield}	Masa del ensamblaje de la hélice	0.167	kg
m_{bodyp}	Masa que se mueve alrededor del eje Pitch	0.633	kg
m_{bodyy}	Masa que se mueve alrededor del eje Yaw	0.667	kg
m_{shaft}	Masa del eje metálico que gira alrededor del eje Yaw	0.151	kg
L_{body}	Longitud total del cuerpo del helicóptero	0.483	m
L_{shaft}	Longitud del eje metálico que gira alrededor del eje Yaw	0.28	m
J_{shaft}	Momento de inercia del eje metálico	0.0039	kg.m^2
J_{eqp}	Momento de inercia equivalente alrededor del eje Pitch	0.0332	kg.m^2
J_{eqy}	Momento de inercia equivalente alrededor del eje Yaw	0.0371	kg.m^2
l_{mc}	Posición en x del centro de masa	0.0122	m
h	posición en z del centro de masa	0.00714	m

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{\theta} = x_3 = f_1(X)\\ \dot{x}_2 &= \dot{\psi} = x_4 = f_2(X)\end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = \ddot{\theta} = \begin{array}{l} -\frac{M_{heli}\left[\frac{\sin 2\theta(l_{mc}^2-h^2)}{2} - l_{mc}h\cos 2\theta\right]\dot{\psi}^2}{(J_{eqp}+M_{heli}(l_{mc}^2+h^2))} \\ -\frac{M_{heli}g(l_{mc}\cos\theta+h\sin\theta)+B_p\dot{\theta}-(K_{pp}V_{mp}+F_{cpp})-(K_{py}V_{my}+F_{cpy})}{(J_{eqp}P+M_{heli}(l_{mc}^2+h^2))} = f_3(X)\end{array}$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\psi} = \begin{array}{l} -\frac{M_{heli}\left[\sin 2\theta(h^2-l_{mc}^2)+2l_{mc}h\cos 2\theta\right]\dot{\theta}\dot{\psi}}{[J_{eqy}+M_{heli}[\cos^2\theta(l_{mc}^2-h^2)+l_{mc}h\sin 2\theta+h^2]]} \\ -\frac{B_y\dot{\psi}-(K_{yp}V_{mp}+F_{cyp})\cos\theta-(K_{yy}V_{my}+F_{cyy})\cos\theta}{[J_{eqy}+M_{heli}[\cos^2\theta(l_{mc}^2-h^2)+l_{mc}h\sin 2\theta+h^2]]} = f_4(X)\end{array}$$

3.6. Puntos de equilibrio

Se tiene un punto de equilibrio cuando la solución es constante en el tiempo $X(t) = constante$. Si las variables de estado tienen valor constante quiere decir que $\frac{dX(t)}{dt} = 0$, es decir que para hallar los puntos de equilibrio se deben igualar las ecuaciones de estado a cero.

$$\begin{aligned}\bar{x}_3 &= 0\\ \bar{x}_4 &= 0\\ K_{pp}\bar{u_1} + F_{cpp} + K_{py}\bar{u_2} + F_{cpy} - m_{heli}g(l_{mc}\cos\bar{x}_1 + h\sin\bar{x}_1) &= 0\\ K_{yp}\bar{u_1} + F_{cyp} + K_{yy}\bar{u_2} + F_{cyy} &= 0\end{aligned}$$

De la ecuación anterior

$$\bar{u_2} = \frac{-(F_{cyp} + F_{cyy} + K_{yp}\bar{u_1})}{K_{yy}} = \overline{V}_{my}$$

$$\bar{u_1} = \frac{K_{py}(F_{cyp} + F_{cyy}) - K_{yy}(F_{cpp} + F_{cpy}) + K_{yy}m_{heli}g(l_{mc}\cos\bar{x}_1 + h\sin\bar{x}_1)}{K_{pp}K_{yy} - K_{py}K_{yp}} = \overline{V}_{mp}$$

El sistema tiene infinitos puntos de equilibrio porque $\bar{x}_2 = \bar{\psi}$ puede ser cualquiera; es decir, que el sistema se puede equilibrar en cualquier posición del ángulo ψ.

3.7. Ecuaciones de Estado Lineales

Linealizando alrededor del punto de equilibrio inducido por $\bar{x_1} = \bar{\theta}$ constante, se obtiene el modelo lineal parametrizado por $\bar{\theta}$ [13].

$$\dot{X}_\delta = A(\bar{\theta})X_\delta + B(\bar{\theta})U_\delta$$

donde

$$X_\delta = X - \overline{X} \quad ; \quad U_\delta = U - \overline{U}$$

$$A(\bar{\theta}) = \frac{\partial f(X)}{\partial X} \qquad B(\bar{\theta}) = \frac{\partial f(X)}{\partial U}$$

$$A(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(X)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(X)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(X)}{\partial x_4} \end{bmatrix}$$

$$B(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(X)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1(X)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2(X)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(X)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3(X)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3(X)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_4(X)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4(X)}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

Evaluando las matrices anteriores para $X = \overline{X}$ y $U = \overline{U}$ se obtiene

$$A(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{M_{heli}g(l_{mc}\sin\bar{\theta} - h\cos\bar{\theta})}{[J_{eqp}+M_{heli}(l_{mc}^2+h^2)]} & 0 & \frac{-B_p}{[J_{eqp}+M_{heli}(l_{mc}^2+h^2)]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-B_y}{J_{eqy}+M_{heli}\left[\cos^2\bar{\theta}(l_{mc}^2-h^2)+l_{mc}h\sin 2\bar{\theta}+h^2\right]} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

$$B(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{pp}}{[J_{eqp}+M_{heli}(l_{mc}^2+h^2)]} & \frac{K_{py}}{[J_{eqp}+M_{heli}(l_{mc}^2+h^2)]} \\ \frac{K_{yp}\cos\bar{\theta}}{J_{eqy}+M_{heli}\left[\cos^2\bar{\theta}(l_{mc}^2-h^2)+l_{mc}h\sin 2\bar{\theta}+h^2\right]} & \frac{K_{yy}\cos\bar{\theta}}{J_{eqy}+M_{heli}\left[\cos^2\bar{\theta}(l_{mc}^2-h^2)+l_{mc}h\sin 2\bar{\theta}+h^2\right]} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

La matriz C indica que para el diseño del controlador las salidas son θ y ψ.

Linealizando alrededor de $\bar{\theta} = 0$ grados

$$A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-M_{heli}gh}{[J_{eqp}+M_{heli}(l_{mc}^2+h^2)]} & 0 & \frac{-B_p}{[J_{eqp}+M_{heli}(l_{mc}^2+h^2)]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-B_y}{[J_{eqy}+M_{heli}l_{mc}^2]} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{pp}}{[J_{eqp}+M_{heli}(l_{mc}^2+h^2)]} & \frac{K_{py}}{[J_{eqp}+M_{heli}(l_{mc}^2+h^2)]} \\ \frac{K_{yp}}{[J_{eqy}+M_{heli}l_{mc}^2]} & \frac{K_{yy}}{[J_{eqy}+M_{heli}l_{mc}^2]} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

3.8. Sistema en Funciones de Transferencia

El sistema escrito en Funciones de transferencia tiene la estructura

$$\begin{bmatrix} \theta(s) \\ \psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{mp}(s) \\ V_{my}(s) \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Donde

$$P_{11}(s) = \frac{K_{pp}}{\left[J_{eqp} + M_{heli}(l_{mc}^2 + h^2)\right] s^2 + B_p s + M_{heli} g(h\cos\bar{\theta} - l_{mc}\sin\bar{\theta})}$$

$$P_{12}(s) = \frac{K_{py}}{\left[J_{eqp} + M_{heli}(l_{mc}^2 + h^2)\right] s^2 + B_p s + M_{heli} g(h\cos\bar{\theta} - l_{mc}\sin\bar{\theta})}$$

$$P_{21}(s) = \frac{K_{yp}\cos\bar{\theta}}{\left[J_{eqy} + M_{heli}(\cos^2\bar{\theta}(l_{mc}^2 - h^2) + 2l_{mc}h\sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta} + h^2)\right] s^2 + B_y s}$$

$$P_{22}(s) = \frac{K_{yy}\cos\bar{\theta}}{\left[J_{eqy} + M_{heli}(\cos^2\bar{\theta}(l_{mc}^2 - h^2) + 2l_{mc}h\sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta} + h^2)\right] s^2 + B_y s}$$

3.9. Análisis de la ubicación de los polos al variar el punto de operación en θ

Reemplazando los valores de parámetros obtenidos en el capítulo 4, se hallan los valores propios del sistema y se encuentra que los polos de las funciones de transferencia $P_{11}(s)$ y $P_{12}(s)$ varían tomando valores complejos conjugados con parte real negativa, es decir estables, hacia raíces reales una positiva y una negativa por lo que estas funciones de transferencia se vuelven inestables a medida que el ángulo θ varía desde -40^o hacia 40^o como se aprecia en la figura 3.3.

Uno de los polos de las funciones de transferencia $P_{21}(s)$ y $P_{22}(s)$ siempre permanece en cero (integrador), mientras el otro polo se desplaza desde $-22{,}93$ hasta $-22{,}78$ a medida que el ángulo θ varía desde -40^o hacia 40^o como se aprecia en la figura 3.4.

Lo anterior muestra que entre mayor sea el ángulo θ el sistema se vuelve más complejo de controlar por la aparición del polo en el semiplano derecho.

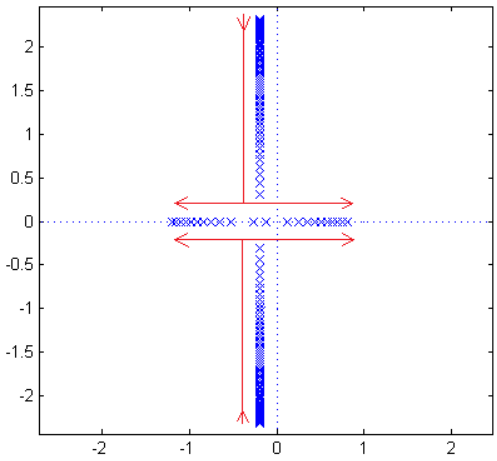


FIGURA 3.3: Movimiento de los polos en $P_{11}(s)$ y $P_{12}(s)$ al variar θ

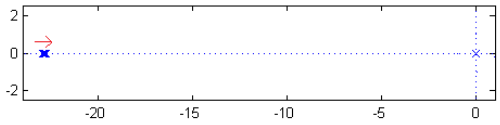


FIGURA 3.4: Movimiento de los polos en $P_{21}(s)$ y $P_{22}(s)$ al variar θ

3.9.1. Modelo lineal alrededor de $\theta = 0$

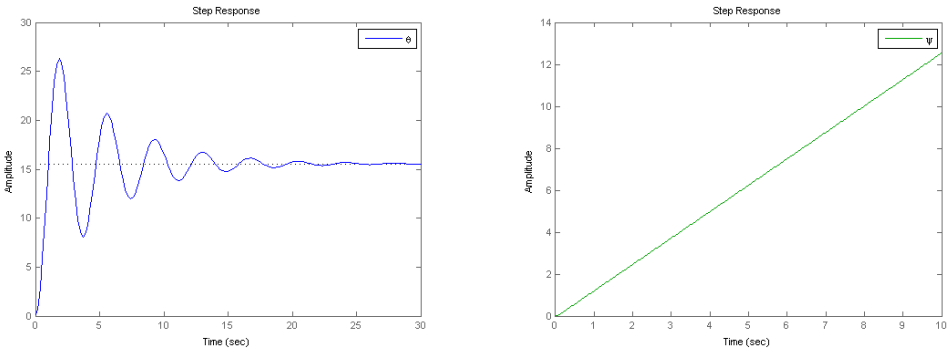
Las ecuaciones de estado del sistema para $\theta = 0^o$ están dadas como

$$A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2{,}9024 & 0 & -0{,}3958 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22{,}8191 \end{bmatrix}$$

$$B(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0{,}7880 & 0{,}0566 \\ 0{,}0562 & 0{,}5015 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{180}{\pi}$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -0{,}1979 + 1{,}6921i$, $\lambda_2 = -0{,}1979 - 1{,}6921i$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -22{,}8191$ lo que demuestra que el sistema en lazo abierto es inestable en la salida del ángulo de ψ como se puede ver en la figura 3.5.



(a) Pitch (θ) (b) Yaw (ψ)

FIGURA 3.5: Respuesta temporal alrededor de $\theta = 0$ grados

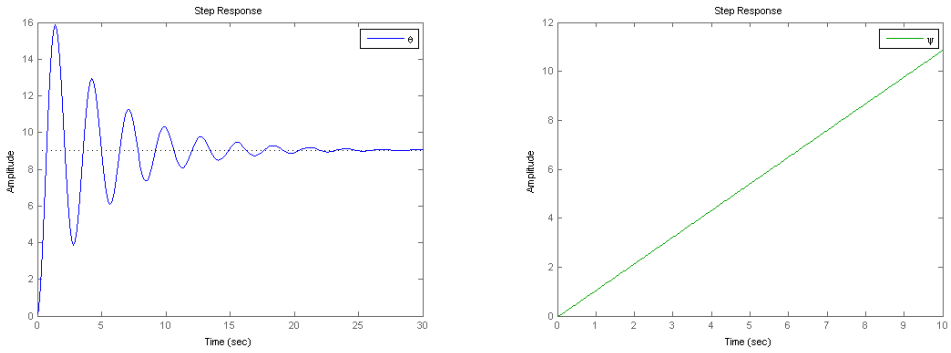
3.9.2. Modelo lineal alrededor de $\theta = -30^o$

las ecuaciones de estado del sistema para $\theta = -30^o$ están dadas como

$$A(-30^o) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4{,}9932 & 0 & -0{,}3958 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22{,}9042 \end{bmatrix}$$

$$B(-30^o) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0{,}7880 & 0{,}0566 \\ 0{,}0488 & 0{,}4359 \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = -0{,}1979 + 2{,}2258i$, $\lambda_2 = -0{,}1979 - 2{,}2258i$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -22{,}9042$.



(a) Pitch (θ) (b) Yaw (ψ)

FIGURA 3.6: Respuesta temporal alrededor de $\theta = -30^o$

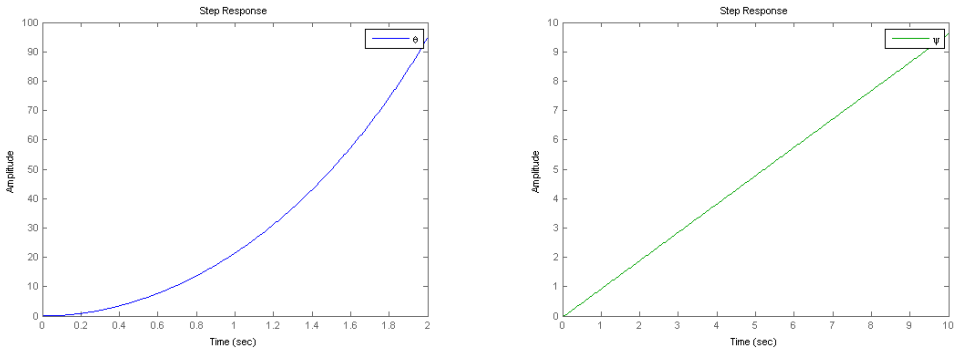
3.9.3. Modelo lineal alrededor de $\theta = 40^o$

las ecuaciones de estado del sistema para $\theta = 30^o$ están dadas como

$$A(40^o) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}9644 & 0 & -0{,}3958 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22{,}7807 \end{bmatrix}$$

$$B(40^o) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0{,}7880 & 0{,}0566 \\ 0{,}0430 & 0{,}3835 \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son $\lambda_1 = 0{,}8039$, $\lambda_2 = -1{,}1997$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -22{,}7807$ y se observa que uno de los polos pasa al semiplano derecho.



(a) Pitch (θ) (b) Yaw (ψ)

FIGURA 3.7: Respuesta temporal alrededor de $\theta = 40^o$

3.10. Controlabilidad

El teorema de Kalman [34] establece que un sistema es controlable (todos sus estados son controlables) si y solo si la matriz de controlabilidad

$$W_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Puede invertirse (tiene rango n), donde n es el orden del sistema. En el caso de los sistemas SISO esto se traduce en que el determinante de dicha matriz es diferente de cero. En el caso de los sistemas MIMO para que el sistema sea controlable, tendrá que existir una submatriz cuadrada de dimensión igual al orden del sistema cuyo determinante sea diferente de cero.

Reemplazando los valores de parámetros obtenidos en el capítulo 4 y linealizando alrededor de cero grados se obtiene

```
Wc=ctrb(A,B)
Wc =
  1.0e+003 *
         0         0    0.0008    0.0001   -0.0003   -0.0000   -0.0022   -0.0002
         0         0    0.0001    0.0005   -0.0013   -0.0114    0.0293    0.2611
    0.0008    0.0001   -0.0003   -0.0000   -0.0022   -0.0002    0.0018    0.0001
    0.0001    0.0005   -0.0013   -0.0114    0.0293    0.2611   -0.6676   -5.9592

rank(Wc) = 4
```

El rango de la matriz de controlabilidad es 4 el cual es igual al orden del sistema; entonces el sistema es controlable. Al linealizar el sistema en 90^o y -90^o el sistema pierde controlabilidad puesto que las señales de control dejan de tener influencia sobre el ángulo ψ.

3.11. Observabilidad

El teorema de Kalman [34] establece que un sistema es observable (los estados pueden ser estimados solo a partir de mediciones de la salida) si y solo si la matriz de observabilidad

$$W_c = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Tiene rango n.

Reemplazando los valores de parámetros obtenidos en el capítulo 4 y linealizando alrededor de cero grados se obtiene

```
Wo=obsv(A,C)
Wo =
    1.0000         0         0         0
         0    1.0000         0         0
         0         0    1.0000         0
         0         0         0    1.0000
   -2.9024         0   -0.3958         0
         0         0         0  -22.8191
    1.1487         0   -2.7457         0
         0         0         0  520.7112

rank(Wo) =  4
```

El rango de la matriz de observabilidad es 4 el cual es igual al orden del sistema; entonces el sistema es observable.

3.12. Conclusiones

Se halló el modelo matemático del sistema teniendo en cuenta parámetros adicionales que no se tuvieron en cuenta en el modelo proporcionado por el fabricante quanser [11], lo que permitió obtener un modelo más refinado.

Al hacer la linealización se encontró que esta depende del punto de equilibrio deseado; es decir, que la ganancia del sistema y la ubicación de los polos cambian de acuerdo al punto de operación.

Se obtuvo un modelo lineal parametrizado por θ lo cual permite hallar el modelo en el punto de operación deseado.

El sistema es inestable en lazo abierto. Al analizar la ubicación de los polos a partir de los parámetros hallados de forma experimental, se encontró que uno de los polos pasa al semiplano derecho, lo cual hace que el sistema sea más difícil de controlar. Un polo inestable impone restricciones algebraicas en la función de sensibilidad del sistema sin importar el controlador usado, lo que implica restricciones en el desempeño alcanzable de la respuesta a escalón del sistema en lazo cerrado. Cuando se tiene un polo inestable necesariamente hay sobrepico en la respuesta a escalón, y este será mayor entre mayor sea el tiempo de establecimiento en lazo cerrado [27].

CAPÍTULO *4*

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DEL HELICÓPTERO MEDIANTE PRUEBAS EN LAZO ABIERTO

4.1. Introducción

En este capítulo se muestra la forma en que fueron hallados los parámetros del helicóptero de forma experimental tomando como guía algunos experimentos propuestos por la escuela de aeronáutica y astronáutica de la universidad de Purdue [31].

Del modelo no lineal descrito en las ecuaciones 3.4 3.5 es necesario conocer los valores de los parámetros que tienen que ver con pesos de subsistemas, geometrías, fricciones estáticas o de Coulomb y constantes de torque de los actuadores.

4.2. Ecuaciones lineales del movimiento

Linealizando alrededor del punto de equilibrio inducido por $\bar{x_1} = \bar{\theta}$ constante, se obtiene el modelo lineal parametrizado por $\bar{\theta}$

$$\dot{X}_\delta = A(\bar{\theta})X_\delta + B(\bar{\theta})U_\delta$$

donde

$$X_\delta = X - \overline{X} \quad ; \quad U_\delta = U - \overline{U}$$

con

$$X_\delta = \begin{bmatrix}\delta\theta & \delta\psi & \delta\dot{\theta} & \delta\dot{\psi}\end{bmatrix}^T = [x_{1\delta} \quad x_{2\delta} \quad x_{3\delta} \quad x_{4\delta}]^T$$

$$\begin{aligned}\delta\theta &= \theta - \bar{\theta}\\ \delta\psi &= \psi - \bar{\psi}\\ \delta\dot{\theta} &= \dot{\theta} - \bar{\dot{\theta}}\\ \delta\dot{\psi} &= \dot{\psi} - \bar{\dot{\psi}}\end{aligned}$$

Y como señales de control

$$U_\delta = [\delta V_{mp} \quad \delta V_{my}]^T = [u_{1\delta} \quad u_{2\delta}]^T$$

$$\begin{aligned}\delta V_{mp} &= V_{mp} - \overline{V}_{mp}\\ \delta V_{my} &= V_{my} - \overline{V}_{my}\end{aligned}$$

Recuérdese que los valores de equilibrio son constantes. Las ecuaciones lineales del movimiento están dadas como

$$\begin{aligned}(J_{eqp} + M_{heli}(l_{mc}^2 + h^2))\delta\ddot{\theta} + B_p\delta\dot{\theta} - M_{heli}g(l_{mc}\sin\bar{\theta} - h\cos\bar{\theta})\delta\theta\\ = K_{pp}\delta V_{mp} + K_{py}\delta V_{my}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[J_{eqy} + M_{heli}\left[\cos^2\bar{\theta}(l_{mc}^2 - h^2) + l_{mc}h\sin 2\bar{\theta} + h^2\right]\right]\delta\ddot{\psi} + B_y\delta\dot{\psi}\\ = K_{yp}\cos\bar{\theta}\,\delta V_{mp} + K_{yy}\cos\bar{\theta}\,\delta V_{my}\end{aligned}$$

Como $\delta\theta = \theta - \bar{\theta}$ entonces $\delta\dot{\theta} = \dot{\theta}$, además si $\delta\dot{\theta} = \dot{\theta} - \bar{\dot{\theta}}$ entonces $\delta\ddot{\theta} = \ddot{\theta}$; entonces si se hace la linealización alrededor de $\bar{\theta} = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned}(J_{eqp} + M_{heli}(l_{mc}^2 + h^2))\ddot{\theta} + B_p\dot{\theta} + M_{heli}gh\theta \\ = K_{pp}\delta V_{mp} + K_{py}\delta V_{my}\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}(J_{eqy} + M_{heli}l_{mc}^2)\ddot{\psi} + B_y\dot{\psi} \\ = K_{yp}\,\delta V_{mp} + K_{yy}\,\delta V_{my}\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.3. Montaje experimental

En la figura 4.1 se muestra el diagrama con el montaje experimental para la identificación de parámetros, para la identificación usando algoritmo PEM y para el control en lazo cerrado del sistema.

La señal de excitación $U(K)$ (voltajes de los motores de Pitch y Yaw) es generada por el PC haciendo uso del software MATLAB. La tarjeta de adquisición de datos es la Quanser MultiQ4 mediante la cual se comunica el computador con el exterior. La señal de excitación pasa a través de una tarjeta de interfase que distribuye la señal hacia las fuentes de poder para amplificar la señal $U(K)$ y poder entregar la potencia requerida por los motores de las hélices del helicóptero. Las señal de salida $Y(K)$ (ángulos θ y ψ) se mide mediante encoders; el encoder de Pitch genera 4096 conteos/revolución para obtener una resolución de 0,0878 grados/conteo y el encoder de yaw genera 8192 conteos/revolución para obtener una resolución de 0,0439 grados/conteo.

El software para hacer el control en tiempo real es el Quanser WinCon, el cual permite compilar los diagramas de simulink y generar la aplicación de tiempo real para la escritura de la señal de excitación y lectura de la señal de salida.

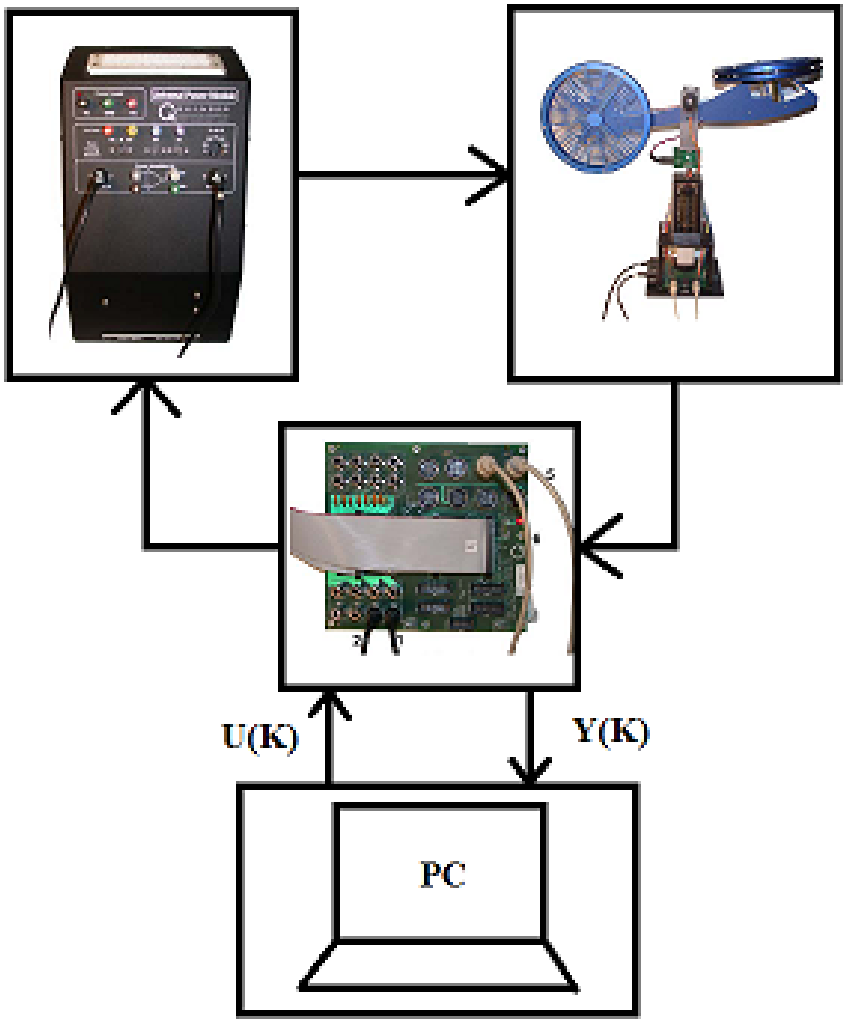


FIGURA 4.1: Montaje experimental

4.4. Identificación de l_{mc} y h

El centro de masa del helicóptero se encuentra un poco desplazado sobre el eje x puesto que sin torque externo aplicado la nariz del helicóptero cae debido a la fuerza gravitacional; entonces, para la identificación del centro de masa se ubica en el extremo contrario de la nariz del helicóptero una pequeña masa m_s de tal manera que el centro de masa de todo el sistema se desplace en X y se ubique debajo del pivote con lo cual el ángulo Pitch es cero grados (Ver figura 4.2). Ahora la masa móvil total del sistema es $m = m_s + M_{heli}$.

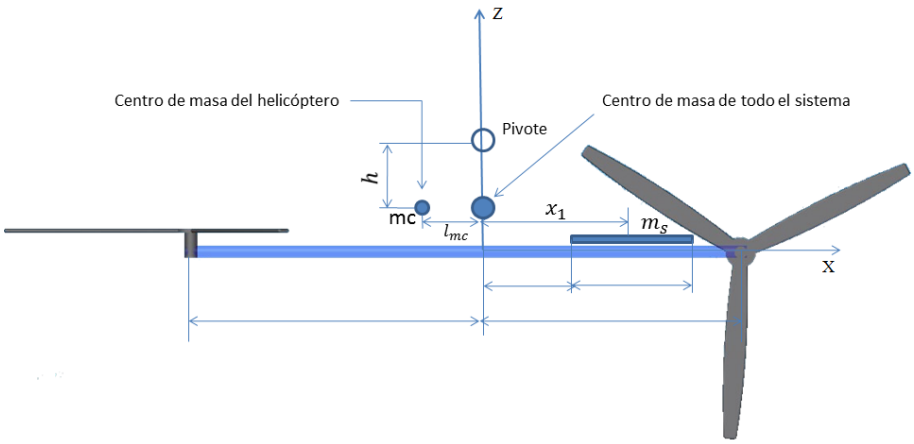


FIGURA 4.2: Sistema con el centro de masa debajo del pivote al ubicar m_s

En esta nueva condición en la que el ángulo Pitch es cero grados, es decir que la sumatoria de torques alrededor de Pitch es cero se tiene

$$M_{heli} l_{mc} = m_s x_1$$

Ahora se desplaza la pequeña masa m_s una distancia x hacia el pivote con lo cual el centro de masa de todo el sistema se desplaza y ya no queda justo debajo del pivote sino a un lado, entonces la nariz del helicóptero se inclina un pequeño ángulo (ver figura 4.3). En esta condición se cumple que

$$R_c\, m = M_{heli}\, l_{mc} - m_s\, x$$

Luego

$$R_c = \frac{M_{heli}\, l_{mc} - m_s\, x}{m}$$

Reemplazando

$$l_{mc} = \frac{m_s x_1}{M_{heli}} \tag{4.3}$$

Se obtiene

$$R_c = \frac{m_s(x_1 - x)}{m} \tag{4.4}$$

En la figura 4.3 se puede ver que

$$\tan\theta = \frac{R_c}{h} \tag{4.5}$$

El valor de la pequeña masa fue $m_s = 0{,}105Kg$ y el valor de $x_1 = 0{,}1613m$. Cuando se desplazó la pequeña masa a la distancia $x = 0{,}1413m$ el valor del ángulo fue $\theta = -8{,}77\,grados = -0{,}1531\,rad$. Reemplazando los valores anteriores en 4.3 , 4.4 y 4.5 se obtuvo las magnitudes

$$l_{mc} = 0{,}0122\,m$$
$$h = 0{,}0091\,m$$

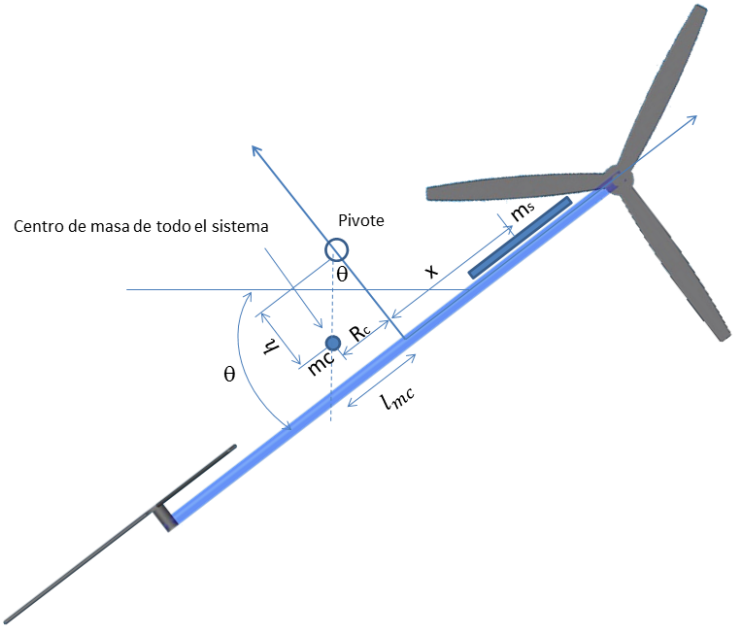


FIGURA 4.3: Centro de masa del sistema al desplazar m_s a la distancia x

4.5. Identificación del Momento de inercia J_{eqp} y coeficiente de fricción B_p

Para hallar estos parámetros se toma como referencia la ecuación linealizada del movimiento alrededor de $\bar{\theta} = 0$ 4.1. Primero se amarra el sistema en el eje Yaw

para que no haya movimiento en Yaw con lo que se consigue que $\dot{\psi} = 0$; ahora, sin encender los motores, se ubica la pequeña masa m_s en x_1 para balancear el helicóptero y llevarlo a la condición de $\bar{\theta} = 0$; la masa m_s se pega de forma fija para que no se mueva con el movimiento del helicóptero. La ubicación de la pequeña masa resulta en un cambio en el momento de inercia del helicóptero, en este caso, la ecuación linealizada del movimiento es

$$J'_p\ddot{\theta} + B_p\dot{\theta} + mgh\theta = 0 \tag{4.6}$$

Con

$$m = M_{heli} + m_s \qquad , \qquad l_{mc} = 0$$

Donde el nuevo momento de inercia es

$$J'_p = [J_{eqP} + mh^2] + m_s x_1^2$$

Tomando como condiciones $\theta(0) \neq 0$ (aprox 5^o por que se aproxima a lineal) y $\dot{\theta} = 0$ la solución de la ecuación 4.6 es para el caso subamortiguado, porque las raíces son complejas conjugadas lo cual se puede evidenciar en el comportamiento temporal de la figura 4.4.

$$\theta(t) = \theta(0)e^{-\sigma t}\cos(wt)$$

Donde

$$\sigma = \frac{B_p}{2J'_p}$$

Y

$$w = \sqrt{\frac{mgh}{J'_p} - \sigma^2}$$

Se tomaron los datos del sistema real con una condición inicial $\theta(0) = 4{,}85^o$ y $\dot{\theta}(0) = 0$ cuya respuesta temporal se puede ver en la figura 4.4.

A partir de la figura 4.4 se determinó T, τ, σ y w para luego calcular J_{eqp} y B_p.

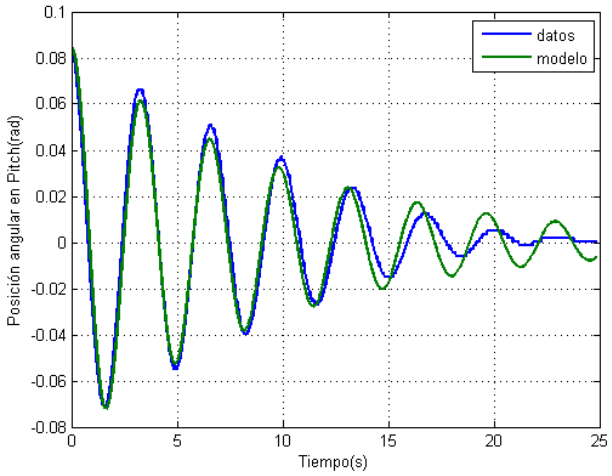


FIGURA 4.4: Respuesta del sistema con motores apagados y condición inicial de $4,85^o$

- $T = 3{,}27\ [s]$ periodo de la señal
- $\tau = 10{,}2960\ [s]$ Constante de tiempo del sistema
- $\sigma = \frac{1}{\tau} = 0{,}0971\ [s^{-1}]$ Coeficiente de amortiguamiento del sistema en pitch.
- $w = \frac{2\pi}{T} = 1{,}9215\ [\frac{rad}{s}]$ Frecuencia angular amortiguada
- $J'_p = \frac{mgh}{(w^2+\sigma^2)} = 0{,}0361\ [Kgm^2]$ Momento de inercia del helicóptero mas la masa equilibrada.
- $J_{eqp} = J'_p - m_s x_1^2 - mh^2 = 0{,}0332\ [kgm^2]$ momento de inercia con respecto al eje de pitch del helicóptero.
- $B_p = 2\sigma J'_p = 0{,}0070\ [\frac{Nms}{rad}]$ Coeficiente de fricción en el eje de pitch.

Como J'_P y B_P son calculados por la aproximación lineal, ellos no representan exactamente los parámetros; entonces se debe simular la ecuación no lineal de movimiento. $\dot{\psi} = 0$ ya que el helicóptero se fija para que no haya movimiento en Yaw. Se simula

$$J'_P\ddot{\theta} + B_p\dot{\theta} + mgh\sin\theta = 0$$

Se toman los valores obtenidos de J'_P y B_p obtenidos anteriormente como punto de partida y se ajustan en la simulación para que la simulación se acerque lo más posible a los datos reales.

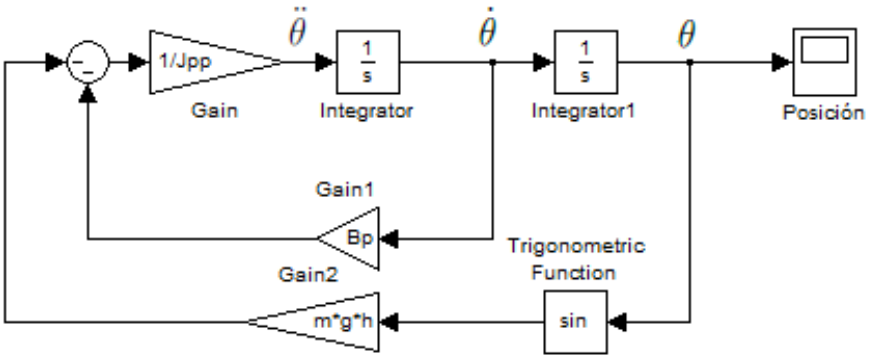


FIGURA 4.5: Diagrama de Simulink para la ecuación no lineal en Pitch

4.6. Identificación del Momento de inercia J_{eqy} y coeficiente de fricción B_y

Se equilibra el helicóptero con la masa m_s de tal forma que $\bar{\theta} = 0$. La masa m_s se pega de forma fija para que no se mueva con el movimiento del helicóptero y se amarra el sistema alrededor del eje Pitch para que $\dot{\theta} = 0$. La masa total del sistema ahora es $m = M_{heli} + m_s$ y la posición en X del centro de masa se traslada a $l_{mc} = 0$ con lo que la ecuación del movimiento en Yaw queda definida como

$$J_{eqy}\ddot{\psi} + B_y\dot{\psi} = 0$$

Supondremos que $J_{yaw} \simeq J_{eqp}$ por la geometría del helicóptero; y además como

$$J_{eqy} = J_{yaw} + J_{shaft}$$

Donde J_{shaft} es proporcionado por el fabricante quanser; entonces

$$(J_{yaw} + J_{shaft})\ddot{\psi} + B_y\dot{\psi} = 0$$

La anterior es una ecuación diferencial de primer orden en $\dot{\psi}$ cuya solución es

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}(0)e^{-\sigma t}$$

Donde

$$\sigma = \frac{B_y}{(J_{yaw} + J_{shaft})}$$

Se tomaron los datos del cambio de posición en Yaw muestreados a partir del movimiento en Yaw generado por un impacto. Como los datos son posiciones, estos se deben derivar para obtener la velocidad usando el siguiente diagrama.

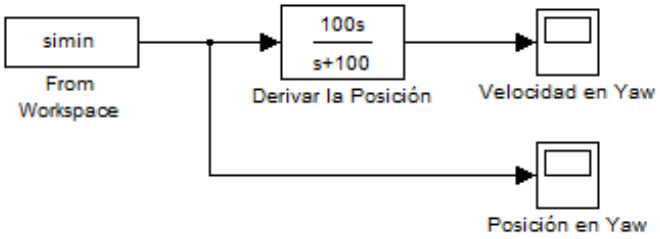


FIGURA 4.6: Diagrama de simulink usado para derivar la posición en Yaw ante el impacto

Tomando en la figura 4.7 $\dot{\psi}(0)$, se ajusta el valor de σ para que la curva simulada de $\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}(0)e^{-\sigma t}$ sea casi igual a los datos de velocidad hasta aproximadamente un 30 % de $\dot{\psi}(0)$ ya que la respuesta se ve fuertemente afectada por la fricción de coulomb.

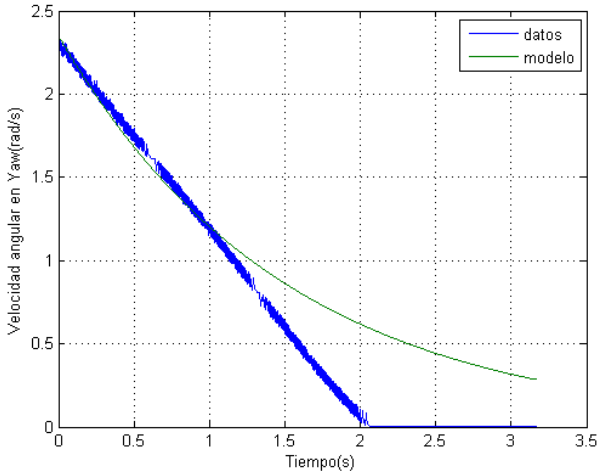


FIGURA 4.7: Comportamiento real y simulado de la respuesta del sistema ante un impulso

A partir de la figura 4.7 se determinan los parámetros de la ecuación $\dot{\psi}(t) = \dot{\psi}(0)e^{-\sigma t}$ para luego calcular B_y.

- $A = 2{,}35$ $[\frac{rad}{s}]$ Condición inicial.
- $\sigma = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}6667$ $[s^{-1}]$ Coeficiente de amortiguamiento del sistema en Yaw.
- $y = Ae^{-\sigma t}$ $[\frac{rad}{s}]$ Ecuación que modela aproximadamente la dinámica y condiciones iniciales de este sistema.
- $J_{shaft} = 0{,}0039$ $[kg.m^2]$ Momento de inercia del eje de rotación con respecto a Yaw proporcionado por el fabricante.
- $J_{yaw} = J_{eqp} = 0{,}0332$ $[kg.m^2]$ Aseveración valida por la similitud de la distribución de masas con respecto a los ejes de Pitch y Yaw.
- $B_y = \sigma(J_{yaw} + J_{shaft}) = 0{,}0247$ $[\frac{kg.m.s}{rad}]$.

4.7. Identificación de K_{pp} y K_{py}

Para determinar K_{pp} el motor de Yaw se mantiene apagado y al helicóptero se le restringe el movimiento en Yaw con lo que se tiene que $\dot{\psi} = 0$. Después de cierto tiempo de aplicar un voltaje constante al motor de Pitch, el ángulo θ tiende a quedarse estable con una pequeña oscilación; es decir, que $\dot{\theta} \simeq 0$ y $\ddot{\theta} \simeq 0$. El voltaje en Pitch se aumentó desde 9 hasta 14 Voltios en incrementos de 1 voltio. La ecuación en Pitch en estado estable se reduce a

$$M_{heli}g(l_{mc}\cos\theta + h\sin\theta) = K_{pp}V_p + F_{cpp} = \tau_{pp}$$

Donde F_{cpp} es el parámetro que describe la fricción de coulomb. Al tomar los datos de posición de Pitch en cada uno de los voltajes de 9 a $14V$ con aumentos de la unidad se obtuvieron posiciones estables en pitch para cada voltaje con oscilaciones pequeñas, por lo que se promediaron los datos de cada posición para mayor precisión y exactitud. La curva obtenida de torque en Pitch contra voltaje se puede aproximar usando mínimos cuadrados a una ecuación lineal de la forma $\tau_{pp} = K_{pp}V_{mp} + F_{cpp}$ la cual se aproxima bastante a los datos

$$\begin{aligned} \tau_{pp} &= \begin{bmatrix} -0{,}6809 & -0{,}5808 & -0{,}4679 & -0{,}3072 & -0{,}0858 & 0{,}0404 & 0{,}2176 \end{bmatrix} \\ V_{mp} &= \begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 13{,}5 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

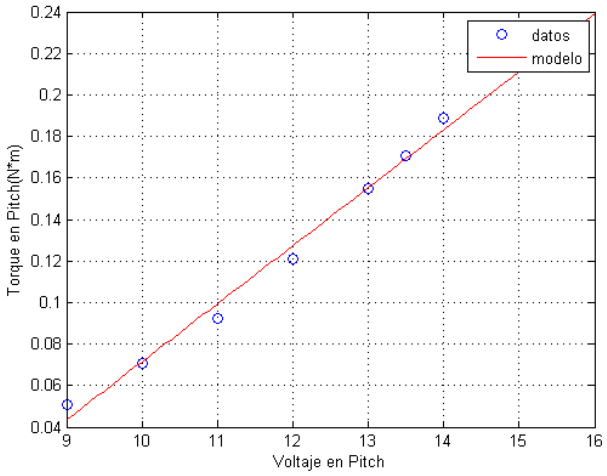


FIGURA 4.8: Torque en Pitch contra Voltaje en Pitch

La ecuación obtenida es $\tau_{pp} = K_{pp}V_{mp} + F_{cpp} = 0{,}0279V_{mp} - 0{,}2080$, cuya aproximación se puede ver en la figura 4.8.

Para encontrar K_{py} se restringe el movimiento en Yaw del helicoptero y se obtiene $\dot{\psi} = 0$. Se le aplica el voltaje de equilibrio en Pitch$(13{,}5V)$ manteniendo de esta forma el helicoptero en una posicion estable alrededor de los 0^o, por lo que cualquier cambio en posicion de Pitch será consecuencia de voltajes en Yaw, y la ecuación que rije el movimiento está dada por

$$M_{heli}g(l_{cm}\cos\theta + h\sin\theta) - K_{pp}(13{,}5) - 0{,}2080 = K_{py}V_{my} + F_{cpy} = \tau_{py}$$

Se tomaron datos de la posicion en pitch debido a cambios en los voltajes de Yaw y a partir de ellos se observó que el comportamiento ante voltajes negativos y positivos superiores a $|3|$ era el mismo, la cual es fielmente reproducido por la ecuación $\tau_{py} = K_{py}V_{mp} + F_{cpy} = 0{,}0029V_{my} + 0{,}0064$ que se obtuvo al interpolar los datos arrojados por los experimentos.

$$\begin{aligned} \tau_{py} &= \begin{bmatrix} -0{,}0028 & -0{,}0108 & -0{,}02 & -0{,}0291 \end{bmatrix} \\ V_{my} &= \begin{bmatrix} -3 & -6 & -9 & -12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

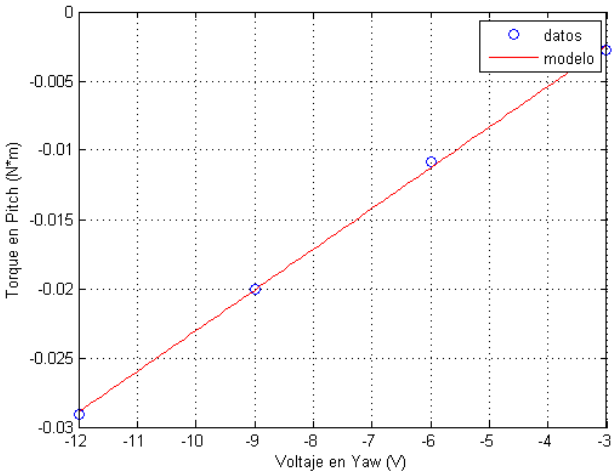


FIGURA 4.9: Torque en Pitch contra Voltaje en Yaw

4.8. Identificacion de K_{yy} y K_{yp}

Para identificar K_{yy} el helicóptero se amarró en Pitch de tal forma que $\bar{\theta} = 0$ y $\dot{\theta} = 0$, además el motor de Pitch se mantiene apagado por lo que la ecuación del movimiento en Yaw se reduce a

$$(J_{eqy} + M_{heli} l_{mc}^2)\ddot{\psi} + B_y \dot{\psi} = K_{yy} V_{my} + F_{cyy}$$

La anterior es una ecuación diferencial estable de primer orden en $\dot{\psi}$, cuya solución en estado estacionario será

$$\dot{\psi}(\infty) = \frac{K_{yy}}{B_y} V_{my} + \frac{F_{cyy}}{B_y}$$

Se tomaron los datos de la posicion en Yaw variando el voltaje de Yaw desde $-6V$ hasta $-12V$ esperando en cada medicion que la velocidad angular en yaw se mantuviera constante. Una vez la velocidad en Yaw es constante, la curva de Posición Vs tiempo es una línea recta, entonces la pendiente de la curva es la velocidad. Los datos obtenidos fueron

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\infty) &= \begin{bmatrix} -1{,}0897 & -2{,}2327 & -5{,}5029 & -7{,}6022 & -9{,}5581 & -11{,}2 & -12{,}6 \end{bmatrix} \\ V_{my} &= \begin{bmatrix} -6{,}5 & -7 & -8 & -9 & -10 & -11 & -12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con los cuales se obtuvo la gráfica 4.10, en la cual la curva es aproximada una ecuación de primer orden usando mínimos cuadrados.

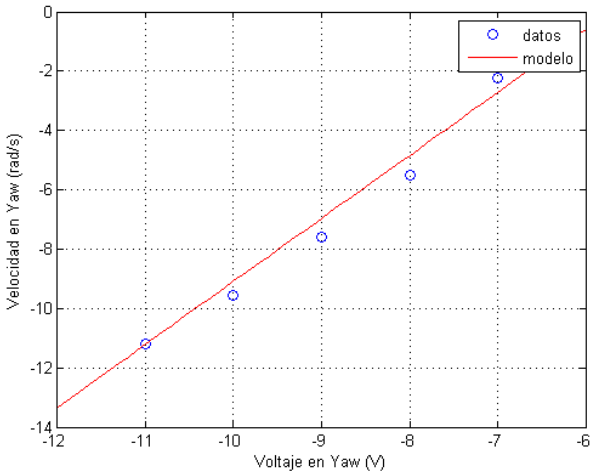


FIGURA 4.10: Velocidad en Yaw contra Voltaje en Yaw

Como la pendiente de la gráfica 4.10 es $\alpha_{yy} = \frac{K_{yy}}{B_y}$ entonces

$$K_{yy} = \alpha_{yy} B_y$$

Y finalmente

$$\tau_{yy} = K_{yy} V_{my} + F_{cyy} = 0{,}0525 V_{my} + 0{,}3004$$

Para determinar K_{yp} el experimento fue exactamente el mismo con la diferencia que el motor encendido fue el de Pitch por lo que la ecuación del movimiento en Yaw es

$$(J_{eqy} + M_{heli} l_{mc}^2)\ddot{\psi} + B_y \dot{\psi} = K_{yp} V_{mp} + F_{cyp}$$

La anterior es una ecuación diferencial estable de primer orden en $\dot{\psi}$, cuya solución en estado estacionario será

$$\dot{\psi}(\infty) = \frac{K_{yp}}{B_y} V_{mp} + \frac{F_{cyp}}{B_y}$$

Los datos obtenidos fueron

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{promedio} &= \begin{bmatrix} 0{,}0063 & 0{,}0134 & 0{,}0155 & 0{,}0795 \end{bmatrix} \\ V_{mp} &= \begin{bmatrix} 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Con los cuales se obtuvo la gráfica 4.11, en la cual la curva es aproximada una ecuación de primer orden usando mínimos cuadrados.

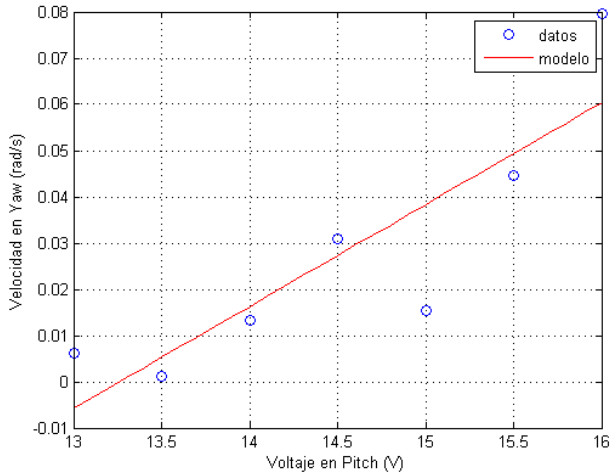


FIGURA 4.11: Velocidad en Yaw contra voltaje en Pitch

De igual forma, la pendiente de la gráfica 4.11 es $\alpha_{yp} = \frac{K_{yp}}{B_y}$ entonces

$$K_{yp} = \alpha_{yp} B_y$$

Y finalmente

$$\tau_{yp} = K_{yp} V_{mp} + F_{cyp} = 0{,}0005 V_{mp} - 0{,}0072$$

4.9. Valores de parámetros obtenidos

En la tabla 4.1 se hace una comparación entre el valor de los parámetros hallados por identificación (IDENT) y los proporcionados por la empresa QUANSER quienes son los diseñadores de la planta; se puede ver que la mayoría de los valores se diferencian considerablemente.

Tabla 4.1: Comparación con los datos proporcionados por Quanser

Símbolo	**QUANSER**	**IDENT**	**Unidades**
K_{pp}	0.204	0.0279	N.m/V
K_{py}	0.0068	0.0029	N.m/V
K_{yp}	0.0219	0.0005	N.m/V
K_{yy}	0.072	0.0525	N.m/V
B_p	0.800	0.0070	N/V
B_y	0.318	0.0247	N/V
J_{eqp}	0.0384	0.0332	kg.m^2
J_{eqy}	0.0432	0.0371	kg.m^2
l_{mc}	0.00186	0.0122	m
h		0.0091	m
M_{heli}	1.3872		kg

4.10. Conclusiones

Para realizar los experimentos que permitieron identificar la ubicación del centro de masa (l_{mc} y h), fue necesario contar con el dato proporcionado por el fabricante correspondiente a la masa del helicóptero y obtener una medida bastante exacta de la pequeña masa m_s que se midió con una báscula electrónica. Antes de hacer este experimento se halló la condición inicial del ángulo Pitch el cual es $-40{,}5^o$ porque la nariz del helicóptero cae debido a que el centro de masa está desplazado en x.

El momento de inercia equivalente en Pitch y el coeficiente de fricción viscosa B_p fueron determinados con bastante exactitud, pues como se puede ver en la figura 4.4 la respuesta temporal del modelo y del sistema real son muy cercanas.

la aproximación que $J_{yaw} = J_{eqp}$ es una aseveración válida por la similitud de la distribución de masas con respecto a los ejes θ y ψ.

La identificación de B_y se ve fuertemente afectada por la fricción de coulomb, razón por la cual el valor de este parámetro tiene cierto grado de incertidumbre.

La aproximación de la conversión de voltaje a torque por simples constantes es muy buena, pues como se puede ver en las figuras 4.8, 4.9, 4.10 la aproximación lineal se ajusta con mucha precisión a los datos reales; sin embargo, el experimento para hallar K_{yp} tiene mucha incertidumbre y la aproximación lineal no es tan buena, debido a que el sistema al rotar en ψ se ve fuertemente afectado por la fricción de Coulomb, razón por la cual con voltajes pequeños ni siquiera se mueve.

En general la identificación de parámetros fue exitosa, pues en base a estos valores se diseñaron los controladores estabilizantes para la identificación en caja negra y la respuesta del modelo simulado era muy cercana a la del sistema real.

CAPÍTULO 5

IDENTIFICACIÓN DEL HELICÓPTERO USANDO MÉTODO DE PREDICCIÓN DE ERROR

5.1. Introducción

En este capitulo se describen algunas consideraciones necesarias para llevar a cabo un adecuado proceso de identificación en lazo cerrado. La planta es inestable en lazo abierto, por lo tanto fue necesario diseñar controladores estabilizantes para estabilizar la planta alrededor de diferentes puntos de equilibrio y luego excitar el sistema con señales de prueba que generaban desviaciones pequeñas alrededor del punto con el fin de obtener modelos lineales.

El algoritmo PEM o Método de Predicción de error es un algoritmo de identificación en caja negra cuyo resultado es una ecuación de estado discreta de orden n que representa la dinámica del sistema.

Fue necesario hacer identificación basada en señales porque la identificación de parámetros se hizo generalmente de forma estática, mientras que la identificación excitando el sistema con señales de prueba permite obtener las características dinámi-

cas y frecuenciales del mismo.

Se muestran los modelos lineales obtenidos a través del proceso de identificación usando el método de predicción de error luego de hacer una reducción del orden de los modelos.

5.2. Consideraciones para el proceso de identificación en lazo cerrado

Para la identificación del sistema se hace necesario estabilizar la planta puesto que es inestable en lazo abierto; para ello se debe tener una idea de la dinámica (modelo) para diseñar un controlador en lazo cerrado adecuado y excitar con señales de prueba en el rango de frecuencias donde se tiene la dinámica predominante.

A partir del modelo lineal obtenido de la planta y usando los parámetros hallados de forma experimental se traza el diagrama de bode 5.1 del sistema linealizado alrededor de cero grados 3.9 3.10 puesto que es el punto de trabajo mas usual y el que genera mayor torque en el eje Pitch, se halla la frecuencia angular de corte en Pitch y la frecuencia angular de cruce de ganancia en Yaw. Al analizar el diagrama de bode se determina que la dinámica predominante se encuentra una década antes de la frecuencia de cruce y una década después de la frecuencia de cruce, lo cual nos permite determinar el rango frecuencial con que se debe excitar el sistema; éste análisis previo es necesario, pues de lo contrario se podría tener la situación en la cual los modelos resultantes podrían no predecir la dinámica del sistema o predecirlo parcialmente en cierto rango de frecuencias.

Cualquier controlador no hace posible la identificación de forma satisfactoria; hay que lograr que el control diseñado no borre la dinámica de la planta que se quiere identificar; además, debe ser lo más sencillo posible para que sea fácil despejar a partir del modelo obtenido en lazo cerrado el modelo de la planta.

En la elaboración del modelo se tuvo en cuenta que la dinámica de los motores es muy rápida comparada con la dinámica del helicóptero (la velocidad de los motores alcanza el estado estacionario en un tiempo cercano a $50ms$), entonces se puede aproximar la conversión de voltaje a torque por una constante.

5.3. Control LQR con efecto integral para identificación

A partir del modelo lineal de la planta alrededor de cero grados, se traza el diagrama de Bode, se halla la frecuencia angular de corte en Pitch y la frecuencia angular de cruce de ganancia en Yaw en lazo abierto y se diseña un controlador de tal forma que la frecuencia de corte del sistema en lazo cerrado sea menor o igual que las frecuencia de corte y de cruce de ganancia en lazo abierto para no perder la dinámica de la planta; en síntesis, el ancho de banda de lazo cerrado debe ser menor o igual al ancho de banda de lazo abierto [19].
Es muy importante la consideración anterior por el hecho de que el objetivo principal del control en lazo cerrado es hacer insensible la dinámica entrada-salida del sistema en lazo cerrado a variaciones paramétricas de la planta.
Recordando el teorema de Black escrito para sistemas MIMO con L, F, S(función de sensibilidad) y T(función de sensibilidad complementaria).

$$\begin{aligned} L &= PK \\ F &= I + PK \\ S &= (I + PK)^{-1} \\ T &= PK(I + PK)^{-1} \end{aligned}$$

que afirma que "La influencia de las perturbaciones se ve muy atenuada en un sistema en lazo cerrado si"

$$|L| \gg I, \qquad |F| \gg I$$

entonces

$$S \approx 0$$

La magnitud de función del lazo (L) es $\gg I$ cuando la ganancia de la planta (P), del controlador (K) o ambas es grande; si la ganancia de la función de lazo es grande implica que el ancho de banda del sistema en lazo cerrado es grande y por lo tanto la respuesta temporal es rápida.
El hecho de que la función de sensibilidad (S) sea ≈ 0 conlleva a que los cambios de la planta (P) en lazo abierto serán poco perceptibles en el sistema de lazo cerrado (T).

Para el diseño del controlador LQR con efecto integral se definen dos nuevos estados (integral del error en Pitch e integral del error en Yaw) resultando la siguiente representación de estado aumentada del sistema en lazo abierto [19]

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_\delta \\ \dot{X}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\delta \\ X_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_\delta$$

Donde los dos nuevos estados son

$$X_i = [\alpha \qquad \zeta]^T$$

El control LQR minimiza la función de costo

$$J = \int x^T Q x + u^T R u$$

La función de costo nos indica que le podemos dar prioridad a ciertos estados, y darle pesos a las señales de control. El sistema en lazo cerrado con el controlador LQR es un modelo de orden 6, puesto que el modelo de la planta linealizada es de orden 4 y el sistema aumentado se vuelve de orden 6 por los dos integradores del error en Pitch y Yaw.

El diseño del control LQR proporciona un vector de ganancias para el sistema aumentado el cual se debe separar en dos: los primeros cuatro elementos del vector son las ganancias proporcionales K y los otros dos son las ganancias integrales K_i. Luego, el sistema en lazo cerrado con el compensador LQR es

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_\delta \\ \dot{X}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\delta \\ X_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u_\delta$$

$$Y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\delta \\ X_i \end{bmatrix}$$

El diagrama de bode del modelo del helicóptero linealizado alrededor de cero grados se puede ver en la figura 5.1

La frecuencia angular de corte en Pitch es $2{,}99\,rad/s$ y la frecuencia de cruce de ganancia en Yaw es $1{,}09\,rad/s$. Para cada punto de equilibrio se debe diseñar un controlador LQR de tal forma que el ancho de banda del sistema en lazo cerrado sea menor o igual al ancho de banda del sistema en lazo abierto con el fin de no borrar la dinámica de la planta.

Aunque se conoce la representación de estado del sistema en lazo cerrado con el controlador LQR, cuando se hace el proceso de identificación se obtiene una

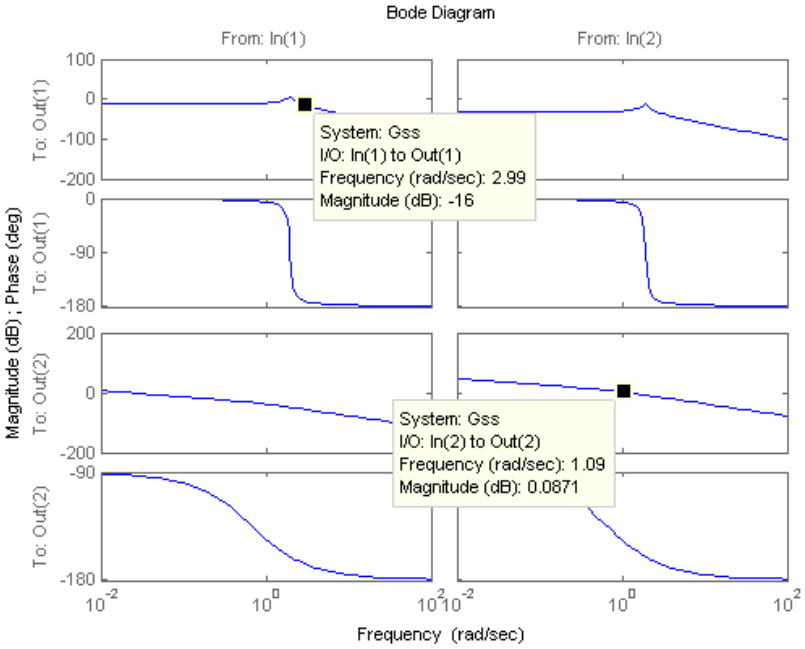


FIGURA 5.1: Bode de la planta en lazo abierto para $\bar{\theta} = 0$

representación de estado diferente (recordar que un sistema tiene infinitas representaciones), luego no es posible a partir de ese sistema despejar la planta. Para solucionar el problema anterior se construye un observador tomando como modelo de referencia el modelo linealizado y se cierra el lazo haciendo uso del observador. Al esquema de realimentación de estado con observador se le llama Control Basado en Observador.

5.4. Control basado en observador

Con base en el controlador LQR con efecto integral propuesto en el apartado anterior se diseña un observador. Un observador es un sistema dinámico que simula el comportamiento del sistema real y se usa para estimar los estados del mismo [34].

El control basado en observador representado en la figura 5.2 se puede describir de forma matricial como

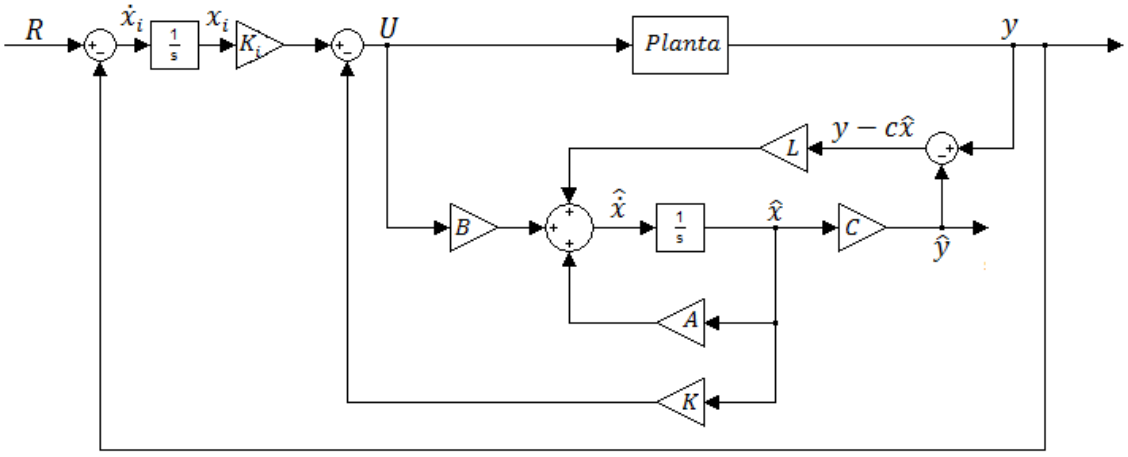


FIGURA 5.2: Diagrama de bloques de controlador basado en observador

$$\begin{aligned} \dot{X}_i &= IR - IY \\ \dot{\hat{X}}_\delta &= A\hat{X}_\delta + BU_\delta + L(Y - C\hat{X}_\delta) \\ U_\delta &= -K\hat{X}_\delta + K_i X_i \end{aligned}$$

I es la matriz identidad; reemplazando U_δ

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}_\delta &= A\hat{X}_\delta + B(-K\hat{X}_\delta + K_i X_i) + L(Y - C\hat{X}_\delta) \\ \dot{\hat{X}}_\delta &= (A - BK - LC)\hat{X}_\delta + BK_i X_i + LY \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_\delta \\ \dot{X}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK - LC & BK_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_\delta \\ X_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & L \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ Y \end{bmatrix}$$

$$U_\delta = \begin{bmatrix} -K & K_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_\delta \\ X_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ Y \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

El controlador se puede ver como un controlador de dos grados de libertad (2DOF).

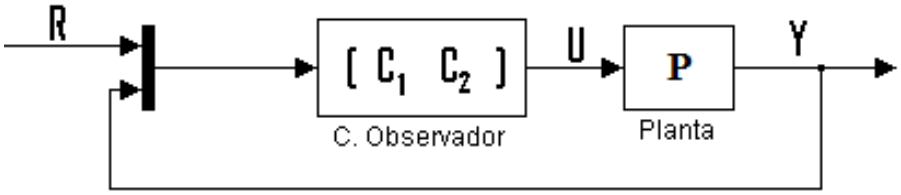


FIGURA 5.3: Diagrama de bloques del control basado en observador visto como controlador de 2DOF

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}}_{C_1} \underbrace{\begin{bmatrix} K_{13} & K_{14} \\ K_{23} & K_{24} \end{bmatrix}}_{C_2} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

Donde

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_r \\ \psi_r \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta\psi \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta V_{mp} \\ \delta V_{my} \end{bmatrix}$$

el sistema puesto como un controlador de 2 grados de libertad en forma general es

$$U = C_1 R + C_2 Y$$

con

$$Y = PU$$

Entonces

$$\begin{aligned} Y &= P(C_1 R + C_2 Y) \\ Y &= PC_1 R + PC_2 Y \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} Y - PC_2Y &= PC_1R \\ [I - PC_2]\,Y &= PC_1R \\ Y &= [I - PC_2]^{-1}\,PC_1R \end{aligned}$$

La función de transferencia en lazo cerrado es

$$T = [I - PC_2]^{-1}\,PC_1$$

Y finalmente se despeja la función de transferencia de la planta P como

$$\begin{aligned} [I - PC_2]\,T &= PC_1 \\ IT - PC_2T &= PC_1 \\ IT &= P\,[C_1 + C_2T] \end{aligned}$$

$$P = T\,[C_1 + C_2T]^{-1} \tag{5.2}$$

En cada punto de equilibrio se hicieron alrededor de 30 experimentos con diferentes pesos en la matriz Q hasta obtener resultados satisfactorios en cuanto al ajuste de los modelos a los datos. Se eligió la matriz Q que en cada punto de equilibrio arrojó el mejor ajuste de datos. La matriz R fue la misma para todos los puntos de equilibrio elegidos y las señales de excitación también lo fueron.

$$R = diag([0{,}1 \quad 0{,}1])$$

La señal binaria pseudoaleatoria de referencia en Pitch tuvo un periodo de muestreo de $10ms$, con amplitud de 5^o, y banda $[0 \quad 1/400]$, es decir que la señal se mantiene constante sobre un intervalo de tiempo mínimo de $400 * 10ms = 4s$. La señal binaria pseudoaleatoria de referencia en Yaw tuvo un periodo de muestreo de $10ms$, con amplitud de $7{,}5^o$, y banda $[0 \quad 1/2000]$.

La desviación alrededor de cada punto de equilibrio fue de 5 grados en Pitch y alrededor de 10 grados en Yaw; se eligió ese valor de desviación porque los modelos lineales obtenidos para esos valores de desviación eran muy buenos, una desviación mayor provocaba que se alejara mucho del punto de equilibrio y los modelos lineales obtenidos tenían un fit muy bajo. El valor fit representa el ajuste del modelo a los datos experimentales, el cual se calcula como

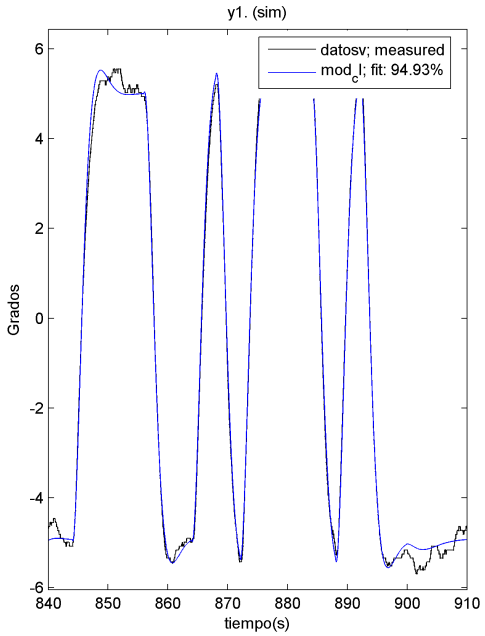
$$fit = 100\left(1 - \frac{|yh - y|}{|y - \overline{y}|}\right)$$

El tamaño de los vectores de datos de excitación Pitch y Yaw fue de 200.000 muestras con un periodo de muestreo de 10 milisegundo. Basta con 10 milisegundos de periodo de muestreo para obtener un modelo continuo muy aproximado puesto que la dinámica del sistema es lenta. Se usó la mitad del vector de datos para identificación y la otra mitad para validación.

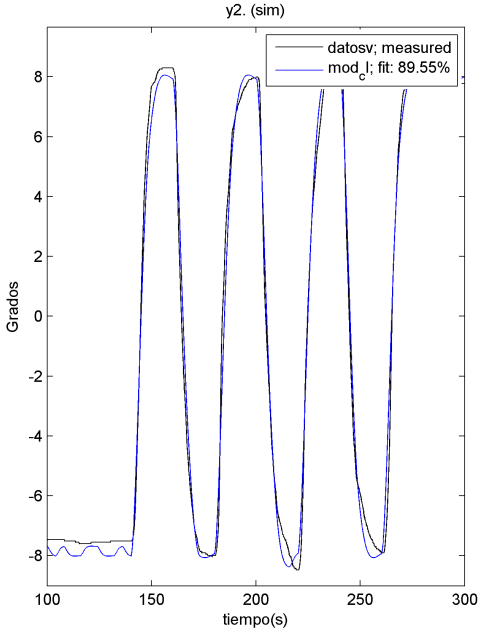
Los polos del observador se ubican mucho más lejos de los polos dominantes del sistema en lazo cerrado (se ubican en -100, -110,-120 y -130) de tal forma que el sistema en lazo cerrado con el observador se aproxime a un sistema de orden 6, es decir, como si fuera un LQR con efecto integral sin observador. Los polos del sistema en lazo cerrado se encuentran en $\lambda_1 = -0{,}2510$, $\lambda_2 = -0{,}7635 - 0{,}6053j$, $\lambda_3 = -0{,}7635 + 0{,}6053j$, $\lambda_4 = -2{,}9456$, $\lambda_5 = -7{,}7058$, , $\lambda_6 = -9{,}6742$.

A partir del diagrama de bode del modelo linealizado de la planta 5.1 se puede determinar que la dinámica predominante en Yaw se encuentra en el rango comprendido entre 1 década antes de las frecuencias de cruce de ganancia ($0{,}11 rad/s$) hasta una década después de las frecuencias de cruce ($11 rad/s$); de igual forma en Pitch la dinámica predominante se encuentra entre $0{,}3 rad/s$ y $30 rad/s$. Los modelos obtenidos de la planta por identificación son de alto orden, entonces al hacer reducción del orden del modelo se debe tener en cuenta que la dinámica del modelo aproximado de orden menor,sea muy semejante al modelo de alto orden en el rango de frecuencias donde se tiene la dinámica predominante.

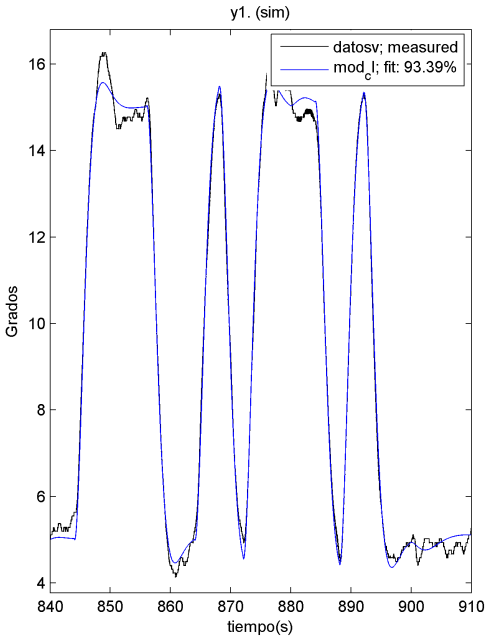
En las figuras 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7 se observa el ajuste del modelo a los datos alrededor de cada punto de equilibrio. Se puede ver que los modelos en Pitch tienen muy buen acople respecto a los datos experimentales pues en casi todos los puntos de operación fue superior al 90 %; el ajuste en yaw fue un poco menor debido a que esta salida se ve fuertemente afectada por la fricción de coulomb.



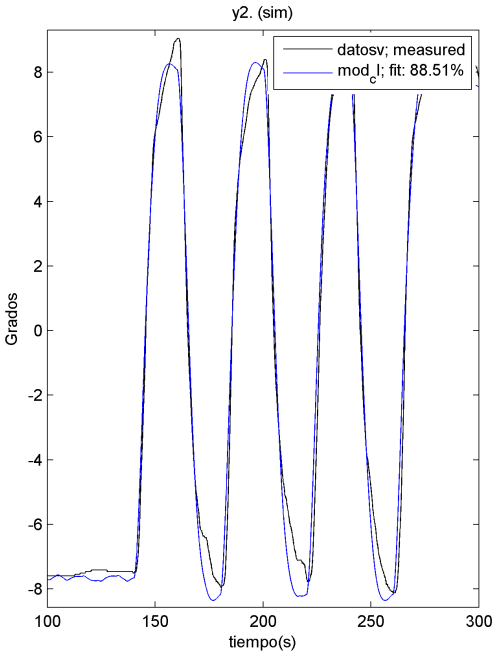
(a) Pitch ($\theta = 0^o$)



(b) Yaw ($\theta = 0^o$)

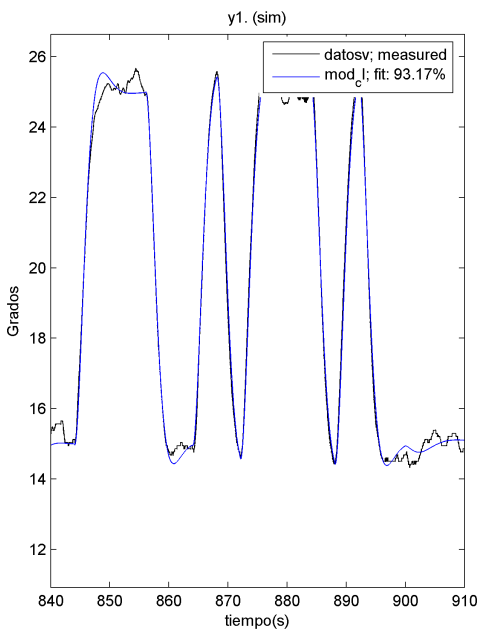


(c) Pitch ($\theta = 10^o$)

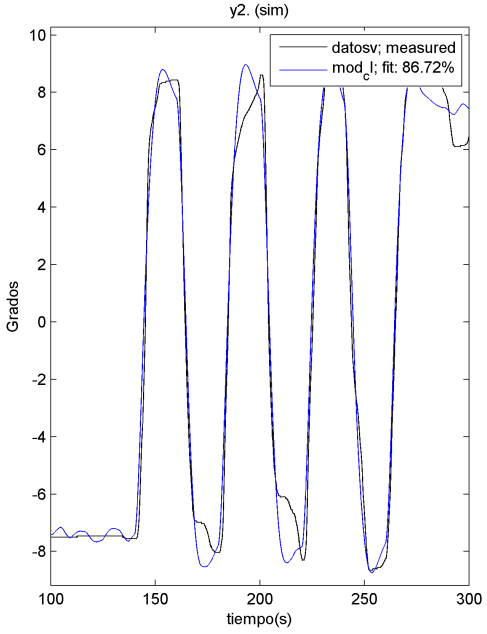


(d) Yaw ($\theta = 10^o$)

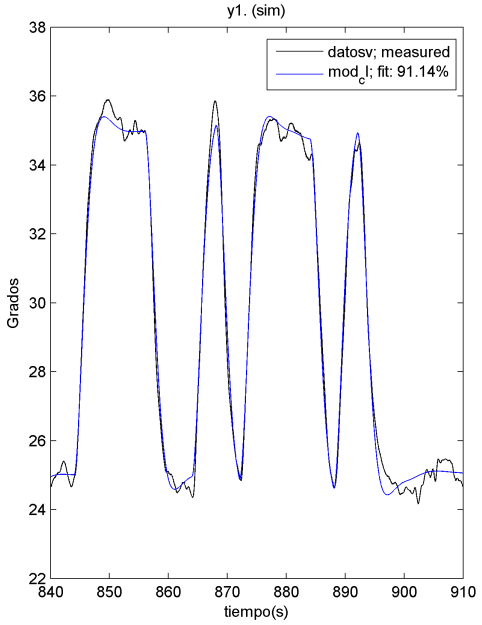
FIGURA 5.4: Ajuste del modelo a los datos ($\theta = 0^o$) y ($\theta = 10^o$)



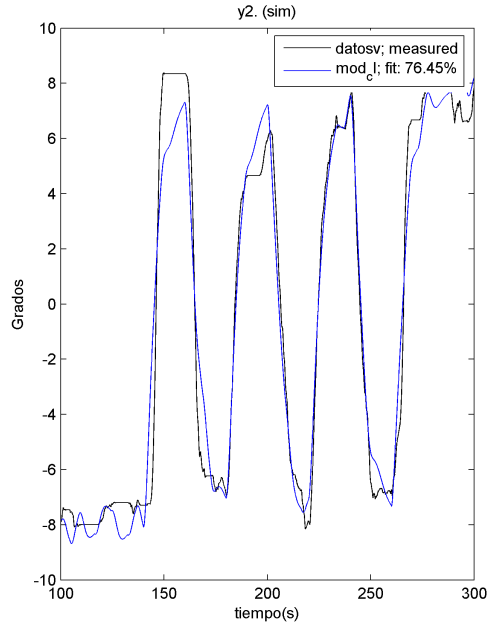
(a) Pitch ($\theta = 20^o$)



(b) Yaw ($\theta = 20^o$)

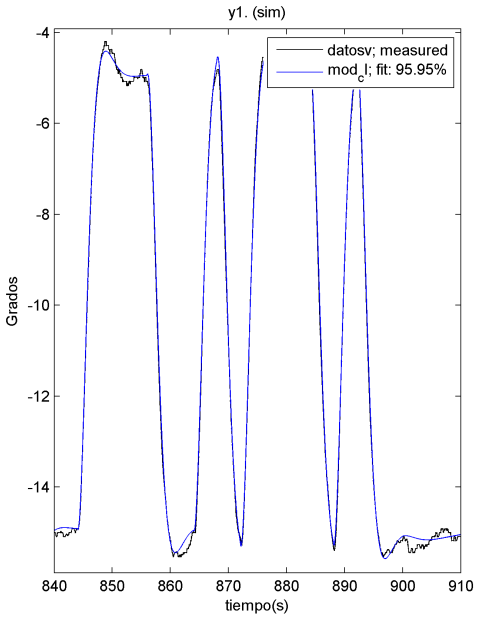


(c) Pitch ($\theta = 30^o$)

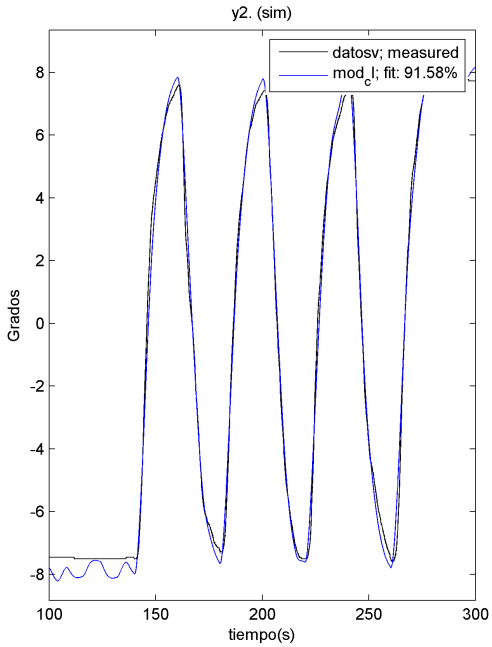


(d) Yaw ($\theta = 30^o$)

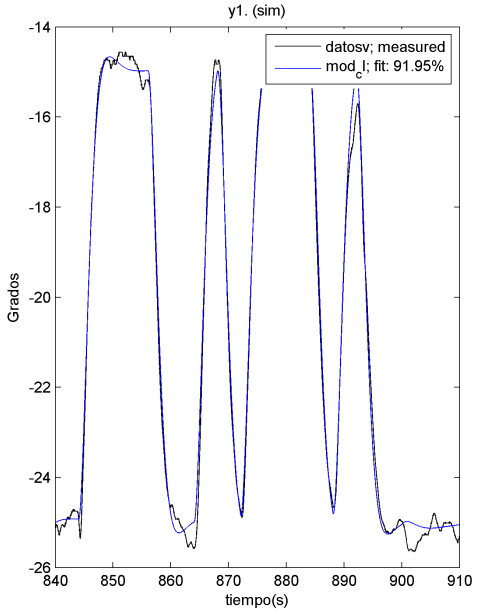
FIGURA 5.5: Ajuste del modelo a los datos ($\theta = 20^o$) y ($\theta = 30^o$)



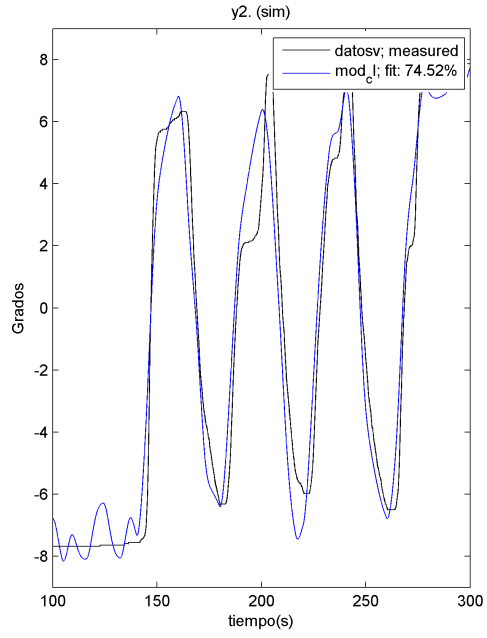
(a) Pitch ($\theta = -10^o$)



(b) Yaw ($\theta = -10^o$)

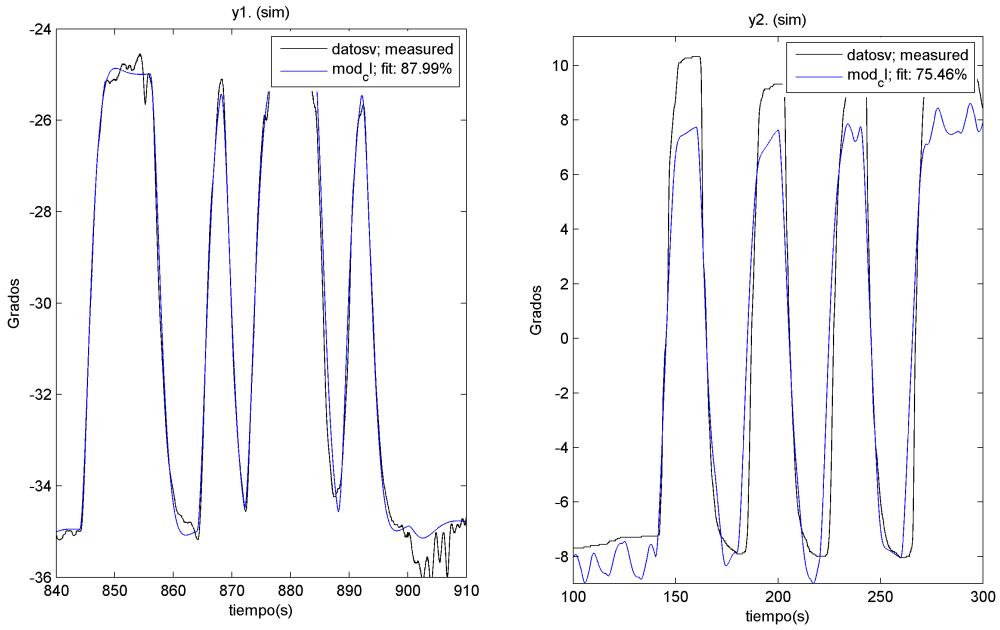


(c) Pitch ($\theta = -20^o$)



(d) Yaw ($\theta = -20^o$)

FIGURA 5.6: Ajuste del modelo a los datos ($\theta = -10^o$) y ($\theta = -20^o$)



(a) Pitch ($\theta = -30^o$) (b) Yaw ($\theta = -30^o$)

FIGURA 5.7: Ajuste del modelo a los datos ($\theta = -30^o$)

A continuación se especifica las matrices Q usadas para los diferentes puntos de operación.

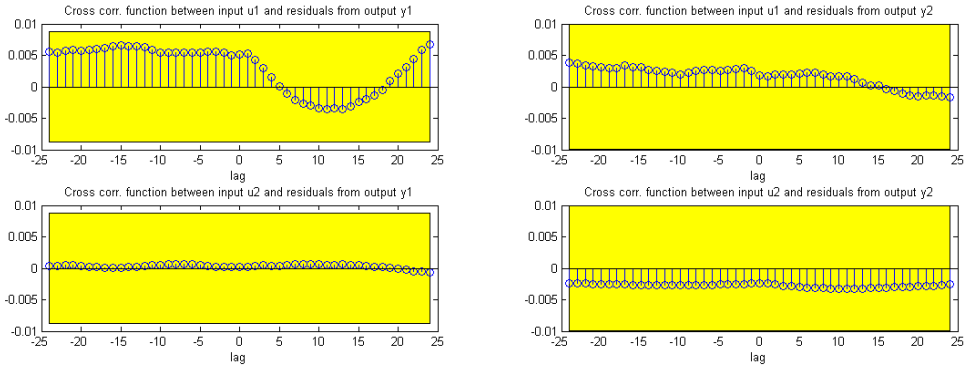
- para $\theta = 0^o$: $Q = diag([2 \quad 40 \quad 10 \quad 5 \quad 8 \quad 2{,}5])$
- para $\theta = 10^o$: $Q = diag([2 \quad 40 \quad 10 \quad 5 \quad 8 \quad 2])$
- para $\theta = 20^o$: $Q = diag([2 \quad 40 \quad 10 \quad 1 \quad 8 \quad 2{,}5])$
- para $\theta = 30^o$: $Q = diag([2 \quad 40 \quad 10 \quad 15 \quad 8 \quad 1{,}5])$
- para $\theta = -10^o$: $Q = diag([2 \quad 50 \quad 10 \quad 4 \quad 8 \quad 1{,}5])$
- para $\theta = -20^o$: $Q = diag([2 \quad 200 \quad 10 \quad 10 \quad 8 \quad 4])$
- para $\theta = -30^o$: $Q = diag([2 \quad 100 \quad 10 \quad 5 \quad 8 \quad 10])$

Se realizó también el análisis de residuos de los modelos. Los residuos son la diferencia entre la salida real y la salida estimada [14]

$$\epsilon(t) = y(t) - y_e(t)$$

Donde $y(t)$ es la salida real y $y_e(t)$ es la salida estimada por el modelo. En la figura 5.8 se muestra la correlación cruzada entre los residuos y la entrada al sistema $u(t)$ alrededor de cero grados, la cual es calculada como

$$R_{\epsilon u} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \epsilon(t+\tau)u(t)$$



(a) Pitch ($\theta = 0^o$) (b) Yaw ($\theta = 0^o$)

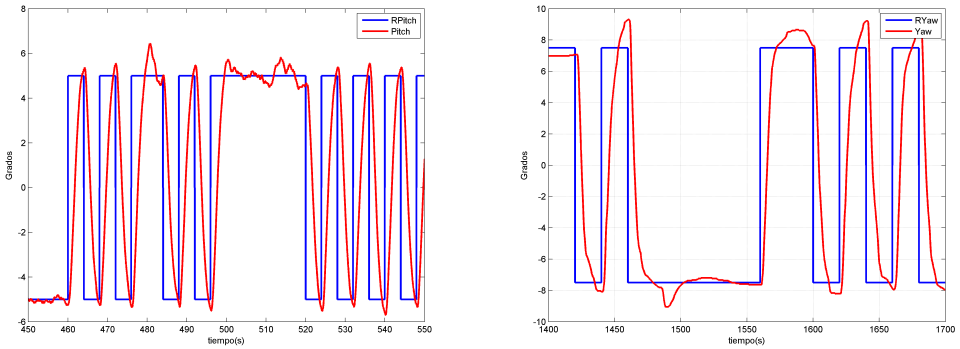
FIGURA 5.8: Análisis residual alrededor de cero grados

De forma ideal se busca encontrar que los residuos sean independientes de la entrada; el modelo es más exacto si los términos de la correlación son cercanos a cero. Cuando hay correlación indica que el modelo no describe la forma como alguna parte de la salida se relaciona con la entrada. Si la ecuación 5.4 es una distribución gaussiana de media $\mu = 0$ y varianza de la forma

$$P_r = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} R_\epsilon(t)R_u(t)$$

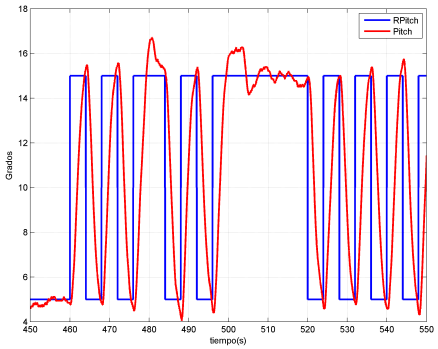
Donde $R_\epsilon(t)$ y $R_u(t)$ son las covarianzas de $\epsilon(t)$ y $u(t)$ respectivamente, entonces $\epsilon(t)$ y $u(t)$ son independientes. Los límites en la figura 5.8 se calculan como 2.58 desviaciones estándar $\pm 2{,}58\sqrt{P_r}$ cuyo intervalo se conoce como intervalo de confianza representado en la región amarilla, el cual representa que los valores residuales depositados en la región de confianza tienen un 99 % de probabilidad de ser estadísticamente insignificantes. La correlación de la figura 5.8 no sale del margen de validez lo que implica que el modelo representa bien la dinámica del sistema.

En las figuras 5.9, 5.10 y 5.11 se observa la respuesta del sistema Vs la señal de excitación en los diferentes puntos de operación. Se puede ver que la respuesta temporal es bien comportada ya que no presenta sobrepicos excesivos y siempre alcanza el valor de la referencia gracias al efecto integral. La respuesta temporal en Yaw es diferente al moverse en cada sentido, puesto que se afecta bastante por la fricción de coulomb y la ganancia de las funciones de transferencia de $P_{21}(s)$ y $P_{22}(s)$ cambia debido al diseño de la hélice del motor de Yaw.

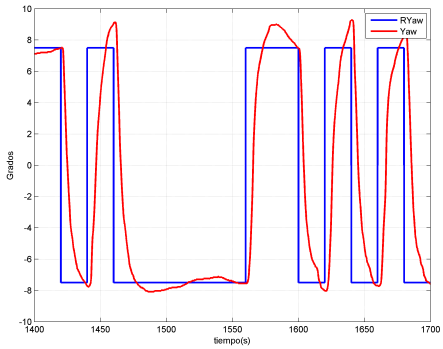


(a) Pitch ($\theta = 0^o$) (b) Yaw ($\theta = 0^o$)

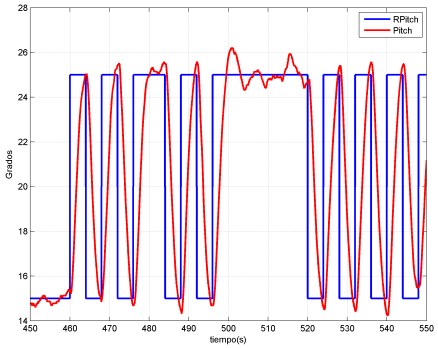
FIGURA 5.9: Referencia Vs Salida



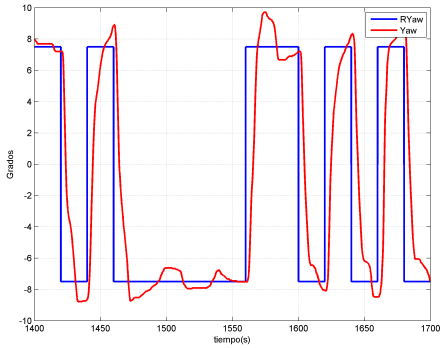
(a) Pitch ($\theta = 10^o$)



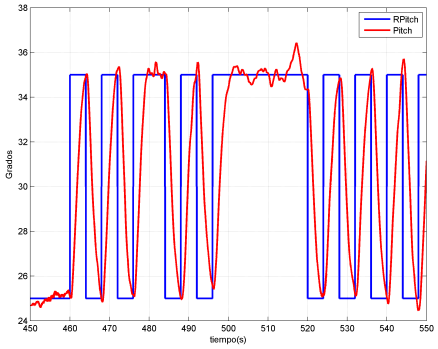
(b) Yaw ($\theta = 10^o$)



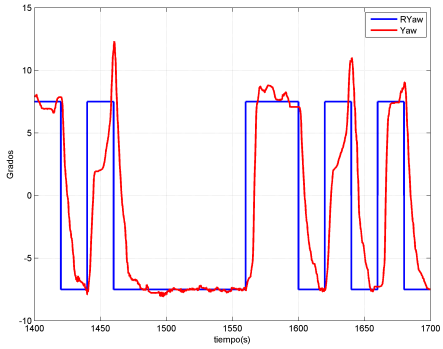
(c) Pitch ($\theta = 20^o$)



(d) Yaw ($\theta = 20^o$)

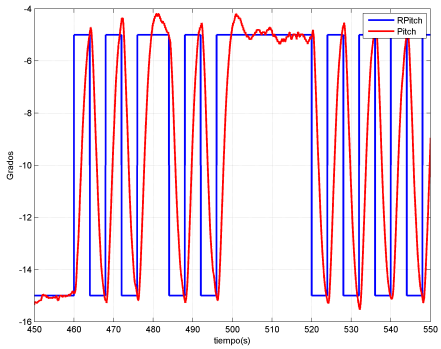


(e) Pitch ($\theta = 30^o$)

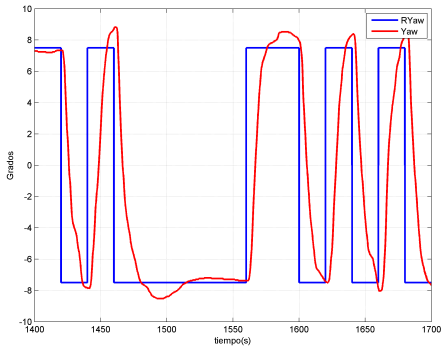


(f) Yaw ($\theta = 30^o$)

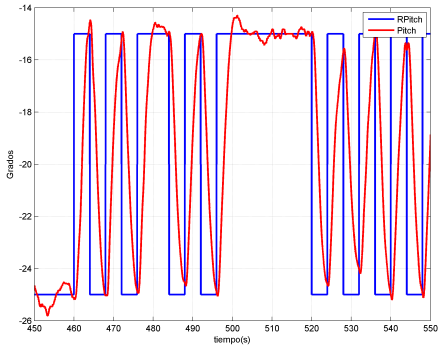
FIGURA 5.10: Referencia Vs Salida



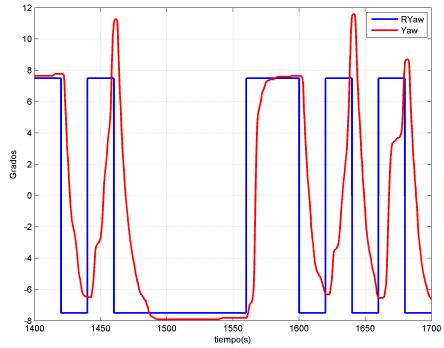
(a) Pitch ($\theta = -10^o$)



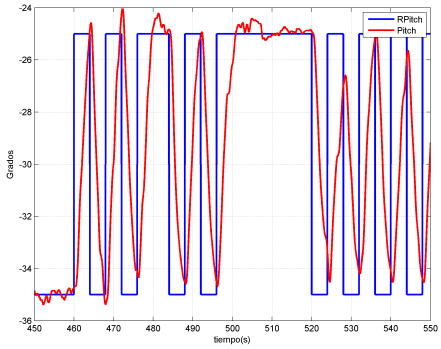
(b) Yaw ($\theta = -10^o$)



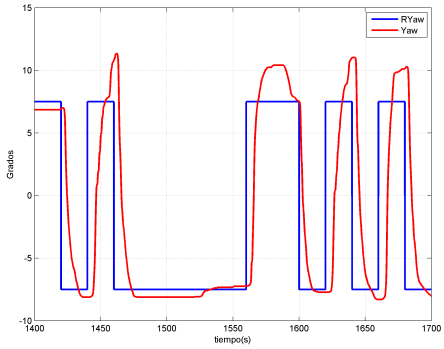
(c) Pitch ($\theta = -20^o$)



(d) Yaw ($\theta = -20^o$)



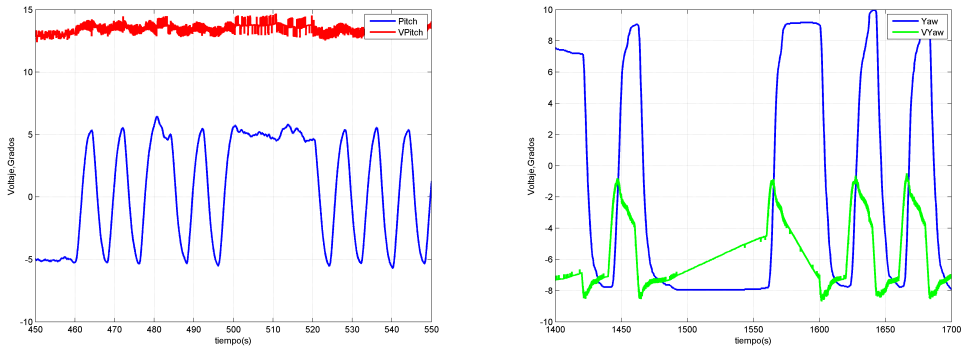
(e) Pitch ($\theta = -30^o$)



(f) Yaw ($\theta = -30^o$)

FIGURA 5.11: Referencia Vs Salida

En la figura 5.12 se puede observar que el movimiento en Pitch es muy sensible ante cualquier cambio en la señal de control (V_{mp}), razón por la cual no fue posible realizar una identificación directa leyendo las señales de control y las posiciones.



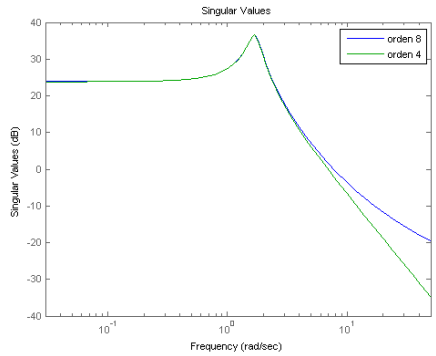
(a) Pitch ($\theta = 0^o$) (b) Yaw ($\theta = 0^o$)

FIGURA 5.12: Salidas Vs Señales de Control

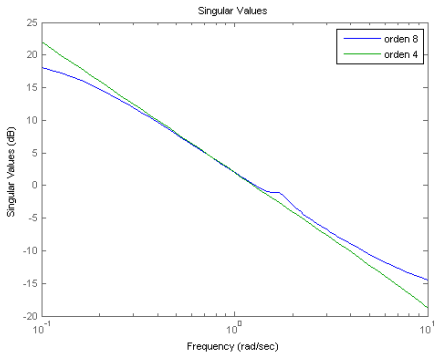
A partir del modelo identificado en lazo cerrado se despejó el modelo de la planta y se obtuvo una representación en ecuación de estado de alto orden (entre 9 y 11); entonces, se hizo una reducción del orden del modelo aproximando los polos y ceros muy cercanos al origen a cero, despreciando los polos muy lejanos en el semiplano izquierdo y además, despreciando los ceros muy lejanos al origen.

En las figuras 5.13, 5.14 y 5.15 se observan los valores singulares de los modelos reducidos y los de alto orden en diferentes puntos de operación. Se puede ver que los valores singulares de ambos modelos son muy semejantes; entonces, los modelos de orden bajo representan adecuadamente la dinámica del sistema.

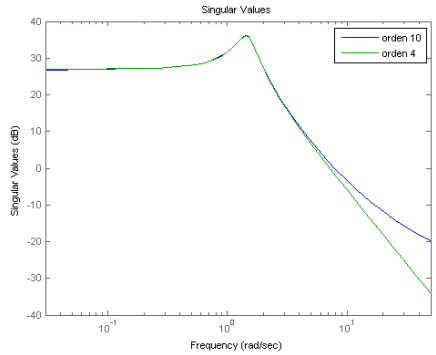
En las figuras 5.16, 5.17 y 5.18 se observa la respuesta temporal en simulación de los modelos reducidos y los de alto orden en diferentes puntos de operación. La respuesta temporal es muy semejante, comprobando nuevamente que los modelos reducidos son suficientes para representar el sistema.



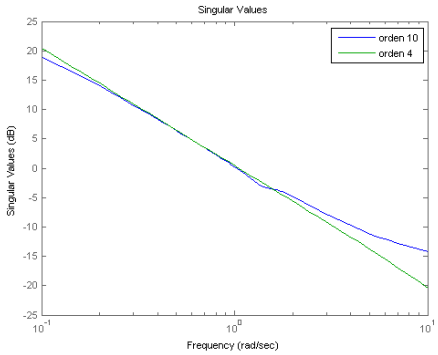
(a) Pitch ($\theta = 0^o$)



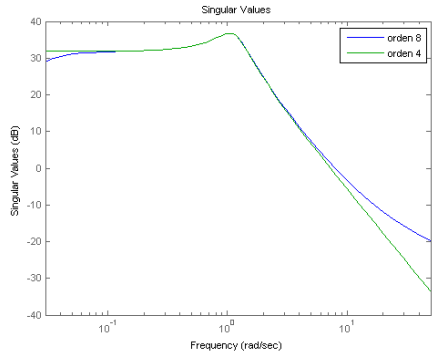
(b) Yaw ($\theta = 0^o$)



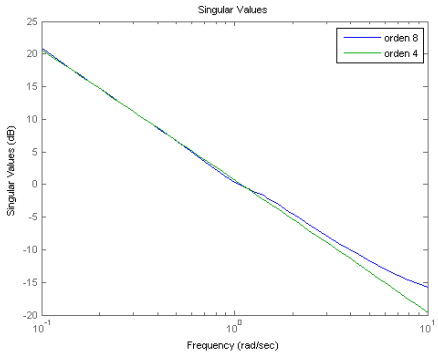
(c) Pitch ($\theta = 10^o$)



(d) Yaw ($\theta = 10^o$)

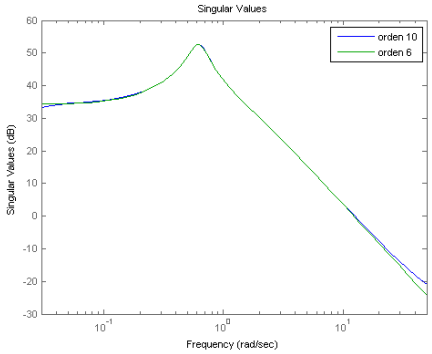


(e) Pitch ($\theta = 20^o$)

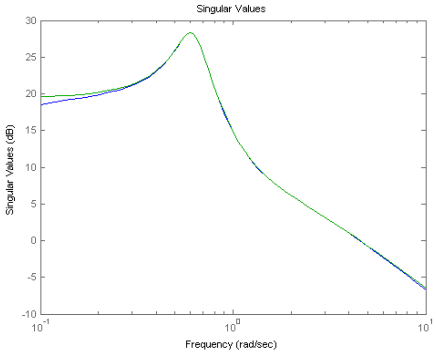


(f) Yaw ($\theta = 20^o$)

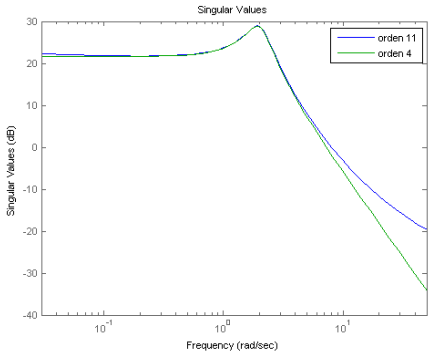
FIGURA 5.13: Valores singulares del modelo reducido Vs modelo de alto orden



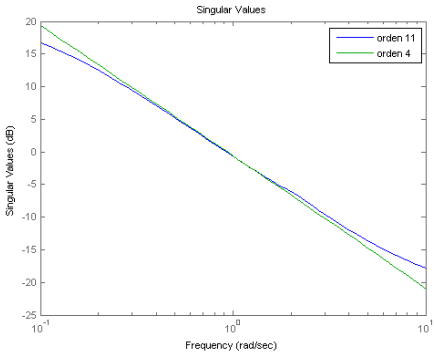
(a) Pitch ($\theta = 30^o$)



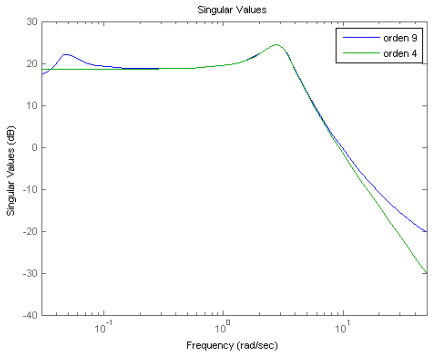
(b) Yaw ($\theta = 30^o$)



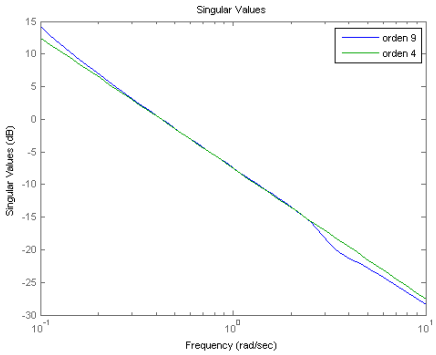
(c) Pitch ($\theta = -10^o$)



(d) Yaw ($\theta = -10^o$)

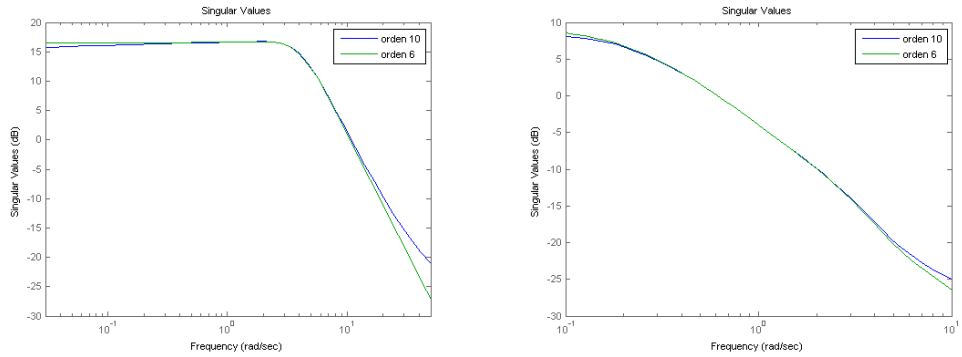


(e) Pitch ($\theta = -20^o$)



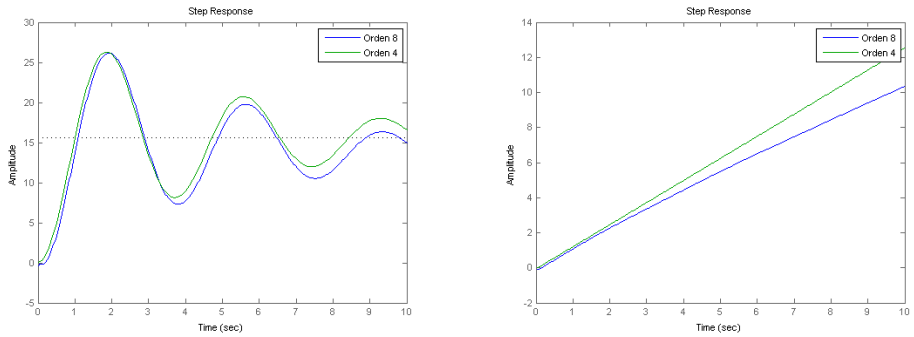
(f) Yaw ($\theta = -20^o$)

FIGURA 5.14: Valores singulares del modelo reducido Vs modelo de alto orden

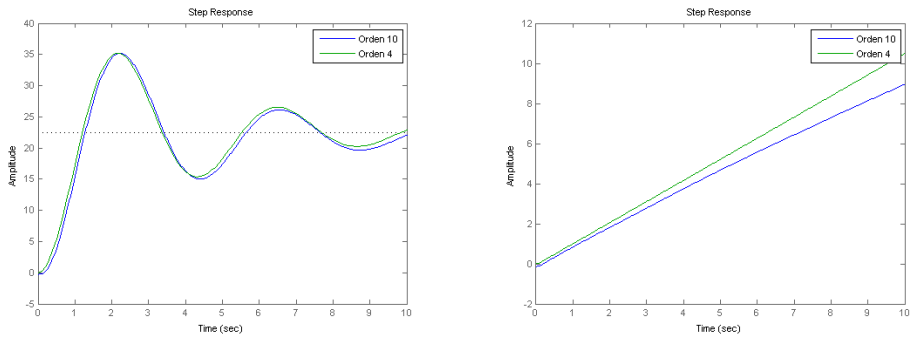


(a) Pitch ($\theta = -30^o$) (b) Yaw ($\theta = -30^o$)

FIGURA 5.15: Valores singulares del modelo reducido Vs modelo de alto orden

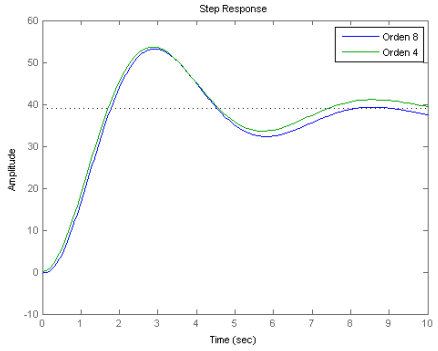


(a) Pitch ($\theta = 0^o$) (b) Yaw ($\theta = 0^o$)

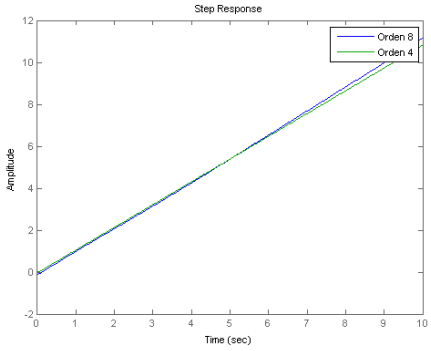


(c) Pitch ($\theta = 10^o$) (d) Yaw ($\theta = 10^o$)

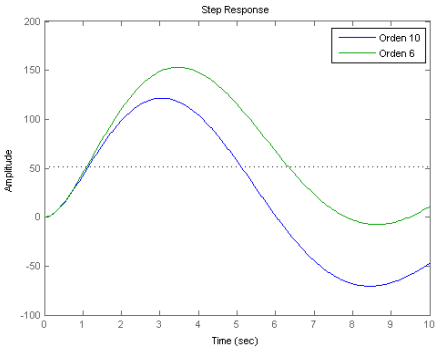
FIGURA 5.16: Respuesta temporal del Modelo de orden alto Vs Modelo reducido



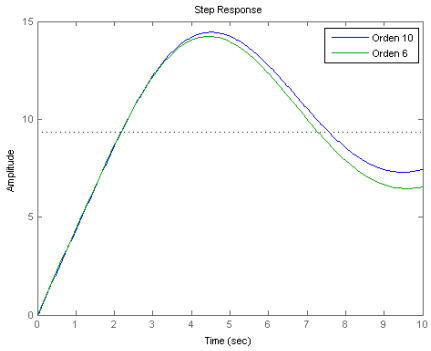
(a) Pitch ($\theta = 20^o$)



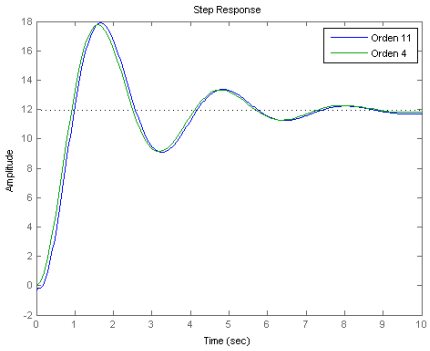
(b) Yaw ($\theta = 20^o$)



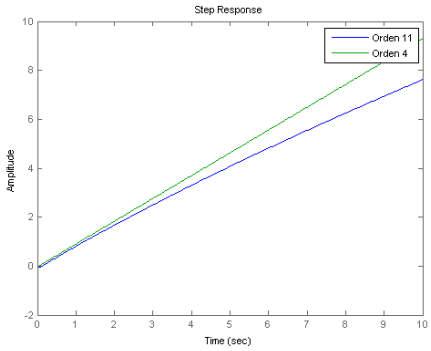
(c) Pitch ($\theta = 30^o$)



(d) Yaw ($\theta = 30^o$)

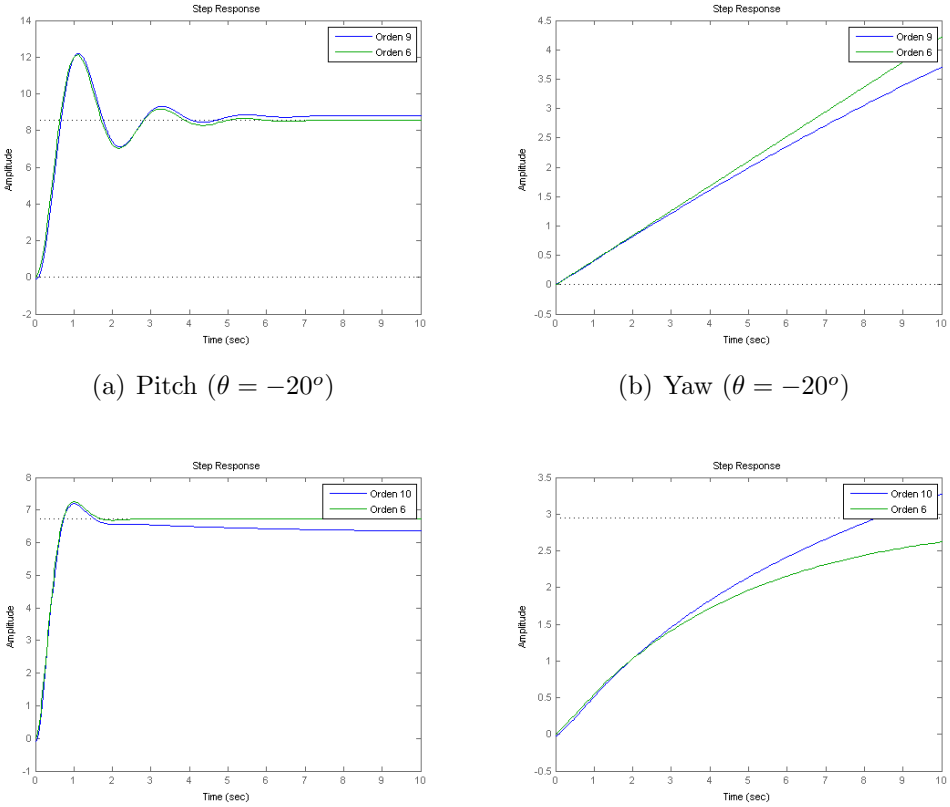


(e) Pitch ($\theta = -10^o$)



(f) Yaw ($\theta = -10^o$)

FIGURA 5.17: Respuesta temporal del Modelo de orden alto Vs Modelo reducido



(a) Pitch ($\theta = -20^o$)

(b) Yaw ($\theta = -20^o$)

(c) Pitch ($\theta = -30^o$)

(d) Yaw ($\theta = -30^o$)

FIGURA 5.18: Respuesta temporal del Modelo de orden alto Vs Modelo reducido

5.5. Modelos lineales obtenidos

A continuación se muestran los modelos lineales obtenidos alrededor de diferentes puntos de equilibrio.

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{45{,}15}{s^2+0{,}3958s+2{,}902} & \frac{3{,}241}{s^2+0{,}3958s+2{,}902} \\ \frac{3{,}219}{s^2+22{,}82s} & \frac{28{,}74}{s^2+22{,}82s} \end{bmatrix}_{\theta=0^o}$$

$$P(s) = \left[\begin{array}{cc} \frac{49,12}{s^2+0,5319s+2,182} & \frac{4,954}{s^2+0,5319s+2,182} \\ \\ \frac{7,717}{s^2+21,19s} & \frac{22,31}{s^2+21,19s} \end{array} \right]_{\theta=10^o}$$

$$P(s) = \left[\begin{array}{cc} \frac{51,71}{s^2+0,6872s+1,324} & \frac{5,467}{s^2+0,6872s+1,324} \\ \\ \frac{20,55}{s^2+32,08s} & \frac{34,8}{s^2+32,08s} \end{array} \right]_{\theta=20^o}$$

$$P(s) = \left[\begin{array}{cc} \frac{152,4s+33,29}{s^3+1,89s^2+0,7353s+0,6452} & \frac{6,899s-12,91}{s^3+1,89s^2+0,7353s+0,6452} \\ \\ \frac{4,514s^2-27,64s+29,11}{s^3+1,89s^2+0,7353s+0,6452} & \frac{4,832s^2+6,949s+6,016}{s^3+1,89s^2+0,7353s+0,6452} \end{array} \right]_{\theta=30^o}$$

$$P(s) = \left[\begin{array}{cc} \frac{48,9}{s^2+0,9022s+4,09} & \frac{2,599}{s^2+0,9022s+4,09} \\ \\ \frac{8,166}{s^2+31,24s} & \frac{29,12}{s^2+31,24s} \end{array} \right]_{\theta=-10^o}$$

$$P(s) = \left[\begin{array}{cc} \frac{77,15}{s^2+1,6s+9,031} & \frac{2,846}{s^2+1,6s+9,031} \\ \\ \frac{5,205}{s^3+1,6s^2+9,031s} & \frac{33,02}{s^2+78,3s} \end{array} \right]_{\theta=-20^o}$$

$$P(s) = \left[\begin{array}{cc} \frac{110}{s^2+5,103s+16,36} & \frac{9,601}{s^2+5,103s+16,36} \\ \\ \frac{-9,66s+6,437}{s^3+5,103s^2+16,36s} & \frac{0,4889s^2+2,629s+10,71}{s^3+5,325s^2+17,5s+3,64} \end{array} \right]_{\theta=-30^o}$$

5.6. Comparación entre el modelo obtenido por identificación de parámetros y el obtenido utilizando algoritmo PEM

A continuación se pueden ver el modelo matemático obtenido reemplazando los valores de parámetros obtenidos por identificación mediante pruebas en lazo abierto, y el modelo obtenido por medio de identificación en caja negra usando algoritmo PEM, juntos alrededor de cero grados.

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{45{,}15}{s^2+0{,}3958s+2{,}902} & \frac{3{,}241}{s^2+0{,}3958s+2{,}902} \\ \\ \frac{3{,}219}{s^2+22{,}82s} & \frac{28{,}74}{s^2+22{,}82s} \end{bmatrix}_{PEM}$$

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{47{,}69}{s^2+0{,}2088s+3{,}694} & \frac{4{,}957}{s^2+0{,}2088s+3{,}694} \\ \\ \frac{0{,}7679}{s^2+0{,}6621s} & \frac{80{,}63}{s^2+0{,}6621s} \end{bmatrix}_{Parametros}$$

Los dos modelos tienen la misma estructura. Se puede ver que las funciones de transferencia que relacionan las entradas con la salida Pitch (θ) tienen ganancias similares y la ubicaciones de los polos son cercanas. las funciones de transferencia que relacionan las entradas con la salida Yaw (ψ) se diferencian considerablemente en las ganancias y la ubicación de uno de los polos.

En la figura 5.19 se muestra el diagrama de bode de $P_{11}(s)$ de los dos modelos, y se evidencia que los parámetros obtenidos alrededor del eje Pitch tienen buena exactitud puesto que la respuesta frecuencial es muy similar. La ganancia de baja frecuencia (0.2 rad/s) para el modelo que se obtuvo usando los parámetros obtenidos mediante pruebas en lazo abierto es 22.4 db (13.18) y la obtenida por algoritmo PEM es 24 db (15.85).

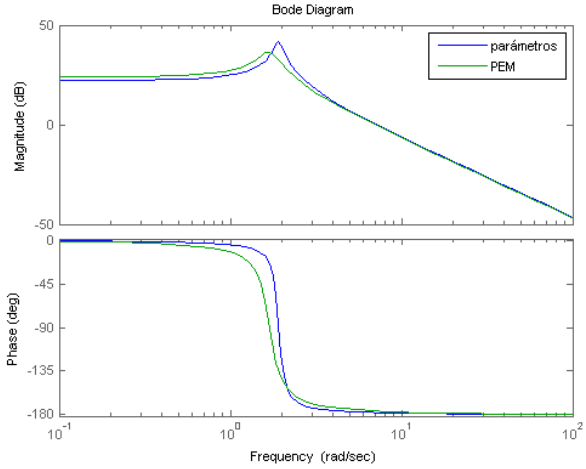


FIGURA 5.19: Comparación alrededor de $\theta = 0^o$ de $P_{11}(s)$

En la figura 5.20 se muestra el diagrama de bode de $P_{22}(s)$ de los dos modelos, y se evidencia que algunos de los parámetros obtenidos alrededor del eje Yaw no tienen buena exactitud puesto que la respuesta frecuencial es bastante diferente. La ganancia de baja frecuencia (0.08 rad/s) para el modelo que se obtuvo usando los parámetros obtenidos mediante pruebas en lazo abierto es 63.5 db (1496) y la obtenida por algoritmo PEM es 23.9 db (15.85).

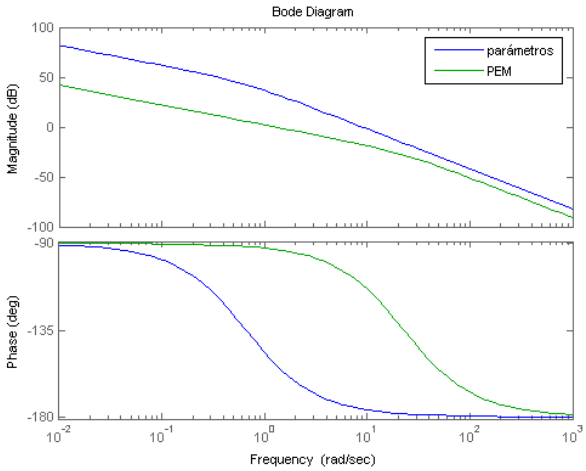


FIGURA 5.20: Comparación alrededor de $\theta = 0^o$ de $P_{22}(s)$

5.7. Conclusiones

Para llevar a cabo el proceso de identificación con resultados satisfactorios, se diseñó un controlador para cada punto de operación, pues si se usaba un sólo controlador, la desviación alrededor de cada punto variaba considerablemente y los modelos lineales obtenidos tenían un ajuste muy bajo.

Se usó un control basado en observador para lograr despejar la planta a partir del modelo obtenido del sistema en lazo cerrado.

Los modelos lineales obtenidos alrededor de cada punto de operación son muy buenos en términos de predicción. Los modelos obtenidos alrededor de -20^o y -30^o son los que se ajustaron en menor medida a los datos reales; la razón de esto es que con esos ángulos el voltaje aplicado al motor de Pitch es más bajo y el efecto de acople ya no le ayuda al movimiento en Yaw; además, cuando el ángulo es diferente de cero, el torque generado por el motor de Yaw es menor porque depende del coseno del ángulo θ. Como los torques aplicados para esos ángulos es menor, la dinámica alrededor del eje Yaw se afecta demasiado por la fricción de coulomb generando un mayor sobrepico en la respuesta temporal.

La respuesta temporal en el eje Yaw es diferente cuando el movimiento en Yaw cambia de dirección; esto se debe fundamentalmente a que la hélice está diseñada para generar fuerza de empuje en una sola dirección, entonces el resultado es que la ganancia es diferente al moverse en cada sentido.

La estructura de los modelos lineales obtenidos por identificación es igual al la estructura del modelo planteado en el capítulo de modelamiento en casi todos los puntos de operación; lo cual muestra que el modelo matemático obtenido 3.11 representa adecuadamente la dinámica del sistema.

Los modelos obtenidos por identificación en caja negra son los que se usaron para el diseño del controlador robusto. Se pudo verificar que son muy buenos porque la respuesta real del sistema con el controlador robusto y la obtenida por simulación fueron muy similares.

CAPÍTULO 6

DISEÑO DEL CONTROL ROBUSTO H_∞ DEL HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE LIBERTAD

6.1. Introducción

En este capítulo se hace uso de los modelos obtenidos por identificación usando algoritmo PEM para realizar el modelado de incertidumbre y posteriormente diseñar el controlador robusto.

Se muestra el esquema de control usado para el sistema en lazo cerrado y el diseño de las funciones de peso que permiten establecer las características de desempeño y robustez. Se realiza el diseño del controlador H_∞ de 2DOF y se verifica la estabilidad y desempeño mediante simulación por medio de M_u Análisis. Finalmente se presentan los resultados experimentales sobre el sistema real.

La planta del Helicóptero de dos grados de Libertad es un planta muy interesante desde el punto de vista de control, ya que sus características dinámicas hacen que sea de difícil modelamiento y difícil de controlar; algunas de estas características son:

- Modelo No Lineal.
- Inestable en lazo abierto.
- Multivariable.
- Acoplado.
- El modelo lineal resultante depende del punto de operación en θ.

La característica más importante a tener en cuenta es el cambio del modelo al variar el punto de operación. En el modelo descrito en la ecuaciones lineales 3.11 se puede ver que el modelo depende del ángulo θ; la razón de ello es que el centro de masa del sistema no se encuentra en el pivote, sino a un lado de este.

A partir de los modelos lineales obtenidos en el capítulo 5 se puede ver que el sistema tiene la estructura mostrada en la ecuación 6.1, donde las salidas están en grados que consiste en multiplicar las funciones de transferencia por $180/pi$

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{45{,}15}{s^2+0{,}3958s+a} & \frac{3{,}242}{s^2+0{,}3958s+a} \\ \\ \frac{K_{21}}{s(s+b)} & \frac{K_{22}}{s(s+b)} \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Donde los coeficientes a, b y las ganancias K_{21} y K_{22} dependen del punto de equilibrio deseado en θ lo cual se puede ver en el modelo matemático y están dados por

$$a = \frac{M_{heli} g (h \cos\bar{\theta} - l_{mc} \sin\bar{\theta})}{J_{eqp} + M_{heli}(l_{mc}^2 + h^2)}$$

$$b = \frac{B_y}{J_{eqy} + M_{heli}(\cos^2\bar{\theta}(l_{mc}^2 - h^2) + 2 l_{mc} h \sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta} + h^2)}$$

$$K_{21} = \frac{K_{yp} \cos\bar{\theta}}{J_{eqy} + M_{heli}(\cos^2\bar{\theta}(l_{mc}^2 - h^2) + 2 l_{mc} h \sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta} + h^2)}$$

$$K_{21} = \frac{K_{yy} \cos\bar{\theta}}{J_{eqy} + M_{heli}(\cos^2\bar{\theta}(l_{mc}^2 - h^2) + 2 l_{mc} h \sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta} + h^2)}$$

El punto de equilibrio deseado en Pitch varía entre $\theta = -30^o$ a $\theta = 30^o$; lo que lleva a que los valores de los coeficientes y las ganancias varíen en los siguientes rangos:

$$\begin{array}{rclrcl} a & = & [0{,}03391 \quad 4{,}993] & a_{nom} & = & 2{,}5135 \\ b & = & [22{,}78 \quad 22{,}9] & b_{nom} & = & 22{,}84 \\ K_{21} & = & [2{,}783 \quad 2{,}798] & K_{21\,nom} & = & 2{,}7905 \\ K_{22} & = & [24{,}84 \quad 24{,}98] & K_{22\,nom} & = & 24{,}91 \end{array}$$

Se tomaron como valores nominales el valor promedio de los coeficientes y ganancias.

6.2. Modelado de Incertidumbre

La variación del valor de los coeficientes y ganancias afectan de forma directa la ganancia total del sistema y la ubicación de los polos del mismo; se puede modelar la incertidumbre como una incertidumbre multiplicativa a la salida la cual también permite tener en cuenta dinámicas de alta frecuencia no modeladas. El proceso de identificación muestra que los modelos obtenidos son muy buenos a baja frecuencia. La representación de incertidumbre multiplicativa a la salida se puede ver en la figura 6.1.

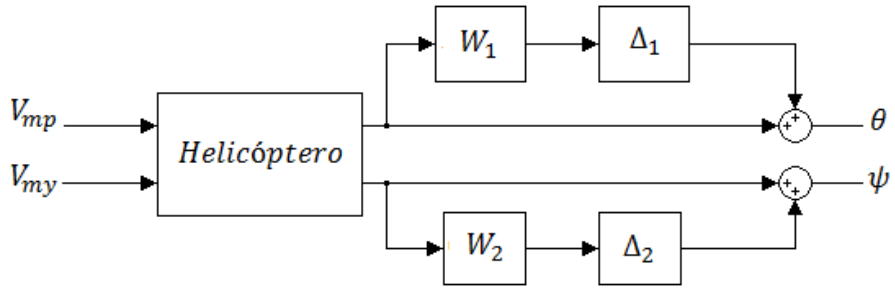


FIGURA 6.1: Incertidumbre multiplicativa a la salida

La planta con incertidumbre se representa como:

$$P_{\triangle} = (I + \triangle W)P_{nom}$$

Tomando como planta nominal

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{45{,}15}{s^2+0{,}3958s+2{,}5135} & \frac{3{,}242}{s^2+0{,}3958s+2{,}5135} \\ \\ \frac{2{,}7905}{s(s+22{,}84)} & \frac{24{,}91}{s(s+22{,}84)} \end{bmatrix}$$

como matriz de pesos de incertidumbre

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$$

y $\triangle$ como la matriz de incertidumbre de la forma

$$\triangle = \begin{bmatrix} \triangle_1 & 0 \\ 0 & \triangle_2 \end{bmatrix}$$

cuya $\|\triangle\|_\infty \leq 1$

Los pesos se calcularon teniendo en cuenta que [27]

$$\ell_m(w) = \underset{P_\Delta \in \prod}{\text{máx}} \left| \frac{P_\triangle(jw) - P_{nom}(jw)}{P_{nom}(jw)} \right|$$

Se aproxima $\ell_m(w)$ por la respuesta en frecuencia de un sistema lineal, estable y minifase tal que

$$|W(jw)| \quad \geq \quad \ell_m(w)$$

Es decir, que los pesos de incertidumbre permitan modelar el peor caso en magnitud del sistema, pues es lo que se debe tener en cuenta para el análisis de robustez.

El peso de incertidumbre W_1 se obtuvo de $P_{11}(s)$ y $P_{12}(s)$
El peso de incertidumbre W_2 se obtuvo de $P_{21}(s)$ y $P_{22}(s)$

$$W_1(s) = \frac{0{,}001s^2 + 0{,}2214s + 12{,}25}{s^2 + 0{,}7587s + 0{,}1439}$$

$$W_2(s) = 0{,}1365$$

En las figura 6.2 y 6.3 se puede ver que la magnitud de los pesos es mayor a $\ell_m(w)$.

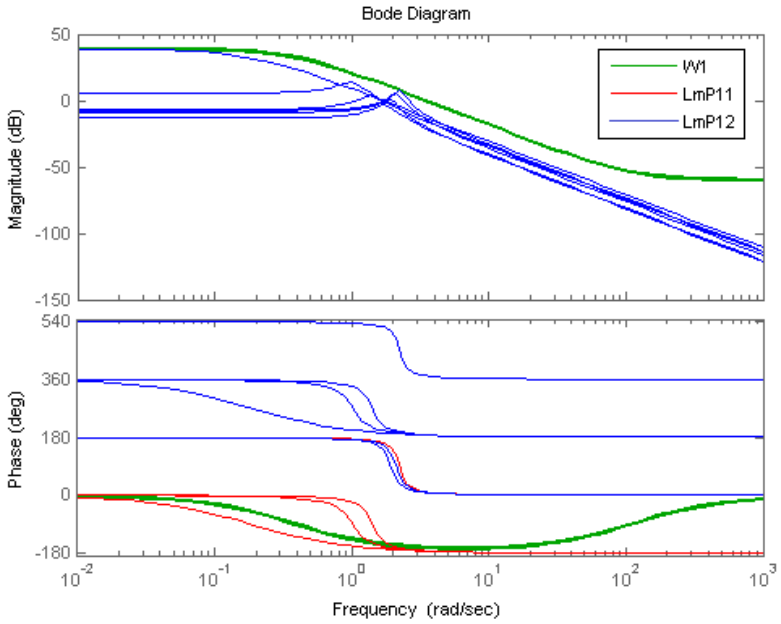


FIGURA 6.2: Respuesta en frecuencia de $\ell_{m\theta}(w)$ y $W_1(s)$

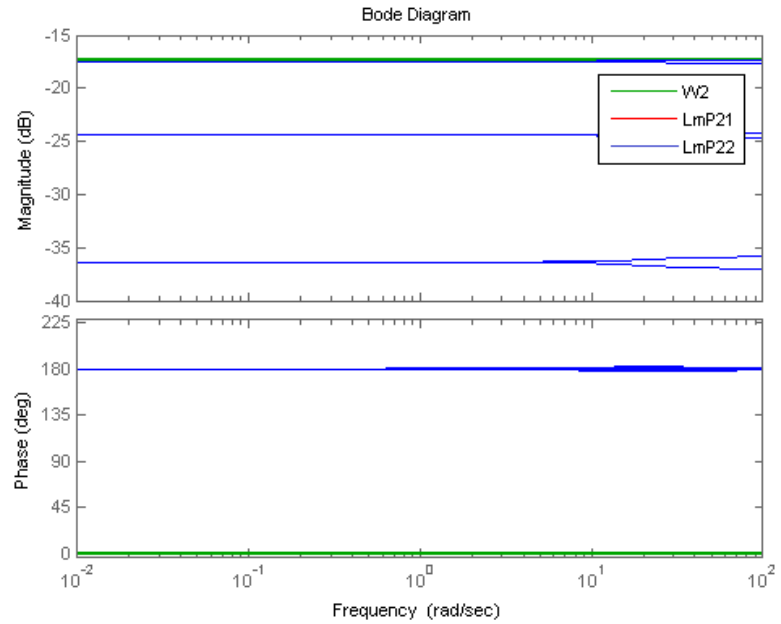


FIGURA 6.3: Respuesta en frecuencia de $\ell_{m\psi}(w)$ y $W_2(s)$

6.3. Esquema del Control Robusto H_∞ de dos grados de libertad

Se diseñó un control robusto de dos grados de libertad para todos los puntos de operación [9], usando modelos de referencia a los cuales se quiere que se ajuste el sistema en lazo cerrado. Los modelos de referencia son modelos ITAE [19] los cuales son bien comportados. El esquema de dos grados de libertad se puede ver en la figura 6.4.

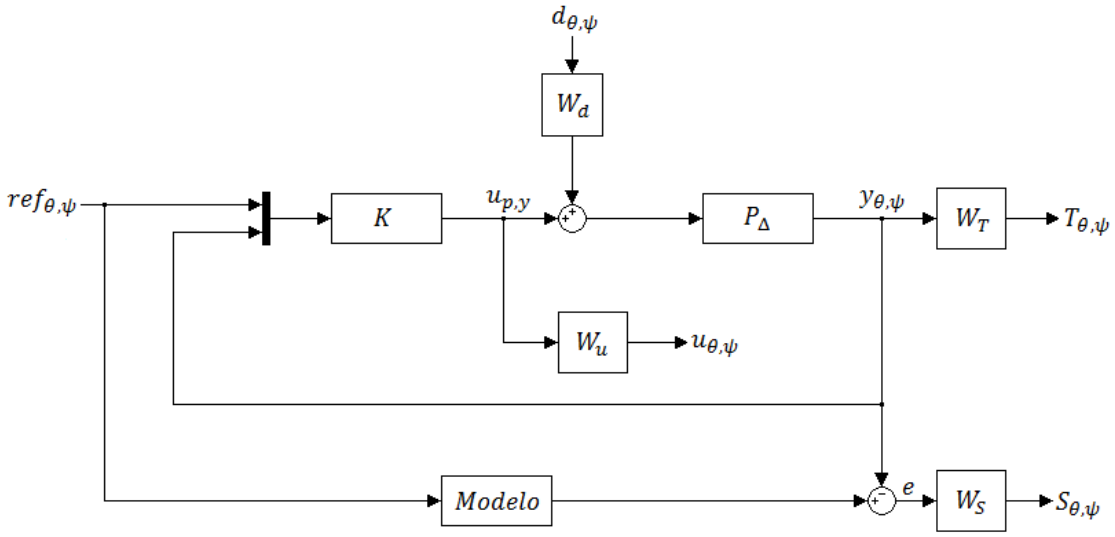


FIGURA 6.4: Control de 2DOF

En la figura 6.4 $ref_{\theta,\psi}$ son las señales de referencia, $d_{\theta,\psi}$ son las señales de perturbación, $u_{\theta,\psi}$ son las señales de control ponderadas, $S_{\theta,\psi}$ son las señales de sensibilidad ponderadas, $T_{\theta,\psi}$ son las señales de sensibilidad complementaria ponderadas,$P_\triangle$ es la planta con incertidumbre, $Modelo$ es una matriz diagonal con funciones de trasferencia $ITAE$ de orden 3, W_T es el peso de sensibilidad complementaria, el cual es usado para robustecer el sistema frente a incertidumbres multiplicativas a la salida, W_S es el peso de sensibilidad que permite definir característica de desempeño y rechazo de perturbaciones de baja frecuencia, W_u es el peso de las señales de control que sirve para acotar la amplitud de las señales de control,W_d es el peso de las señales de perturbación que sirve para garantizar que al momento de diseñar el controlador,éste genere acción integral y se rechacen perturbaciones tipo escalón.

En la figura 6.5 se ve el esquema de planta generalizada usado para realizar el diseño del controlador.

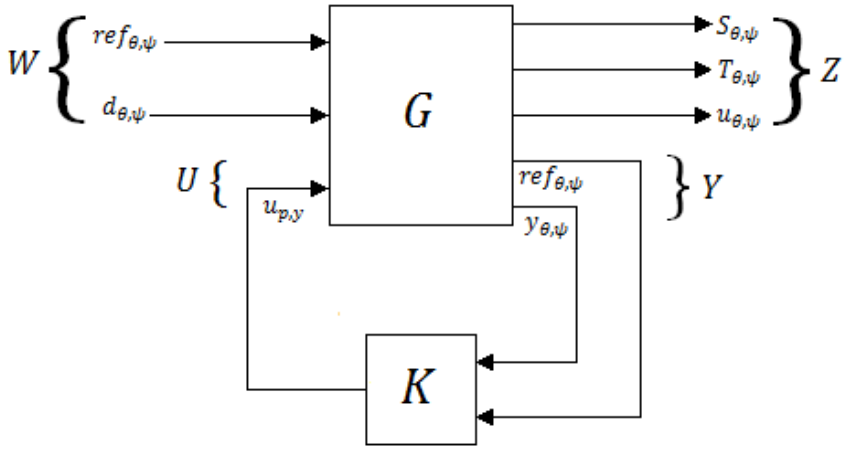


FIGURA 6.5: Planta Generalizada

Donde,

$$W = \begin{bmatrix} \theta_{ref} \\ \psi_{ref} \\ d_\theta \\ d_\psi \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} S_\theta \\ S_\psi \\ T_\theta \\ T_\psi \\ u_\theta \\ u_\psi \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_p \\ u_y \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} \theta_{ref} \\ \psi_{ref} \\ y_\theta \\ y_\psi \end{bmatrix}$$

6.3.1. Pesos de Sensibilidad

Los pesos de sensibilidad W_S se usan para definir las características de desempeño y rechazo de perturbaciones de baja frecuencia. A continuación se definen las características de desempeño deseadas y atenuación de perturbaciones.

- w_p=2 rad/s , Ancho de banda deseado en lazo cerrado en Pitch.
- w_y=0.3 rad/s , Ancho de banda deseado en lazo cerrado en Yaw.
- $\epsilon = 10^{-3}$, Atenuación deseada de las perturbaciones de baja frecuencia.
- $M = 2$, Cota deseada de $\|S\|_\infty$.

Es necesario que la función de sensibilidad S tenga valores singulares pequeños en baja frecuencia para rechazar perturbaciones y reducir el error; entonces, los valores

singulares de W_S tienen que ser grandes en baja frecuencia. El ancho de banda de lazo cerrado se eligió de tal forma que estuviera cercano al ancho de banda en lazo abierto del sistema lineal alrededor de cero grados.

$$W_S = \begin{bmatrix} W_{sp} & 0 \\ \\ 0 & W_{sy} \end{bmatrix}$$

El peso de sensibilidad para Pitch está dado como

$$W_{sp} = \frac{s + w_p}{Ms + w_p\epsilon}$$

El peso de sensibilidad para Yaw está dado como

$$W_{sy} = \frac{s + w_y}{Ms + w_y\epsilon}$$

6.3.2. Pesos de Sensibilidad Complementaria

Los pesos de sensibilidad complementaria W_T se usan para hacer que el sistema sea robusto en la presencia de incertidumbres multiplicativas a la salida y rechazar el ruido en los sensores. A continuación se definen las características de desempeño deseadas y atenuación de perturbaciones.

- w_p=2 rad/s , Ancho de banda deseado en lazo cerrado en Pitch.
- w_y=0.3 rad/s , Ancho de banda deseado en lazo cerrado en Yaw.
- $\epsilon = 10^{-3}$, Atenuación deseada del ruido e incertidumbre de alta frecuencia.
- $M = 2$, Cota deseada de $\|T\|_\infty$.

Es necesario que los pesos de la función de sensibilidad complementaria W_T tengan valores singulares grandes en alta frecuencia para lograr que la función de sensibilidad complementaria T tenga una magnitud pequeña, con el fin de que se pueda rechazar ruido en los sensores y dinámicas no modeladas de alta frecuencia.

$$W_T = \begin{bmatrix} W_{tp} & 0 \\ \\ 0 & W_{ty} \end{bmatrix}$$

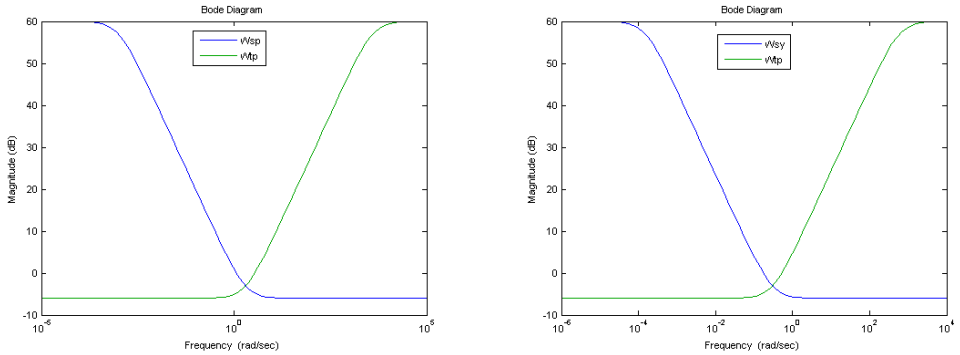
El peso de sensibilidad complementaria para Pitch está dado como

$$W_{tp} = \frac{s + w_p}{\epsilon s + w_p M}$$

El peso de sensibilidad complementaria para Yaw está dado como

$$W_{ty} = \frac{s + w_y}{\epsilon s + w_y M}$$

En la figura 6.6 se puede ver que los pesos de sensibilidad y sensibilidad complementaria cumplen las especificaciones de diseño.



(a) $W_{sp}\,, W_{tp}$ (b) $W_{sy}\,, W_{ty}$

FIGURA 6.6: Pesos de Sensibilidad y Sensibilidad Complementaria

6.3.3. Pesos de las Señales de Control

El peso W_u se usa para definir las características dinámicas de los actuadores (motores) y acotar la magnitud de las señales de control.

El valor de equilibrio de la señal de control en Pitch para todos los puntos de equilibrio se encuentra entre 11.6 y 15.3 voltios y el valor máximo es 20 voltios, lo que implica que teóricamente se podrían tener señales de control de ± 5 voltios para conservar la linealidad en el modelo del actuador. El valor de equilibrio de la señal de control en Yaw para todos los puntos de equilibrio se encuentra entre -5.1 y -5.6 voltios y los valores máximos son ± 12 voltios, lo que implica que teóricamente se podrían tener señales de control de de ± 6 voltios para conservar la linealidad en el modelo del actuador.

En el esquema de la planta generalizada se tomó como referencia escalones unitarios, pero el valor de referencia en Pitch es ± 5^o, lo que implica que la señal de control máxima teórica al definir el peso de la señal de control es $(5voltios)/5 = 1voltio$; de igual manera la señal de control máxima teórica en Yaw es $(6voltios)/7{,}5 =$

0,8*voltios*. El Helicóptero es muy sensible a las aceleraciones fuertes que se producen cuando hay picos grandes en las señales de control, razón por la cual el peso W_u debe lograr que la magnitud de las señales sea pequeña en el ancho de banda útil de los actuadores, entonces se les dio magnitud máxima de 0.25. La función de transferencia de los motores se determina tomando como señal de salida la velocidad del rotor y como señal de entrada el voltaje aplicado cuya función se puede aproximar a un sistema de primer orden. Al revisar las hojas de especificaciones de los motores se determinó su ancho de banda.

- $w_{mp} = 102\, rad/s$, Ancho de banda del motor de Pitch.
- $w_{my} = 77{,}5\, rad/s$, Ancho de banda del motor de Yaw.
- $\epsilon = 10^{-3}$, Atenuación de la ganancia de los actuadores en alta frecuencia.
- $u_p = 0{,}25\, voltios$. Cota deseada de la señal de control en Pitch.
- $u_y = 0{,}25\, voltios$. Cota deseada de la señal de control en Yaw.

$$W_u = \begin{bmatrix} W_{up} & 0 \\ 0 & W_{uy} \end{bmatrix}$$

El peso de la señal de control en Pitch está dado como

$$W_{up} = \frac{s + w_{mp}}{\epsilon s + w_{mp} u_p}$$

El peso de la señal de control en Yaw está dado como

$$W_{uy} = \frac{s + w_{my}}{\epsilon s + w_{my} u_y}$$

En la figura 6.7 se puede ver que los pesos de las señales de control especifican el ancho de banda útil de los actuadores y la magnitud de las señales de control.

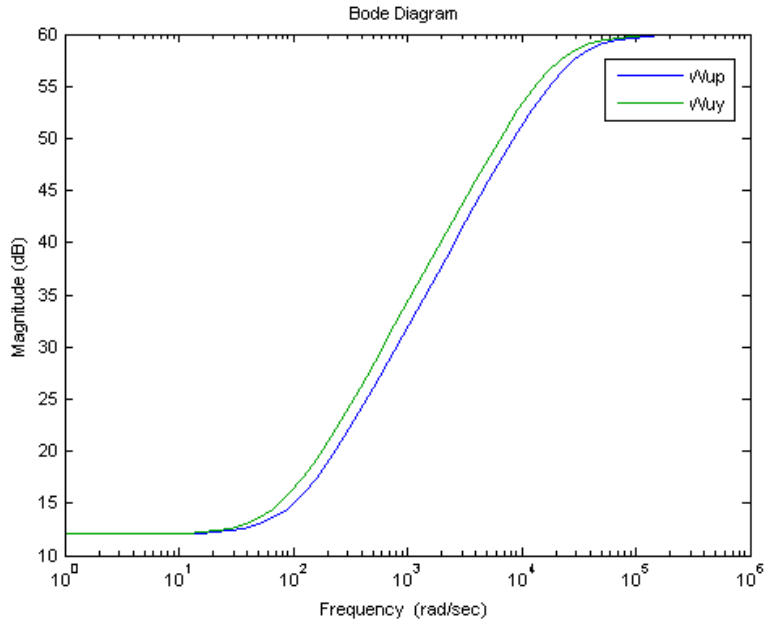


FIGURA 6.7: Pesos de las Señales de Control

6.3.4. Pesos de perturbación

El peso W_d se usa para garantizar que el control genere acción integral y se rechacen perturbaciones de baja frecuencia. El peso W_d se diseña de tal forma que el ancho de banda de rechazo de perturbaciones coincida con el ancho de banda de rechazo de perturbaciones definido en el peso de sensibilidad W_S. Cuando se especifica la magnitud de las perturbaciones se le da un valor pequeño puesto que este peso es sólo para garantizar efecto integral, ya que si se le da un peso grande hay sobreoscilación en la respuesta temporal.

- $w_{dp} = \frac{w_p \epsilon}{M}\, rad/s$, Ancho de banda de rechazo de perturbaciones en Pitch.
- $w_{dy} = \frac{w_y \epsilon}{M}\, rad/s$, Ancho de banda de rechazo de perturbaciones en Yaw.
- $A_p = 0{,}1\, voltios.$ Magnitud de las perturbaciones.
- $A_y = 0{,}1\, voltios.$ Magnitud de las perturbaciones.

$$W_d = \begin{bmatrix} W_{dp} & 0 \\ 0 & W_{dy} \end{bmatrix}$$

El peso de perturbación en Pitch está dado como

$$W_{dp} = \frac{\epsilon s + w_{dp} A_p}{s + w_{dp}}$$

El peso de perturbación en Yaw está dado como

$$W_{dy} = \frac{\epsilon s + w_{dy} A_y}{s + w_{dy}}$$

En la figura 6.8 se puede ver que los pesos de perturbación cumplen las especificaciones de diseño.

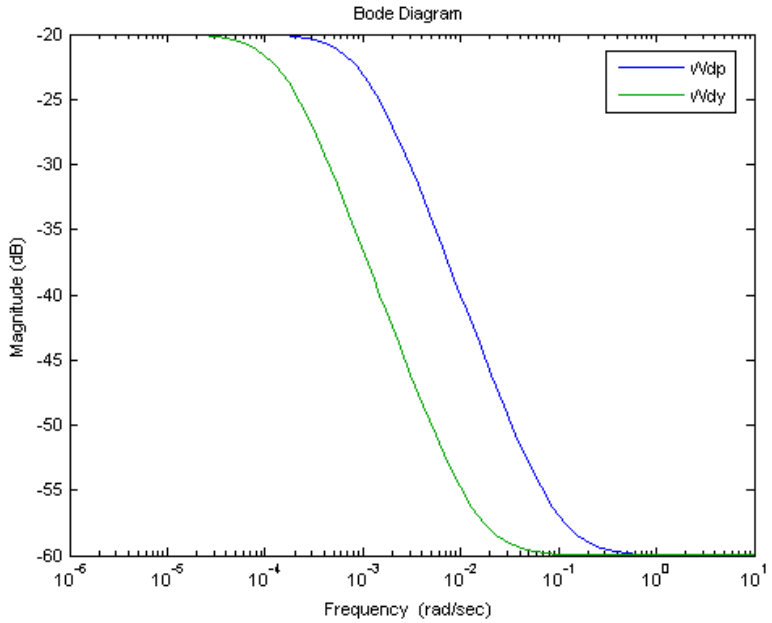


FIGURA 6.8: Pesos de Perturbación

6.3.5. Modelos de referencia $ITAE$

Los modelos de referencia $ITAE$ son funciones bien comportadas que minimizan la función de costo dada en la ecuación 6.2 [19]. Se usaron modelos de referencia $ITAE$ de tercer orden.

$$ITAE = \int_0^\infty t|e(t)|dt \tag{6.2}$$

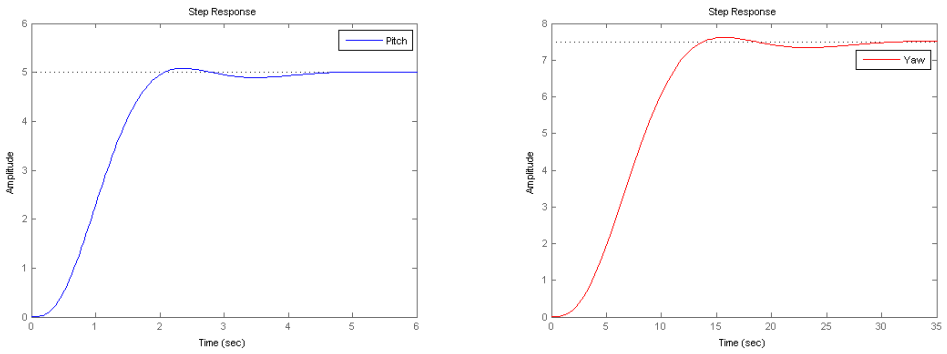
El modelo de referencia en Pitch se puede ver en la ecuación 6.3 el cual tiene el mismo ancho de banda que el peso de sensibilidad W_p

$$ITAE_p = \frac{w_p^3}{s^3 + 1{,}783 w_p s^2 + 2{,}171 w_p^2 s + w_p^3} \tag{6.3}$$

El modelo de referencia en Yaw se puede ver en la ecuación 6.4 el cual tiene el mismo ancho de banda que el peso de sensibilidad W_y

$$ITAE_y = \frac{w_y^3}{s^3 + 1{,}783 w_y s^2 + 2{,}171 w_y^2 s + w_y^3} \tag{6.4}$$

En la figura 6.9 se observa la respuesta temporal de las funciones $ITAE$ seleccionadas.



(a) Pitch (b) Yaw

FIGURA 6.9: Respuesta temporal de las funciones $ITAE$

6.4. Algoritmo de Control H_∞

El algoritmo de diseño H_∞ [4] [34] [27] calcula un control K para la planta generalizada de la figura 6.5. Haciendo $\triangle = 0$, es decir, tomando la planta generalizada nominal se tiene una representación de estado de la forma

$$G_N = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array}\right]$$

El controlador K estabiliza la planta generalizada nominal G_N. Las entradas a B_1 (**W**) son las perturbaciones y las referencias, las entradas a B_2 son las señales de control (**U**). Las salidas C_1 (**Z**) son los errores ponderados que se desea hacer pequeños, y las salidas C_2 (**Y**) son las salidas medidas de la planta que usa el controlador.

El algoritmo minimiza

$$\|F_L(G_N, K)\|_\infty$$

donde $F_L(G_N, K)$ es la transformación fraccional lineal inferior entre G_N y K.

El algoritmo genera la función de lazo cerrado $T_{ZW} = lft(G_N, K)$ y $GAM = \|T_{ZW}\|_\infty$.

El controlador se diseña con la planta nominal y se obtuvo una norma $\|T_{ZW}\|_\infty = 0{,}5920$ es decir que se cumplen las especificaciones de desempeño y estabilidad para la planta nominal. El controlador obtenido es de orden 16 pero se hace una reducción del orden del controlador a orden 12 usando los valores singulares de Hankel el cual se calcula sobre la base de cualquier error aditivo $\|K - K_{RED}\|_\infty$.

$$K = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

con

A =

	x1	x2	x3	x4	x5
x1	-0.000143	1.68e-005	0.0001339	-3.824e-005	-0.0003497
x2	3.924e-007	-0.0009537	0.01314	-0.002137	0.002412
x3	-2.104e-005	-0.009734	-16.18	23.51	-2.534
x4	1.67e-005	-0.001599	-23.46	-0.6101	0.1484
x5	0.0002554	0.00035	2.662	-0.3	-8.459
x6	1.417e-005	0.009631	36.76	5.887	-3.64
x7	0.000261	-0.0002574	-0.2377	-0.6829	-18.61
x8	7.533e-006	-1.988e-006	-0.05168	-0.01576	-0.1388
x9	-4.204e-006	-0.0003331	0.1958	0.05076	0.2549
x10	-1.212e-005	-6.19e-005	-0.1121	-0.005758	0.4921
x11	0	0	0	0	0
x12	0	0	0	0	0

	x6	x7	x8	x9	x10
x1	0.0001515	0.0003594	7.937e-006	5.624e-006	1.212e-005
x2	0.01281	-0.001934	-7.182e-005	0.0005391	-0.0001071
x3	-36.75	0.3542	0.0768	-1.333	0.1107
x4	6.011	0.2975	-0.008538	0.2926	-0.01217
x5	-2.081	18.71	0.4034	-0.184	0.5958
x6	-117.7	-0.7059	0.4655	-9.794	0.688
x7	3.003	-91.53	-4.533	-0.5607	-7.703
x8	0.3234	0.6891	-0.107	0.118	-0.5038
x9	-0.5592	3.157	0.1239	-2.784	1.574

x10	0.7642	6.75	0.4397	-1.722	-0.6093
x11	0	0	0	0	0
x12	0	0	0	0	0

	x11	x12
x1	0	0
x2	0	0
x3	0	0
x4	0	0
x5	0	0
x6	0	0
x7	0	0
x8	0	0
x9	0	0
x10	0	0
x11	0.04774	-0.02033
x12	0	0.0002679

B =

	u1	u2	u3	u4
x1	0.01128	-1.329	-0.01127	1.327
x2	-0.542	-0.0005266	0.541	0.001132
x3	0.004338	3.058e-005	5.513	0.2423
x4	0.01595	0.0009186	0.9279	-0.1465
x5	8.41e-005	-0.001902	-0.1954	-2.377
x6	0.0445	-6.362e-005	-5.432	-0.1783
x7	-0.007535	0.02719	0.1439	-2.397
x8	0.008163	0.05201	0.009398	-0.01793
x9	-0.2215	-0.002649	-0.03268	0.03803
x10	-0.01899	-0.04307	0.01597	0.06986
x11	-0.7469	0.1048	0.791	-0.1205
x12	-0.009508	0.1681	0.009511	-0.1686

C =

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7
y1	0.2207	0.7395	-5.514	0.9286	-0.3699	-5.423	0.1604
y2	1.865	-0.1987	-0.2331	0.143	2.356	-0.3605	-2.396

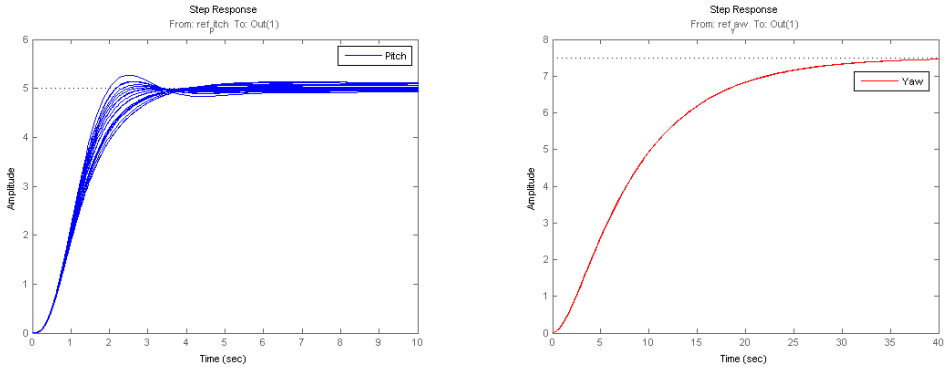
	x8	x9	x10	x11	x12
y1	0.01527	-0.2269	0.02227	-0.832	2.22
y2	-0.0543	-0.01035	-0.08279	-0.01884	15.16

```
D =
       u1   u2   u3   u4
  y1    0    0    0    0
  y2    0    0    0    0

Continuous-time model.
```

Nota: El diseño del controlador robusto también puede hacerse incluyendo las entradas de perturbación en la función de costo; sin embargo, la norma H_∞ puede dar mayor a 1 lo cual no indica que el sistema no tenga estabilidad robusta puesto que la incertidumbre es estructurada. Cuando la norma H_∞ es mayor a 1 es necesario hacer M_u Análisis para determinar verdaderamente la estabilidad y desempeño del sistema incierto.

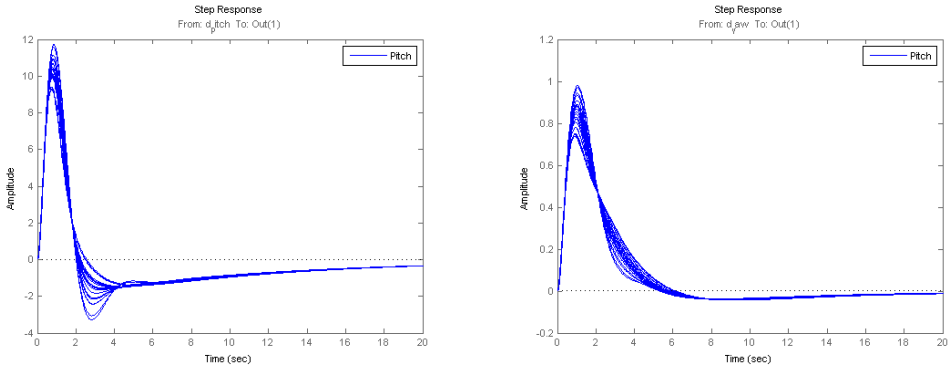
Para simular el sistema y comprobar las características de desempeño se construyó una planta generalizada como la de la figura 6.5 pero sin incluir los pesos de desempeño sino sólo los de incertidumbre. La respuesta mediante simulación del modelo lineal de la planta con incertidumbre ante entrada escalón de 5^o en Pitch y $7{,}5^o$ en yaw se puede ver en la figura 6.10, y se observa que se cumple con las características de desempeño deseadas.



(a) Pitch (b) Yaw

FIGURA 6.10: Respuesta a referencia escalón en Pitch y Yaw

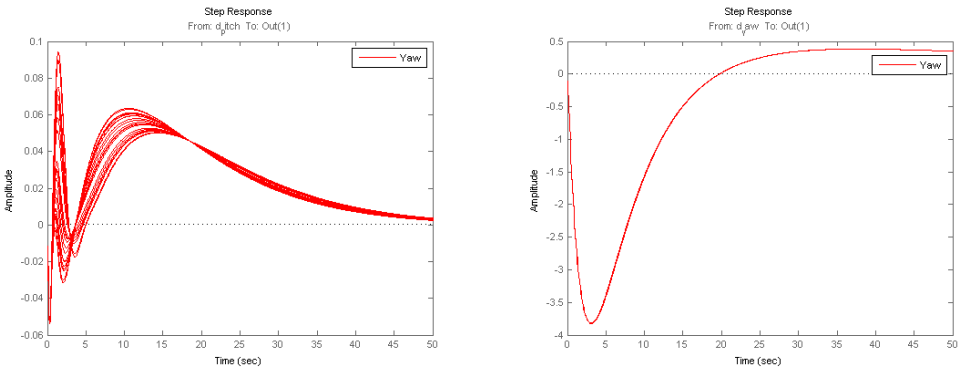
En la figura 6.11 se observa el rechazo a perturbaciones en Pitch del modelo lineal simulado al perturbar con una señal escalón de 3 voltios en Pitch y -3 voltios en Yaw. Se puede ver que el sistema retorna a la condición de equilibrio; es decir que hay buen rechazo de perturbaciones.



(a) Perturbación en Pitch (b) Perturbación en Yaw

FIGURA 6.11: Rechazo de perturbaciones en Pitch

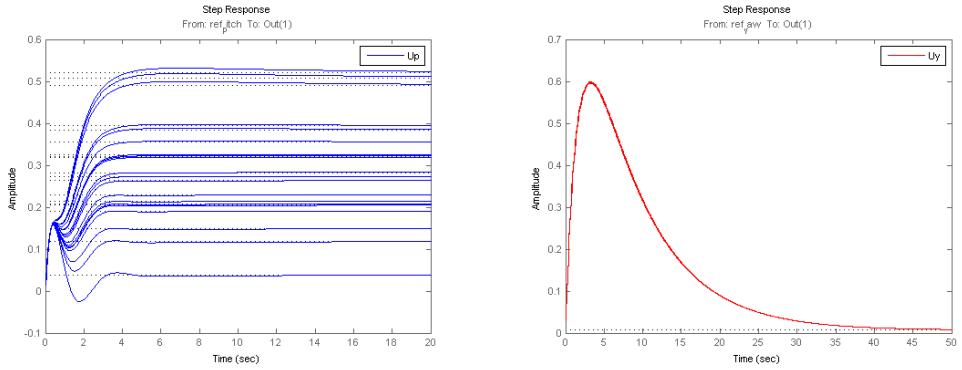
En la figura 6.12 se observa el rechazo a perturbaciones en Yaw del modelo lineal simulado al perturbar con una señal escalón de 3 voltios en Pitch y -3 voltios en Yaw. Se puede ver que el sistema retorna a la condición de equilibrio; es decir que hay buen rechazo de perturbaciones.



(a) Perturbación en Pitch (b) Perturbación en Yaw

FIGURA 6.12: Rechazo de perturbaciones en Yaw

En la figura 6.13 se observa la magnitud de las señales de control en Pitch y Yaw del modelo lineal simulado al excitar el sistema con las referencias tipo escalón de 5^o en Pitch y $7{,}5^o$ en Yaw . Las señales de control no sobrepasan los límites impuestos en los pesos de las señales de control.



(a) Señal de Control en Pitch (b) Señal de Control en Yaw

FIGURA 6.13: Magnitud de las Señales de Control

En la figura 6.14 se puede ver el diagrama de simulink usado para simular la respuesta del sistema No Lineal el cual permite excitar al mismo tiempo con las señales de referencia y perturbación para verificar el rechazo de perturbaciones; además, se puede simular el sistema alrededor de todos los puntos de equilibrio.

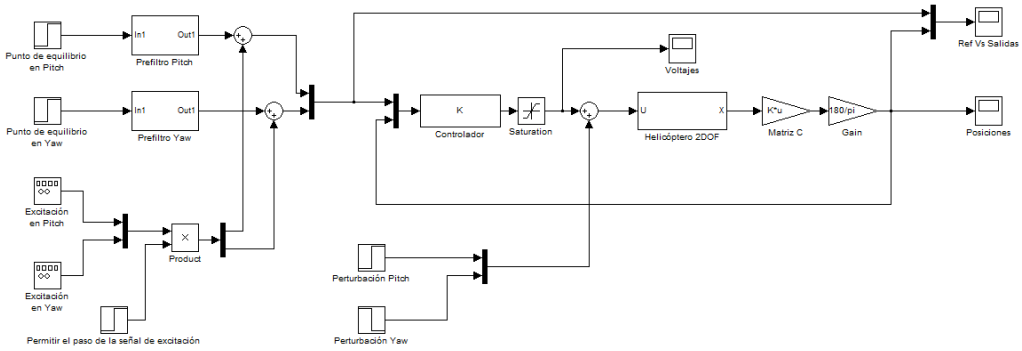


FIGURA 6.14: Diagrama de Simulink del modelo No Lineal

6.5. M_u Análisis

El diseño del controlador fue realizado con la planta nominal, entonces sólo garantiza estabilidad y desempeño para la planta nominal. Como la planta tiene dos fuentes de incertidumbre multiplicativa a la salida cuya estructura es diagonal por bloques, se debe hacer M_u análisis para determinar el desempeño y estabilidad del sistema incierto.

Para hacer el análisis de estabilidad robusta y desempeño robusto es necesario llevar el sistema de la figura 6.5 a la forma $M - \triangle$ como se muestra en la figura 6.15, donde el sistema M es la transformación fraccional lineal inferior entre la planta G y el controlador K, y la matriz $\triangle$ es la matriz de incertidumbre cuya $\|\triangle\|_\infty \leq 1$.

$$M = F_L(G, K)$$

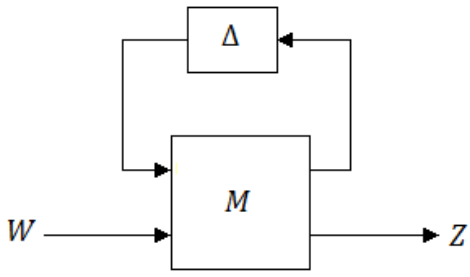


FIGURA 6.15: $M - \triangle$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

6.5.1. Estabilidad Robusta

Para el análisis de estabilidad robusta, solamente los canales de M asociados con los canales de incertidumbre son usados, entonces se define la matriz $N = M_{11}$. Es necesario hallar los valores singulares estructurados de N para comprobar la estabilidad del sistema; el sistema tiene estabilidad robusta si

$$\mu_\triangle(N) < 1$$

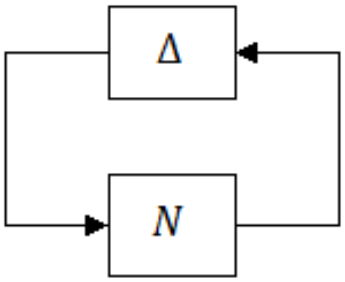


FIGURA 6.16: $N - \triangle$

En la figura 6.17 se puede verificar que el sistema tiene estabilidad robusta.

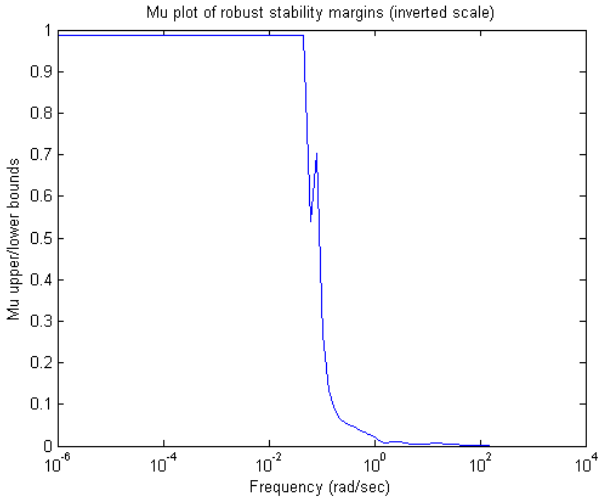


FIGURA 6.17: M_u plot de los márgenes de estabilidad robusta (escala invertida)

6.5.2. Desempeño Robusto

A partir de la figura 2.3 se tiene que

$$Z = [M_{22} + M_{21}\triangle(I - M_{11}\triangle)^{-}1M_{12}]W = F_u(M, \triangle)W$$

Luego, para el análisis de desempeño robusto se crea un bloque de incertidumbre ficticia $\triangle_P$ como se puede ver en la figura 6.18.

$$\tilde{\triangle} = \begin{bmatrix} \triangle & 0 \\ 0 & \triangle_P \end{bmatrix}, \qquad \|\triangle_P\|_\infty \leq 1$$

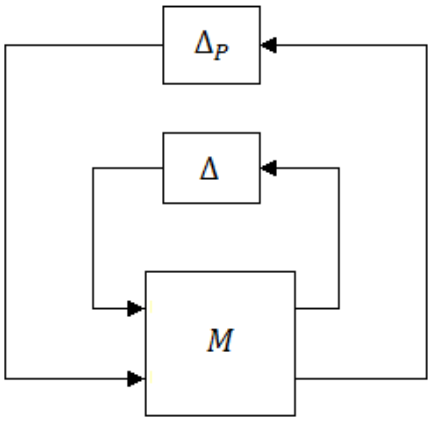


FIGURA 6.18: Sistema aumentado para el análisis de Desempeño Robusto

El sistema aumentado se puede ver como un problema de estabilidad robusta; el sistema tiene desempeño robusto si

$$\mu_{\tilde{\Delta}}(M) < 1$$

En la figura 6.19 se puede verificar que el sistema tiene desempeño robusto.

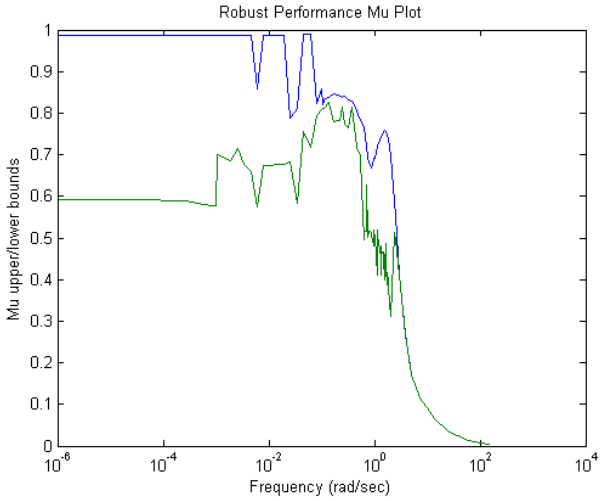


FIGURA 6.19: M_u plot de los márgenes de Desempeño Robusto

6.6. Resultados experimentales

El diagrama de simulink creado para la aplicación de tiempo real que permitió probar el diseño del controlador en el sistema real se puede ver en la figura 6.20. el periodo de muestreo fue de $1ms$ y se excitó con señales de forma de onda cuadrada para verificar la respuesta a escalón. Los bloques llamados prefiltro en Pitch y Yaw se usan para evitar que haya cambios bruscos en el valor del punto de equilibrio. Las señales de excitación hacen que el sistema se mueva alrededor del punto de equilibrio con variaciones pequeñas de tal forma que su respuesta se aproxime a la del sistema lineal.

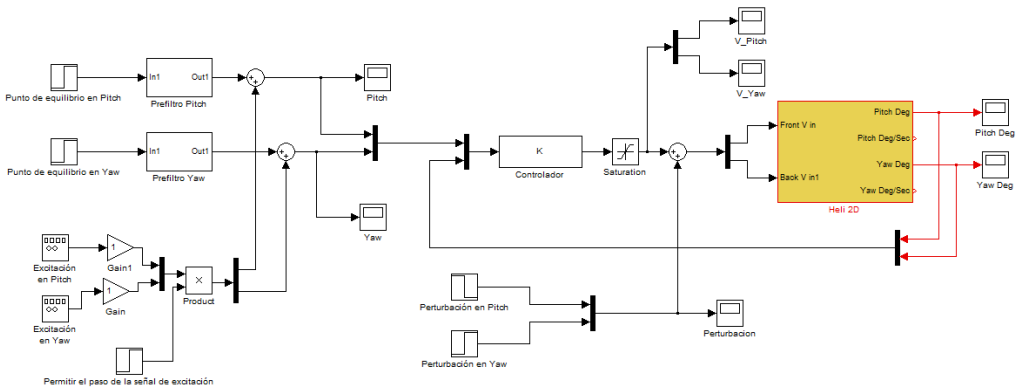


FIGURA 6.20: Diagrama de Simulink del 2DOF del sistema real

En las figuras 6.21 y 6.22 se puede ver la respuesta temporal del sistema real alrededor de cero grados, en las cuales se observa que las respuestas del sistema real y simulada del sistema lineal son muy similares.

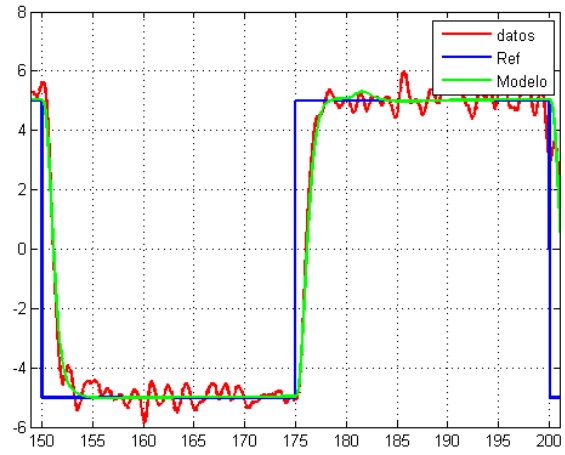


FIGURA 6.21: Respuesta temporal en Pitch alrededor de $\bar{\theta} = 0$ grados

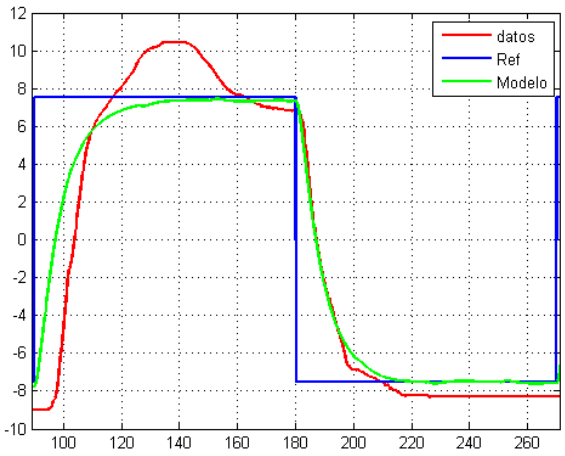


FIGURA 6.22: Respuesta temporal en Yaw alrededor de $\bar{\theta} = 0$ grados

En las figuras 6.23 y 6.24 se puede ver el rechazo a perturbaciones del sistema real alrededor de 0 grados.

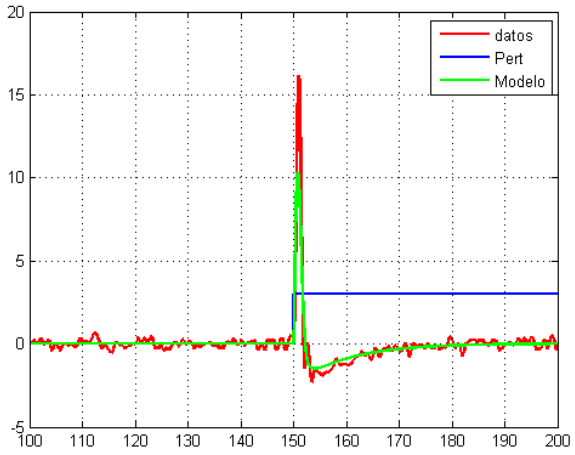


FIGURA 6.23: Rechazo a perturbación en Pitch alrededor de $\bar{\theta} = 0$ grados

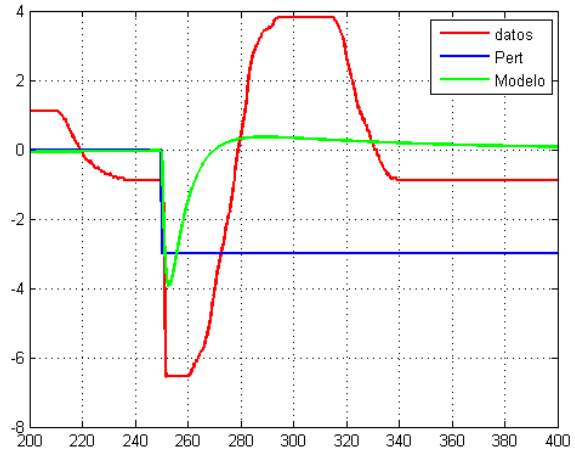


FIGURA 6.24: Rechazo a perturbación en Yaw alrededor de $\bar{\theta} = 0$ grados

En las figuras 6.25 y 6.26 se puede ver la respuesta temporal del sistema real alrededor de 30 grados.

FIGURA 6.25: Respuesta temporal en Pitch alrededor de $\bar{\theta} = 30$ grados

FIGURA 6.26: Respuesta temporal en Yaw alrededor de $\bar{\theta} = 30$ grados

En las figuras 6.27 y 6.28 se puede ver el rechazo a perturbaciones del sistema real alrededor de 30 grados.

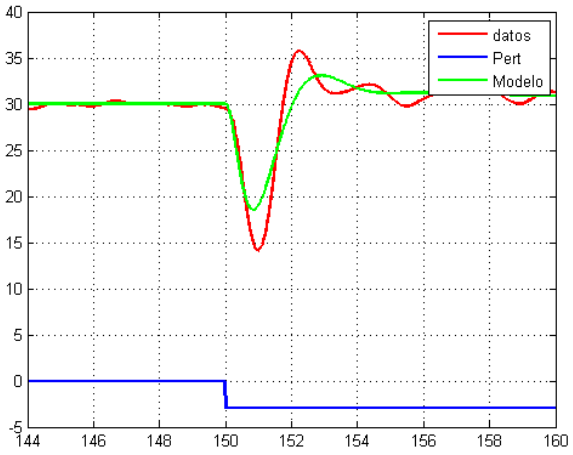


FIGURA 6.27: Rechazo a perturbación en Pitch alrededor de $\bar{\theta} = 30$ grados

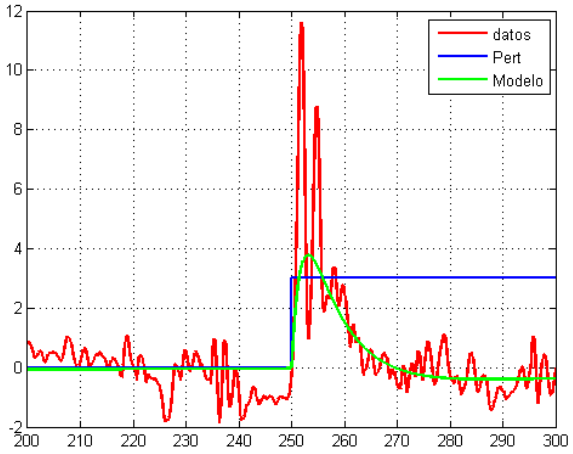


FIGURA 6.28: Rechazo a perturbación en Yaw alrededor de $\bar{\theta} = 30$ grados

Los resultados experimentales muestran que la respuesta del sistema real y la del modelo hallado por identificación usando algoritmo PEM son bastante cercanos, lo cual muestra que el proceso de identificación fue exitoso. La respuesta temporal del eje Yaw alrededor de 30 grados se aproxima mucho mas a la del modelo debido a que la señal de control del motor de Pitch V_{mp} es mayor, lo cual genera un mayor torque de acople hacia el eje Yaw que le ayuda al movimiento.

El control robusto H_∞ logró estabilidad robusta y desempeño robusto en todos los puntos de operación.

6.7. Conclusiones

Cuando se diseña un controlador robusto es muy importante un buen modelado de incertidumbre, puesto que si se tienen imprecisiones muy altas el sistema real puede hacerse inestable o no se aprovecha al máximo el sistema para obtener el mejor desempeño.

Para el diseño de los pesos de sensibilidad y las funciones $ITAE$ se tuvo en cuenta los valores singulares del sistema en lazo abierto para determinar su ancho de banda. El ancho de banda de lazo cerrado se eligió de tal forma que fuera cercano al de lazo abierto, pues si era muy superior implicaba picos elevados de las señales de control y el sistema se hacía inestable; por otro lado, si se elegía un ancho de banda muy pequeño el sistema también se hacía inestable porque la región de atracción se hacía muy pequeña.

Aunque los actuadores pueden entregar señales de control de amplitud mucho más altas, en los pesos de las señales de control fue necesario acotar la amplitud de las señales de control a valores mas pequeños, debido a que el sistema es muy sensible a las aceleraciones fuertes que se producen cuando hay picos grandes en las señales de control, lo que lleva el sistema a la inestabilidad.

Se usó un esquema de control de dos grados de libertad, pues esto permite establecer el comportamiento deseado del sistema en lazo cerrado; y además se pueden usar como modelos de referencia funciones bien comportadas como las $ITAE$ o funciones de Bessel.

El valor de la norma $\|T_{ZW}\|_\infty = 0{,}5920$ indica que se cumplen las especificaciones de desempeño, rechazo de perturbaciones y estabilidad para la planta nominal. A partir del M_u análisis se pudo determinar que el sistema tiene estabilidad robusta y desempeño robusto para la incertidumbre modelada.

La respuesta temporal del sistema real en el eje Yaw es diferente cuando el movimiento en Yaw cambia de dirección; esto se debe fundamentalmente a que la hélice está diseñada para generar fuerza de empuje en una sola dirección, entonces el resultado es que la ganancia es diferente al moverse en cada sentido.

La respuesta dinámica en el eje Yaw se ve fuertemente afectada por la fricción de Coulomb porque a medida que la posición real se acerca a la referencia la señal de control tiende a cero y la señal de control no es suficiente para vencer la fricción de coulomb por lo cual no hay movimiento; además, cada vez que la posición llega al valor deseado la señal de control tiende a cero, entonces, cuando se le cam-

bia la referencia, nuevamente se debe vencer la fricción de coulomb para iniciar el movimiento. Para mejorar el desempeño fue incluido el peso de sensibilidad complementaria, el cual sirvió par disminuir el sobrepico excesivo que se presentaba en el eje Yaw debido al efecto de la acción integral al estar presente la fricción de coulomb.

Los resultados experimentales mostraron que la respuesta del modelo simulado y las respuesta real son muy similares; además el control H_∞ logró estabilidad robusta y desempeño robusto en todos los puntos de operación.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

Se halló el modelo matemático del sistema teniendo en cuenta parámetros adicionales con lo cual se obtuvo un modelo mas refinado comparado con el proporcionado por el fabricante [11]. El modelo obtenido contiene las dinámicas más representativas lo que permitió realizar un adecuado diseño de los controladores.

Para la identificación del sistema en lazo cerrado es necesario tener idea de la dinámica de la planta con el fin de excitar con señales de prueba en el rango frecuencial adecuado; y además, el controlador debe diseñarse de tal forma que la respuesta temporal en lazo cerrado no sea muy rápida y no borrar la dinámica de la planta, razón por la cual fue necesario hallar los parámetros mediante pruebas en lazo abierto.

Los experimentos para hallar los valores de los parámetros físicos permitieron determinarlos con suficiente exactitud, y en base a estos se diseñaron los controladores estabilizantes para el proceso de identificación en caja negra.

Se intentó realizar la identificación experimental del sistema tomando como señales de entrada las señales de control de los motores (voltajes) y las salidas (posiciones); pero fue imposible hacerlo puesto que las señales de control y el ruido son muy comparables. Las señales de control en Pitch son de amplitud muy pequeña

porque la función de transferencia de V_{mp} a θ tiene ganancia grande.

A partir del proceso de identificación en caja negra del sistema en lazo cerrado se obtuvieron modelos lineales en diferentes puntos de operación. Los modelos obtenidos eran de orden alto; pero se hizo reducción del orden de los modelos comprobando que los modelos reducidos conservaban las dinámicas predominantes de los modelos de alto orden.

Para el diseño de los pesos de sensibilidad y las funciones $ITAE$ se tuvo en cuenta los valores singulares del sistema en lazo abierto para determinar su ancho de banda. El ancho de banda de lazo cerrado se eligió de tal forma que fuera cercano al de lazo abierto, pues si era muy superior implicaba picos elevados de las señales de control y el sistema se hacía inestable; por otro lado, si se elegía un ancho de banda muy pequeño el sistema también se hacía inestable porque la región de atracción se hacía muy pequeña al ser un sistema no lineal.

La respuesta temporal en el eje Yaw es diferente cuando el movimiento en Yaw cambia de dirección; esto se debe fundamentalmente a que la hélice está diseñada para generar fuerza de empuje en una sola dirección, entonces el resultado es que la ganancia es diferente al moverse en cada sentido.

La respuesta dinámica en el eje Yaw se ve fuertemente afectada por la fricción de coulomb porque a medida que la posición real se acerca a la referencia la señal de control tiende a cero y la señal de control no es suficiente para vencer la fricción de coulomb por lo cual no hay movimiento; además, cada vez que la posición llega al valor deseado la señal de control tiende a cero, entonces, cuando se le cambia la referencia, nuevamente se debe vencer la fricción de coulomb para iniciar el movimiento. Para mejorar el desempeño fue incluido el peso de sensibilidad complementaria, el cual sirvió para disminuir el sobrepico excesivo que se presentaba en el eje Yaw debido al efecto de la acción integral tratando de contrarrestar la fricción de Coulomb.

El control Robusto de dos grados de libertad garantizó estabilidad robusta y desempeño robusto en todos los puntos de operación.

7.1. Trabajo Futuro

El presente trabajo deja como resultado un modelo matemático más refinado, valores de parámetros muy cercanos a los reales y una clara muestra de los pasos de diseño de controladores robustos para su aplicación en los cursos de control y nuevos trabajos de grado.

Como continuación a este trabajo se pueden implementar técnicas de control por ganancia programada, lo cual consiste en diseñar un controlador para cada punto de operación garantizando el mismo desempeño en todos los puntos.

Se pueden implementar estrategias de control no lineal como son linealización exacta por realimentación, porque ya se tiene bastante precisión en el valor de los parámetros.

Diseñar e implementar controladores en modo deslizante y por rediseño de Lyapunov.

Intentar corregir el efecto de la fricción de Coulomb aplicando estrategias no lineales.

REFERENCIAS

[1] G. Cai, M. Chen, K. Peng, M. Dong, and T. Lee. Modeling and control of the yaw channel of a uav helicopter. *IEEE Trans. Ind. Electron*, 55(9):3426–3434, 2008.

[2] P. Castillo, R. Lozano, , and Dzul. Stabilization of a mini rotorcraft having four rotors. *IEEE Contr. Syst. Mag.*, 25(6):45–55, 2005.

[3] J. Craig. *Introduction to Robotics, Mechanics and Control.Q*. Addison-Wesley, 1 edition, 1989.

[4] G. E. Dullerud and F. G. Paganini. *A Course in Robust Control Theory a convex approach*. Springer & Verlag, 2000.

[5] I. Egaña, M.Iribas, J. Mota, J. Castillejo, P.Vital, J.Villanueva, M. Barreras, and M. García-Sanz. Control robusto qft de un helicoptero de 3 gdl. Departamento de Automática y Computación, Campus de Arrosadía, 31006 - Pamplona.

[6] M. García-Sanz and J. Elso. Ampliación del benchmark del diseño de controladores para el cabeceo de un helicóptero. *CEA: Comité Español de Automática*, 4(1):107–110, Enero 2007.

[7] M. García-Sanz, J. Elso, and I. Egaña. Control del Ángulo de cabeceo de un helicóptero como benchmark de diseño de controladores. *CEA: Comité Español de Automática*, 3(2):111–116, Abril 2006.

[8] V. Gavrilets, I. Martinos, B. Mettler, and E. Feron. Control logic for automated aerobatic flight of miniature helicopter. *AIAA Guidance Navigation and Control Conference*, 2002.

[9] D. Gu, P. Petkov, and M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB*. Springer, 1 edition, 2005.

[10] N. Hovakimyan and J. Calise. Adaptative output feedback control of uncertain multi-input multi-output systems using single hidden layer neural networks. *American Control Conference*, 2002.

[11] Q. Inc. Quanser 2 dof helicopter user and control manual. 2006.

[12] B. Kadmiry and D. Driankov. A fuzzy gain-scheduler for the attitude control of an unmanned helicopter. *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 12(4):502–515, 2004.

[13] H. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1 edition, 2000.

[14] L. Ljung. *System Identification-Theory For the User*. Prentice Hall, 2 edition, 1999.

[15] R. Lozano, A. Sanchez, S. Salazar-Cruz, I. Fantoni, and J. Torres. Discrete-time stabilization of integrators in cascade: Real-time stabilization of a minirotorcraft. *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 6265–6270, 2006.

[16] M. López-Martínez, M. Ortega, C. Vivas, and F. Rodríguez. Control no lineal robusto de una maqueta de helicóptero con rotores de velocidad variable. *CEA: Comité Español de Automática*, 4(3):46–60, Julio 2007.

[17] L. Marconi and R. Naldi. Robust full degree-of-freedom tracking control of a helicopter. *Automatica*, 43(11):1909–1920, 2007.

[18] M.López-Martínez, M.G.Ortega, and F.R.Rubio. Control robusto de un sistema de dos rotores en cuadratura. Dpto. Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla. Escuela Superior de Ingenieros.

[19] K. Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Pearson, 4 edition, 2003.

[20] A. Ollero Baturone. *Robótica, Manipuladores y Robots Móviles*. Alfaomega, 2001.

[21] M. Peña. Modelamiento, simulación y hallazgo de modelos linealizados a partir de técnicas de identificación de un cuatrirrotor. Master's thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2009.

[22] F. Rodriguez-Rubio and M.-J. López-Sanchez. *Control Adaptativo y Robusto*. Univsersidad de Sevilla, 1996.

[23] H. Ríos, A. Rosales, A. Ferreira, and A. Dávila. Robust regulation for a 3-dof helicopter via sliding-modes control and observation techniques. *American Control Conference*, pages 4427–4432, 2010.

[24] S. Salazar-Cruz, F. Kendoul, R. Lozano, and I. Fantoni. Real-time stabilization of a small three-rotor aircraft. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 44(2):783–794, 2008.

[25] S. Seshagiri and H. Khalil. Output feedback control of nonlinear systems using rbf neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11(1):69–79, 2000.

[26] H. Shim, T. Koo, F. Hoffman, and S. Sastry. A comprehensive study of control design of an autonomous helicopter. *37th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3653–3658, 1998.

[27] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control*. Wiley, England, 1996.

[28] M. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, NewYork, 1 edition, 1989.

[29] K. Tanaka, H. Ohtake, and H. Wang. A practical design approach to stabilization of a 3-dof rc helicopter. *IEEE Trans. Contrl. Syst. Technology*, 12(2):315–325, 2004.

[30] J. Vilchis, B. Brogliato, A. Dzul, and R. Lozano. Nonlinear modeling and control of helicopters. *Automatica*, 39(9):1583–1596, 2003.

[31] W. Bhosri and A.E. Frazho and C. Lana. Parameters identication of the 2 degrees of freedom helicopter model. `https://engineering.purdue.edu/AAE/Academics/Courses/aae364L`, 2010. Laboraorio de Sistema de Control de la Escuela de Aeronáutica y Astronáutica.

[32] X. Zhao and J. Han. Robust tracking control for the yaw control of helicopter with time-varying uncertainty. *IEEE Conf. Ind. Electro. Society*, page 816–821, 2007.

[33] X. Zhao, J. Han, and Z. Wu. Robust h2 control with adaptive compensation input with application to yaw control of ruavs. *IEEE Conf. Ind. Electro. Society*, page 355–359, 2008.

[34] K. Zhou and J. C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice-Hall, New jersey, 1998.