UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Trabajo Final de Maestría:
Sobre la Estabilidad de Lyapunov en Conjuntos Seccional-Hiperbólicos

Richard Eduardo Sánchez Méndez

C.C. 1.118.555.127 de Yopal

Programa: Maestría en ciencias - Matemáticas

Línea de Investigación: Análisis

Grupo de Investigación: SISDIMUNAL

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2025

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Trabajo Final de Maestría:
Sobre la Estabilidad de Lyapunov en Conjuntos Seccional-Hiperbólicos

Presentado por el estudiante:

Richard Eduardo Sánchez Méndez

C.C. 1.118.555.127 de Yopal

Director:

Yeison Alexander Sánchez Rubio

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas

Bogotá, Colombia

2025

Dedicatoria:

A mi madre, esposa y hermano.
A nuestrx hijx en camino.

Agradecimientos:

Al profesor Yeison, por su orientación y por su amistad.
A mis compañeros y profesores del departamento de matemáticas.

Sánchez, R. E. Sobre la Estabilidad de Lyapunov en Conjuntos Seccional-Hiperbólicos. Trabajo final de maestría en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., 2025.

Resumen

Sean M una variedad diferenciable compacta y $X : M \to M$ un campo vectorial de clase C^r, $r \geq 1$, transversal hacia el borde M en caso de que éste sea no vacío. Se denota por X_t el correspondiente **flujo asociado** a X. Un subconjunto no vacío $\Lambda \subseteq M$ es **invariante** para el campo X si $X_t(\Lambda) = \Lambda$ para todo $t \geq 0$. Dado $x \in M$, el conjunto $\alpha(x)$ está conformado por los puntos de acumulación de la órbita negativa de x y se le llama **alfa-límite** de p, mientras que el **omega-límite** de x, $\omega(x)$, es el conjunto de puntos de acumulación de la órbita positiva de x. Una **órbita cerrada** del campo X es una singularidad ó una órbita periódica. Además, si $\Lambda \subseteq M$ es un subconjunto no vacío, compacto e invariante; se dice que Λ es **transitivo** si $\Lambda = \omega(p)$ para algún $p \in \Lambda$, se dice que Λ es **attracting** si existe una vecindad U de Λ tal que $X_t(U) \subseteq U$ para todo $t \geq 0$ y $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U)$; por otra parte, se dice que Λ es **Lyapunov estable** si para cada vecindad U de Λ existe una vecindad W de Λ, de tal manera que la órbita positiva de cualquier punto en W queda contenida en U. Por lo tanto, todo conjunto attracting es Lyapunov estable.

Un subconjunto compacto e invariante H de M se llama **hiperbólico**, si presenta una descomposición dominada, continua y DX_t-invariante del fibrado tangente, en tres subfibrados uno de los cuales es contractor (**subfibrado estable**), otro expansor (**subfibrado inestable**) y el último es generado por la dirección del campo X. Existe una familia de subconjuntos compactos e invariantes, conocidos como **seccional-hiperbólicos**, que generalizan a los conjuntos hiperbólicos, en el sentido que contiene a estos últimos, junto con otros atractores extraños que aunque presentan propiedades similares no resultan hiperbòlicos. Los conjuntos seccionales-hiperbólicos se definen por presentar una descomposición dominada, continua y DX_t-invariante del fibrado tangente, en dos subfibrados uno de los cuales es contractor y en el otro subfibrado el área de los paralelogramos crece exponencialmente (**subfibrado central**). Cuando la dimesión del subfibrado central es igual a dos, se dice que el conjunto seccional-hiperbólico es de **codimensión uno**. Un conjunto seccional-hiperbólico Λ puede contener singularidades acumuladas por órbitas de puntos regulares en Λ, situación que no puede ocurrir en conjuntos hiperbólicos sin romper la continuidad en la descomposición del fibrado tangente, en estos casos la singularidad recibe el nombre de **Lorenz-like**.

Un enfoque sobre el que se ha desarrollado la dinámica seccional-hiperbólica consiste en extrapolar propiedades conocidas para conjuntos hiperbólicos. Una de tales propiedades es que todo conjunto hiperbólico Lyapunov estable H es attracting y, en consecuencia, los dos

conceptos coinciden en éste caso [AP10]. En este orden de ideas, la pregunta ¿todo conjunto seccional-hiperbólico Lyapunov estable Λ necesariamente es attracting? aún no se ha resuelto completamente, sin embargo, Bautista y Sánchez [BS20] obtuvieron un avance parcial para el caso particular en que Λ es transitivo, de codimensión uno y contiene una única singularidad Lorenz-like, la cual es de tipo frontera. En este trabajo se presentan los fundamentos teóricos para conjuntos seccional-hiperbólicos, que son necesarios para demostrar el resultado de Bautista y Sánchez; entre los cuales se destacan los conceptos de *sección transversal asociada a una singularidad Lorenz-like*, *sección transversal completa*, *la Propiedad* P_Σ [BM08], [San20] (que permite caracterizar conjuntos omega-límite que son órbitas cerradas) y finalmente, el *Lema de Conexión Seccional-Hiperbólico* [BM10], [BSS] que se establece para conjuntos de codimensión uno, que contengan al conjunto inestable de cada uno de sus puntos.

Palabras clave: Conjunto seccional-hiperbólico, Lyapunov estable, attracting, codimensión uno, singularidad Lorenz-like, sección transversal completa.

Sánchez, R. E. Sobre la Estabilidad de Lyapunov en Conjuntos Seccional-Hiperbólicos. Trabajo final de maestría en Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., 2025.

English title: "On the Lyapunov Stability in Sectional-Hyperbolic Sets"

Abstract

Let M be a compact differentiable manifold and $X : M \to M$ a C^r vector field, $r \geq 1$, transversal to the boundary of M in case it is non-empty. The associated flow of X is denoted by X_t. A non-empty subset $\Lambda \subseteq M$ is **invariant** for the vector field X if $X_t(\Lambda) = \Lambda$ for all $t \geq 0$. Given $x \in M$, the set $\alpha(x)$ consists of the accumulation points of the negative orbit of x and is called the **alpha-limit** of x, while the **omega-limit** of x, $\omega(x)$, is the set of accumulation points of the positive orbit of x. A **closed orbit** of the vector field X is either a singularity or a periodic orbit. Furthermore, if $\Lambda \subseteq M$ is a non-empty, compact, and invariant subset, it is said that Λ is **transitive** if $\Lambda = \omega(p)$ for some $p \in \Lambda$; it is said that Λ is **attracting** if there exists a neighborhood U of Λ such that $X_t(U) \subseteq U$ for all $t \geq 0$ and $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U)$; on the other hand, it is said that Λ is **Lyapunov stable** if for every neighborhood U of Λ there exists a neighborhood W of Λ such that the positive orbit of any point in W remains contained in U. Therefore, every attracting set is Lyapunov stable.

A compact and invariant subset H of M is called **hyperbolic** if it admits a dominated, continuous, and DX_t-invariant splitting of the tangent bundle into three subbundles, one of which is contracting (**stable subbundle**), another expanding (**unstable subbundle**), and the last one is generated by the direction of the vector field X. There exists a family

of compact and invariant subsets, known as **sectional-hyperbolic**, which generalize hyperbolic sets in the sense that they include the latter along with other strange attractors that, although exhibiting similar properties, are not hyperbolic. Sectional-hyperbolic sets are defined by admitting a dominated, continuous, and DX_t-invariant splitting of the tangent bundle into two subbundles, one of which is contracting, and in the other the area of parallelograms grows exponentially (**central subbundle**). When the dimension of the central subbundle is equal to two, the sectional-hyperbolic set is said to be of **codimension one**. A sectional-hyperbolic set Λ may contain singularities accumulated by the orbits of regular points in Λ, a situation that cannot occur in hyperbolic sets without breaking the continuity of the tangent bundle splitting; in such cases, the singularity is called **Lorenz-like**.

An approach on which sectional-hyperbolic dynamics has been developed consists in extrapolating known properties for hyperbolic sets. One such property is that every Lyapunov stable hyperbolic set H is attracting and, consequently, both concepts coincide in this case [AP10]. In this order of ideas, the question: is every Lyapunov stable sectional-hyperbolic set Λ necessarily attracting? has not yet been completely resolved, however, Bautista and Sánchez [BS20] obtained a partial advance for the particular case in which Λ is transitive, of codimension one, and contains a unique Lorenz-like singularity, which is of boundary type. In this work, the theoretical foundations for sectional-hyperbolic sets are presented, which are necessary to prove the result of Bautista and Sánchez; among which the following concepts stand out: *transversal section associated to a Lorenz-like singularity*, *complete transversal section*, *Property* P_Σ [BM08], [San20] (which allows to characterize omega-limit sets that are closed orbits), and finally, the *Sectional-Hyperbolic Connecting Lemma* [BM10], [BSS], which is established for codimension one sets that contain the unstable set of each of their points.

Keywords: Sectional-hyperbolic set, Lyapunov stable, attracting, codimension one, Lorenz-like singularity, complete transverse section.

Contenido

Introducción

La teoría de los sistemas dinámicos, nace en el estudio del comportamiento a través del tiempo, de la solución de problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales asociadas a problemas de mecánica clásica, como el de los tres cuerpos, (de lo cual fue pionero H. Poincare, a finales del siglo XIX e inicios del XX) y que actualmente se conoce como teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales. En este contexto surgió la noción de flujo, que luego se generalizó para campos vectoriales diferenciables definidos sobre variedades diferenciables, que definen a los sistemas dinámicos continuos.

En el contexto de las ecuaciones diferenciales lineales, se pueden hallar ejemplos para los cuales, a pesar de tener garantía de existencia y unicidad de soluciones, no es posible determinar explícitamente a su correspondiente flujo asociado; como por ejemplo, la ecuación de Lienard (ver [Sot02], pp. 255). Por esta razón, la teoría cualitativa se apoya en áreas como la geometría diferencial, topología, álgebra y análisis (entre otras) para obtener propiedades del conjunto de soluciones. Una herramienta fundamental para este propósito es el concepto de sección transversal, que permite discretizar fenómenos continuos y simplificar su estudio mediante el análisis de la correspondiente aplicación de retorno, especialmente en proximidades a órbitas periódicas y singularidades.

En la última década del siglo XIX *Aleksandr M. Lyapunov*, motivado por sus estudios sobre dinámica celeste, propuso en su tesis doctoral [Lya92] algunas técnicas para analizar las propiedades del movimiento de los cuerpos (descrito por una ecuación diferencial); abordando la pregunta de si para un punto de equilibrio dado ¿es posible hallar una vecindad V de dicho punto de equilibrio, de tal manera que para cualquier otra condición inicial en V, se pueda garantizar que su órbita futura permanecerá cercana al equilibrio?. Los métodos propuestos por Lyapunov constituyen el pilar de lo que hoy se conoce como Teoría del Control y de la Estabilidad, que tiene diversas aplicaciones en ingeniería, física y sistemas dinámicos.

En los años sesenta [Sma67], el célebre matemático estadounidense Stephen Smale definió los conjuntos hiperbólicos, como aquellos conjuntos invariantes para un campo vectorial definido sobre una variedad, que admiten una descomposición continua e invariante de su fibrado tangente en tres subespacios, uno de los cuales es contractor, otro expansor y otro dado por la dirección del campo; dando origen a lo que hoy conocemos como *dinámica hiperbólica*, que de inmediato despertó gran interés teórico y que comenzó a ser ampliamente estudiado, obteniéndose en los años posteriores propiedades fundamentales como el sombreamiento y la conexión de las órbitas.

Un hecho que posibilitó el rápido desarrollo de la dinámica hiperbólica es que los conjuntos hiperbólicos conexos se reducen a una singularidad ó no admiten singularidades (de lo contrario se afectaría la continuidad en la descomposición del fibrado tangente), sin embargo, frecuentemente los campos vectoriales admiten singularidades, por lo que resulta importante abordarlas. En 1963, el matemático y meteorólogo Edward Lorenz planteó un modelo simplificado del fenómeno de convección atmosférica, mediante un sistema de ecuaciones diferenciales en dimensión tres, que admite singularidades y que presenta gran sensibilidad a condiciones iniciales, para algunos valores de sus parámetros. El estudio de este sistema de ecuaciones y de sus principales características, condujo a mediados de los años setenta, [Lor63], al planteamiento del atractor geométrico de Lorenz , que se convirtió en uno de los primeros ejemplos de conjunto atractor no-hiperbólico, que exhibe algunas propiedades los conjuntos hiperbólicos como densidad de las órbitas periódicas.

Posteriormente,al final de la primera década de los años 2000, surge la noción de *conjunto seccional-hiperbólico* [MM08], los cuales admiten una descomposición continua de su fibrado tangente en un subfibrado contractor y otro subfibrado en el que el área de paralelogramos crece exponencialmente. Esta familia de conjuntos abarca en particular a los conjuntos hiperbólicos y atractores extraños como el geométrico de Lorenz.

Un enfoque común en el estudio de los conjuntos seccional-hiperbólicos, consiste en extrapolar propiedades conocidas para los conjuntos hiperbólicos. La estabilidad de Lyapunov es una propiedad de los conjuntos invariantes que expresa que las órbitas de puntos cercanos se mantendrán cercanas durante un tiempo indefinido; mientras que la propiedad de ser attracting es un poco más rectrictiva porque además exige que tales órbitas deben ir acercándose en la medida en que el tiempo avanza. Luego, todo conjunto attracting es Lyapunov estable, pero no reciprocamente; sin embargo, es bien conocido que si el conjunto Lyapunov estable es en particular hiperbólico, entonces éste será attracting.

En el contexto de los conjuntos seccional-hiperbólicos la pregunta ¿todo conjunto seccional-hiperbólico Lyapunov estable es attracting? aún permanece abierta, principalmente por el desafío técnico que plantean los conjuntos seccional-hiperbólicos, los cuales admiten la existencia de singularidades acumuladas por órbitas de puntos regulares, cosa que no ocurre para los conjuntos hiperbólicos. Aún así, pese a esta dificultad, Bautista y Sánchez [BS20] obtuvieron un avance parcial sobre este problema, agregando algunas hipótesis adicionales.

El objetivo de este trabajo es estudiar y desglosar el resultado de Bautista y Sánchez, con el fin de comprender las técnicas para el estudio de los conjuntos seccionales-hiperbólicos, tales como las secciones transversales y el lema de conexión.

En este orden de ideas, en el capítulo 1 se precisa la noción de conjunto Lyapunov estable, de conjunto hiperbólico y de conjunto seccional-hiperbólico; además se presenta el concepto de singularidad y sus características más relevantes cuando aparecen en conjuntos seccional-hiperbólicos. En el capítulo 2 se aborda el concepto de sección transversal, la cual es una herramienta fundamental en dinámica porque permite discretizar fenómenos continuos, contribuye a identificar la presencia de órbitas periódicas y entender mejor la dinámica que ocurre en cercanías a singularidades. En el capítulo 3 se presenta una herramienta que permite caracterizar como órbitas cerradas (singularidades o periódicas) a los conjuntos que surgen asintóticamente desde una órbita (conjuntos ω-límite) y que poseen estructura seccional hiperbólica; mediante la observación de un fenómeno en el espacio de estados, que se conoce como la propiedad P_Σ. En el capítulo 4, se estudia una extensión hacía los conjuntos seccional-hiperbólicos que contienen las variedades inestables de sus subconjuntos hiperbólicos, de otra propiedad clásica de los conjuntos hiperbólicos, conocida como el lema de conexión. Finalmente, en el capítulo 5 se aborda el teorema principal de este trabajo, haciendo énfasis en el uso de lo que se denominará *sección transversal completa* asociada a una singularidad.

1 Nociones elementales

Las siguientes dos definiciones buscar establecer de manera clara, el ambiente sobre el que se desarrollará la mayor parte de éste trabajo final de maestría.

Definición 1.1. *Se dice que M es una **variedad diferenciable** de clase C^k, $k \geq 1$, y de dimensión n ($\dim(M) = n$), si M es un espacio topológico que cumple las siguientes propiedades:*

(i) M es un espacio de Hausdorff, segundo contable.

(ii) M está dotado de una estructura diferenciable de clase C^k. Es decir, existe un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$, donde cada $U_i \subset M$ es abierto, y cada aplicación

$$\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$$

es un homeomorfismo tal que las funciones de cambio de coordenadas, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$, son de clase C^k en su dominio.

*Si M es en particular un espacio topológico compacto, se dice que M es una **variedad compacta**. Además, una **subvariedad embebida** S de M, es un subespacio topológico $S \subseteq M$, que es en sí mismo una variedad diferenciable. Finalmente, una **subvariedad inmersa** de M es un subconjunto $S \subset M$ dotado de una topología (no necesariamente la topología subespacio) con respecto a la cual S es una variedad topológica (sin borde), y de una estructura diferenciable con respecto a la cual $S \hookrightarrow M$ (aplicación inclusión) es una inmersión suave.*

Observación 1.1. *[Lee13] La intersección entre dos subvariedades S_1 y S_2 de M, no necesariamente es una subvariedad de M. Para garantizar que la intersección $S_1 \cap S_2$ resulte ser una subvariedad de M, necesariamente dicha intersección debe ser transversal.*

Definición 1.2. *El **borde**, ∂M, de una variedad diferenciable compacta M con dimensión n y clase C^k; está formado por los puntos $p \in M$ tales que existe una carta (U, φ) con $p \in U$ y $\varphi(p) \in \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. El conjunto ∂M es una subvariedad diferenciable de M, de clase C^k y con dimensión $n - 1$.*

Definición 1.3. *[Jr74] Sea M una variedad diferenciable de dimensión m. Una **foliación de dimensión** p y clase C^r de M es una descomposición de M como una unión disjunta* *de subconjuntos conexos* $\{\mathcal{L}_\alpha\}_{\alpha\in A}$*, llamados* hojas de la foliación*, que satisface la siguiente propiedad: Para cada punto* $x \in M$*, existe una vecindad abierta* $U \subset M$ *de* x *y un sistema de coordenadas locales de clase* C^r*,*

$$\varphi = (x_1, \dots, x_m) : U \to \mathbb{R}^m,$$

tal que para cada hoja $\mathcal{L}_\alpha$*, los componentes de la intersección* $U \cap \mathcal{L}_\alpha$ *están descritos por ecuaciones del tipo:*

$$x_{p+1} = c_{k+1} : \textit{constante}, \quad \dots, \quad x_m = c_m : \textit{constante}.$$

Definición 1.4. *[BM11], [Car92]. Dada una métrica Riemanniana* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *en una variedad* M*, se puede definir lo que se llama una* ***2-norma*** *sobre* M*, denotada por* $\|\cdot,\cdot\|$*; de tal manera que para cada punto* $x \in M$ *se tiene una aplicación*

$$\|\cdot,\cdot\|_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\|u_x, v_x\|_x = \sqrt{\langle u_x, u_x\rangle\langle v_x, v_x\rangle - \langle u_x, v_x\rangle^2}.$$

Esta cantidad representa el área del paralelogramo formado por los vectores u_x *y* v_x *en el espacio tangente* T_xM*.*

Para detalles adicionales sobre temas relacionados con variedades diferenciables se pueden revisar referencias tales como [Lee13], [GP10] y [Tu07]. De aquí en adelante, M será una variedad diferenciable compacta y $X : M \to M$ un campo vectorial de clase C^k, $k \geq 1$, transversal entrando hacia el borde de M, ∂M, en caso de que no sea vacío. Denotaremos por X_t el correspondiente flujo asociado a X y como $\|\cdot\|$ a la correspondiente norma Riemanniana. La condición de transversalidad hacia al borde se considera para garantizar que $X_t(x) \in M$ para cada $x \in M$ y $t \geq 0$.

Definición 1.5. *[AP10] El conjunto* $\Lambda \subseteq M$ *se dice* ***invariante*** *(respecto al campo vectorial* X*), si* $X_t(\Lambda) = \Lambda$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*. Nótese que el mayor conjunto invariante en* M *queda determinado por*

$$\bigcap_{t\geq 0} X_t(M) := M(X),$$

al cual llamaremos ***conjunto maximal invariante****. Observe que si* $\Lambda \subseteq M$ *es un conjunto invariante, entonces* $\Lambda \subseteq X_t(M)$ *para todo* $t > 0$ *y en consecuencia,*

$$\Lambda \subseteq \bigcap_{t>0} X_t(M) = M(X).$$

Proposición 1.1. *Sea* X *un campo vectorial sobre* M*. Para todo* $t \geq 0$ *se satisface que* $X_t(M) = M(X)$*.*

Demostración. ($\subseteq$) Si $x \in M(X)$ y $t \geq 0$, existe $y \in M$ tal que $x = X_t(y)$. Ahora, dado $s \geq 0$, como $x \in M(X)$, existe $z \in M$ tal que $x = X_{t+s}(z)$, así $y = X_{-t}(x) = X_s(z)$, entonces $y \in M(X)$, lo cual implica que $M(X) \subseteq X_t(M(X))$.
($\supseteq$) Por otro lado, si $x \in X_t(M(X))$, con $t \geq 0$, existe $y \in M(X)$ tal que $X_t(y) = x$, y dado $s \geq 0$, existe $z \in M$ tal que $y = X_{t+s}(z)$, así $x = X_{-t}(y) = X_s(z)$, entonces $x \in M(X)$ y se puede concluir que $X_t(M(X)) \subseteq M(X)$. $\square$

Como $X_t(M(X)) = M(X)$ para $t \geq 0$, necesariamente $M(X) = X_{-t}(M(X))$ para todo $t \geq 0$; lo cual permite afirmar que $M(X)$ es un conjunto invariante.

Definición 1.6. *Sea $q \in M$, al conjunto $O^+(q) = \{X_t(q) : t \geq 0\}$ se le llama* ***órbita positiva*** *de q. Si $p \in M(X)$, la* ***órbita negativa*** *de p es $O^-(p) = \{X_t(p) : t \leq 0\}$ y se define la* ***órbita*** *de p como $O(p) = \{X_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$.*

Definición 1.7. *Sean $q \in M$ y $p \in M(X)$. Los conjuntos*

$$\omega(q) = \omega_X(q) = \{y \in M : y = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(q) \text{ para alguna sucesión creciente } t_n \to \infty\},$$
$$\alpha(p) = \alpha_X(p) = \{y \in M(X) : y = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(p) \text{ para alguna sucesión decreciente } t_n \to -\infty\};$$

*se llaman ω-**límite** de q y α-**límite** de p, respectivamente.*

Proposición 1.2. *[Sot02] Sea M una variedad diferenciable compacta. Los conjuntos $\alpha(x)$, $\omega(y)$ son no vacíos, compactos, conexos e invariantes; para cada $x \in M(X)$ y para cada $y \in M$.*

Un punto $\sigma \in M$ es una **singularidad** de X si $X(\sigma) = 0$ en cuyo caso $O(\sigma) = \{\sigma\}$; al conjunto de todas las singularidades de X lo denotamos como $\mathrm{Sing}(X)$. Se dice que $\sigma \in M$ es una **singularidad hiperbólica**, si todos los autovalores de $DX_t(\sigma)$ tienen parte real distinta de cero. Un punto $p \in M$ es **regular** si no es una singularidad. Por otra parte un punto regular $p \in M$ se dice **periódico** si existe un $T > 0$ minimal tal que $X_T(p) = p$, a la órbita de tal punto p se le llama **órbita periódica** y al conjunto de todos los puntos periódicos en M se le denota por $Per(X)$. Si $x \in M$ es punto periódico o una singularidad, se dice que la órbita positiva de x, $O^+(x)$, es **cerrada**; además, éste resulta ser un conjunto invariante.

Definición 1.8. *[HK95] Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables, y X_1, X_2 campos vectoriales de clase $\mathcal{C}^r$ sobre M_1 y M_2, respectivamente. Sean $\varphi_1 : D_1 \to M_1$ y $\varphi_2 : D_2 \to M_2$ los flujos correspondientes a X_1 y X_2. Se dice que X_1 y X_2 son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo $h : M_1 \to M_2$ tal que:*

1. *Para todo $(t, x) \in D_1$, se tiene $(t, h(x)) \in D_2$,*

2. *Se cumple:*
$$h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x)).$$

Si h es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^r$, se dice que X_1 y X_2 son $\mathcal{C}^r$-conjugados.

Teorema 1.1. *(Hartman-Grobman) [Sot02], [PS70] Sea $X : M \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 y $\sigma \in M$ una singularidad hiperbólica. Existen vecindades W de σ en M y V de 0 en $\mathbb{R}^n$ tales que la restricción $X|_W$ es topológicamente conjugada a $DX(\sigma)|_V$.*

Definición 1.9. *Sea $\Lambda \subseteq M$ un conjunto no vacío, compacto e invariante. Se dice que Λ es*

(i) ***Transitivo*** *si $\Lambda = \omega(p)$ para algún $p \in \Lambda$.*

(ii) ***Attracting*** *si existe una vecindad U de Λ tal que $X_t(U) \subseteq U$ para todo $t \geq 0$ y $\Lambda = \bigcap_{t\geq 0} X_t(U)$.*

(iii) ***Atractor***, *si Λ es transitivo y attracting.*

(iv) ***Lyapunov estable*** *si para cada vecindad U de Λ existe una vecindad W de Λ tal que $X_t(p) \in U$ para todo $t \geq 0$ y $p \in W$.*

Observación 1.2. *Las órbitas de puntos en un conjunto Lyapunov estable y de algunos puntos vecinos, se mantienen próximas durante cualquier tiempo futuro. La condición attracting es un poco más restrictiva ya que además exige que tales órbitas deben acercarse indefinidamente en la medida en que el tiempo t se hace árbitrariamente grande.*

Ejemplo 1.1. *Todo conjunto Attracting necesariamente es Lyapunov Estable. Sin embargo, el reciproco no es válido en general; como contra-ejemplo considere $M = B[0,2] \subseteq \mathbb{R}^2$, $\Lambda = B[0,1]$ (bola cerrada) y el campo vectorial dado por*

$$X : M \to M, \quad \text{donde} \quad X\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{para cada } (x,y) \in M,$$

cuyo flujo asociado es

$$X_t(x_0,y_0) = (x_0\cos(t) + y_0\,\mathrm{sen}(t),\ x_0\,\mathrm{sen}(t) - y_0\cos(t)), \quad \text{para cada } (x_0,y_0) \in M, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nótese que las curva integrales asociadas a éste flujo son circuferencias centradas en el origen, que pasan por la condición inicial (x_0,y_0). A continuación se mostrará que Λ es un conjunto Lyapunov estable, sin embargo, se observará que Λ no es un conjunto attracting.

Como cada bola cerrada centrada en el origen es un conjunto compacto e invariante, para verificar que Λ es Lyapunov estable, se considera cualquier vecindad U de Λ, así, debe existir un abierto $\mathcal{O} \subseteq M$ tal que $\Lambda \subset \mathcal{O} \subseteq U$. Como los conjuntos $Fr(\Lambda)$ y $Fr(U)$ son cerrados en M, es posible definir

$$\delta = \mathrm{dist}(Fr(\Lambda), Fr(U)) := \inf\{\|x-y\| : x \in Fr(\Lambda), y \in Fr(U)\} > 0.$$

Ahora, definiendo la bola abierta $W = B(0, 1+\frac{\delta}{2})$, se observa que *(i)* W *es vecindad de* Λ*,*

(ii) $W \subseteq U$*,*

(iii) $X_t(q) \in W \subset U$*, para todo* $q \in W$ *y todo* $t \geq 0$*;*

lo cual significa que Λ *es Lyapunov estable. Finalmente,* Λ ***no es attracting*** *porque dada cualquier vecindad* U *de* Λ*, existe un abierto* $\mathcal{O}$*, tal que* $\Lambda \subset \mathcal{O} \subseteq U$*. Luego, sin pérdida de generalidad, se puede suponer que* $\mathcal{O} = B(0, r)$ *para algún* $1 < r \leq 2$*. Así,*

$$\Lambda \subset \mathcal{O} = B(0, r) = \bigcap_{t \geq 0} X_t(\mathcal{O}),$$

porque $X_t(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$*. En consecuencia,*

$$\Lambda \subset \bigcap_{t \geq 0} X_t(\mathcal{O}) \subseteq \bigcap_{t \geq 0} X_t(\mathcal{U}).$$

Como esta contenencia es estricta para toda vecindad U *de* Λ*, se verifica que* Λ ***no es attracting****. Finalmente, observe que hubiese sido suficiente considerar* $\Lambda = \{(0, 0)\}$ *(nótese que el origen es la única singularidad del campo* X*) para obtener que él es un conjunto Lyapunov estable pero que no es attracting, desarrollando un argumento análogo al que se acabo de presentar.*

1.1. Conjuntos Hiperbólicos

Definición 1.10. *Un* ***conjunto*** *compacto e invariante* $H \subseteq M$ *es* ***hiperbólico*** *para el campo vectorial* $X : M \to M$*, si existe una descomposición continua,* DX_t*-invariante, de su fibrado tangente*

$$T_H M = E^s_H \oplus E^X_H \oplus E^u_H,$$

y existen constantes $K, \lambda > 0$*; tales que para todo* $x \in H$ *y* $t \geq 0$*:*

1. $\|DX_t(x)v\| \leq K e^{-\lambda t} \|v\|$*, para todo* $v \in E^s_x$*,* ($E^s_H \subseteq T_H M$ *es subespacio contractor*).
2. $\|DX_t(x)u\| \geq K^{-1} e^{\lambda t} \|u\|$*, para todo* $u \in E^u_x$*,* ($E^u_H \subseteq T_H M$ *es subespacio expansor*).
3. $E^X_H = \operatorname{span}\{X(x)\}$. ($E^X_H \subseteq T_H M$ *es el subespacio generado por el campo*).

En la Figura **1-1** se representa la descomposición hiperbólica del fibrado tangente sobre algún punto $x \in H$. Por otra parte, si para cada $x \in H$ se satisface que $E^s_x \neq \{0\} \neq E^u_x$, al conjunto H se le llama **conjunto hiperbólico tipo silla** y en adelante se considerarán solamente conjuntos hiperbólicos tipo silla. Por otra parte, la descomposición hiperbólica del fibrado tangente $T_x M$ es única para cada $x \in H$, ver [San20], Sección 2.2 . En la literatura,

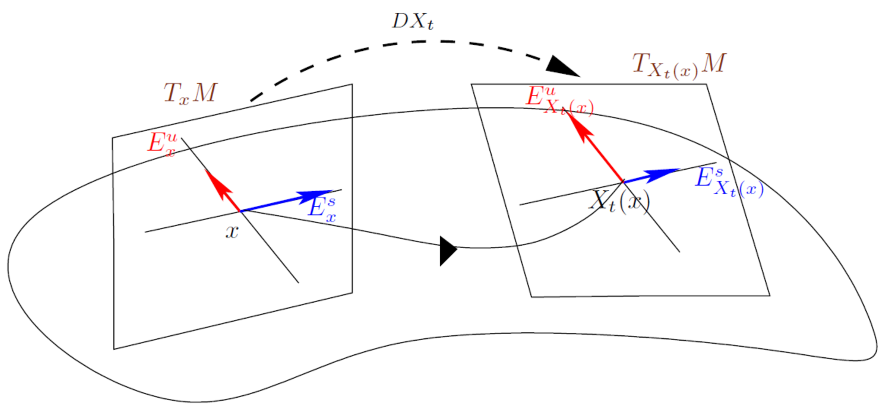

Figura 1-1: Descomposición Hiperbólica

a éste tipo de conjuntos se les llama *uniformemente hiperbólicos* [AP10], [BDV05].

Nótese que en un conjunto hiperbólico las singularidades no pueden ser acumuladas por órbitas de puntos regulares, porque esto afectaría la continuidad en la descomposición del fibrado tangente, ya que al anularse el campo vectorial se pierde la dimensión que aportaba su dirección a dicha descomposición. Observe que toda órbita cerrada (dentro de un conjunto hiperbólico) necesariamente es un conjunto hiperbólico.

En el Ejemplo 1.1 se mostró que no todo conjunto Lyapunov estable resulta ser attracting. Sin embargo, cuando el conjunto Lyapunov estable es en particular hiperbólico, necesariamente éste debe ser un conjunto attracting, ver [AP10] Lema 2.26.

Por otra parte, una de las características más relevantes de los conjuntos hiperbólicos H, es que cada uno de sus puntos, $p \in H$, determina una pareja de subvariedades inmersas en M [HPS77],

$$W^{ss}(p) = W^{ss}_X(p) = \Big\{ y \in M : \lim_{t\to\infty} d(X_t(y), X_t(p)) = 0 \Big\},$$
$$W^{uu}(p) = W^{uu}_X(p) = \left\{ y \in M(X) : \lim_{t\to-\infty} d(X_t(y), X_t(p)) = 0 \right\}$$

conocidas como **variedad estable fuerte** y **variedad inestable fuerte**; que resultan tangentes en p, y con igual dimensión, a los subfibrados tangente E^s_p y E^u_p, respectivamente. Cuando se saturan estas subvariedades a través del flujo, se obtiene

$$W^s(x) := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} W^{ss}(X_t(x)) \quad \text{y} \quad W^u(x) := \bigcup_{t\in\mathbb{R}} W^{uu}(X_t(x))$$

que a su vez son subvariedades inmersas en M, conocidas como la **variedad estable** y la **variedad inestable** del punto p. Observe que por definición $W^{uu}(x)$ es un conjunto invariante, para todo $x \in M$. Por otra parte, se dice que $p \in M$ es un **punto periódico hiperbólico** si $\mathcal{O}(p)$ es un conjunto hiperbólico.

Definición 1.11. *La **clase homoclínica** de un punto periódico hiperbólico $p \in M$ es*

$$H_X(p) := \overline{W^s(p) \pitchfork W^u(p)}$$

En otras palabras, una clase homoclínica es la adherencia de la intersección transversal entre la variedades estable e inestable de un punto periódico hiperbólico. Una clase homoclínica es no trivial, si no se reduce a solamente la órbita periódica $O(p)$.

Observación 1.3. *Toda clase homoclínica no trivial es un conjunto transitivo ([AP10], Lema 2.18) y contiene una órbita periódica densa, además de un subconjunto denso de órbitas periódicas (Teorema de Birkhoff-Smale). En [PT93], se aborda de manera detallada diversos aspectos de la dinámica asociada a las clases homoclínicas.*

1.2. Conjuntos Seccional-Hiperbólicos

Cuando para algún flujo $X_t : M \to M$, se observa que algunas órbitas de puntos regulares acumulan alguna singularidad, la descomposición del fibrado tangente cambia sustancialmente (respecto al caso hiperbólico); a continuación se presentará una familia de conjuntos invariantes en los que esto si es posible, conocidos como **seccional-hiperbólicos** [MM08], [BM11], [Lop15]. El atractor geométrico de Lorenz, es quizás, uno de los ejemplos más famosos de esta familia de conjuntos; el cual contiene una singularidad acumulada por órbitas de puntos regulares y en consecuencia, no es hiperbólico.

Definición 1.12. *Un conjunto compacto e invariante $\Lambda \subseteq M$ se llama **seccional-hiperbólico**, si toda singularidad $\sigma \in \Lambda$ es hiperbólica, existen constantes $K, \lambda > 0$; y además Λ admite una descomposición continua DX_t-invariante de su fibrado tangente*

$$T_\Lambda M = F^s_\Lambda \oplus F^c_\Lambda,$$

tal que para todo $x \in \Lambda$ y $t \geq 0$,

1. $\|DX_t(x)v\| \leq Ke^{-\lambda t}\|v\|$, *para todo* $v \in F^s_x$; $\quad$ ($F^s_\Lambda \subseteq T_\Lambda M$ *es subespacio contractor*).
2. $\|DX_t(x)v\| \cdot \|w\| \leq Ke^{-\lambda t}\|DX_t(x)w\| \cdot \|v\|$, *para todo* $v \in F^s_x$ *y todo* $w \in F^c_x$;
3. $\|DX_t(x)w, DX_t(x)z\|_{X_t(x)} \geq K^{-1}e^{\lambda t}\|w, z\|$ *para todo* $w, z \in F^c_x$.

La condición 2. indica que los vectores en $T_x\Lambda$ se aproximan asintóticamente hacia el subfibrado central F^c, mediante la acción de DX_t, fenómeno que se denomina *dominancia de* F^c sobre F^s; a los conjuntos invariantes que satisfacen las condiciones 1. y 2. se les llama **parcialmente hiperbólicos**. Por otra parte, la condición 3. expresa el crecimiento exponencial del área de paralelogramos en el subfibrado central F^c (*expansión seccional*), el cual adquiere sentido geométrico cuando $\dim(F^c_x) \geq 2$, para todo $x \in \Lambda$. Se dice que **el conjunto seccional-hiperbólico Λ es de codimensión uno**, cuando $\dim(F^c_x) = 2$, para todo $x \in \Lambda$.

A diferencia del caso hiperbólico, cada $x \in \Lambda$ determina solamente una subvariedad inmersa en M, que se llama **variedad estable fuerte seccional** y su correspondiente **variedad estable**, dadas por

$$\mathcal{F}^{ss}(x) \subseteq \left\{ y \in M : \lim_{t \to \infty} d(X_t(y), X_t(x)) = 0 \right\}, \qquad \mathcal{F}^s(x) = \mathcal{F}^s_x := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{F}^{ss}(X_t(x));$$

de tal manera que $\mathcal{F}^{ss}(x) \subseteq M$ es tangente en el punto x al subfibrado $F^s(x) \subseteq T_xM$ y con igual dimensión. Por otra parte, es importante observar que $X(x) \subseteq F^c_x$ para todo $x \in \Lambda$. De éste hecho se obtiene la siguiente proposición [San20].

Proposición 1.3. *Si Λ es un conjunto seccional-hiperbólico y $\sigma \in \Lambda$ es una singularidad, entonces $\mathcal{F}^{ss}(\sigma) \cap \Lambda = \{\sigma\}$.*

Un hecho de uso frecuente en el estudio de los conjuntos seccional-hiperbólicos Λ, [BM11], [HPS77] , [BM08], [San20]; es que siempre podemos hallar una vecindad U en la cual es posible extender la descomposición de Λ, $T_\Lambda M = F^s_\Lambda \oplus F^c_\Lambda$, hacia una descomposición para el fibrado tangente de U, $T_UM = F^s_U \oplus F^c_U$. Tal extensión se puede realizar de manera integrable para F^s_U y de manera continua para F^c_U.

A continuación se presenta un resultado fundamental para el estudio de los conjuntos seccional-hiperbólicos. De aquí en adelante Λ será un conjunto seccional-hiperbólico para el campo vectorial $X : M \to M$ a menos que se indique otra cosa.

Teorema 1.2. *(Lema Hiperbólico) [BM11] Si $H \subseteq \Lambda$ es un conjunto compacto e invariante sin singularidades, entonces H es un conjunto hiperbólico.*

Todo conjunto hiperbólico H es seccional-hiperbólico (basta tomar $F^s_H = E^s_H$ y $F^c_H = E^u_H \oplus E^X_H$), en consecuencia, si Λ es seccional-hiperbólico resultaría de gran utilidad identificar sus subconjuntos hiperbólicos H y relacionar las dos descomposiciones de fibrado tangente que ellos poseen[1]. Nótese que en particular, las singularidades y las órbitas periódicas en Λ son subconjuntos hiperbólicos. A continuación se presentan algunas de propiedades que se tienen sobre los puntos de un seccional-hiperbólico que presentan ambas descomposiciones.

Proposición 1.4. *[San20] Sea $H \subseteq \Lambda$ un subconjunto hiperbólico. Entonces, para cada $x \in H$ se tiene que*

(i) $F^s_x \subseteq E^s_x$,

(ii) $F^s_x \cap E^u_x = \{0\}$ *y*

[1]Cabe resaltar que no todos los puntos del seccional-hiperbólico tienen estructura hiperbólica

(iii) $E^u_x \subseteq F^c_x$.

(iv) *Si* $x \in H$ *es punto regular, entonces* $F^s_x = E^s_x$ *y* $F^c_x = E^u_x \oplus gen\{X(x)\}$.

Proposición 1.5. *[San20] Si* $\sigma \in \Lambda$ *es una singularidad, entonces*

(i) $E^s_\sigma = F^s_\sigma \oplus (F^c_\sigma \cap E^s_\sigma)$ *y* $F^c_\sigma = E^u_\sigma \oplus (F^c_\sigma \cap E^s_\sigma)$.

(ii) $\dim(F^c_\sigma \cap E^s_\sigma) \leq 1$.

Teorema 1.3. *[San20] Sea* Λ *seccional hiperbólico. Si* $\sigma \in \Lambda \cap Sing(X)$*, entonces se satisface solamente uno de los siguientes dos enunciados.*

(1) $F^s_\sigma = E^s_\sigma$ *y* $F^c_\sigma = E^u_\sigma$*, ó*

(2) $\dim(F^s_\sigma) + 1 = \dim(E^s_\sigma)$ *y* $\dim(E^s_\sigma) + 1 = \dim(F^c_\sigma)$.

1.3. Singularidades Lorenz-Like

Las singularidades que resultan interesantes desde una perspectiva dinámica, son aquellas que pueden ser acumuladas por órbitas positivas de puntos regulares (que no se encuentren variedad estable de la singularidad), las cuales necesariamente deben quedar encasilladas en el segundo caso del Teorema 1.3, lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 1.13. *Una singularidad* $\sigma \in \Lambda$ *es* ***Lorenz-Like*** *si* $\dim(F^s_\sigma) + 1 = \dim(E^s_\sigma)$. *(Ver Figura* ***1-2****).*

Como primera propiedad de las singularidades Lorenz-Like se presenta el siguiente Corolario.

Corolario 1.1. *Si* $\sigma \in \Lambda \cap Sing(X)$ *es Lorenz-Like, entonces* $\dim(F^c_\sigma \cap E^s_\sigma) = 1$.

Demostración. Teniendo en cuenta que $\dim(M) = n$ y que $\dim(F^s_\sigma) + 1 = \dim(E^s_\sigma)$, se observa que

$$\begin{aligned}
n = \dim(M) = \dim(T_\sigma M) &= \dim(F^s_\sigma \oplus F^c_\sigma) = \dim(E^s_\sigma + F^c_\sigma) \\
&= \dim(E^s_\sigma) + \dim(F^c_\sigma) - \dim(E^s_\sigma \cap F^c_\sigma) \\
&= (\dim(F^s_\sigma) + 1) + \dim(F^c_\sigma) - \dim(E^s_\sigma \cap^c_\sigma) \\
&= n + 1 - \dim(E^s_\sigma \cap F^c_\sigma),
\end{aligned}$$

lo cual permite concluir que $\dim(E^s_\sigma \cap F^c_\sigma) = 1$. □

Proposición 1.6. *Sea* $\sigma \in \Lambda \cap Sing(X)$*. Si* σ *es Lorenz-Like, entonces* σ *tiene al menos dos autovalores con parte real negativa, uno de cuales tiene multiplicidad uno y es real (que se denota como* λ_σ*), de tal manera que la parte real de los demás autovalores no pertenecen al intervalo* $[\lambda_\sigma, -\lambda_\sigma]$ *y además,* $E^s_\sigma \cap F^c_\sigma$ *se corresponde al espacio propio determinado por* λ_σ*.*

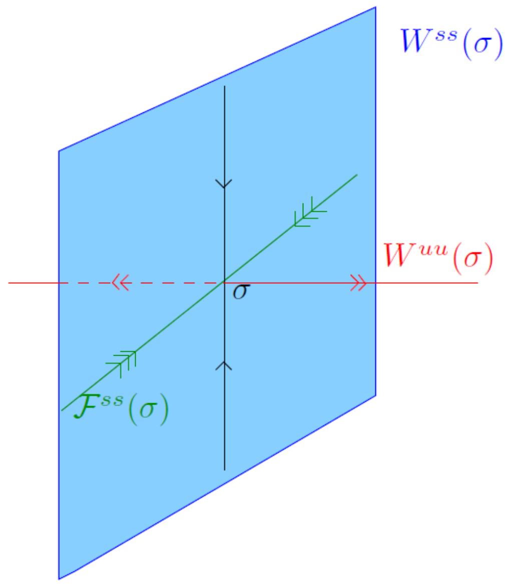

Figura 1-2: Singularidad Lorenz-Like en dimensión 3

La demostración se sigue del Corolario anterior 1.1 y de la Proposición 1.5. Para más detalles se puede revisar el capítulo 2 en [San20]. Vale la pena resaltar que en [BM11] se toma la conclusión de la Proposición 1.6 como definición de singunlaridad Lorenz-Like.

Por otra parte, como $\dim(F^s_\sigma) = \dim(\mathcal{F}^s_\sigma)$ y $\dim(E^s_\sigma) = \dim(W^s_\sigma)$, para toda singularidad Lorenz-Like $\sigma \in \Lambda$ se debe tener que $\dim(\mathcal{F}^s_\sigma)+1 = \dim(W^s_\sigma)$; lo cual implica que el conjunto $W^{ss}(\sigma) \setminus \mathcal{F}^{ss}(\sigma)$ queda conformado por dos componentes conexas. Por la Proposición 1.3, las órbitas positivas de puntos regulares $x \in \Lambda$ que acumulan a una singularidad $\sigma \in \Lambda$ deben hacerlo a través de $W^{ss}(\sigma) \setminus \mathcal{F}^{ss}(\sigma)$, lo cual motiva la siguiente definición.

Definición 1.14. *Una singularidad Lorenz-Like $\sigma \in \Lambda$ es de **Tipo Frontera** si Λ intersecta a una sola componente conexa de $W^{ss}(\sigma) \setminus \mathcal{F}^{ss}(\sigma)$.*

Los siguientes corolarios surgen como consecuencias de la Proposición 1.3 y se pueden consultar en [San20] .

Corolario 1.2. *Si Λ no se reduce a una singularidad y existe $q \in M$ para el cual $\Lambda = \omega(q)$ ó $\Lambda = \alpha(q)$, entonces toda singularidad $\sigma \in \Lambda$ es Lorenz-Like.*

Demostración. Si $\sigma \in \Lambda \cap \mathrm{Sing}(X)$, necesariamente la órbita positiva $O^+(q)$ (ó la órbita negativa $O^-(q)$) acumula un punto regular $x \in W^{ss}(\sigma)$. Luego, $x \in \Lambda \cap W^{ss}(\sigma)$, y por la Proposición 1.3, $F^{ss}(\sigma) \neq W^{ss}(\sigma)$, lo cual permite concluir que σ es una singularidad Lorenz-Like, en virtud del Teorema 1.3. □

Corolario 1.3. *Sea $\sigma \in \Lambda$ una singularidad que no es Lorenz-Like. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Lambda$ es sucesión de puntos regulares que convergen a σ, entonces $x_n \in W^{uu}(\sigma)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.*

Demostración. Sea σ una singularidad que no es Lorenz-Like. Por el Teorema 1.3, necesariamente $F^{ss}(\sigma) = W^{ss}(\sigma)$; además, por la Proposición 1.3, $x_n \notin W^{ss}(\sigma)$ para todo n, porque $W^{ss}(\sigma) \cap \Lambda = \{\sigma\}$. Por otra parte, al suponer que existe una subsucesión x_{n_k} tal que $x_{n_k} \notin W^{uu}(\sigma)$, debe existir un punto regular $y \in M$, tal que:

$$y \in \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} O^{-}(x_{n_k})} \cap \left(W^{ss}(\sigma) \setminus \{\sigma\}\right),$$

sin embargo, $x_{n_k} \in \Lambda$; lo cual implica que $y \in \Lambda \cap W^{ss}(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ porque Λ es un conjunto compacto. Como esto contradice a la Proposición 1.3, se puede concluir que $x_n \in W^{uu}(\sigma)$ para cada n suficientemente grande. $\square$

Corolario 1.4. *Sea $\sigma \in \Lambda \cap Sing(X)$. Si existe un punto periódico $p \in \Lambda$ tal que $W^u(p) \subseteq \Lambda$ y además $\sigma \in \overline{W^u(p)}$, entonces σ es Lorenz-Like.*

Demostración. Suponiendo que $\sigma \in \overline{W^u(p)}$, debe existir una sucesión de puntos regulares $\{x_n\} \subseteq W^u(p) \subseteq \Lambda$ que converge hacia σ. Así, debido a la invarianza de las variedades inestables fuertes, se tiene que $x_n \notin W^{uu}(\sigma)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; luego, por el Corolario 1.3 se concluye que σ debe ser Lorenz-Like. $\square$

Corolario 1.5. *Sea $\sigma \in \Lambda \cap Sing(X)$. Si existe un punto regular $p \in \Lambda$ tal que $\sigma = \omega(p)$, entonces σ es Lorenz-Like.*

Demostración. Si p es un punto regular y $\sigma = \omega(p)$, la órbita positiva de p debe acumular un punto regular $x \in W^{ss}(\sigma)$. Luego, la Proposición 1.3 y el Teorema 1.3 garantizan que σ es Lorenz-Like. $\square$

2 Secciones Transversales

Las secciones transversales surgen en el contexto de las ecuaciones diferenciales como una herramienta fundamental para analizar el comportamiento local, en proximidades de puntos regulares, del flujo asociado a una ecuación. Esta herramienta simplifica el estudio de sistemas continuos, porque permite analizarlos mediante la "huella" discreta que van dejando las órbitas en ella. En éste capítulo se presenta el concepto de sección transversal en el contexto de los flujos asociados a campos vectoriales sobre variedades compactas, con el objetivo de lograr identificar la presencia de órbitas periódicas y de ganar comprensión de la dinámica que ocurre en proximidades a singularidades.

Definición 2.1. *Una* ***sección transversal*** *para el campo vectorial X sobre una variedad M, es una subvariedad Σ de dimensión $n-1$, transversal a X.*

Teniendo en cuenta que toda singularidad σ hace parte de la subvariedad determinada por el flujo, necesariamente si Σ es una sección transversal $\Sigma \cap \operatorname{Sing}(X) = \emptyset$. Por otra parte, es usual denotar al interior y a la frontera de Σ (como subvariedad) mediante $\operatorname{Int}(\Sigma)$ y $\partial(\Sigma)$ respectivamente. **Una sección transversal Σ es de tiempo** $\varepsilon > 0$, si $\Sigma \cap X_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(y) = \{y\}$ para todo $y \in \Sigma$; además, **una sección transversal es de diámetro** $\delta \geq 0$ si

$$\delta = \sup_{x,y \in \Sigma} d(x, y).$$

Definición 2.2. *Sea Σ una sección transversal de tiempo $\varepsilon > 0$. Se define la aplicación*

$$\operatorname{Proy}_{\Sigma} : X_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(\Sigma) \longrightarrow \Sigma$$

como $\operatorname{Proy}_{\Sigma}(X_t(y)) := y$, para todo $y \in \Sigma$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Por otra parte, observe que si $p \in M$ es un punto regular, $X(p)$ es un vector no-nulo en T_pM; por lo tanto, como M es de dimensión finita, se puede completar una base para T_pM a partir del vector $X(p)$ para obtener una sección transversal con $p \in \operatorname{Int}(\Sigma)$.

Proposición 2.1. *Para todo punto regular $p \in M$ existe una sección transversal Σ, tal que $p \in \operatorname{Int}(\Sigma)$.*

Demostración. Sea $p \in M$ un punto regular, entonces podemos encontrar vectores $V_1, \ldots, V_{n-1}$ en T_pM tales que $\{V_1, \ldots, V_{n-1}, X(p)\}$ es una base de T_pM. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, definimos la aplicación

$$f : [-\varepsilon, \varepsilon]^{n-1} \to M \quad \text{como} \quad f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \exp_p\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i V_i\right),$$

donde $\exp_p$ es la aplicación exponencial. Tomando $\Sigma = f([-\varepsilon, \varepsilon]^{n-1})$, se obtiene el resultado. $\square$

Teorema 2.1. *[PM82] [Flujo Tubular] Sea X un campo vectorial en una variedad diferenciable M, y sea $p \in M$ un punto regular de X. Sea $C = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : |x_i| < 1\}$ y sea X_C el campo vectorial en C definido por $X_C(x) = (1, 0, \ldots, 0)$.. Entonces existe un difeomorfismo de clase C^r $h : V_p \to C$ definido en una vecindad $V_p \subset M$ de p, que lleva trayectorias del campo X en V_p a trayectorias del campo constante X_C.*

Observe que si Σ es una sección transversal de tiempo $\varepsilon > 0$ y p es un punto regular en $\mathrm{Int}(\Sigma)$, entonces $X_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(\Sigma)$ es una vecindad de p. Por lo tanto, reduciendo el tiempo y el diámetro de Σ, se puede obtener que $X_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(\Sigma) \subseteq V_p$, donde V_p es la vecindad que entrega en Teorema 2.1 del Flujo Tubular. Por lo tanto, en lo que sigue, se considerará que si Σ es una sección transversal de tiempo $\varepsilon > 0$, entonces $X_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(\Sigma)$ está contenido en la vecindad tubular V_p.

Definición 2.3. *Una sección transversal Σ es llamada **rectángulo**, si es difeomorfa a $[-1, 1]^{n-1}$.*

Proposición 2.2. *Para todo punto regular $p \in M$ existe un rectángulo Σ tal que $p \in \mathrm{Int}(\Sigma)$.*

Definición 2.4. *[Lop15] Sea s un número entero tal que $1 \leq s < n-1$ y tome $u = n-1-s$. Si Σ es un rectángulo y $f : [-1, 1]^{n-1} = [-1, 1]^s \times [-1, 1]^u \longrightarrow \Sigma$ es el correspondiente difeomorfismo, se define:*

1. *La gráfica de una función C^1 inyectiva $g : I^s \to I^u$, $c = \{(y, g(y)) : y \in I^s\}$, es llamada **curva vertical**.*
2. *La gráfica de una función C^1 inyectiva $h : I^u \to I^s$, $d = \{(h(x), x) : x \in I^u\}$, es llamada **curva horizontal**.*
3. $\partial^h \Sigma = f\left(\left[\bigcup_{j=0}^{s-1} (I^j \times \{-1\} \times I^{s-j-1}) \times I^u\right] \cup \left[\bigcup_{j=0}^{s-1} (I^j \times \{1\} \times I^{s-j-1}) \times I^u\right] \right)$.
4. $\partial^v \Sigma = f\left(\left[I^s \times \bigcup_{j=0}^{u-1} (I^j \times \{-1\} \times I^{u-j-1})\right] \cup \left[I^s \times \bigcup_{j=0}^{u-1} (I^j \times \{1\} \times I^{u-j-1})\right] \right)$.
5. $l^*_\Sigma = f(\ I^s \times \{0\}\ )$.

*Los conjuntos que se definen en 3. y 4. se denominan **frontera horizontal** y **frontera vertical** de Σ respectivamente, ver Figura **2-1**.*

Si Λ es un conjunto seccional hiperbólico, se denotará como $U_\Lambda \subseteq M$ a la vecindad de Λ, para la cual es posible extender la descomposición de Λ de manera integrable sobre $F^s_{U_\Lambda}$ y de manera continua para $F^c_{U_\Lambda}$. Esto permite garantizar que cada $x \in U_\Lambda$ determina una subvariedad estable fuerte (seccional) $\mathcal{F}^{ss}_x = \mathcal{F}^{ss}(x)$ tangente en x al subfibrado F^s_x

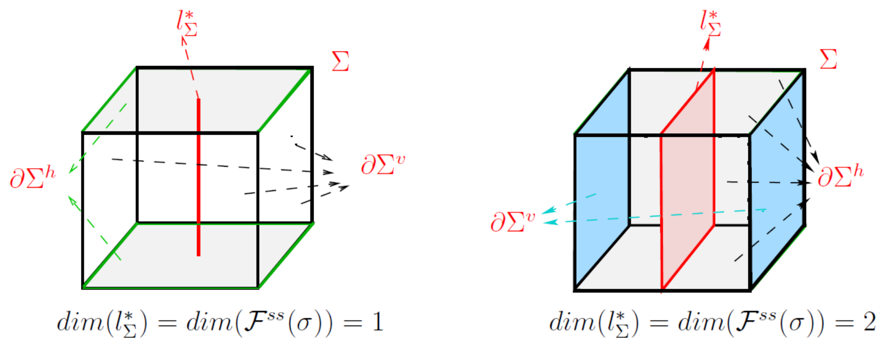

Figura 2-1: Fronteras Horizontal y Vertical en dimensión 4

y transversal al flujo. Aprovechando esto y observando que no se pierde generalidad al considerar $\Sigma \subset U_\Lambda$, a continuación se introducirá el concepto de **foliación** para la sección transversal Σ.

Definición 2.5. *Sea $\Sigma \subset U_\Lambda$ una sección transversal. Se define $\mathcal{F}^s(y, \Sigma)$ como la componente conexa de $\mathcal{F}^s(y) \cap \Sigma$ que contiene a y, para cada $y \in \Sigma$.*

Proposición 2.3. *[San20] $\mathcal{F}^s_\Sigma = \{\mathcal{F}(y, \Sigma) : y \in \Sigma\}$ es una foliación sobre Σ.*

Definición 2.6. *Sea $\Sigma \subset U_\Lambda$ sección transversal de tiempo $\varepsilon > 0$. Para cada $y \in \Sigma$ se define el conjunto $\mathcal{F}^{ss}_\Sigma(y)$, como la componente conexa de $\mathcal{F}^{ss}(y) \cap X_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(\Sigma)$ que contiene a y. Además, en este contexto se puede definir la aplicación*

$$\mathrm{Proy}_\Sigma : X_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(\Sigma) \longrightarrow \Sigma$$

tal que $\mathrm{Proy}_\Sigma(X_t(y)) := y$, para cada $y \in \Sigma$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Proposición 2.4. *Sea $\Sigma \subseteq U_\Lambda$ es una sección transversal de tiempo ε. Entonces para todo $y \in \Sigma$:*

$$\mathrm{Proy}_\Sigma(\mathcal{F}^{ss}_\Sigma(y)) \subseteq \mathcal{F}^s(y, \Sigma).$$

Demostración. Suponga que $x \in \mathrm{Proy}_\Sigma(\mathcal{F}^{ss}_\Sigma(y))$ con $y \in \Sigma$. Luego, deben existir $t_0 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $y_0 \in \mathcal{F}^{ss}_\Sigma(y)$ para los cuales $x = X_{t_0}(y_0)$. Así, $x \in \mathcal{F}^s(y_0) = \mathcal{F}^s(y)$, y como $x \in \Sigma$, necesariamente $x \in \Sigma \cap \mathcal{F}^s(y)$. Ahora, teniendo en cuenta que $y_0 \in \mathcal{F}^{ss}_\Sigma(y)$, se sigue que x está en la componente conexa de $\Sigma \cap \mathcal{F}^s(y)$ que contiene a y. Consecuentemente $x \in \mathcal{F}^s(y, \Sigma)$, y se puede concluir que $\mathrm{Proy}_\Sigma(\mathcal{F}^{ss}_\Sigma(y)) \subseteq \mathcal{F}^s(y, \Sigma)$. (Ver Figura **2-2**). □

Observación 2.1. *Aunque la contenencia en la Proposición anterior podría ser estricta, nótese que al ajustar convenientemente los vectores utilizados para completar la base del fibrado tangente, en la demostración de la Proposición 2.1 podemos obtener la igualdad, decir, tomando vectores $\{V_1, \ldots, V_s, \ldots V_{n-1}\}$, de tal manera que $\{V_1, \ldots, V_s\}$ sean base para $F^s(p)$; luego, dado un punto regular $p \in \Lambda$, es posible construir una sección transversal Σ con $p \in \mathrm{Int}(\Sigma)$, para la cual $\mathrm{Proy}_\Sigma(\mathcal{F}^{ss}_\Sigma(y)) = \mathcal{F}^s(y, \Sigma)$ en todo $y \in \Sigma$.*

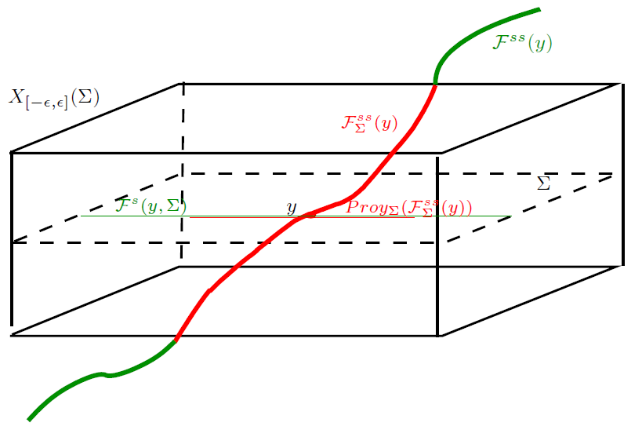

Figura 2-2: $\mathrm{Proy}_{\Sigma}(\mathcal{F}^{ss}_{\Sigma}(x)) \neq \mathcal{F}^{s}(y,\Sigma)$

Proposición 2.5. *Si $p \in U_{\Lambda}$ es un punto regular, entonces existe un rectángulo $\Sigma \subseteq U_{\Lambda}$ tal que:*

1. $p \in \mathrm{Int}(\Sigma)$.
2. $\mathrm{Proy}_{\Sigma}(\mathcal{F}^{ss}_{\Sigma}(y)) = \mathcal{F}^{s}(y,\Sigma)$ *para todo* $y \in \Sigma$.
3. $l^{*}_{\Sigma} = \mathcal{F}^{s}(p,\Sigma)$.
4. $\mathcal{F}^{s}(y,\Sigma)$ *es una curva vertical para todo* $y \in \Sigma$.
5. $\partial^{v}\Sigma$ *está compuesta por hojas de la foliación* $\mathcal{F}^{s}_{\Sigma}$.
6. $\partial^{h}\Sigma$ *es transversal a* $\mathcal{F}^{s}_{\Sigma}$.

Por lo tanto, en lo que sigue se puede asumir sin pérdida de generalidad que para todo punto regular $p \in U_{\Lambda}$ la sección transversal Σ asociada a p, satisface las propiedades descritas en la proposición anterior.

Observación 2.2. *Teniendo en cuenta la afirmación* 2. *en la Proposición 2.5, que el flujo es transversal a cualquier variedad estable fuerte y el Teorema del Flujo Tubular, tenemos que la aplicación* Proy_{Σ} *restringida a* $\mathcal{F}^{ss}_{\Sigma}(y)$ *es inyectiva para todo* $y \in \Sigma$. *Así, la función*

$$\mathrm{Proy}_{\Sigma}^{-1} : \mathcal{F}^{s}(y,\Sigma) \to \mathcal{F}^{ss}_{\Sigma}(y),$$

está bien definida.

Lema 2.1. *Suponga que $y \in \Lambda \cap \mathrm{Int}(\Sigma)$, donde $\Sigma \subseteq U_{\Lambda}$ es una sección transversal de tiempo $\varepsilon > 0$ y diámetro $\delta > 0$ suficientemente pequeños. Suponga además que existe una sucesión $t_n > 0$ acotada, pero que no converge hacía 0, y que tenemos un punto $q_0 \in \mathcal{F}^{s}(y,\Sigma)$ de tal manera que $q_n = X_{t_n}(q_{n-1}) \in \mathcal{F}^{s}(y,\Sigma)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y adicionalmente $q_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Entonces, existe un punto periódico $p \in \mathrm{Per}(X) \cap \Lambda$ para el cual se obtiene que $y, q_n \in W^{s}(p)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como $q_0 \in \mathcal{F}^s(y,\Sigma)$, existe $q_0' \in \mathcal{F}^{ss}_\Sigma(y)$ para el cual, $q_0' = \mathrm{Proy}_\Sigma(q_0)$. En consecuencia, debe existir $t_0 \in [-\varepsilon,\varepsilon]$ tal que $q_0 = X_{t_0}(q_0')$. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede definir

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} t_k, \qquad T_n' = t_0 + T_n;$$

obteniéndose que T_n es divergente y que $X_{T_n'}(q_0') = q_n$. Al observar que para tiempos T_n' suficientemente grandes la aplicación

$$F = Proy_\Sigma \,\circ\, X_{T_n'} \,\circ\, Proy_\Sigma^{-1} : \mathcal{F}^s(y,\Sigma) \longrightarrow \mathcal{F}^s(y,\Sigma)$$

es una contracción, el teorema del punto fijo de Banach, garantiza la existencia de $p \in \Lambda$ para el cual

$$F(p) = [\mathrm{Proy}_\Sigma \circ X_{T_n'} \circ \mathrm{Proy}_\Sigma^{-1}](p) = p,$$

o equivalentemente $X_{T_n'}[\,\mathrm{Proy}_\Sigma^{-1}(p)] = \mathrm{Proy}_\Sigma^{-1}(p)$. Además, el mismo teorema garantiza que $F^k(p) \to p$ para todo $x \in \mathcal{F}^s(y,\Sigma)$. Así, $\mathcal{F}^s(y,\Sigma) \subseteq W^s(p)$ y claramente $p \in \mathrm{Per}(X) \cap \Lambda$. $\square$

2.1. Secciones Transversales Asociadas a Singularidades

La Proposición 2.1 establece que sobre todo punto regular $p \in \Lambda$ se puede garantizar la existencia de secciones transversales Σ, tales que $p \in \mathrm{Int}(\Sigma)$, mediante la complementación de la base del fibrado tangente T_pM a partir de la dirección del campo. Sin embargo, en las singularidades $\sigma \in U_\Lambda$ el campo se anula y no es posible implementar la misma estrategia para construir la respectiva sección transversal. Además, no es posible que una sección transversal contenga en su interior a una singularidad, sin embargo, cerca a una singularidad Lorez-Like es posible construir un conjunto de secciones transversales de tal manera que toda órbita positiva regular del conjunto seccional-hiperbólico que acumule a la singularidad, necesariamente debe intersectar alguna de tales secciones transversales.

Definición 2.7. *Sea $\sigma \in \Lambda \cap \mathrm{Sing}(X)$ singularidad Lorenz-Like. Una sección transversal $\Sigma \subseteq U_\Lambda$ está asociada a σ, si la distancia entre Σ y σ es muy pequeña, $\partial^h\Sigma \cap \Lambda = \emptyset$, y $l^*_\Sigma \cap [W^{ss}(\sigma) \setminus \mathcal{F}^{ss}(\sigma)] \neq \emptyset$; en otras palabras, l^*_Σ debe intersectar a una de las órbitas regulares estables de σ, asociadas al valor propio λ_σ (como en la Proposición 1.6).*

Definición 2.8. *Sea $\sigma \in \Lambda$ una singularidad Lorenz-Like:*

1. *Si σ es de tipo frontera, una sección transversal singular asociada a σ es una sección transversal Σ asociada a σ, tal que $l^*_\Sigma \cap \Lambda \neq \emptyset$.*

2. *Si σ no es de tipo frontera, una sección transversal singular asociada a σ consiste en un par de secciones transversales Σ_t y Σ_b asociadas a σ, tales que $l^*_{\Sigma_t}$ intersecta una de las órbitas regulares estables de σ asociadas al valor propio λ_σ, y $l^*_{\Sigma_b}$ intersecta la otra órbita regular estable asociada a λ_σ.*

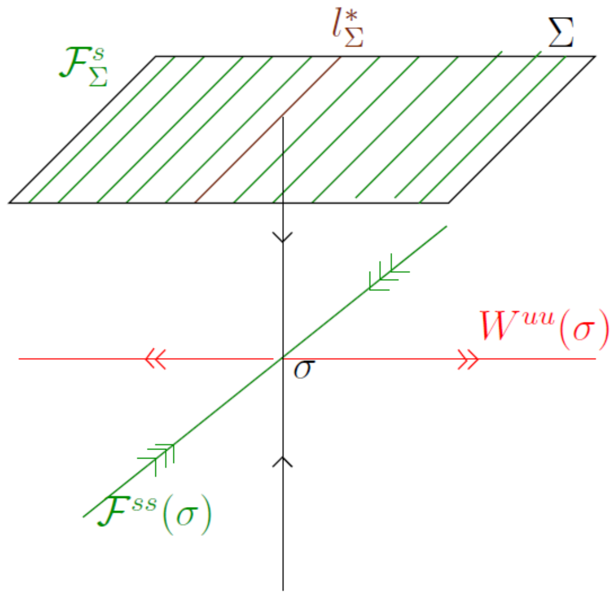

Figura 2-3: Sección transversal asociada a σ tipo frontera

Naturalmente, la variedad estable de las singularidades Lorenz-Like $\sigma \in \Lambda$ contienen puntos regulares arbitrariamente cercanos a σ, luego, de las Proposiciones 1.3 y 1.6 podemos obtener la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *Dada $\sigma \in \Lambda$ singularidad Lorenz-Like, existe una sección transversal singular asociada a σ.*

2.2. Partición de un Conjunto Seccional-Hiperbólico

En el artículo [BM08], Bautista y Morales presentan el concepto de partición seccional, para atender al propósito de caracterizar a los conjuntos ω-límite que resultan ser órbitas cerradas dentro de un conjunto seccional-hiperbólico Λ. Así, dado un conjunto compacto e invariante Λ, el concepto de partición seccional, busca establecer la existencia de una colección finita R de secciones transversales disyuntas, de tal manera que toda órbita regular en Λ necesariamente intersecta a una de tales secciones transversales.

Dada una colección finita de secciones transversales $P' = \{S_1, \ldots, S_k\}$, respecto al campo vectorial $X : M \to M$, se definen los conjuntos

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} S_i, \quad \partial P = \bigcup_{i=1}^{k} \partial S_i, \quad \partial^v P = \bigcup_{i=1}^{k} \partial^v S_i, \quad \partial^h P = \bigcup_{i=1}^{k} \partial^h S_i, \quad \mathrm{Int}(P) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{Int}(S_i).$$

Además, se define de diámetro de P como

$$\mathrm{diam}(P) := \max\{\mathrm{diam}(S_i) \ : \ 1 \leq i \leq k\},$$

y se dice que P' es de tiempo ε si

$$P \cap X_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(y) = \{y\}, \qquad \text{para todo } \; y \in P.$$

Definición 2.9. *Una partición seccional de un conjunto compacto e invariante Λ, respecto al campo vectorial X, es una colección finita y disyunta de secciones transversales P' de X con tiempo no nulo, tal que:*

$$\mathrm{Sing}(X) \cap \Lambda = \{y \in \Lambda : X_t(y) \notin \mathrm{Int}(P), \textit{ para cada } \; t \in \mathbb{R}\}.$$

Si Λ es compacto e invariante y todas sus singularidades son hiperbólicas (necesariamente serían una cantidad finita), considerando un $r > 0$ lo suficientemente pequeño se podría construir un cubrimiento por secciones transversales de $\Lambda \setminus \bigcup_{\sigma\in\Lambda} B_r(\sigma)$ y por compacidad reducir éste cubrimiento a uno finito, construyendo así una partición seccional para Λ [San20].

Teorema 2.2. ***(Existencia de Particiones Seccionales).*** *Sea Λ un conjunto compacto e invariante del campo X en M. Si Λ no se reduce a una singularidad y cada singularidad $\sigma \in \Lambda$ es hiperbólica, entonces, para todo $\delta > 0$, existe una partición seccional P' de Λ tal que* $\mathrm{diam}(P) < \delta$.

Definición 2.10. *Sea Λ un conjunto compacto e invariante para el campo vectorial X y P' una partición seccional de Λ. Se define* ***la aplicación de retorno en*** *P*

$$\begin{aligned} \Pi_P : \mathrm{Dom}(\Pi_P) \subseteq P &\longrightarrow \mathrm{Int}(P) \\ x &\longmapsto \Pi_P(x) := X_{t(x)}(x) \end{aligned}$$

donde

$$\mathrm{Dom}(\Pi_P) := \{x \in P \;\; : \;\; \textit{existe algún } t \in \mathbb{R}^+, \; \textit{tal que } X_t(x) \in \mathrm{Int}(P)\}$$

y $t(x) := \min\{t \in \mathbb{R}^+ : X_t(x) \in \mathrm{Int}(P)\}$, en otras palabras, $t(x)$ es el primer tiempo en que la órbita positiva de x retorna hacía P. Además dado $x \in S_j \in P'$, se define

$$B_\varepsilon(x, P) := B_\varepsilon(x) \cap S_j.$$

Lema 2.2. *[BM08] Sea Λ un conjunto compacto e invariante para el campo vectorial X, cuyas singularidades son hiperbólicas y P' una partición seccional de Λ. Entonces, $\Pi_P = \Pi$ satisface las siguientes propiedades:*

(i) $\Lambda \cap P \cap \mathrm{Dom}(\Pi) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Dom}(\Pi))$ *y Π es de clase C^1 en una vecindad de $\Lambda \cap \mathrm{Int}(P)$.*

(ii) $(\Lambda \cap P) \setminus \mathrm{Dom}(\Pi) \subseteq \displaystyle\bigcup_{\sigma\in \mathrm{Sing}(X)\cap\Lambda} W^s(\sigma).$

Por otra parte, cuando Λ no se reduce a una singularidad, P' es partición seccional de Λ y existe $q_0 \in M$ para el cual $\Lambda = \omega(q_0)$; se obtiene que $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathrm{Int}(P) \cap O^+(q_0)$, donde $q_{n+1} = \Pi(q_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Este hecho, junto al Lema 2.1, constituyen una pieza fundamental para obtener el resultado principal de éste trabajo, donde Λ será un conjunto ω-límite o α-límite.

Lema 2.3. *Dado $q \in M$, si $\omega(q)$ no se reduce a una singularidad y P' es una partición seccional de $\omega(q)$, entonces $O^+(q) \cap \mathrm{Int}(P) = \{q_1, q_2, \ldots\}$ de tal manera que $\Pi(q_n) = q_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Finalmente, cuando el conjunto $\omega(q)$ es seccional-hiperbólico de codimensión uno, los Lemas 2.2 y 2.3 nos permiten enunciar el siguiente teorema

Teorema 2.3. *[San20] Si $\omega(q)$ es un conjunto seccional-hiperbólico de codimensión uno, que no se reduce a una singularidad. Entonces, para todo $\alpha > 0$, existe una partición seccional P' de $\omega(q)$ con diámetro $\mathrm{diam}(P') < \alpha$ de tal manera que:*

(i) $\mathrm{Int}(P) \cap O^+(q) = \{q_1, q_2, \ldots\}$ *con* $\Pi(q_{n-1}) = q_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Existen $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geq N$, se satisface solamente una de las siguientes afirmaciones:

(A) $B_\varepsilon(q_n, P) \subseteq \mathrm{Dom}(\Pi)$ *y* $\Pi|_{B_\varepsilon(q_n,P)}$ *es* C^1, *ó*

(B) $B_\varepsilon^+(q_n, P) \subseteq \mathrm{Dom}(\Pi)$ *y* $\Pi|_{B_\varepsilon^+(q_n,P)}$ *es* C^1,

donde $B_\varepsilon^+(q_n, P)$ denota la componente conexa de $B_\varepsilon(q_n, P) \setminus c_n$ que contiene a q_n; mientras que c_n denota una subvariedad contenida en

$$\left[\bigcup_{\sigma \in \mathrm{Sing}(X) \cap \omega(q)} W^s(\sigma) \right] \bigcap B_\varepsilon(q_n, P).$$

3 La Propiedad P_Σ

El objetivo de éste capítulo es caracterizar los conjuntos ω-límite con estructura seccional-hiperbólica que resulten ser órbitas cerradas (singularidades ó periódicas), lo cual se llevará a cabo mediante la observación de un fenómeno asociado a los puntos del espacio de estados, que llamaremos *la propiedad* P_Σ. Específicamente, se planteará un escenario para obtener el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Sea $\omega(q)$ un conjunto seccional-hiperbólico de codimensión uno, para algún $q \in M$. Se cumple que $\omega(q)$ es una órbita cerrada, sí y sólo si, q satisface la propiedad P_Σ.*

En dimensión dos, los conjuntos $\omega-$límite con estructura hiperbólica tipo silla, necesariamente son singularidades, porque si contuviera puntos regulares p, necesariamente la dimensión del fibrado tangente en p debería ser igual a tres; además, el teorema de Hartman-Grobman permite observar que si $\omega(q)$ es una singularidad hiperbólica tipo silla, necesariamente deben existir un subconjunto cerrado $\Sigma \subseteq M$ y un arco $I \subseteq M$, de tal manera que $q \in \partial I$, $\omega(q) \cap \Sigma = \emptyset$ y que para todo $p \in I$ se cumpla que $O^+(p) \cap \Sigma \neq \emptyset$. Geometricamente, ver Figura **3-1**, éste fenómeno expresa que la órbita positiva de q fue capturada por la singularidad, mientras que todos los puntos del arco (independientemente de lo cercanos que puedan estar de q) se escaparon de la singularidad a través de su variedad inestable, "dejando una huella" en Σ. Motivada por esta situación surge la definición de la propiedad P_Σ.

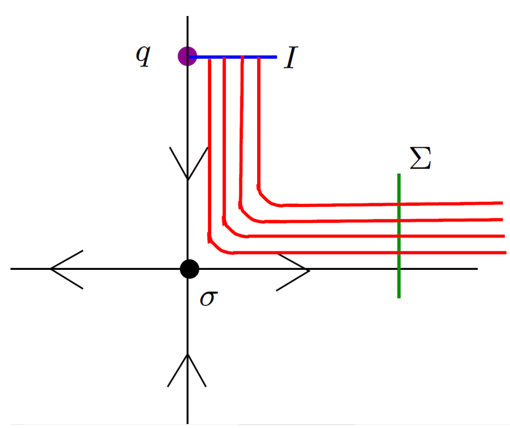

Figura 3-1: Propiedad P_Σ en dimensión 2

Definición 3.1. *Decimos que un punto $q \in M$ satisface la propiedad P_Σ, si existe un arco $I \subseteq M$ tal que $q \in \partial I$, además de un subconjunto cerrado $\Sigma \subset M$ tal que*

(i) $\overline{O^+(q)} \cap \Sigma = \emptyset$.

(ii) $O^+(p) \cap \Sigma \neq \emptyset$, *para todo* $p \in I$.

En primer lugar, se observa que independientemente a la dimensión de M, si $\omega(q)$ es una órbita cerrada hiperbólica tipo silla, necesariamente q satisface la propiedad P_Σ.

Teorema 3.2. *Si $\omega(q)$ es una órbita hiperbólica cerrada tipo silla, para algún $q \in M$, entonces q satisface la propiedad P_Σ, para algún subconjunto cerrado $\Sigma \subseteq M$.*

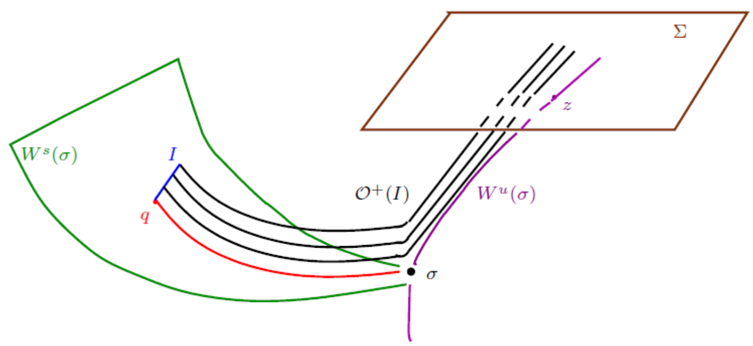

Figura 3-2: $\omega(q) = \{\sigma\} \subseteq Sing(X)$

La demostración de este teorema se desarrolla detalladamente en [San20]. En ambos casos, el argumento se plantea tomando al punto q en la variedad estable de la órbita cerrada γ, y al arco I de tal manera que $I \cap W^s(\gamma) = \emptyset$; ver Figura **3-2**. Nótese que este teorema proporciona una dirección de la caracterización que plantea el Teorema 3.1, mientras que los siguientes dos lemas establecen las consecuencias a la satisfacción de la propiedad P_Σ, que conducen hacia la correspondiente afirmación recíproca.

Lema 3.1. *Supongamos que $q \in M$ satisface la propiedad P_Σ y que $\omega(q)$ es seccional-hiperbólico, entonces podemos asumir que el arco I de la propiedad P_Σ es tangente a F^c_q y transversal al flujo.*

Si Λ es seccional-hiperbólico, se denota como U_Λ a la vecindad de Λ donde se puede extender la descomposición de Λ. Para la demostración de éste lema se asume, sin pérdida de generalidad, que el punto q y el arco I están contenidos en $U_{\omega(q)}$, para poder usar tal descomposición. Así, para cada $z \in U_{\omega(q)}$ es posible aprovechar la transversalidad entre $\mathcal{F}^s_z$ y $\mathcal{F}^c_z$, para proyectar los puntos $p \in I$ (a través de $\mathcal{F}^{ss}_p$) hacia puntos $\tilde{p} \in \mathcal{F}^{ss}_p$, que conformen un nuevo arco $\tilde{I}$ tangente a $\mathcal{F}^c_q$. Observe que si el arco $\tilde{I}$ no es transversal al flujo, se pueden usar las órbitas de sus puntos para obtener un nuevo arco I' que resulte transversal al flujo.

Finalmente, como el arco $\tilde{I}$ se obtuvo a partir de la variedad estable de los puntos de I, mientras que I' surgió a partir del flujo sobre $\tilde{I}$, no se alteró el comportamiento asintótico del arco I. En conclusión, el arco I' es tangente a $\mathcal{F}^c(q)$ y transversal al flujo. Los detalles complementarios sobre la demostración de éste lema también se puede consultar en [San20].

Lema 3.2. *Supongamos que $q \in M$ satisface la propiedad P_Σ y que $\omega(q)$ es conjunto seccional-hiperbólico de codimensión uno. Si $\omega(q)$ no es una singularidad, entonces existen una partición seccional P' de $\omega(q)$, $\delta > 0$, $S \in P'$; además, existen una sucesión de puntos $\{q_n\} \subset \mathrm{Int}(S) \cap O^+(q)$ y una sucesión de intervalos $\{J_n\}$, de tal manera que $q_n \in \partial J_n \subset O^+(I) \cap S$ y también $l(J_n) \geq \delta$; para todo $n \in \mathbb{N}$. En lo que sigue, $l(\cdot)$ denota la longitud de arco.*

Demostración. Debido al Lema 3.1, se puede asumir sin pérdida de generalidad que $q \in U_{\omega(q)}$ y que el arco I (asociado a la propiedad P_Σ) es tangente a F^c_q y transversal al flujo. Como $\omega(q) \cap \Sigma = \emptyset$, existe un conjunto compacto W de tal manera que $\omega(q) \subseteq W$, $O^+(q) \subseteq W$ y además $\Sigma \cap W = \emptyset$. En esta situación, el Teorema 2.2 garantiza la existencia de una partición seccional $P' = \{S_1, \ldots, S_k\}$ de $\omega(q)$, con diámetro arbitrariamente pequeño, así que podemos considerar $P' \subseteq W$; además, el Teorema 2.3 garantiza que

$$O^+(q) \cap \mathrm{Int}(P) = O^+(q) \cap \mathrm{Int}\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i\right) = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$$

y que existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que q_m satisface la condición (A) ó (B), para algún $\delta > 0$, siempre que $m \geq N$; así que sin pérdida de generalidad podemos asumir que $N = 1$.

Consideremos que $q_n \in S_{j_n} \cap O^+(q) \subseteq P'$, para todo $n \in \mathbb{N}$; luego, la dependencia continua de las órbitas garantiza que $q_n \in \partial[O^+(I)]$. También, debido a que S_{j_n} e I son transversales al flujo, se puede escoger un arco $I_1 \subseteq S_{j_1} \cap \mathrm{Dom}(\Pi)$, en la órbita positiva de I, con $q_1 \in \partial I_1$; ver Figura **3-3**. Ahora, podemos reducir la longitud de la curva I para garantizar que I_1 esté contenido en $\mathrm{Int}(B_\delta(q_1, P))$ ó esté contenido en $\mathrm{Int}(B^+_\delta(q_1, P))$, dependiendo de si q_1 satisface la condición (A) ó (B) de teorema citado. Así, se define $I_i = \Pi(I_{i-1})$, mientras que $I_{i-1} \subseteq \mathrm{Int}(B_\delta(q_{i-1}, P))$ ó $I_{i-1} \subseteq \mathrm{Int}(B^+_\delta(q_{i-1}, P))$ según corresponda. Recordando que $W \cap \Sigma = \emptyset$ y que $O^+(I) \cap \Sigma \neq \emptyset$ para cada $p \in I$, debe existir un primer índice i_1, tal que

$$I_{i_1} \nsubseteq \mathrm{Int}(B_\delta(q_{i-1}, P)) \qquad \text{ó} \qquad I_{i_1} \nsubseteq \mathrm{Int}(B^+_\delta(q_{i-1}, P).$$

Ahora podemos tomar el subconjunto $J_{i_1} \subseteq I_{i_1}$ como la componente conexa de $I_{i_1} \cap B_\delta(q_{i_1}, P)$ (ó $I_{i_1} \cap B^+_\delta(q_{i_1}, P)$) para la cual $q_{i_1} \in \partial J_{i_1}$. Teniendo en cuenta que,

$$c_{j_{i_1}} \subseteq \bigcup_{\sigma \in Sing(X) \cap \omega(q)} W^s(\sigma) \qquad \text{y que} \qquad O^+(I_{i_1}) \cap \Sigma = \emptyset,$$

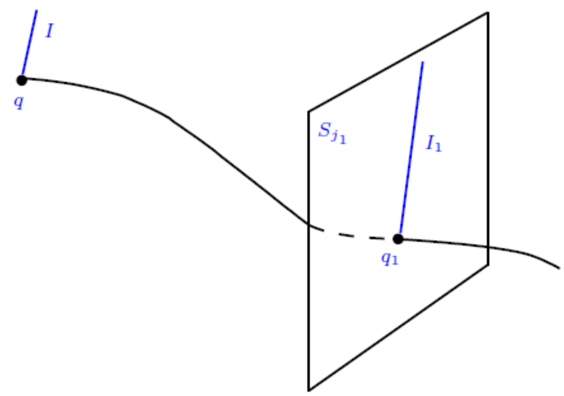

Figura 3-3: $I_1 \subseteq S_{j_1}$

se observa que $I_{i_1} \cap c_{j_{i_1}} = \emptyset$ y en consecuencia $l(J_{i_1}) \geq \delta$. Ahora, si es necesario, se puede reducir el intervalo I_{i_1} para garantizar que $\Pi(I_{i_1}) \subseteq B_\delta(q_{i_1+1}, P)$ (ó $\Pi(I_{i_1}) \subseteq B^+_\delta(q_{i_1+1}, P)$) y poder aplicar a I_{i_1} el mismo proceso que a I_1 y así obtener un indice i_2 y un arco J_{i_2} con longitud mayor o igual a δ, y reiterando este proceso, por recurrencia, podemos definir la sucesión de arcos $\{J_{i_m}\}_{m=1}^{\infty}$, tales que

$$J_{i_m} \subseteq S_{j_{i_m}}, \quad q_{i_m} \in \partial(J_{i_m}), \quad l(J_{i_m}) \geq \delta; \quad \text{para todo} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, como P' es una colección finita, necesariamente existe un elemento $S \in P'$ que contiene una cantidad infinita de estas curvas J_{i_m}; así, sin perdida de generalidad podemos suponer $J_{i_m} \subseteq S$ para todo $m \in \mathbb{N}$, obteniéndose el resultado deseado. □

Teorema 3.3. *Supongamos que $q \in M$ satisface la propiedad P_Σ y que $\omega(q)$ es conjunto seccional hiperbólico de codimensión uno. Si $\omega(q)$ no es una singularidad, entonces $\omega(q)$ es una órbita periódica.*

Demostración. Supongamos que $\omega(q)$ no es una singularidad, entonces podemos tomar un conjunto W y una partición seccional P' de $\omega(q)$; de tal manera que existan $S \in P'$, $\{q_i\}_{n=1}^{\infty}$, $\{J_i\}_{i=1}^{\infty}$ para los cuales se satisface que

$$q_i \in Int(S) \cap O^+(q), \qquad J_i \subseteq O^+(I) \cap S, \qquad q_i \in \partial(J_i), \qquad l(J_i) \geq \delta; \qquad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Así, como W es un conjunto compacto la sucesión $\{q_i\}$ debe acumular algún punto $p \in \omega(q) \cap S$. En primer lugar, observemos que si $p \in \partial^v(S)$ necesariamente $q_i \notin \mathcal{F}^s(x, S)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ porque $\mathcal{F}^s(p, S) \subseteq \partial(S)$. Por otra parte, teniendo en cuenta que J_i es tangente a F^c_U y transversal al flujo, necesariamente J_i no puede ser tangente a $\mathcal{F}^s_\Sigma$; además, tenemos que $l(J_i) \geq \delta$ y como $q_i \to p$ debe existir $z \in J_r \cap \mathcal{F}^s(q_j, S)$ para algunos $r, j \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes. Como $z \in J_r \subseteq O^+(I)$ tenemos que $O^+(z) \cap \Sigma \neq \emptyset$ y por otra parte, también tiene que $z \in \mathcal{F}^s(q_j, S)$, lo cual implica que $\omega(z) = \omega(q) \subseteq W$, lo cual

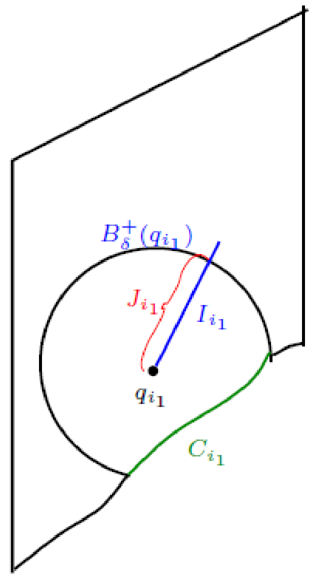

Figura 3-4: $J_{i_1} \cap c_{i_1} = \emptyset$

contradice el hecho de que q satisface la propiedad P_Σ.

En segundo lugar, si suponemos que $p \in \partial^h(S)$ ó que $p \in Int(S)$, entonces el conjunto $\{q_i\}_{i=1}^\infty \setminus \mathcal{F}^s(p,S)$ debe tener un número finito de elementos, porque en otro caso podríamos hallar un $z \in J_r \cap \mathcal{F}^s(q_j,S)$ para algunos $r, j \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes; lo cual nuevamente nos llevaría a una contradicción al hecho de que q cumple la propiedad P_Σ. Luego, tenemos que $\{q_i\}_{i=1}^\infty \cap \mathcal{F}^s(p,S)$ necesariamente es un conjunto infinito, el cual se puede ordenar de manera que $q_i \in O^+(q_{i-1})$. Así, se satisfacen las hipótesis del Lema 2.1 el cual garantiza la existencia de punto periódico $p \subseteq \omega(q)$, para el cual $q_n \in \mathcal{F}^s(p)$ y como $q_n \in O^+(q)$ se concluye inmediatamente que $\omega(q) = O(p)$. □

Observación 3.1. *(i) Es necesario tener presente que por el momento no es posible dejar a un lado la hipótesis de que $\omega(q)$ sea de codimensión uno, ya al tomar como M a una suspensión conveniente del atractor geométrico de Lorenz hacía dimensión cuatro, se puede aprovechar la transitividad del atractor geométrico para obtener un punto $q \in M$ que satisface la propiedad P_Σ y que sin embargo $\omega(q)$ no sea una órbita cerrada. Para más detalles sobre éste contraejemplo, se puede revisar la sección 2.1 en [BM10].*

(ii) En los Teoremas 3.2 y 3.3 se abordan las dos implicaciones que constituyen la caracterización dada por el Teorema 3.1.

Finalmente, obtenemos como corolario del Lema de Inclinación (Lema 2.15 en [AP10]) y del Teorema 4.1 la siguiente proposición que aborda el caso particular en que Λ contiene las variedades inestables de sus subconjuntos hiperbólicos y q satisface la propiedad P_Σ, para alguna sección transversal Σ.

Proposición 3.1. *Sea Λ conjunto seccional hiperbólico de codimensión uno, tal que $W^u(H) \subseteq \Lambda$ para todo subconjunto hiperbólico $H \subseteq \Lambda$. Si $q \in M$ es un punto tal que*

(i) satisface la propiedad P_Σ para alguna sección transversal Σ y algún arco I,

(ii) $\omega(q) \subseteq \Lambda$,

(iii) $O^+(p) \cap \partial\Sigma = \emptyset$ para todo $p \in I$.

Entonces $\omega(q)$ se reduce a una singularidad.

Demostración. En primer lugar, como $\omega(q) \subseteq \Lambda$ es un subconjunto invariante, necesariamente $\omega(q)$ también es seccional-hiperbólico; así, por el Teorema 3.1, $\omega(q)$ es una órbita periódica o una singularidad. Si $\omega(q) = O(p)$ con $p \in \Lambda \cap \mathrm{Per}(X)$, entonces $q \in W^{ss}(p)$, y se sigue del Lema de Inclinación ([AP10], Lema 2.15, pp 29) que la órbita positiva de I se acumula en $W^u(\mathcal{O}(p))$. Ahora, como Λ es de codimensión uno, tenemos que $\dim(W^{uu}(p)) = 1$ y es posible tomar un dominio fundamental de $W^{uu}(p)$, denotado como D^u, que es difeomorfo a un intervalo $[a, b]$; de tal manera que la órbita positiva de I contenga un arco abierto I_0 arbitrariamente cercano a $D^u = [a, b]$.

Por otra parte, definiendo la aplicación $\Pi_D : \mathrm{Dom}(\Pi_D) \subseteq D^u \to \mathrm{int}(\Sigma)$,

$$\mathrm{Dom}(\Pi_D) = \{x \in D^u : X_t(x) \in \mathrm{int}(\Sigma) \text{ para algún } t > 0\},$$

dada por $\Pi_D(x) = X_{t(x)}(x)$, donde $t(x)$ es el primer $t > 0$ tal que $X_t(x) \in \mathrm{int}(\Sigma)$; se observa que al proyectar I_0 sobre D^u a través de las variedades estables fuertes de los puntos en I_0, se puede concluir que $D^u \subseteq \mathrm{Dom}(\Pi_D)$, y como $O^+(p) \cap \partial\Sigma = \emptyset$ para todo $p \in I_0$, necesariamente $\Pi_D(D^u)$ es una curva cerrada $c \subseteq \mathrm{int}(\Sigma)$.

Finalmente, en el Lemma 3.1 se estableció que $\Sigma \subseteq U_\Lambda$, luego, la foliación $\mathcal{F}^s_\Sigma$ está bien definida y como c es una curva cerrada en $\mathrm{int}(\Sigma)$, entonces c es tangente a $\mathcal{F}^s_\Sigma$ en al menos dos puntos, pero como D^u es un dominio fundamental de $W^{uu}(p) \subseteq \Lambda$, entonces c es transversal a $\mathcal{F}^s_\Sigma$, lo cual contradice que c sea cerrada. Por lo tanto, $\omega(q)$ se reduce a una singularidad.

$\square$

4 Lema de Conexión para Conjuntos Seccionales-Hiperbólicos

En el estudio de los sistemas dinámicos el lema de conexión, surge motivado en la conjetura de que "dados dos puntos tales que si para cualesquiera vecindades de éstos puntos, existe una órbita que visita las dos vecindades, entonces tales puntos pertenecerán a la misma órbita, para alguna pequeña C^1-perturbación del sistema dinámico original". Inicialmente, esta conjetura se resolvió para flujos de Anosov X_t (e.i. todo el espacio ambiente tiene estructura hiperbólica), como consecuencia de la propiedad de sombreamiento [HK95]; posteriormente se aplicó la teoría de variedades invariantes [HPS77] para extender el resultado a conjuntos uniformemente hiperbólicos. A continuación se enuncia de manera precisa el lema de conexión para conjuntos hiperbólicos.

Teorema 4.1 (Connecting Lemma)**.** *Sea $H \subseteq M$ un conjunto hiperbólico. Si $p, q \in H$ y existen sucesiones $z_n \in H$, $t_n \in \mathbb{R}$ tales que $z_n \to p$ y $X_{t_n}(z_n) \to q$, entonces existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x) = \omega(q)$.*

Posteriormente, Bautista y Morales en [BM10] llevaron el lema de conexión al contexto de los flujos seccional-Anosov, sobre variedades compactas tridimensionales; sin embargo, como sobre los conjuntos seccional-hiperbólicos no se tiene la propiedad de sombreamiento, se hizo necesario modificar el connecting lemma, agregando como hipótesis que $\alpha(p) \cap Sing(X) = \emptyset$, además, en la conclusión surgió la posibilidad de que $\omega(x)$ se reduzca a una singularidad. Siguiendo las ideas planteadas en [BM10], Bautista, Sánchez y Sales presentan en [BSS] una extensión del resultado a conjuntos seccionales hiperbólicos de codimensión uno, que contienen las variedades inestables de sus subconjuntos hiperbólicos; donde estas dos hipótesis adicionales compensan el aumento de dimensión y la posibilidad de que el flujo no sea seccional-Anosov.

Definición 4.1. *Dados $p, q \in M$ se dice que p está relacionado con q, lo cual denotamos como $p \sim q$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una órbita positiva desde un punto ε-cercano a p, hacia un punto ε-cercano a q.*

Teorema 4.2. *[Sectional-Hyperbolic Connecting Lemma] Sea Λ un conjunto seccional-hiperbólico de codimensión uno de un campo vectorial X sobre M, tal que $W^u(H) \subseteq \Lambda$ para todo subconjunto hiperbólico H de Λ. Si $p, q \in \Lambda$ satisfacen que $p \sim q$ y $\alpha(p)$ no contiene singularidades, entonces existe $x \in M$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x)$ es una singularidad ó $\omega(x) = \omega(q)$.*

Es necesario comentar que la hipótesis $\alpha(p) \cap \mathrm{Sing}(X) = \emptyset$ no se puede remover, ya que en [BMP07] se presenta un contraejemplo. Por otra parte, en [Mor08] también muestra un flujo seccional Anosov sobre el bitoro sólido, que contiene un punto periódico p y dos singularidades σ_1, σ_2 para los cuales existe un punto regular x, de tal manera que $p \sim \sigma_1$, $\alpha(x) = O(p)$ y además $\omega(x) = \{\sigma_2\}$.

Definición 4.2. *[PM82], [Rob95]. Sea H un conjunto hiperbólico para el flujo X_t. Un* ***dominio fundamental*** *para la* variedad inestable *$W^u(H)$ es un conjunto cerrado $D^u \subset W^s(H) \setminus H$ tal que existe un conjunto abierto $D' \subset W^s(H) \setminus H$ que satisface:*

(i) $D^u = \overline{D'}$,

(ii) $X_t(D') \cap D' = \emptyset$ *para todo* $t \neq 0$.

(iii) $D^u \cap H = \emptyset$.

Un dominio fundamental *para la* variedad estable *$W^s(H)$ se define de manera similar. En caso en que* $\dim(W^{uu}(p)) = 1$, *siempre es posible hallar un dominio fundamental para* $W^{uu}(p)$.

Proposición 4.1. *Sea Λ un conjunto seccional-hiperbólico de codimensión uno, tal que $W^u(H) \subseteq \Lambda$ para todo subconjunto hiperbólico $H \subseteq \Lambda$. Si $p \in \Lambda$ es un punto periódico y $\sigma \in \Lambda$ es una singularidad; tales que $\sigma \in \overline{W^u(p)}$, entonces existe $x \in \Lambda$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x)$ es una singularidad.*

Demostración. En primer lugar, por el Corolario 1.4 sabemos que σ es Lorenz-Like porque $\sigma \in \overline{W^u(p)}$, así, es posible tomar una sección transversal singular $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subseteq U_\Lambda$ asociada a σ, de tal manera que $\{y_1\} \subseteq \mathrm{Int}(\Sigma_1) \cap C_1$, $\{y_2\} \subseteq \mathrm{Int}(\Sigma_2) \cap C_2$; donde C_1, C_2 son las componentes conexas de $W^{ss}(\sigma) \setminus \mathcal{F}^{ss}(\sigma)$. Luego, $W^u(p)$ debe acumular al menos una de las folias $\mathcal{F}^s(y_1, \Sigma)$ o $\mathcal{F}^s(y_2, \Sigma)$ y sin perdida de generalidad podemos suponer que acumula a $\mathcal{F}^s(y_1, \Sigma)$; en particular, si $W^u(p) \cap \mathcal{F}^s(y_1, \Sigma) \neq \emptyset$ se puede tomar $x = c$ en esta intersección para obtener el resultado, ver Figura **4-1**.

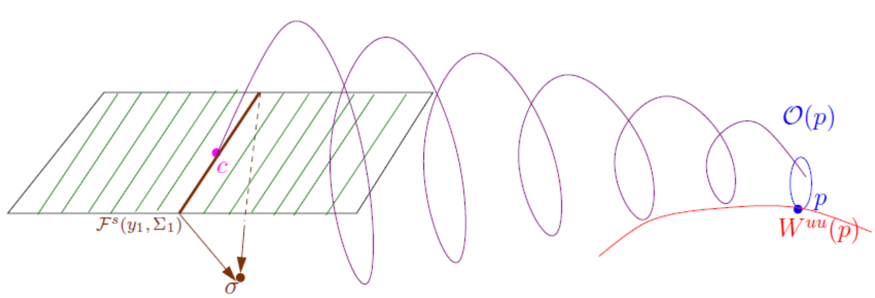

Figura 4-1: $c \in \mathcal{F}^{ss}(\sigma)$

Por otra parte, si $W^u(p) \cap \mathcal{F}^s(y_1, \Sigma) = \emptyset$, aún se puede elegir $z \in W^u(p) \cap \mathrm{Int}(\Sigma) \neq \emptyset$ y teniendo en cuenta que Λ es de codimensión uno, es posible obtener un dominio fundamental $D = [a, b]$ de $W^{uu}(p)$, para el cual $D \cap \Sigma = \emptyset$ y adicionalmente $b \in \mathcal{O}^+(a) \cap \mathcal{O}^-(z)$. Ahora, definiendo la aplicación

$$\Pi \ : \ \mathrm{Dom}(\Pi) \subseteq D \longrightarrow \mathrm{Int}(\Sigma_1),$$

donde $\mathrm{Dom}(\Pi) := \{x \in D : X_t(x) \in \mathrm{Int}(\Sigma_1), \text{para algún } t > 0\}$ y $\Pi(x) = X_{t(x)}(x)$, donde $t(x)$ es el primer tiempo $t > 0$ para el cual $X_t(x) \in \mathrm{Int}(\Sigma_1)$. En primer lugar se observa que $a, b \in \mathcal{O}^-(z) \subset \mathrm{Dom}(\Pi)$ y además, $\Pi(a) = \Pi(b) = z$. Con esto en mente, consideremos los valores

$$\begin{aligned} q^* &:= \sup\{s \in D : [a, s] \subseteq \mathrm{Dom}(\Pi),\ \Pi([a, s]) \subseteq \mathrm{Int}(\Sigma) \text{ y } \Pi\mid_{[a,s]} \text{ es de clase } C^1\} \quad \text{y} \\ q^{**} &:= \mathrm{ínf}\{s \in D : [s, b] \subseteq \mathrm{Dom}(\Pi),\ \Pi([s, b]) \subseteq \mathrm{Int}(\Sigma) \text{ y } \Pi\mid_{[s,b]} \text{ es de clase } C^1\}; \end{aligned}$$

que están bien definidos por dependencia continua del flujo X_t. Ahora, se observa que si $q^* = b$, $q^{**} = a$, o $q^* = q^{**}$; entonces $\Pi([a, b])$ forma una curva cerrada en $\mathrm{Int}(\Sigma)$ (sin un punto en el segundo caso) y en consecuencia debería existir al menos un punto en $\Pi([a, b])$ y tangente a $\mathcal{F}^s_{\Sigma_1}$ lo cual es contradictorio porque $[a, b] \subseteq W^{uu}(p)$ y $T_p(W^{uu}(p)) \subseteq F^c_\Lambda$ mientras que $\mathcal{F}^s_{\Sigma_1} \subseteq F^s_{U_\Lambda}$ y estos espacios deben ser transversales en cada punto. Por lo tanto, $a < q^* < q^{**} < b$ y además $q^*, q^{**} \notin \mathrm{Dom}(\Pi)$ ya que en caso contrario la dependencia continua del flujo permitiría extender los correspondientes intervalos $[a, q^*]$ y $[q^{**}, b]$.

Ahora, consideremos los arcos semiabiertos $\Pi([a, q^*))$ y $\Pi((q^{**}, b])$. Como $\Pi(a) = \Pi(b) = z$, se obtiene que $\Pi(\ [a, q^*) \cup (q^{**}, b]\ )$ es un curva abierta y conexa en $\mathrm{Int}(\Sigma_1)$, que resulta transversal a $\mathcal{F}^s_{\Sigma_1}$ porque $(\ [a, q^*) \cup (q^{**}, b]\ ) \subseteq W^{uu}(p)$. Denotando z^* y z^{**} a los extremos la curva $\Pi([a, q^*)) \cup (q^{**}, b])$ y recordando que Λ es de codimensión uno, se observa que $\mathcal{F}^s(y_1, \Sigma_1)$ divide a Σ_1 en dos componentes conexas, digamos K_1 y K_2. Así, para finalizar la prueba surgen dos casos que se deben analizar.

En primer lugar, si $z^* \in K_1$ y $z^{**} \in K_2$ se observa inmediatamente que

$$\Pi(\ [a, q^*) \cup (q^{**}, b]\ ) \bigcap \mathcal{F}^s(y_1, \Sigma_1) \neq \emptyset,$$

es decir, existe $x \in W^s(\sigma) \cap W^u(p)$, obteniendose así que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x) = \{\sigma\}$.

Finalmente, si z^* y z^{**} están en la misma componente conexa K_i, se puede asumir sin perdida de generalidad que z^* es más cercano a $\mathcal{F}^s(y_1, \Sigma_1)$ que z^{**}. Así, podemos considerar una sección transversal $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1$, conformada por todas las folias de Σ_1 comprendidas entre $\mathcal{F}^s(y_1, \Sigma_1)$ y $\mathcal{F}^s(z^{**}, \Sigma_1)$. De esta manera se obtiene que

$$\mathcal{O}^+(z^{**}) \ \cap\ \mathrm{Int}(\Sigma_0) = \emptyset \qquad \text{y} \qquad \partial^h(\Sigma_0) \cap \Lambda = \emptyset,$$

lo cual implica que z^* satisface la propiedad P_{Σ_0} para el arco $I = (z^*, a)$. Como $z^* \in \Lambda$ necesariamente $\omega(z^*) \subseteq \Lambda$, sin embargo, la Proposición 3.1 implica que $\omega(z^*) = \{\sigma^*\} \subset \mathrm{Sing}(X) \cap \Lambda$, luego, tomando $x = z^*$ se obtiene el resultado. □

Teorema 4.3. *Sea Λ un conjunto seccional-hiperbólico de codimensión uno, tal que $W^u(H) \subseteq \Lambda$ para todo subconjunto hiperbólico $H \subseteq \Lambda$. Si $p \in \Lambda$ es un punto periódico y $\sigma \in \Lambda$ es una singularidad, tales que $p \sim \sigma$; entonces existe $x \in \Lambda$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y $\omega(x)$ es una singularidad.*

Demostración. En primer lugar, como $p \sim \sigma$ existen sucesiones $\{x_n\} \subseteq M$ y $\{t_n\} \subseteq \mathbb{R}^+$ tales que $x_n \to p$ y que $X_{t_n}(x_n) \to \sigma$. Además, considerando la vecindad de Λ donde se puede extender su descomposición seccional-hiperbólica, $U_\Lambda \subseteq M$; se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\{x_n\} \subset U_\Lambda$. Por otra parte, $W^{uu}(p)$ está bien definida como subvariedad inmersa en M porque p es un punto periódico; luego $W^{uu}(p) \subseteq \Lambda$ por hipótesis y esto implica que $\mathcal{F}^{ss}(p) = W^{ss}(p)$. Así, podemos afirmar que $\mathcal{F}^{ss}(x_n) \cap W^{uu}(p) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, debido a la continuidad de $\mathcal{F}^{ss}$ y a que $x_n \to p$. Finalmente, tomando un punto $x_n' \in \mathcal{F}^{ss}(x_n) \cap W^{uu}(p)$ se observa inmediatamente que $\mathcal{F}^{ss}(x_n) = \mathcal{F}^{ss}(x_n')$, lo cual implica que

$$\lim_{n\to\infty} X_{t_n}(x_n') = \sigma, \quad \text{porque } \sigma \in \omega(x_n) \ \text{ y } \ t_n \to \infty.$$

□

La prueba del teorema principal de éste trabajo se apoya fuertemente en este último teorema, el cual es un caso particular del Teorema 4.2 (Sectional-Hyperbolic Connecting Lemma), cuya demostración se puede consultar en [San20].

5 Conjuntos Seccional-Hiperbólicos Lyapunov Estables

Todo conjunto hiperbólico Lyapunov estable H es attracting. Éste resultado clásico de sistemas dinámicos, se obtiene sin dificultad porque todo $x \in H$ define una subvariedad inestable $W^u(x)$; lo cual permite construir secciones transversales Σ de manera conveniente. Sin embargo, al considerar conjuntos seccional-hiperbólicos Lyapunov estables $\Lambda \subseteq M$, nos encontramos principalmente con dos dificultades:

(i) A pesar de poder definir el conjunto inestable para cada $x \in \Lambda$, éste no necesariamente resulta subvariedad inmersa en M.

(ii) Pueden existir singularidades (Lorenz-Like) $\sigma \in \Lambda$, acumuladas por órbitas positivas de puntos regulares.

Debido a estas dificultades, la pregunta ¿todo conjunto seccional hiperbólico Lyapunov estable es attracting? continua abierta. Sin embargo, en [BS20] se presentó el siguiente avance parcial al respecto.

Teorema 5.1 (Principal)**.** *Sea Λ un conjunto Lyapunov estable de codimensión uno, con una única singularidad Lorenz-Like, la cual es de tipo frontera. Si existe $x \in \Lambda$ de manera que $\Lambda = \omega(x)$ o $\Lambda = \alpha(x)$, entonces Λ es attracting.*

Se observa que éste teorema involucra tres restricciones respecto al caso hiperbólico: En primer lugar Λ es de codimensión uno; segundo, Λ contiene una única singularidad Lorenz-Like, que debe ser de tipo frontera; y finalmente, Λ debe ser el conjunto límite de algún punto $x \in M$. Estas restricciones surgieron en el proceso de establecer un contexto favorable para la construcción de secciones transversales que satisfagan propiedades similares a las que se obtienen en el caso hiperbólico.

Como punto de partida en el abordaje de las dos dificultades descritas, se presentan los siguientes dos conceptos.

Definición 5.1. *Un **punto** $x \in \Lambda$ es **hiperbólico** si el conjunto $\alpha(x) \cup \mathcal{O}(x) \cup \omega(x)$ es hiperbólico.*

Nótese que las singularidades y los puntos periódicos son, en particular, puntos hiperbólicos; además, cada punto x de un subconjunto hiperbólico $H \subseteq \Lambda$, necesariamente es un punto hiperbólico.

Definición 5.2. *Sea $\sigma \in \Lambda$ una singularidad Lorenz-Like y Σ una* ***sección transversal*** *asociada a σ. Decimos que Σ es* ***completa*** *si para cada $x \in \mathrm{Int}(\Sigma)$ se cumple que*

$$\mathcal{F}^s(x,\Sigma)\bigcap\Lambda \neq \emptyset.$$

Observación 5.1. *Si H (hiperbólico) es Lyapunov estable, siempre es posible obtener secciones transversales que satisfagan la anterior condición de intersección, construyéndolas a partir de las variedades inestables de puntos $x \in H$. Por otra parte, observe que si la órbita de un punto $q \in M$ intersecta el interior de una sección transversal completa Σ asociada a $\sigma \in \Lambda$, necesariamente $\omega(q) \subseteq \Lambda$.*

En la siguiente sección se precisarán algunas propiedades de los conjuntos Lyapunov estables, que induzcan un contexto favorable para desarrollar el teorema principal.

5.1. Propiedades de los Conjuntos Lyapunov Estables

Una propiedad notable de los conjuntos Lyapunov estables L, es que ellos contienen los conjuntos inestables de cada uno de sus puntos. En particular, si L es seccional hiperbólico, entonces L debe contener a las subvariedades inestables de todos sus puntos hiperbólicos.

Lema 5.1. *Si $L \subseteq M$ es un conjunto Lyapunov estable para el campo vectorial X sobre M, entonces*

$$\{z \in M \;:\; d(X_{-t}(z), X_{-t}(x)) \to 0 \text{ cuando } t \to \infty\} \subseteq L, \qquad \text{para todo } x \in L.$$

La demostración de éste lema se puede hallar en [AP10], Lema 2.25, página 36.

Por otra parte, aunque no todo conjunto Lyapunov estable es attracting, el siguiente lema caracteriza aquellos que sí lo son y justifica nuestro interés en capturar algunos conjuntos ω-límite dentro de Λ.

Lema 5.2. *Si $L \subseteq M$ es un conjunto Lyapunov estable para el campo vectorial X sobre M, se obtiene que:*

(i) L es attracting si y sólo si, existe una vecindad U de L tal que $\omega(x) \subseteq L$ para todo $x \in U$.

(ii) L es attracting si y sólo si, para toda sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ tal que $x_n \to q \in L$, existe $N \in \mathbb{N}$ de tal manera que $\omega(x_m) \subseteq L$ para cada $m \geq N$.

Demostración.

(i) $[\Longleftarrow]$ Suponiendo que existe una vecindad U de L tal que $\omega(x) \subseteq L$ para todo $x \in U$, se probará que L debe ser un conjunto attracting. En este orden de ideas, dado $\varepsilon > 0$ se denota por B_ε la ε-vecindad de L. Por otra parte, sea V una vecindad abierta de L tal que $\overline{V} \subseteq U$. A continuación se mostrará que para todo $t > 0$ suficientemente grande, se tiene $X_t(V) \subset B_\varepsilon$.

Razonando por contradicción, suponga que existe una sucesión $t_n > 0$ con $t_n \to +\infty$ de tal manera que exista $x_n \in V$, para el cual $X_{t_n}(x_n) \notin B_\varepsilon$. Entonces podemos encontrar $x \in \overline{V}$ y una subsucesión $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$, tal que $x_{n_k} \to x$ cuando $k \to +\infty$, y como $M \setminus B_\varepsilon$ es cerrado y compacto, se tiene que

$$X_{t_i}(x_{n_k}) \to X_{t_i}(x) \notin B_\varepsilon \quad \text{para todo } i.$$

Esto implica que $\omega(x) \not\subset L$, lo cual contradice la suposición sobre la vecindad U. Por lo tanto, no existen tales sucesiones y se tiene $X_t(V) \subset B_\varepsilon$ para todo $t > 0$ suficientemente grande. Como $\varepsilon > 0$ fue elegido arbitrariamente, esto prueba que

$$\bigcap_{t>0} X_t(V) \subset \bigcap_{\varepsilon>0} B_\varepsilon = \overline{L} = L.$$

$[\Longrightarrow]$ Suponga que L es estable de Lyapunov y attracting, es decir, que existe además una vecindad U de L tal que

$$L = \bigcap_{t>0} X_t(U).$$

Como L es Lyapunov estable, se puede tomar otra vecindad $V \subset U$ de L tal que $X_t(V) \subset U$ para todo $t \geq 0$. Entonces, para todo $s \geq t \geq 0$, se tiene que

$$X_s(V) = X_{s-t}(X_t(V)) \subset X_{s-t}(U),$$

de lo cual se obtiene que $X_s(V) \subset \bigcap_{t=0}^{s} X_t(U)$ para todo $s > 0$. En consecuencia, todo punto de acumulación de la órbita positiva de cada punto de V pertenece a $\bigcap_{t\geq 0} X_t(U) = L$. En otras palabras, $\omega(x) \subseteq L$ para cada $x \in V$.

(ii) $[\Longrightarrow]$ Supongamos que L es attracting y que U es una vecindad de L como en la afirmación (i). Ahora, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ converge hacía $q \in L$, debe existir $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in U$ para todo $m \geq N$ y así, $\omega(x_m) \subseteq L$ para todo $m \geq N$.

$[\Longleftarrow]$ Supongamos que para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ convergente hacía un punto $q \in L$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\omega(x_m) \subseteq L$ para todo $m \geq N$ y que, sin embargo, L no es attracting. Así, por la afirmación (i), para toda vecindad U de L, debe existir $x_U \in U$ tal que $\omega(x_U) \not\subseteq L$.

Sea $B_k := \left\{y \in M \ : \ \text{ínf}_{z\in L} \|z-y\| \leq \frac{1}{k}\right\}$, la vecindad de L de radio $\dfrac{1}{k}$, es posible definir una sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq M$ de tal manera que

$$y_k \in B_k \qquad \text{y} \qquad \omega(y_k) \nsubseteq L, \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Debido a la compacidad de M, existe una subsucesión convergente de $\{y_k\}$ (que se denotará de la misma manera) hacía un punto $p \in M$, sin embargo, por como se definieron las vecindades B_k, necesariamente p es un punto de L. Finalmente, por hipótesis debe existir $N \in \mathbb{N}$ de tal manera que $\omega(y_m) \subseteq L$ para todo $m \geq N$, pero esto contradice la definición de la sucesión $\{y_k\}$. Podemos entonces concluir que debe existir una vecindad U de L tal que $\omega(x) \subseteq L$, para todo $x \in U$, tal como se deseaba.

□

Ahora, el lema anterior traduce nuestro problema inicial en buscar condiciones bajo las cuales se pueda garantizar que, si una sucesión $\{x_n\} \subseteq M$ converge a $x \in \Lambda$ entonces los conjuntos $\omega(x_m)$ quedan contenidos en Λ, para cada $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. En este orden de ideas, se presenta el siguiente lema.

Lema 5.3. *[BS20] Sea Λ un conjunto seccional hiperbólico Lyapunov estable y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ una sucesión tal que $x_n \to q \in \Lambda$. Si $\omega(q)$ contiene un punto regular hiperbólico, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\omega(x_m) \subseteq \Lambda$, para todo $m \geq N$.*

Demostración. Sea $z \in \omega(q)$ el punto regular hiperbólico. Como Λ es Lyapunov estable, por el Lema 5.1, $W^{uu}(z) \subseteq \Lambda$ y en consecuencia $\omega(y) \subseteq \Lambda$ para todo $y \in W^{uu}(z)$. Así, considerando la subvariedad inestable de z de tamaño ε, sobre cada $y \in W^{uu}_{\varepsilon}(z) \subseteq \Lambda$, se puede tomar la subvariedad estable (también de tamaño ε) $W^{ss}_{\varepsilon}(y)$ para formar la sección transversal

$$\Sigma := \bigcup_{y \ \in \ W^{uu}_{\epsilon}(z)} W^{ss}(y).$$

Observe que para esta sección transversal se tiene que

$$W^{uu}_{\varepsilon}(z) \ \cap \ W^{ss}_{\varepsilon}(y) \ = \ W^{uu}_{\varepsilon}(z) \ \cap \ \mathcal{F}^s(y,\Sigma) \ = \{y\} \subseteq \Lambda.$$

Por otro lado, como $z \in \text{Int}(\Sigma)$, necesariamente las órbitas de cada sucesión de puntos regulares que acumulen a z deben intersectar a $\text{Int}(\Sigma)$; en particular, $\mathcal{O}^+(q) \cap \Sigma \neq \emptyset$ porque $z \in \omega(q)$. Ahora, teniendo en cuenta que $x_n \to q$, se puede afirmar que, por dependencia continua, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N$

$$\mathcal{O}^+(x_m) \cap \text{Int}(\Sigma) \neq \emptyset;$$

Llamando x'_n al correspondiente punto de intersección (observe que la intersección anterior no tiene por que reducirse a un único punto), ver Figura **5-1**, debe existir algún $z_n \in W^{uu}(z)$

de tal manera que $x_m^* \in \mathcal{F}^s(z_n, \Sigma)$. En particular, $x_m' \in W_\varepsilon^{ss}(z_n)$ y de esta manera se concluye que

$$\omega(x_n) = \omega(x_n') = \omega(z_n) \subseteq \Lambda, \qquad \text{para todo } n \geq N.$$

$\square$

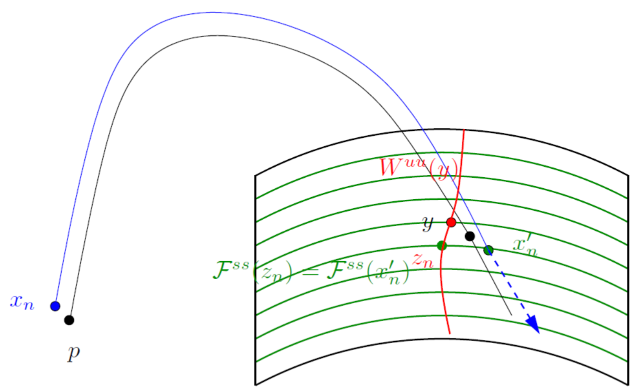

Figura 5-1: $\omega(x_n) = \omega(z_n)$

Observación 5.2. *La variedad inestable de una singularidad $\sigma \in \Lambda$, $W^u(\sigma)$, no es útil en la tarea de construir secciones transversales Σ, porque ella hace parte del flujo y, por definición, se requiere que Σ sea transversal al flujo. Sin embargo, cuando Λ es Lyapunov estable y la órbita de cada punto $q \in W^u(\sigma) \subseteq \Lambda$ es densa en Λ, se obtiene un resultado favorable.*

Definición 5.3. *Se dice que Λ tiene* ***ramas inestables singulares densas*** *si para cada singularidad $\sigma \in \Lambda$ y cada punto $q \in W^{uu}(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ se tiene que $\Lambda = \omega(q)$.*

Teorema 5.2. *Si Λ es Lyapunov estable y tiene ramas inestables densas, entonces Λ es un conjunto atractor.*

Demostración. Por hipótesis, para cada singularidad $\sigma \in \Lambda$ y para cada $q \in W^{uu}(\sigma) \setminus \Lambda$ se tiene que $\Lambda = \omega(q)$; además, $q \in W^{uu}(\sigma) \subseteq \Lambda$ por ser Lyapunov estable, lo cual significa que en efecto Λ es transitivo.

Para verificar que Λ es attracting, se puede considerar una sucesión $\{x_m\} \subseteq M$ tal que $x_n \to z \in \Lambda$ y probar que $\omega(x_m) \subseteq \Lambda$ para cada $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Si $\omega(z)$ no tiene singularidades, entonces $\omega(z)$ es un conjunto hiperbólico tipo silla en virtud del lema hiperbólico y todos sus puntos son hiperbólicos; así, el Lema 5.3 garantiza que Λ es attracting.

Si $\sigma \in \omega(z) \cap \mathrm{Sing}(X)$, necesariamente $\sigma \in \Lambda$. Razonando por reducción al absurdo, suponga que $x_n \to z \in \Lambda$ y, sin perdida de generalidad (pasando a una subsucesión si es necesario), suponga también que

$$\omega(x_n) \nsubseteq \Lambda, \qquad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5-1}$$

en particular, se observa que $\omega(x_n) \neq \{\sigma\}$. Luego, el teorema de Hartman-Grobman y el hecho de que la órbita positiva de z acumula a σ implica la existencia de un punto $q \in W^{uu}(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ y de una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ de $\{x_n\}$ y de una sucesión de tiempos $t_k \geq 0$ para los cuales

$$y_k := X_{t_k}(x_{n_k}) \to q, \qquad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Por otra parte, Λ tiene ramas inestables singulares densas, lo cual implica que $\Lambda = \omega(q)$, además, por ser conjunto Lyapunov estable contiene puntos periódicos hiperbólicos ([AML16]); luego, como consecuencia del Lema 5.3 obtenemos que $\omega(y_k) \subseteq \Lambda$ para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande; lo cual contradice (5-1). Por lo tanto, Λ debe ser attracting. $\square$

Para aplicar el Lema 5.2 al caso particular en que L es un conjunto seccional hiperbólico, es suficiente garantizar que para toda singularidad Lorenz-Like, $\sigma \in L$, existe una sección transversal completa Σ asociada a σ.

Proposición 5.1. *Sea Λ un conjunto seccional hiperbólico Lyapunov estable, tal que para toda singularidad Lorenz-Like $\sigma \in \Lambda$ existe una sección transversal completa Σ asociada a σ. Entonces Λ es attracting.*

Demostración. Bajo estas hipótesis, se verificará que Λ es attracting aplicando la afirmación (ii) del Lema 5.2. En éste orden de ideas, supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ es una sucesión convergente hacia un punto $p \in \Lambda$.

Si $\omega(p)$ no contiene singularidades entonces, por el lema hiperbólico, $\omega(p)$ es un conjunto hiperbólico tipo silla y todos sus puntos son hiperbólicos. Así, el Lema 5.3 permite asegurar que $\omega(x_m) \subseteq \Lambda$, para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande; luego, Λ es attracting.

Por otra parte, si $\sigma \in \mathrm{Sing}(X) \cap \omega(p)$, necesariamente σ es Lorenz-Like porque la órbita positiva de p acumula a σ. Así, por hipótesis debe existir una sección transversal completa Σ asociada a σ; luego, $\mathcal{O}^+(p) \cap \mathrm{Int}(\Sigma) \neq \emptyset$, porque $\sigma \in \omega(p)$. Ahora, como $x_n \to p$, por dependencia continua la órbita positiva de x_m debe intersectar a $\mathrm{Int}(\Sigma)$ en algún punto x_m^*, para todo $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Finalmente, como para todo $x \in \mathrm{Int}(\Sigma)$ podemos garantizar que $\mathcal{F}^s(x, \Sigma) \cap \Lambda \neq \emptyset$, es posible fijar puntos $z_m \in \mathcal{F}^s(x_m^*, \Sigma) \cap \Lambda$, además, teniendo en cuenta que $\mathcal{F}^s(x, \Sigma) \subseteq \mathcal{F}^{ss}(x)$ para todo $x \in \mathrm{Int}(\Sigma)$, se concluye que

$$\omega(x_m) = \omega(x_m^*) = \omega(z_m) \subseteq \Lambda, \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N} \text{ suficientemente grande.}$$

Luego, Λ es attracting. $\square$

5.2. Variedades Estables de Singularidades y Variedades Inestables de Puntos Periódicos

Para atender al propósito de garantizar condiciones bajo las cuales un conjunto seccional-hiperbólico Lyapunov estable Λ resulta ser attracting, la Proposición 5.1 permite replantear el problema en hallar secciones transversales completas, asociadas a cada singularidad $\sigma \in \Lambda$; en particular, esto es posible cuando $W^s(\sigma) \cap W^u(p) \neq \emptyset$ para algún punto hiperbólico $p \in \Lambda$. Consecuentemente, podemos considerar en primer lugar, el caso en que los puntos hiperbólicos son densos en Λ.

Teorema 5.3. *Todo conjunto seccional-hiperbólico Lyapunov estable Λ cuyos puntos hiperbólicos son densos, necesarimente es attracting.*

Demostración. Supongamos que $\sigma \in \Lambda$ es una singularidad Lorenz-Like y consideremos una sección transversal Σ asociada a σ. Sea $x \in \mathrm{Int}(\Sigma)$ y tomemos una sucesión de puntos hiperbólicos (regulares) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ que converge hacía x. Como Λ es Lyapunov estable, tenemos que $W^{uu}(x_n) \subseteq \Lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$; además, para cada $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande se debe tener que $\emptyset \neq W^{uu}(x_n) \cap \mathcal{F}^s(x,\Sigma) \subseteq \Lambda$, porque $\mathcal{F}^s(x,\Sigma) \subseteq \mathcal{F}^{ss}(x)$; lo cual indica que la sección tranversal Σ es completa. Así, la Proposición 5.1 permite concluir que Λ es attracting. $\square$

En el siguiente teorema observaremos que basta tener puntos hiperbólicos cuyas variedades inestables intersecten la variedad estable fuerte (hiperbólica) de cada singularidad Lorenz-Like $\sigma \in \Lambda$, para obtener secciones transversales completas asociadas a tales singularidades y en consecuencia, concluir que Λ debe ser attracting.

Teorema 5.4. *Sea Λ un conjunto Lyapunov estable, tal que*

(i) Para toda singularidad Lorenz-Like de tipo frontera $\sigma \in \Lambda$, existe un punto regular hiperbólico $z \in \Lambda$ tal que $W^u(z) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$.

(ii) Para toda singularidad Lorenz-Like que ***no es*** *de tipo frontera $\sigma \in \Lambda$, existen dos puntos regulares hiperbólicos $y, z \in \Lambda$ tales que*

$$W^u(y) \cap C_1 \neq \emptyset \qquad y \qquad W^u(z) \cap C_2 \neq \emptyset;$$

donde C_1 y C_2 son las dos componentes conexas de $W^{ss}(\sigma) \setminus \mathcal{F}^{ss}(\sigma)$.

Entonces, Λ es attracting.

Demostración. En primer lugar, se observa que el argumento para el caso en que tenemos una singularidad Lorenz-Like $\sigma \in \Lambda$ que no es de tipo frontera, resulta análogo al que se desarrolla para singularidades de tipo frontera, pero efectuando el mismo razonamiento sobre cada componente conexa de $W^{ss}(\sigma) \setminus \mathcal{F}^{ss}(\sigma)$.

Supongamos que σ es Lorenz-Like tipo frontera y que $z \in \Lambda$ es un punto hiperbólico regular tal que $W^u(z) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$. Si $y \in W^u(z) \cap W^s(\sigma)$, como Λ es Lyapunov estable, contiene la variedad inestable de sus puntos hiperbólicos, luego $y \in \Lambda$ y por la invarianza de las variedades estables e inestables, sin perdida de generalidad podemos suponer que $y \in \Sigma$, con Σ una sección transversal asociada a σ, satisfaciendo que $l^*_\Sigma = \mathcal{F}^s(y, \Sigma)$.

Ahora, tenemos que existe un tiempo $T > 0$ tal que $q = X_{-T}(y) \in W^{uu}(z)$. Por lo tanto usando la dependencia continua del flujo existe un conjunto conexo $D \subseteq W^{uu}(z) \subseteq \Lambda$ que contiene a q tal que la órbita positiva de D interseca a Σ en un conjunto conexo C que contiene a y, además por la invarianza $C \subseteq \Lambda$. Por otro parte, como z es punto hiperbólico regular $F^s_z = E^s_z$ y $E^u_z \oplus E^X_z = F^c_z$; luego $T_z D \subseteq E^u_z \subseteq F^c_z$ de donde concluimos que el conjunto C debe ser transversal a la foliación $\mathcal{F}^s_\Sigma$.

Sea Σ_1 el conjunto de las folias de Σ que intersecan a C, si es necesario movemos por el flujo hacia futuro a Σ_1 para obtener una sección transversal Σ_2 asociada a σ la cual resulta ser completa ya que toda folia de Σ intersecta un punto de $C \subseteq \Lambda$ y en consecuencia, la Proposición 5.1 permite afirmar que Λ es attracting.

□

Como consecuencia inmediata de éste teorema, si Λ es Lyapunov estable y no contiene singularidades Lorenz-Like, necesariamente Λ es attracting. Por otra parte, anteriormente se mencionó que todo conjunto seccional hiperbólico Λ Lyapunov estable contiene puntos periódicos, por lo tanto, si $\sigma \in \Lambda \cap \mathrm{Sing}(X)$, es razonable considerar aquellos casos en que $W^s(\sigma) \cap W^u(p) \neq \emptyset$ para algún punto periódico $p \in \Lambda$.

Definición 5.4. *Un conjunto seccional-hiperbólico Λ, satisface la* ***propiedad (S)*** *si para cada singularidad Lorenz-Like $\sigma \in \Lambda$ existe un punto periódico $p \in \Lambda$ tal que*

$$W^u(\mathcal{O}(p)) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset.$$

Corolario 5.1. *Si Λ es Lyapunov estable, satisface la propiedad (S) y sus singularidades Lorenz-Like son de tipo frontera, entonces Λ es attracting.*

Demostración. Como todas las singularidades Lorenz Like en Λ son de tipo frontera y se satisface la propiedad (S), en particular se cumplen las hipótesis del Teorema 5.4, lo cual permite concluir que Λ es attracting. □

Como se acaba de observar en el Corolario 5.1, cuando un conjunto seccional-hiperbólico Lyapunov estable Λ satisface la Propiedad (S), se puede concluir que Λ es attracting, sin embargo, verificar que Λ cumple dicha propiedad puede ser una tarea muy complicada. Por otra parte, se puede seguir abriendo camino al considerar, recíprocamente, el caso en que la órbita de cada punto periódico en Λ se conecta con alguna singularidad $\sigma \in \Lambda$.

Definición 5.5. *Un conjunto compacto e invariante $\Lambda \subseteq M$ de un campo vectorial X sobre M, satisface la* ***propiedad (P)*** *si para cada punto periódico $p \in \Lambda$ existe una singularidad $\sigma \in \Lambda$ tal que*
$$W^u(\mathcal{O}(p)) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset.$$

Para verificar que un conjunto Λ Lyapunov estable satisface la propiedad (P) podemos recurrir al Lema de Conexión Seccional hiperbólico (Teorema 4.2). Sin embargo, surge la necesidad de restringir Λ a codimensión uno. Además, el Lema de Conexión Seccional hiperbólico no permite controlar la singularidad a la cual se podría reducir el conjunto ω-límite de la órbita que conecta; lo cual motiva la consideración (en el teorema principal) de que Λ contenga una única singularidad Lorenz-Like σ. Finalmente, para garantizar que dado cualquier punto periódico $p \in \Lambda$, necesariamente $p \sim \sigma$; se puede exigir que Λ sea un conjunto límite.

Corolario 5.2. *Si Λ es Lyapunov estable, satisface la propiedad (P) y contiene una única singularidad σ Lorenz-Like, que además es de tipo frontera; necesariamente Λ es attracting.*

Demostración. Siguiendo la observación plantada antes del enunciado, como todo conjunto seccional-hiperbólico contiene al menos un punto periódico, sea $p \in \Lambda$ uno de tales puntos periódicos. Como Λ satisface la propiedad (P) y σ es la única singularidad Lorenz-like en Λ, necesariamente $W^u(p) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$; además, teniendo en cuenta que Λ es Lyapunov estable, observamos que $W^u(p) \subseteq \Lambda$. Finalmente, como σ es la única singularidad Lorenz-like en Λ, se sigue que Λ satisface la propiedad (S) y en consecuencia del Corolario 5.1 se concluye que Λ es attracting. □

Proposición 5.2. *Sea Λ un conjunto límite ($\Lambda = \omega(q)$ o $\Lambda = \alpha(q)$, para algún $q \in M$) de codimensión uno, tal que $W^u(H) \subseteq \Lambda$ para todo subconjunto hiperbólico $H \subseteq \Lambda$. Entonces, para cada punto periódico $p \in \Lambda$ y para cada singularidad $\sigma \in \Lambda$ se tiene que $\sigma \in \overline{W^u(p)}$.*

Demostración. En primer lugar, para todo punto periódico $p \in \Lambda$ tenemos que $\overline{W^{uu}(p)} \subseteq \Lambda$; además, como Λ es de codimensión uno, se observa que $\dim(W^{uu}(p)) = 1$. En consecuencia, podemos tomar un dominio fundamental de $W^{uu}(p)$, que denotaremos como $D^u \subseteq \Lambda$ y tomar un $\delta > 0$ suficientemente pequeño, de manera que el conjunto
$$D = \bigcup_{q \in X_{[-\delta,\delta]}(D^u)} \mathcal{F}^{ss}(q),$$
sea una vecindad de D^u. Ahora, como Λ es un conjunto límite, supongamos sin perdida de generalidad que $\Lambda = \omega(z)$, para algún $z \in M$; luego, $\mathcal{O}^+(z) \cap D \neq \emptyset$, porque $D^u \subseteq \Lambda$. Así, dado $x \in \mathcal{O}^+(z) \cap D$ se observa que $x \in W^u(p)$ y además, $\omega(z) = \omega(x) = \Lambda$. Por lo tanto,
$$\Lambda = \omega(z) = \omega(x) \subseteq \overline{W^u(p)} \subseteq \Lambda. \quad \text{En particular,} \quad \sigma \in \overline{W^u(p)},$$
para cada singularidad $\sigma \in \Lambda$, tal como se deseaba. □

Corolario 5.3. *Si Λ es Lyapunov estable, transitivo, de codimensión uno y con sigunlaridades; entonces Λ satisface la propiedad (P).*

Demostración. Sea $p \in \Lambda$ un punto periódico y $\sigma \in \Lambda$ una singularidad. Como Λ es Lyapunov estable, entonces $W^u(H) \subseteq \Lambda$ para todo subconjunto hiperbólico $H \subseteq \Lambda$; luego, por la Proposición 5.2 se tiene que $\sigma \in \overline{W^u(p)}$, entonces, por la Proposición 4.1, existen σ^*, $y \in \Lambda$, con σ^* una singularidad, tales que $\alpha(y) = \alpha(p)$ y $\omega(y) = \{\sigma^*\}$. En consecuencia,

$$y \in W^s(\sigma^*) \cap W^u(p),$$

lo cual permite concluir que Λ satisface la propiedad (P). □

Corolario 5.4. *Si Λ es Lyapunov estable, transitivo, de codimensión uno y con una única sigunlaridad Lorenz-Like, la cual es de tipo frontera; entonces Λ es un atractor.*

Demostración. Bajo estas hipótesis el Corolario 5.3 garantiza que Λ satisface la propiedad (P); luego, el Corolario 5.2 permite afirmar que Λ es attracting. En consecuencia de esto, como Λ es transitivo, se concluye que Λ es un atractor. □

5.3. Demostración del Teorema Principal

Demostración. Teniendo presente el Corolario 5.1, basta verificar que Λ satisface la propiedad (S). Por hipótesis, para algún $z \in M$ se tiene que $\Lambda = \omega(z)$ ó $\Lambda = \alpha(z)$; luego, el Corolario 1.2 garantiza que toda singularidad en Λ es Lorenz Like y así podemos afirmar que Λ contiene una única singularidad, que llamaremos σ. Además, Λ es Lyapunov estable y por lo tanto contiene puntos periódicos; luego, para todo $\varepsilon > 0$ y todo periódico $p \in \Lambda$ obtenemos que

$$\mathcal{O}(z) \ \cap \ B_\varepsilon(p) \neq \emptyset \qquad y \qquad \mathcal{O}(z) \ \cap \ B_\varepsilon(\sigma) \neq \emptyset;$$

es decir, $p \backsim \sigma$. Ahora que se verifican las hipótesis del Lema de Conexión Seccional Hiperbólico, se puede asegurar que existe $x \in \Lambda$ tal que $\alpha(x) = \alpha(p)$ y que $\omega(x) = \{\sigma\}$; en particular, tenemos que Λ satisface la propiedad (S) porque $W^u(p) \cap W^s(\sigma) \neq \emptyset$. Por lo tanto, el Corolario 5.1 permite concluir que Λ necesariamente es attracting. □

6 Conclusiones

- Si para algún $q \in M$, $\omega(q)$ tiene estructura seccional-hiperbólica de codimensión uno. Entonces q satisface la propiedad P_Σ si y sólo si $\omega(q)$ es una órbita cerrada. Al dejar a un lado la hipótesis de codimensión uno, la satisfacción de la propiedad P_Σ no caracteriza los ω-límites que son órbitas cerradas.

- Las versiones del lema de conexión que se aplicaron en el teorema principal de este trabajo (Proposición 4.1 y Teorema 4.3), dependen fuertemente de la satisfacción de la propiedad P_Σ, la cual a su vez sólo funciona en codimensión uno. Por esta razón, para buscar el siguiente salto de generalidad en el teorema principal no es plausible remover la hipótesis de codimensión uno.

  Sea Λ un conjunto seccional-hiperbólico Lyapunov estable.

- Si Λ es de codimensión uno y contiene una única singularidad, la cual es Lorenz-Like de tipo frontera, necesariamente Λ es attracting.

- Cuando Λ es de codimensión uno, satisface la propiedad (S) y todas sus singularidades Lorenz-Like son de tipo frontera, necesariamente Λ es attracting, porque en este caso se logra asociar a cada singularidad secciones transversales completas.

- Cuando a toda singularidad Lorenz-Like de Λ se logra asociarle una sección transversal completa, Λ es attracting.

Bibliografía

[Lor63] Edward N. Lorenz. "Deterministic nonperiodic flow". En: *Journal of the Atmospheric Sciences* 20.2 (1963), págs. 130-141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2.

[Sma67] Stephen Smale. "Differentiable dynamical systems". En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 73.6 (1967), págs. 747-817. DOI: 10.1090/S0002-9904-1967-11811-1.

[PS70] C. Pugh y M. Shub. "Linearization of Normally Hyperbolic Diffeomorphisms and Flows". En: *Inventiones Mathematicae* 10 (1970), págs. 187-198. DOI: 10.1007/BF01403180.

[Jr74] H. Blaine Lawson Jr. "Foliations". En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 80.3 (1974), págs. 369-418. DOI: 10.1090/S0002-9904-1974-13401-0.

[HPS77] M. Hirsch, C. Pugh y M. Shub. *Invariant Manifolds*. Vol. 583. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1977.

[PM82] Jacob Palis y Welington de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. New York: Springer-Verlag, 1982.

[Car92] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. English. Translated by Francis Flaherty. Boston: Birkhäuser, 1992. ISBN: 978-0817634902.

[Lya92] Aleksandr M. Lyapunov. *The General Problem of the Stability of Motion*. Translated from the Russian original (1892). Taylor & Francis, 1992. ISBN: 9782881248424.

[PT93] Jacob Palis y Floris Takens. *Hyperbolicity and Sensitive-Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*. Vol. 35. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. ISBN: 9780521434075.

[HK95] B. Hasselblatt y A. Katok. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, 1995.

[Rob95] R. Clark Robinson. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995, pág. 400. ISBN: 9780849384912.

[Sot02] Jorge Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002. ISBN: 978-85-244-0136-7.

[BDV05] Christian Bonatti, Lorenzo J. Díaz y Marcelo Viana. *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity: A Global Geometric and Probabilistic Perspective*. Vol. 102. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer, 2005. DOI: `10.1007/3-540-28838-1`.

[BMP07] S. Bautista, C. Morales y M. Pacifico. "On the intersection of homoclinic classes on singular-hyperbolic sets". En: *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 19.4 (2007), págs. 761-775.

[Tu07] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Universitext. Springer, 2007. DOI: `10.1007/978-0-387-45693-3`.

[BM08] S. Bautista y C. Morales. "Characterizing omega-limit sets which are closed orbits". En: *J. Differential Equations* 245.3 (2008), págs. 637-652.

[MM08] R. Metzger y C. Morales. "Sectional-hyperbolic systems". En: *Ergodic Theory. Dyn Syst.* 28.5 (2008), págs. 1587-1597.

[Mor08] C. Morales. "A singular-hyperbolic closing lemma". En: *Michigan Mathematical Journal* 56.1 (2008), págs. 29-53.

[AP10] V. Araujo y M. Pacifico. *Three-dimensional flows*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[BM10] S. Bautista y C. Morales. "A sectional-Anosov connecting lemma". En: *Ergodic Theory Dynam. Systems* 30.2 (2010), págs. 339-359.

[GP10] Victor Guillemin y Alan Pollack. *Differential Topology*. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2010.

[BM11] S. Bautista y C. Morales. "Lectures on Sectional-Anosov flows". Preprint, IMPA Serie D 84. 2011.

[Lee13] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2.ª ed. Vol. 218. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2013. DOI: `10.1007/978-1-4419-9982-5`.

[Lop15] A. Lopez. "Sectional Hyperbolic Sets in Higher Dimensions". Tesis doct. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.

[AML16] A. Arbieto, C. Morales y A. Lopez. "Homoclinic classes for sectional-hyperbolic sets". En: *Kyoto Journal of Mathematics* 56.3 (2016), págs. 531-538.

[BS20] S. Bautista e Y. Sanchez. "Sectional-hyperbolic Lyapunov stable sets". En: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 40.4 (2020). In process of publication, págs. 2011-2016.

[San20] Y. Sanchez. "On Sectional-Hyperbolic Sets". Tesis doct. Universidad Nacional de Colombia, 2020.

[BSS] S. Bautista, Y. A Sanchez y V. Sales. *Sectional Connecting Lemma*. Preprint Arxiv. https://arxiv.org/pdf/1804.00646.pdf.