ESTRUCTURAS DE DIPOLOS HIDRÁULICOS CON INTENSIDAD CONSTANTE

Jorge Alberto Naranjo Mesa y Andrés Ochoa Jaramillo
Posgrado en Aprovechamiento de los Recursos Hidráulicos
Facultad de Minas, Universidad Nacional de Colombia, Sede de Medellín

RESUMEN

El campo lejano de un dipolo hidráulico es insensible a la estructura del dipolo si la intensidad se mantiene constante, pero el campo cercano se distorsiona notablemente según sean la separación 2m entre fuente y sumidero y el caudal q de emisión - absorción, así permanezca fija la intensidad qm del campo. Aquí se analizan esas distorsiones de campo cercano y se obtiene la forma general de la superficie impermeable de cada estructura interpuesta ante una corriente uniforme. Para m = 0 resulta la circunferencia clásica, para m pequeño resultan elipses, a medida que m crece aparecen óvalos de Cassini, luego óvalos con talle, y en el límite, cuando m = 1, aparece una lemniscata. Para m > 1, en esta representación normalizada, la fuente y el sumidero actúan separadamente y no pueden formar un campo dipolar único.

ABSTRACT

The far field of a hydraulic doublet (or dipole) is insensitive to the dipole's structure if its strenght remains fixed, but the near field is notably distorted according to the specific values of the separation between source and sink (2m) and the emission absorption flow per unit lenght (q), even if the strenght (qm) remains fixed. We studied the kinds of distortions associated to the closer field, and obtained the general equation of the non-wet surface for any structure immersed into uniform flow. For m = 0 the classical circumference appears, for small m ellipses appear, as m grows, Cassini ovals appear first, then waist ovals, and in the limit when m = 1, a lemninscata is formed. For m>1, the source and the sink act separately (in this normalized representation) and they can not form a unique dipolar field.

1. EL PROBLEMA

Se superponen una fuente y un sumidero lineales, de intensidades ± q, distantes una distancia 2m en una corriente uniforme que se mueve en dirección paralela a la de la línea FS que va de fuente a sumidero, con velocidad U. Se busca hallar la superficie impermeable sin asumir como es usual, que m << r, sino solamente que m ~ O(r) ya que la superficie debe envolver ó encerrar el sistema fuente - sumidero y, en general, debe desarrollarse en la vecindades del dipolo. En particular, se trata de examinar el comportamiento de la superficie impermeable para valores de m variando entre 0 y $R = \sqrt{qm/\pi U} = 1$ (análisis normalizado para intensidad $qm = \pi$, y velocidad $U = 1$).

2. LA SOLUCIÓN ANALÍTICA DE PRIMERA APROXIMACIÓN

El cálculo de la función de corriente se realiza por superposición de las funciones de la corriente lineal, el sumidero lineal, y la corriente uniforme. En la Figura 1 se muestra el sistema de coordenadas empleado.

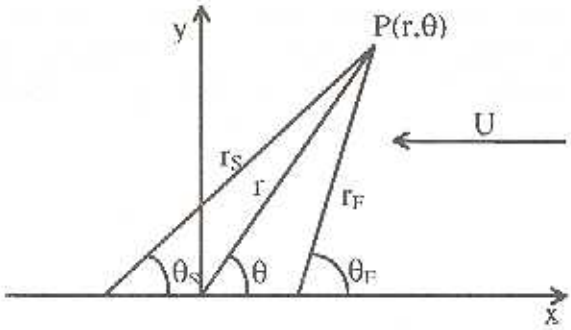

Figura 1. Las coordenadas.

$$\Psi_{FL} = \frac{-q}{2\pi}\,\theta_F$$

$$\Psi_{SL} = \frac{+q}{2\pi}\,\theta_S$$

$$\Psi_{CU} = U\,r\,\text{sen}\,\theta$$

con $\theta = 0$ para las líneas $\Psi = 0$ de la superposición, $\pi \geq \theta \geq -\pi$ como dominio angular. Entonces,

$$\Psi_{FL+SL+CU} = \frac{-q}{2\pi}\left(\theta_F - \theta_S\right) + U\,r\,\text{sen}\,\theta$$

y la línea impermeable debe ser la $\Psi = 0$ diferente del eje ± OX en que Ψ es nulo desde el principio. La línea impermeable tiene pues por ecuación

$$\frac{q}{2\pi U}\left(\theta_F - \theta_S\right) = r\,\text{sen}\,\theta \qquad (1)$$

$$\theta_F - \theta_S \neq 0$$

Se precisa obtener $\theta_F - \theta_S$ en términos de r, θ, m.

Con alguna trigonometría se obtiene que

$$\theta_F - \theta_S = \text{sen}^{-1}\frac{\dfrac{2\dfrac{m}{r}\,\text{sen}\,\theta}{1-\dfrac{m^2}{r^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2\dfrac{m}{r}\,\text{sen}\,\theta}{1-\dfrac{m^2}{r^2}}\right)^2}} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene la solución más general posible. La expansión en serie (3), aplicada a $w = \theta_F - \theta_S$ nos resuelve el problema.

$$\text{sen}^{-1} w = w + \frac{1}{2}\frac{w^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{w^5}{5} + \cdots \qquad (3)$$

Aquí parece razonable tomar sólo el primer término de la serie, ya que si m < r, $m^3/r^3 \to 0$, etc. Con este supuesto, en (1), y tras reordenar,

$$r^2 = R^2\left(1 - \frac{4m^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta}{R^4}\right)^{1/2} + m^2 \qquad (4)$$

Esta es la solución de primera aproximación. Con algunas transformaciones, esto es también

$$r^2 = m^2\cos 2\theta \pm \sqrt{m^4\cos^2 2\theta + R^4 - m^4} \qquad (5)$$

que identifica un óvalo de Cassini de parámetros R y m, como solución general de primera aproximación. Si m = 0, r = R, como se ve fácil en (4) ó (5) pero no en (1). Esta es la conocida solución de orden cero, caso particular de la que hallamos; para m pequeño, la solución de primera aproximación prevé rasgos de elipse, con semiejes

$$a \cong \sqrt{R^2 + m^2} \text{ y } b \cong \sqrt{R^2 - m^2} \text{ si } m \to 0.$$

En coordenadas cartesianas la ecuación de la superficie impermeable será

$$x^2 + y^2 = R^2\sqrt{1 - \frac{4m^2 y^2}{R^4}} + m^2 \qquad (6)$$

ó bien

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2m^2\left(x^2 - y^2\right) = R^4 - m^4 \qquad (7)$$

que identifica al óvalo de Cassini. Si m crece, pero sin ser mayor que $R/\sqrt{2}$, se conserva muy aproximadamente el patrón elíptico, con los semiejes como arriba; si $m = R/\sqrt{2}$, la forma es la misma, pero la curvatura en los puntos B y D es nula (Figura 2).

Si m está en el intervalo $\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}, R\right)$, la curva resultante se llama un óvalo con talle (Figura 3); las intersecciones con los ejes $\pm$ OX, $\pm$ OY, son, como antes, $\pm\sqrt{R^2 + m^2}$ y $\pm\sqrt{R^2 - m^2}$, pero el óvalo muestra tres máximos (uno relativo y dos absolutos), con coordenadas:

$$B, D\left(0, \pm m\right)$$

y

$$E, G, K, I\left(\frac{\pm\sqrt{4m^4 - R^4}}{2m}, \frac{\pm R^2}{2m}\right)$$

Hay también cuatro puntos de inflexión, con coordenadas:

$$P, L, M, N\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}(p - t)}\ ,\ \pm\ \sqrt{\frac{1}{2}(p + t)}\right)$$

con

$$p = \sqrt{\frac{R^4 - m^4}{3}}$$

y

$$t = \frac{R^4 - m^4}{3m^2}$$

Si m = R, un poco de álgebra en (4), (5) y siguientes produce, para tal caso, la superficie impermeable

$$R = \sqrt{2}\,R\sqrt{|\cos 2\theta|} \qquad (8)$$

Una lemniscata con punto focal en el origen! Si m > R la solución pierde sentido físico y matemático, fuente y sumidero serán incapaces de actuar como un dipolo.

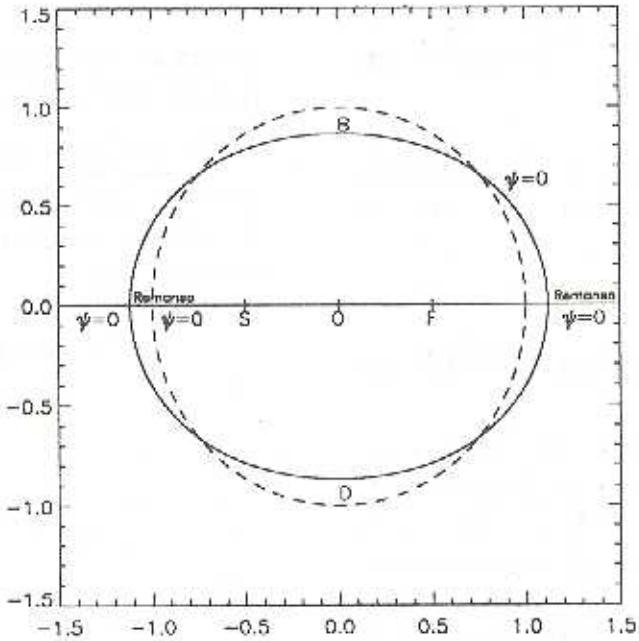

FIGURA 2. Elipses, m << r

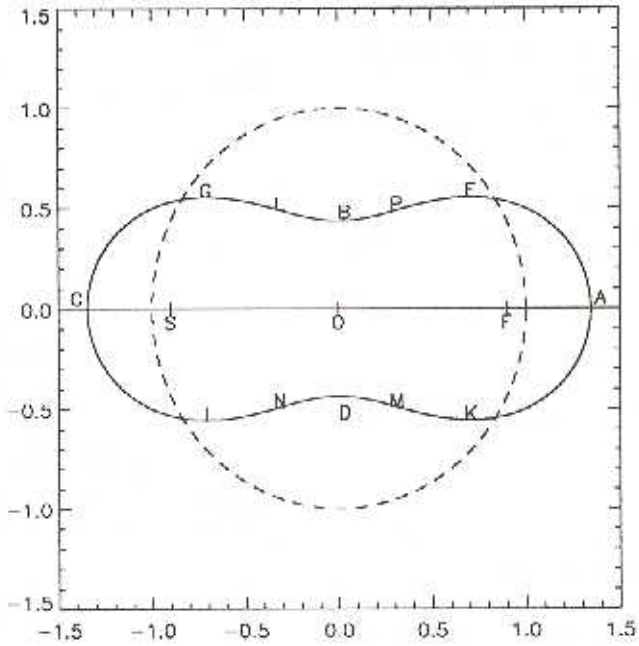

FIGURA 3. Óvalos con talle, $\frac{R}{\sqrt{2}} < m < 1$

3. LA SUPERFICIE IMPERMEABLE VARÍA EN FUNCIÓN DE LA SEPARACIÓN FS = 2m

En la Figura 4 se presenta la evolución de la superficie impermeable desde la circunferencia límite (m = 0) hasta la lemniscata (m = R = 1), pasando por elipses, óvalos, y óvalos con talle. Los cambios dependen enteramente del parámetro de separación m. En rigor, ante lo que se deduce parece claro que hasta en el campo lejano deberían detectarse aspectos de la estructura de dipolos, aún si son de igual intensidad. Pero en la Figura 5 se presenta el campo de líneas de corriente para seis dipolos de igual intensidad: las distorsiones del campo lejano son apenas perceptibles, en cambio las del campo cercano son evidentes. Parece suficiente, por ahora, que nos conformemos con lo expuesto: la geometría de la superficie impermeable ante una corriente uniforme basta para conocer la estructura del dipolo encerrado dentro de ella. En aparatos Hele Shaw esto puede examinarse con mucha comodidad.

Estos análisis muestran por qué es imposible dibujar por superposición la red de flujo de tal forma que la superficie impermeable sea el círculo de la aproximación cero. El parámetro m no puede ser cero para que la red surja por superposición: resultan elipses, y el dibujante que duda de su habilidad ante ese resultado, bien haría si estudiara el campo bajo la primera aproximación: los semiejes de su elipse impermeable le dirían si su dibujo fue preciso, pues le darían R y m después de todo el proceso de superposición: así sabría si se propagaron errores de dibujo en la red obtenida y en qué magnitud exactamente.

REFERENCIAS

1. **BRONSTEIN, I., Y SEMENDIAEV, K.** Manual de matemáticas para ingenieros y Estudiantes, Versión española de Inés Harding Rojas, profesora de matemáticas superiores. Moscú: 3a. edición, Editorial MIR, 1977. 696 p.

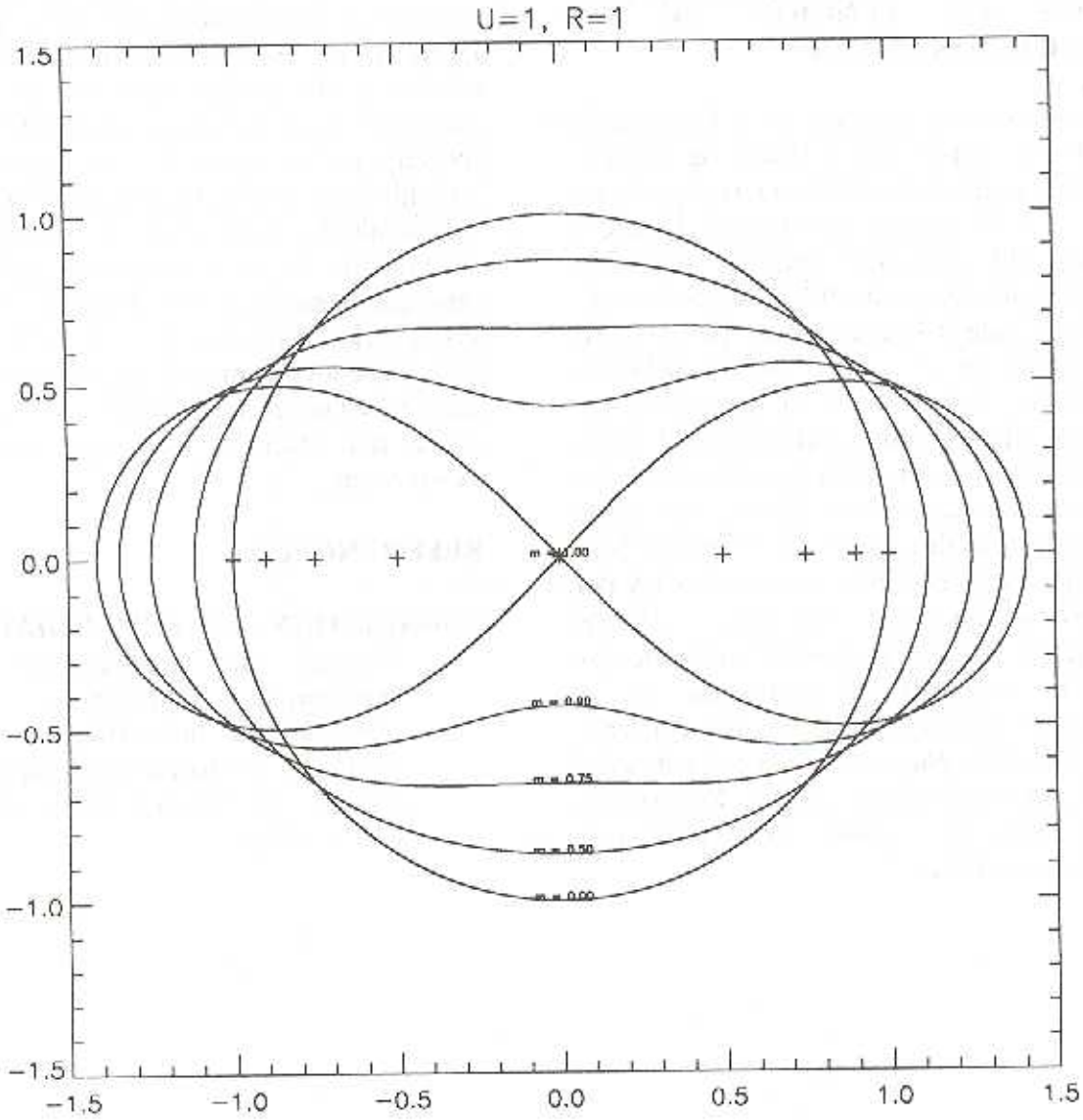

FIGURA 4. Superficies impermeables de dipolos de igual intensidad, según sea la separación 2m de la fuente y el sumidero. La lemniscata límite (m = 1) y el círculo límite (m= 0) no tienen ningún significado físico preciso, aunque se llega a contornos muy próximos. El valor $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ produce un óvalo de Cassini típico (Aquí no dibujado).

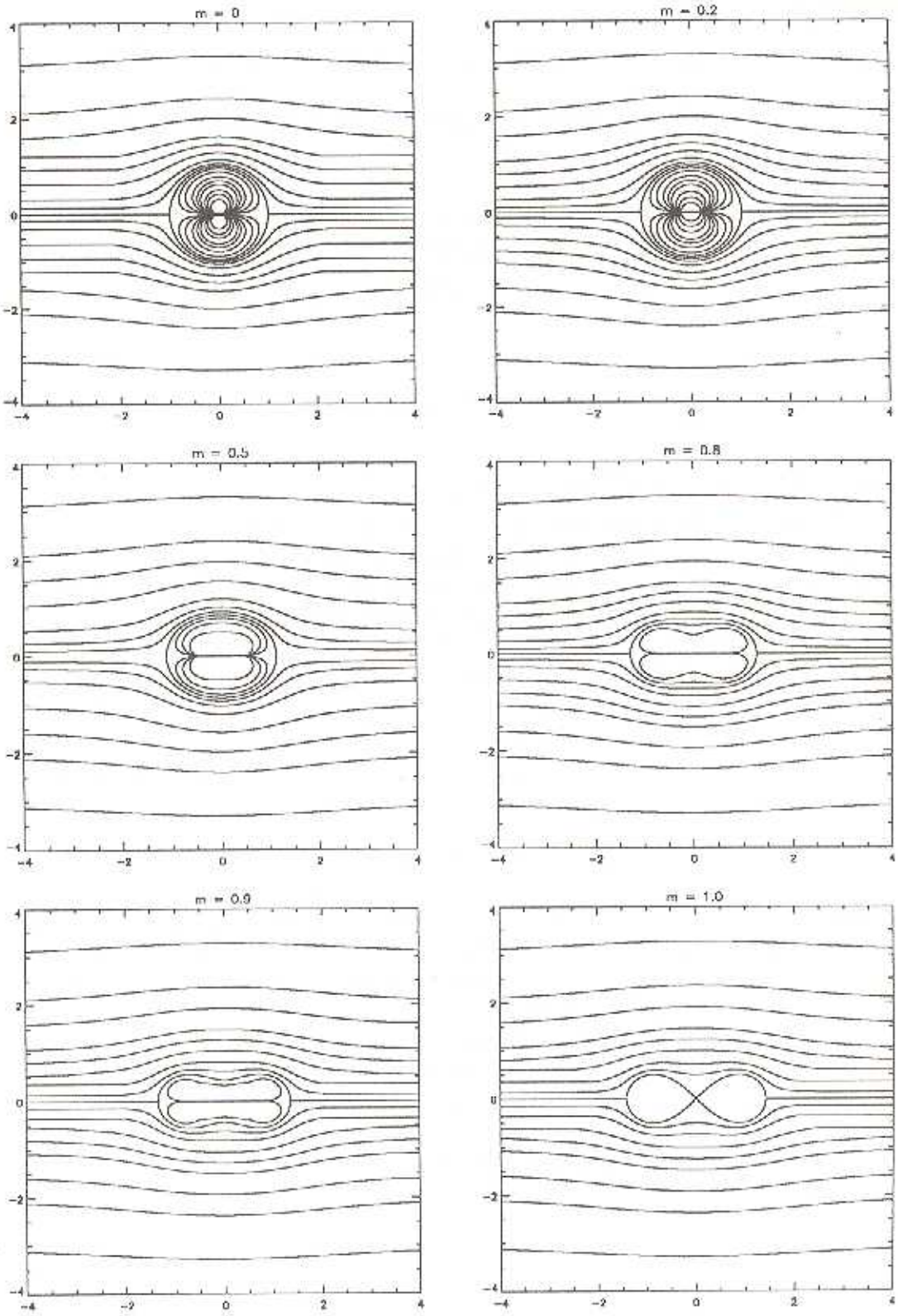

FIGURA 5. Patrón de líneas de corriente para flujos en torno de dipolos de diversa estructura e igual intensidad.