Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias

Control del enredamiento atómico mediante el efecto Stark dinámico generado en una cQED

T E S I S

para obtener el grado de Magister en ciencias - Física

Autor:
Omar Calderón Losada

Directora:
Karen Milena Fonseca Romero

Ciudad Universitaria, Bogotá, 2010

A mi madre, mi florecita y mis hermanas, haber terminado este trabajo es el mejor homenaje que puedo hacerles, ellas son mi motor de vida y mi razón para salir siempre adelante.

Resumen

Se estudia un método para generar enredamiento entre dos átomos que atraviesan secuencialmente una cavidad cuántica electrodinámica (cQED) mediante interacciones átomo-campo en las que se intercambian un fotón o dos fotones.

Se analizan las condiciones bajo las cuales es válido el hamiltoniano para el caso de intercambio de dos fotones, que se construye empleando la teoría de perturbaciones independiente del tiempo.

Se muestra que, cuando dos átomos que atraviesan secuencialmente el campo de una cavidad, inicialmente en un estado de Fock, se preparan en sus estados excitados, existe un valor máximo de enredamiento entre los dos átomos. Este valor es independiente del número de fotones de intercambio entre el átomo y el campo, pero puede ajustarse cambiando los tiempos de interacción de cada átomo con la cavidad. Se concluye que el enredamiento átomo-átomo generado por la interacción con una cavidad presenta un comportamiento universal, en el sentido de que no se obtiene más enredamiento solamente por considerar un mayor número de fotones de intercambio.

Adicionalmente, se encuentran los valores de los parámetros para que el estado atómico quede preparado, después de las interacciones con el campo, en un estado con un valor dado de enredamiento. En particular, se establece un régimen para la elección de los parámetros físicos que hacen posible tener el máximo enredamiento entre los átomos. En el caso disipativo se identifican los tiempos de interacción que generan estados más robustos en el sistema.

Palabras clave: Control del enredamiento, Efecto Stark dinámico, cQED.

Abstract

A method to generate entanglement between two atoms which sequentially cross a quantum electrodynamics cavity (cQED), through an interaction with the field in which one or two-photons are exchanged, is studied. The validity conditions of the two-photon Hamiltonian, built employing the time-independent perturbation theory, are discussed.

When two atoms, which traverse sequentially the cavity, are prepared in their excited states and interact with an initially empty electromagnetic field, there is a maximum value of atomic entanglement. This value, which does not depend on the number of photons exchanged, depends on the interaction times of each atom with the cavity field. We conclude that the atom-atom entanglement generated by interaction with a cavity has a universal behavior, in the sense that no entanglement is gained only by considering a larger number of photons exchanged. Additionally, the parameter values to prepare an atomic state —after interaction with the field— with a given degree of entanglement, are discussed. In particular, a choice of physical parameters that provides maximum atomic entanglement is identified. In the dissipative case the interaction times of interaction that generate more robust states in the system, are identified.

Keywords: Control of entanglement, Dynamic Stark effect, cQED.

Agradecimientos

A la profesora Karen Milena, por su paciencia inagotable. Sin su apoyo y sus palabras de ánimo no hubiese podido contra mis propios miedos y limitaciones. Al profesor Rafael que siempre estuvo presente para guiarme, incluso más allá de lo académico, sus consejos siempre serán bienvenidos. A mis amigos del grupo de Óptica Cuántica, Elvis, Richard, Carlos y Claudia, compañeros de mil batallas que empezaron conmigo esta travesía, su amistad es el mejor regalo que me trajo esta experiencia.

Tabla de Contenidos

1. Interacción de la radiación con la materia **5**

1.1. Modelo de Jaynes-Cummings y procesos de un sólo fotón 6

1.2. Modelo de Jaynes-Cummings y procesos de dos fotones 16

2. Enredamiento y decoherencia en sistemas cuánticos **21**

2.1. El enredamiento y su medida 23

2.1.1. Enredamiento de formación y concurrencia. 24

2.1.2. Criterio Peres-Horodecki. La transpuesta parcial positiva y la negatividad. 25

2.2. Decoherencia en los sistemas cuánticos 26

2.2.1. Tratamiento formal de la decoherencia. La ecuación maestra. 26

3. Control del enredamiento atómico generado vía una cQED **29**

3.1. Procesos de dos fotones. Modelo efectivo de dos niveles 31

3.2. Hamiltoniano adimensional 33

3.2.1. Fidelidad del modelo 34

3.3. Modelo general de interacción 38

3.3.1. El sistema de estudio y la dinámica 39

3.3.2. Dinámica del enredamiento 40

3.4. Efectos de la disipación sobre el enredamiento atómico 47

4. Conclusiones y perspectivas **51**

4.1. Conclusiones 51

4.2. Perspectivas 52

A. Derivación del hamiltoniano efectivo **55**

B. Ecuación de movimiento con disipación **59**

Índice de figuras

1.1. Un átomo en una cavidad representado como un sistema de dos niveles. . . 11

1.2. Dobletes de energía del sistema átomo-campo. 12

1.3. Variación de las energías asociadas a los estados vestidos y los estados desnudos en función de la desintonía. 14

1.4. Corrimiento en las energías del sistema átomo-campo en una interacción dispersiva, *efecto Stark dinámico*. 15

1.5. Representación esquemática de un átomo de tres niveles que interacciona con dos fotones de frecuencia ω. 17

1.6. Un átomo de tres niveles en interacción con un campo resonante $\omega_{eg} = 2\omega_c$ 17

1.7. Energías asociadas a los estados desnudos del sistema átomo-campo 18

3.1. Fidelidad y razón de participación. 35

3.2. Sistema de estudio 39

3.3. Concurrencia atómica cuando hay un intercambio de dos fotones con la cavidad. 41

3.4. Comportamiento de la concurrencia átomo-átomo para el proceso de un sólo fotón. 42

3.5. Comparación del grado de enredamiento que se logra en el proceso de uno y de dos fotones. 44

3.6. Dinámica del enredamiento por pares en un proceso de dos fotones. 45

3.7. Dinámica del enredamiento por pares en el proceso de dos fotones, otras condiciones. 46

3.8. Concurrencia máxima alcanzada en los dos primeros ciclos de enredamiento atómico. 48

3.9. Comparación del cambio en el valor máximo de concurrencia del primer ciclo de enredamiento. 49

Introducción

La formalización de la teoría cuántica en los inicios del siglo XX trajo consigo una serie de elementos completamente "extraños" desde la perspectiva clásica de la descripción de la naturaleza, entre ellos *la superposición de estados* y con este *el enredamiento* entre estados de sistemas multipartitos. Este último fenómeno (el de enredamiento) suscitó una controversia enorme hasta el punto de poner en tela de juicio la teoría cuántica. Sin embargo, los experimentos le dieron la razón.

El enredamiento cuántico se entiende hoy como el concepto que caracteriza la presencia de correlaciones muy fuertes entre dos o más partes de un sistema físico, que no pueden lograrse mediante procesos clásicos locales; se considera la clave que permite distinguir la teoría de la información cuántica de la clásica, y juega un papel importante en la computación y el procesamiento de información cuántica [1]. Durante los últimos años se ha notado un aumento en los esfuerzos por caracterizar las propiedades cualitativas y cuantitativas del enredamiento y su aplicación, con el objeto de encontrar formas de generarlo y controlarlo; se podría decir que el estudio de las propiedades dinámicas del enredamiento es el motor del procesamiento de información cuántica.

Como resultado de la investigación intensa en el campo de la computación cuántica se han producido un variedad de métodos para *distribuir* enredamiento bipartito, utilizando por ejemplo canales fotónicos (pares de fotones [2, 3], cavidades con pérdidas [4, 5]) o canales atómicos (iones atrapados [6, 7]). Sin embargo, la falta de una comprensión más completa de las propiedades del enredamiento para estados mezclados en sistemas multipartitos de muchos "niveles" no permite concluir aún cuál es la forma óptima de distribuir enredamiento entre partes distantes. Entre los estudios que se interesan por estos temas se encuentran resultados que muestran que es posible crear enredamiento entre dos sistemas distantes que no interaccionan directamente sino que lo hacen a través de un sistema común, como un campo, un entorno o un dispositivo de medida [8–10]. En particular, la generación de estados enredados en un sistema de dos átomos no interactuantes, reviste un interés especial, toda vez que este tipo de átomos pueden representar los *qubits* (o bits cuánticos), que en últimas son los elementos esenciales para la implementación de los protocolos de procesamiento de información.

Una de las primeras propuestas para la generación de enredamiento entre átomos fue hecha por Cirac y Zoller [8], ellos aprovecharon la formación de enredamiento en la interacción fotón-átomo para la generación subsecuente de correlaciones entre átomos separados espacialmente, se ha mostrado ampliamente que esta idea es completamente válida utilizando el *micromaser*[1] con procesos de absorción y emisión de uno y dos fotones en una transición atómica [11–13].

Las investigaciones realizadas con procesos multifotónicos han mostrado algunos fenómenos "interesantes", por ejemplo, una estadística de fotones fuertemente sub-poissoniana que se incrementa con el número de fotones [14] y que además en este tipo de procesos se induce un corrimiento por efecto Stark en los niveles de energía de los átomos relacionado con la magnitud del campo eléctrico de la radiación dentro de la cavidad [15]. Estas características han llamado nuestra atención (y la de algunos otros autores [16–19]) sobre la forma cómo el tipo de interacción en la cavidad (uno o dos fotones), el tiempo de interacción y el efecto Stark afectan el enredamiento atómico en un intento por proponer una forma de generación y control de enredamiento entre qubits en tiempo real como lo requieren los protocolos de procesamiento de información.

Cabe resaltar los objetivos que nos propusimos en este trabajo, el primero de ellos fue el de construir un modelo para describir la interacción átomo-campo con procesos de segundo orden de dos fotones y con él estudiar la dinámica de dos átomos que atravesaban secuencialmente una cavidad sin pérdidas; el segundo objetivo fue el de calcular el grado de enredamiento atómico y determinar los parámetros físicos que producían su variación; como tercer objetivo nos propusimos comparar el grado de enredamiento atómico cuando se tienen procesos de uno y dos fotones y por último exploramos la posibilidad de controlar el enredamiento de los átomos que interactuaban vía una cavidad con disipación, mediante la variación de los parámetros físicos ya identificados.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo 1 se encuentran los conceptos fundamentales para el estudio de la interacción de la radiación y la materia; allí se hace también una discusión sobre la introducción del efecto Stark dinámico y del modelo efectivo que describe un proceso de dos fotones en resonancia. El capítulo 2 está dedicado al estudio de lo que se entiende hoy día en enredamiento y decoherencia, cómo se modela y cómo se cuantifica. El capítulo 3, contiene los aportes de este trabajo: iniciamos con la construcción del modelo efectivo de interacción radiación-materia en procesos de segundo orden de dos fotones fuera de resonancia y discutimos las realizaciones experimentales, condiciones y suposiciones, ventajas y desventajas del tratamiento utilizado; calculamos el enredamiento atómico en el caso de una interacción con una cavidad ideal y también con una cavidad con pérdidas e identificamos los parámetros que controlan el enredamiento. Este capítulo

[1] Debido a que los tiempos de vida de un fotón en la cavidad pueden ser más largos que los tiempos de vida en el espacio libre, esto asegura que la "memoria" del enredamiento entre el átomo y el campo, pueda influenciar la interacción entre los átomos subsiguientes y el campo e inducir correlaciones no-locales entre átomos sucesivos [12].

también presenta de forma resumida los principales resultados junto con las perspectivas para una investigación futura.

Capítulo 1

Interacción de la radiación con la materia

El estudio de la interacción de la luz y los átomos fue esencial en el desarrollo de la teoría cuántica en la primera mitad del siglo XX. En particular, la construcción progresiva de la teoría de la luz ha pasado por tres enfoques diferentes para modelar su interacción con la materia. El primero de ellos fue el de la *física clásica* en el cual la luz se concibe como ondas electromagnéticas y los átomos como dipolos clásicos, después se desarrolló el tratamiento *semi-clásico* que aplica la teoría de la mecánica cuántica a los átomos, pero la luz sigue siendo una onda electromagnética y más recientemente el modelo *completamente cuántico* que considera la luz como fotones y la materia cuantizada; este último enfoque es lo que se conoce como **óptica cuántica**. La teoría semi-clásica sigue siendo utilizada en muchos propósitos, aunque en general los resultados experimentales sean más consistentes con las predicciones de la óptica cuántica

La realización experimental de algunos de los fenómenos cuánticos (ópticos) se ha llevado a cabo en *cavidades cuánticas electrodinámicas* (cQEDs por sus siglas en inglés), en las cuales los átomos que las atraviesan interaccionan fuertemente con uno de los modos de la radiación confinada en la cavidad. Este tipo de dispositivos han llegado a ser la herramienta predilecta para probar desde los fundamentos de la mecánica cuántica, los procesos de emisión y absorción tanto de uno como de dos fotones por transiciones atómicas hasta la generación de estados gato de Schrödinger y del enredamiento cuántico.

En este capítulo se discutirá la construcción del modelo completamente cuántico, partiendo de una breve revisión de la cuantización del campo electromagnético y el acoplamiento entre campos y cargas; las principales aproximaciones que se hacen y las fenómenos que se presentan en la interacción resonante y dispersiva para procesos de uno y dos fotones.

1.1. Modelo de Jaynes-Cummings y procesos de un sólo fotón

Un modo de campo electromagnético confinado en una cavidad que no interacciona con otros sistemas o grados de libertad se describe mediante el Hamiltoniano [20]

$$\widehat{H} = \hbar\omega_c \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\right), \tag{1.1}$$

en el que los operadores $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ se conocen como los operadores de creación, destrucción y número de fotones respectivamente y ω_c es la frecuencia angular del modo de campo confinado.

El operador de campo eléctrico en el punto $\boldsymbol{r}$ dentro de la cavidad es una combinación lineal de los operadores de creación y destrucción que puede escribirse en la imagen de Heisenberg como [21]

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{r},t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_0 V}} \left(\boldsymbol{\epsilon}_c f(\boldsymbol{r})\hat{a}e^{-i\omega_c t} + \boldsymbol{\epsilon}_c^* f^*(\boldsymbol{r})\hat{a}^\dagger e^{i\omega_c t}\right), \tag{1.2}$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}_c$ es un vector unitario que describe la polarización del campo en $\boldsymbol{r}$ y f es una función escalar con valor máximo 1 que tiene información del perfil de campo dentro de la cavidad.

En muchas situaciones, la variación espacial del campo sobre las dimensiones del sistema atómico que interacciona con él llega a ser despreciable. Por ejemplo, la longitud de onda óptica $\lambda_{\text{óptica}}$ es del orden de muchos cientos de angströms

$$\frac{\lambda_{\text{óptica}}}{2\pi} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \gg |\boldsymbol{r}_{\text{átomo}}|, \tag{1.3}$$

es decir, mucho mayor que $|\boldsymbol{r}_{\text{átomo}}|$ el tamaño característico del átomo. Bajo esta condición se tiene que

$$f(\boldsymbol{r}) \approx 1, \tag{1.4}$$

y la ecuación (1.2) se reduce a

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\boldsymbol{r},t) &\approx \widehat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(t) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_0 V}} \left(\boldsymbol{\epsilon}_c \hat{a}e^{-i\omega_c t} + \boldsymbol{\epsilon}_c^* \hat{a}^\dagger e^{i\omega_c t}\right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Esta aproximación se conoce como *aproximación dipolar* y tiene además otras implicaciones sobre el modelo que describe la interacción de una carga con dicho campo como se ve a continuación.

Acoplando campos y cargas

Primero consideremos un electrón libre de carga q y masa m, cuyos operadores de posición y momento son $\widehat{\boldsymbol{R}}$ y $\widehat{\boldsymbol{P}}$, que se acopla con un modo de campo electromagnético descrito en la imagen de Schrödinger por su potencial vectorial $\widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})$. Despreciando los efectos magnéticos vinculados con el espín del electrón, el Hamiltoniano de este sistema en el calibre de Coulomb[1] es [20]

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{ec} &= \hbar\omega_c\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2\right)+\frac{1}{2m}[\widehat{\boldsymbol{P}}-q\boldsymbol{A}(\widehat{\boldsymbol{R}})]^2 \\ &= \hbar\omega_c\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2\right)+\frac{\widehat{\boldsymbol{P}}^2}{2m}-\frac{q}{2m}\left[\widehat{\boldsymbol{P}}\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}(\widehat{\boldsymbol{R}})+\widehat{\boldsymbol{A}}(\widehat{\boldsymbol{R}})\cdot\widehat{\boldsymbol{P}}\right]+\frac{q^2}{2m}\widehat{\boldsymbol{A}}^2(\widehat{\boldsymbol{R}}).\end{aligned} \tag{1.6}$$

Examinando el desarrollo de esta expresión se distingue la contribución libre de la partícula y el campo $\hbar\omega_c\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2\right)+\widehat{\boldsymbol{P}}^2/2m$ de los términos que dependen de q, que combinan observables de ambos subsistemas y que describirían por tanto el acoplamiento entre ellos.

Ahora consideremos un electrón ligado a un átomo hidrogenoide que se mueve en una pequeña región del espacio con dimensiones lineales del orden del radio de Bohr a_0. El Hamiltoniano electrónico libre es entonces $\widehat{\boldsymbol{P}}^2/2m+V(\widehat{\boldsymbol{R}})$ donde $V(\boldsymbol{r})$ es el potencial de Coulomb en el punto $\boldsymbol{r}$ producido por el núcleo situado en el origen. El acoplamiento entre el electrón y el campo aún se puede describir por los términos dependientes de q en el Hamiltoniano (1.6).

El momento del electrón es del orden de $\hbar/a_0$ y la razón entre los valores esperados de los términos de $\widehat{H}_{ec}$ proporcionales a q y q^2 es del orden de $\xi=\hbar/(qa_0A)$. En un proceso de absorción o emisión de fotones resonante o casi resonante ξ es igual a la razón entre la energía de transición atómica $\hbar\omega_c$ y la energía de polarización qa_0E del átomo en el campo de radiación ($\xi=\hbar\omega_c/(qa_0E)$). Esta razón es muy pequeña, a menos que el campo sea tan intenso que se produzcan fuertes cambios en los niveles energéticos del átomo, situación que no se considera en este tratamiento. De esta forma se puede despreciar el cuarto término en la ecuación (1.6) y escribir el Hamiltoniano de interacción electrón-campo como

$$\widehat{H}_{ec}^{int}\approx-\frac{q}{2m}\left[\widehat{\boldsymbol{P}}\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}(\widehat{\boldsymbol{R}})+\widehat{\boldsymbol{A}}(\widehat{\boldsymbol{R}})\cdot\widehat{\boldsymbol{P}}\right]=-\frac{q}{m}\widehat{\boldsymbol{P}}\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}(\widehat{\boldsymbol{R}}), \tag{1.7}$$

donde usamos la propiedad de conmutación entre $\widehat{\boldsymbol{R}}$ y $\widehat{\boldsymbol{P}}$ que resulta de la relación que define el calibre de Coulomb, $\nabla\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}=0$ ($\nabla\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}=\widehat{\boldsymbol{P}}\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}$).

De la ecuación (1.6) y mediante una transformación de calibre [20, 22] que no discutimos aquí se obtiene que la interacción electrón-campo también puede ser escrita como

$$\widehat{H}_{ec}^{\text{dipolar}}=-\hat{\boldsymbol{d}}\cdot\widehat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}, \tag{1.8}$$

[1] En el calibre de Coulomb, el campo, lejos de sus fuentes, se describe por un potencial vectorial libre de divergencia, es decir $\nabla\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}=0$. El potencial escalar de este campo es despreciable.

una expresión que involucra el producto escalar entre el campo eléctrico aplicado en el núcleo con el operador dipolar atómico

$$\hat{\boldsymbol{d}} = q\widehat{\boldsymbol{R}}, \tag{1.9}$$

que es válida sólo en el límite $a_0 \ll \lambda_{\text{óptica}}$ (consistente con la condición (1.3) de la aproximación dipolar).

La interacción de un campo de radiación $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ con un átomo de un sólo electrón se describe por el siguiente Hamiltoniano en la aproximación dipolar

$$\widehat{H} = \widehat{H}_a + \widehat{H}_c - \hat{\boldsymbol{d}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}. \tag{1.10}$$

Aquí, $\widehat{H}_a$ y $\widehat{H}_c$ son las energías del átomo y el campo respectivamente, en ausencia de interacción. Cabe resaltar nuevamente que en la aproximación dipolar el campo se supone uniforme sobre el átomo. La energía libre para un sólo modo del campo confinado viene dada por la ecuación (1.1).

Vamos a expresar $\widehat{H}_a$ y $\hat{\boldsymbol{d}}$ en términos de los operadores de transición atómicos

$$\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle \langle j| , \tag{1.11}$$

en donde $\{|i\rangle\}$ representa un conjunto completo de estados propios atómicos, es decir $\sum_i |i\rangle \langle i| = 1$ y que además cumple con $\widehat{H}_a |i\rangle = E_i |i\rangle$, luego

$$\widehat{H}_a = \sum_i E_i |i\rangle \langle i| = \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii}. \tag{1.12}$$

También se tiene que

$$\hat{\boldsymbol{d}} = \sum_{i,j} |i\rangle \langle i| \hat{\boldsymbol{d}} |j\rangle \langle j| = \sum_{i,j} \boldsymbol{d}_{ij} \hat{\sigma}_{ij}, \tag{1.13}$$

donde $\boldsymbol{d}_{ij} = \langle i| \hat{\boldsymbol{d}} |j\rangle$ es el elemento de matriz de transición dipolar[2].

El operador de campo eléctrico evaluado en la aproximación dipolar en la posición del átomo está dado por la ecuación (1.5). Para el siguiente análisis, por simplicidad, vamos a tomar una base de polarización lineal para el campo de tal forma que el vector unitario sea real, de forma que definiendo $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\varepsilon_0 V}}$, el campo en la imagen de Schrödinger se escribe

$$\widehat{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \boldsymbol{\epsilon}\mathcal{E}_0 \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right). \tag{1.14}$$

[2]La evaluación de estos elementos de matriz conduce a la noción de *reglas de selección*, que corresponden a condiciones sobre los números cuánticos de los estados inicial y final del átomo para que el elemento de matriz dipolar no sea cero. Las transiciones que obedecen estas reglas de selección se llaman transiciones *permitidas*.

Ahora reemplazamos en el Hamiltoniano (1.10) las definiciones dadas en (1.12), (1.13) y (1.14) para obtener

$$\widehat{H} = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_i E_i \hat{\sigma}_{ii} + \hbar \sum_{i,j} \mathcal{G}_{ij} \hat{\sigma}_{ij} \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \right), \tag{1.15}$$

donde

$$\mathcal{G}_{ij} = -\frac{\boldsymbol{d}_{ij} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathcal{E}_0}{\hbar}. \tag{1.16}$$

Cuando la frecuencia de la radiación coincide o está muy cerca de una de las transiciones ópticas del átomo, este se considera un sistema de dos niveles cuyo estado excitado $|e\rangle$ se conecta al estado que llamaremos base $|g\rangle$ por medio de una *transición dipolar* (*permitida*) a una frecuencia angular

$$\omega_{eg} = (E_e - E_g)/\hbar, \tag{1.17}$$

es más puede mostrarse que prácticamente no hay transferencia de población hacia otros estados atómicos que no sean resonantes o casi resonantes con esta frecuencia de transición.

Para $\boldsymbol{d}_{eg} = \boldsymbol{d}_{ge}$ escribimos

$$\mathcal{G}_{eg} = \mathcal{G}_{ge} \equiv \lambda. \tag{1.18}$$

El Hamiltoniano que se obtiene es

$$\widehat{H} = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + (E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_g \hat{\sigma}_{gg}) + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_{eg} + \hat{\sigma}_{ge}) \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \right). \tag{1.19}$$

El segundo término del Hamiltoniano anterior puede reescribirse

$$(E_e \hat{\sigma}_{ee} + E_g \hat{\sigma}_{gg}) = \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg} (\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}) + \frac{1}{2}(E_e + E_g) \tag{1.20}$$

utilizando la frecuencia (1.17) y la nueva relación de clausura $\hat{\sigma}_{ee} + \hat{\sigma}_{gg} = 1$. La constante de energía $(E_e + E_g)/2$ puede ignorarse. Pero, si introducimos la notación

$$\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg} = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \tag{1.21a}$$

$$\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_{eg} = |e\rangle\langle g| \tag{1.21b}$$

$$\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{ge} = |g\rangle\langle e| \tag{1.21c}$$

el Hamiltoniano (1.19) toma la forma

$$\widehat{H} = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg} \hat{\sigma}_z + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \right). \tag{1.22}$$

La evolución libre de los operadores del campo $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ puede escribirse como

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0) e^{-i\omega_c t} \tag{1.23a}$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0) e^{i\omega_c t} \tag{1.23b}$$

y similarmente, la de los operadores atómicos

$$\hat{\sigma}_{\pm}(t) = \hat{\sigma}_{\pm} e^{\pm i\omega_{eg} t}. \tag{1.24}$$

Así, las dependencia temporal de los cuatro términos que resultan de expandir el producto en el tercer término de la ecuación (1.22) es aproximadamente,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{+}\hat{a} &\sim e^{i(\omega_{eg}-\omega_c)t} \\ \hat{\sigma}_{-}\hat{a}^{\dagger} &\sim e^{-i(\omega_{eg}-\omega_c)t} \\ \hat{\sigma}_{+}\hat{a}^{\dagger} &\sim e^{i(\omega_{eg}+\omega_c)t} \\ \hat{\sigma}_{-}\hat{a} &\sim e^{-i(\omega_{eg}+\omega_c)t}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Cuando $|\omega_{eg} - \omega_c| \ll \omega_{eg} + \omega_c$ los últimos dos términos cambian mucho más rápido que los dos primeros. En particular, el término de la forma $\hat{\sigma}_{-}\hat{a}^{\dagger}$ corresponde al proceso de emisión de un fotón al tiempo que el átomo hace una transición del estado excitado al estado base, mientras que el término $\hat{\sigma}_{+}\hat{a}$ describe el proceso contrario. Ambos procesos conservan la energía. Por otra parte tenemos el término $\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{+}$ en el cual el átomo pasa del estado base al excitado produciendo un fotón, como resultado el sistema tiene una ganancia de energía de aproximadamente $2\hbar\omega_c$. De forma similar, ocurre con el término $\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-}$ en el que se tendría una pérdida energética de $2\hbar\omega_c$. Estos últimos juegan un papel menos relevante en la dinámica en comparación con los dos primeros, que corresponden, como se puede ver, a los procesos usuales de emisión y absorción de fotones. Mediante la *aproximación de onda giratoria*[3] (RWA por sus siglas en inglés) se logran despreciar los términos anti-resonantes y de esta forma el Hamiltoniano queda finalmente escrito como

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_c\hat{a}^{\dagger}\hat{a} + \hbar\lambda\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{\sigma}_{-} + \hat{a}\hat{\sigma}_{+}\right). \tag{1.26}$$

En resumen, la interacción de un átomo —visto como un sistema de dos niveles— con un modo del campo electromagnético confinado en una cavidad cuántica (figura 1.1) se puede modelar, en la aproximación dipolar y de onda giratoria, mediante el Hamiltoniano (1.26) conocido en el contexto de la óptica cuántica como el *modelo de Jaynes-Cummings* (JCM por sus siglas en inglés) [23].

Autoenergías y autoestados del Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

Primero vamos a considerar los estados propios de $\widehat{H}_a + \widehat{H}_c$ que están dados por el producto tensorial entre los estados del átomo $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ y del campo $\{|n\rangle\}$, es decir $|e\rangle|n\rangle \equiv |e, n\rangle$ y

[3] El nombre de *aproximación de onda giratoria* viene de la resonancia magnética nuclear. En la que una partícula de espín 1/2 precesa (rota) naturalmente alrededor de la dirección de un campo magnético aplicado. Es importante recalcar también que la aproximación del átomo como un sistema de dos niveles y la RWA están en el mismo orden de precisión. Esto significa que no tiene ningún sentido despreciar una y mantener la otra, si la desintonía $\omega_{eg} - \omega_c$ es lo suficientemente grande para que los términos anti-resonantes no sean despreciables, entonces también es posible el acoplamiento de otros niveles atómicos.

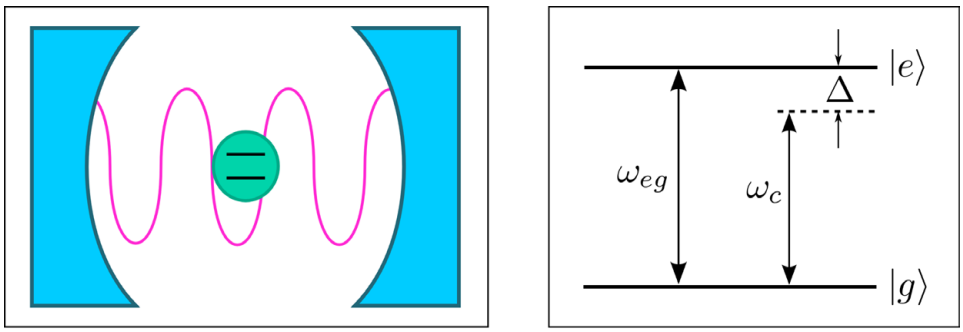


Figura 1.1: (a) Un átomo en una cavidad electrodinámica. (b) Átomo como un sistema de dos niveles con frecuencia de transición atómica ω_{eg}. La desintonía, Δ, es la diferencia entre la frecuencia de la radiación ω_c y ω_{eg}.

$|g\rangle\,|n\rangle \equiv |g,n\rangle$. Sus energías propias son $\hbar(\omega_{eg}/2+n\omega_c)$ y $\hbar(-\omega_{eg}/2+n\omega_c)$. A estos estados los llamamos estados "desacoplados" o *estados desnudos*.

Los estados excitados de $\widehat{H}_a+\widehat{H}_c$ excepto el estado $|g,0\rangle$ se organizan como una escalera de dobletes, separados unos de los otros por la energía $\hbar\omega_c$ (figura 1.2). En cada doblete los estados $|e,n\rangle$ y $|g,n+1\rangle$ están separados por la desintonía Δ definida como la diferencia entre la frecuencia de transición del átomo y la frecuencia del campo

$$\Delta = \omega_{eg} - \omega_c. \tag{1.27}$$

El n-ésimo doblete contiene $n+1$ excitaciones elementales ya sea en los $n+1$ fotones del campo ($|g,n+1\rangle$) o como la suma de n fotones en el campo y una excitación atómica ($|e,n\rangle$). De esta forma podemos definir el operador número de excitaciones

$$\widehat{N}_e = \hat{a}^\dagger\hat{a} + |e\rangle\langle e|\,, \tag{1.28}$$

que conmuta con el JCM ($[\widehat{H},\widehat{N}_e]=0$) y por lo tanto es una constante de movimiento. Siendo el número de excitaciones una cantidad conservada en el modelo, el acoplamiento átomo-campo conecta solamente estados en cada doblete. Luego, la diagonalización del Hamiltoniano completo se reduce a los espacios bidimensionales generados por los estados $|e,n\rangle$ y $|g,n+1\rangle$ del n-ésimo doblete.

Por otra parte se definen *los estados vestidos* representados como $|n,\pm\rangle$ que incluyen los efectos de la interacción y que corresponden a los estados estacionarios del JCM por lo que estos satisfacen la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\widehat{H}\,|n,\pm\rangle = E_\pm\,|n,\pm\rangle\,, \tag{1.29}$$

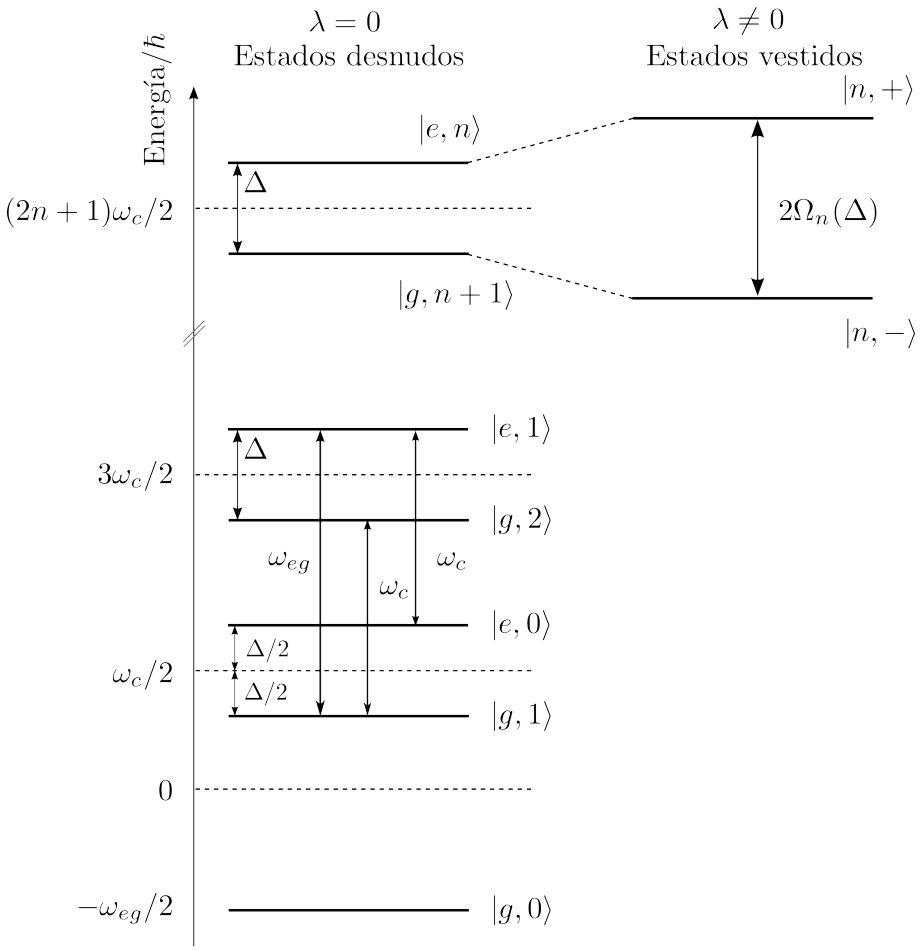


Figura 1.2: Corrimiento de los niveles de energía del sistema átomo-campo debido a la interacción entre estos. Cabe resaltar que la frecuencia de transición de los estados vestidos es mayor que la frecuencia de transición de los estados desnudos ($2\Omega_n(\Delta) \geq \Delta$), pero en presencia de interacción la desigualdad es estricta y por lo tanto los estados vestidos nunca serán degenerados aún cuando los estados desnudos sí lo sean.

cuyas autoenergías

$$E_{\pm} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \hbar\Omega_n(\Delta) \tag{1.30}$$

dependen de

$$\Omega_n(\Delta) = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2(n+1)} \tag{1.31}$$

que se denomina la *frecuencia generalizada de Rabi* e incluye los efectos de la desintonía Δ entre la frecuencia del átomo y el campo. Los autoestados asociados con estas energías están dados por

$$|n,+\rangle = \cos(\Theta_n/2)\,|e,n\rangle + \sin(\Theta_n/2)\,|g,n+1\rangle \tag{1.32a}$$
$$|n,-\rangle = -\sin(\Theta_n/2)\,|e,n\rangle + \cos(\Theta_n/2)\,|g,n+1\rangle \tag{1.32b}$$

y el ángulo Θ_n se define a través de

$$\tan(\Theta_n) = \frac{2\lambda\sqrt{n+1}}{\Delta} = \frac{\Omega_n(0)}{\Delta}. \tag{1.33}$$

Como se explica en la referencia [21], la diagonalización del Hamiltoniano de Jaynes-Cummings es formalmente idéntica a la determinación de los estados propios de un espín localizado en un campo magnético cuyas componentes a lo largo de los ejes OZ y OX son proporcionales a Δ y $\Omega_n(\Delta)$ respectivamente; este campo ficticio forma un ángulo Θ_n con el eje OZ dado precisamente por la expresión (1.33).

Corrimiento de las energías asociadas a los estados vestidos

Los estados desnudos con energías $E_{e,n} = \hbar(\omega_{eg}/2 + n\omega_c)$ y $E_{g,n+1} = \hbar(-\omega_{eg}/2 + n\omega_c)$ están separados energéticamente apenas por la desintonía entre estos. En presencia de la interacción cada uno de ellos experimenta un corrimiento, como lo indica la figura 1.2; este fenómeno se debe a un tipo de efecto Stark denominado *corrimiento por efecto Stark dinámico o* AC[4]. En particular, nótese que en resonancia $\Delta = 0$ los estados desnudos son degenerados, pero los estados vestidos no, pues la interacción levanta este degeneramiento.

En la figura 1.3 se muestra la variación de las "energías vestidas" como una función de la desintonía Δ, las líneas a trazos cortos representan las energías del sistema desacoplado ("energías desnudas"). Se observa que a medida que la desintonía aumenta, las energías vestidas tienden a parecerse cada vez más a las desnudas, mientras que estas últimas son cada vez más diferentes entre sí.

[4] En general se les llama así a los corrimientos ópticamente inducidos.

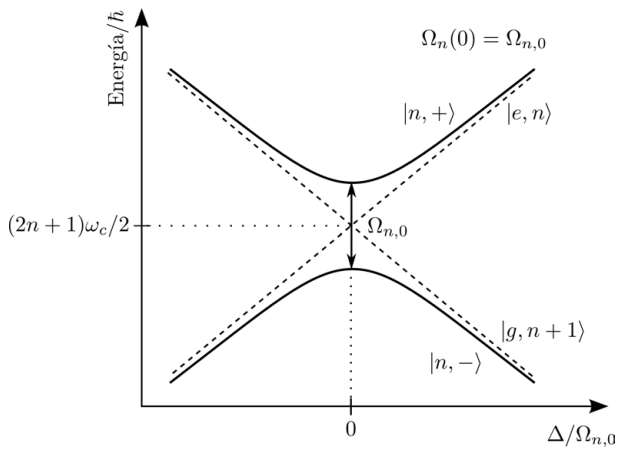


Figura 1.3: Variación de las energías asociadas a los estados vestidos y los estados desnudos en función de la desintonía.

Probabilidades de población de un estado atómico

Si tomamos el estado inicial del sistema como el estado separable $|\psi_0\rangle = |e,n\rangle$, en el que el átomo está en su nivel de energía más alto $|e\rangle$ y el campo en un estado de Fock $|n\rangle$, la probabilidad de que el electrón se encuentre en el estado base a medida que pasa el tiempo es

$$P_g(t) = \frac{\lambda_n^2}{\Omega_n^2}\sin^2(\Omega_n t), \quad \lambda_n \equiv \lambda\sqrt{n+1}; \tag{1.34}$$

y como consecuencia la probabilidad de que esté en el estado excitado es

$$P_e(t) = 1 - P_g(t). \tag{1.35}$$

Obsérvese que estas probabilidades oscilan con la frecuencia de Rabi generalizada Ω_n dada en (1.31); se ha omitido la dependencia de Δ para no sobrecargar la notación.

Modelo no resonante y corrimiento de los niveles atómicos

En esta parte nos dedicamos a analizar un fenómeno importante que ocurre cuando un átomo interactúa con una cavidad cuya radiación está bastante lejos de la resonancia con la frecuencia de la transición atómica, esta situación será caracterizada por el hecho de que $\Delta \gg \lambda_n$. En principio, cuando Δ tiende a ser grande podemos observar las siguientes consecuencias:

- Los estados vestidos del sistema átomo-campo tienden a ser los estados desnudos (o

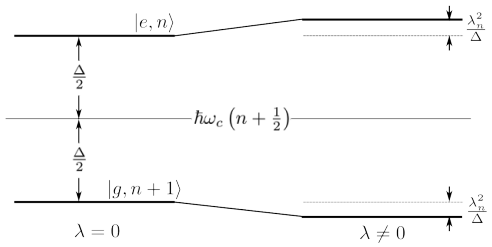


Figura 1.4: Corrimiento en las energías del sistema átomo-campo en una interacción dispersiva, *efecto Stark dinámico*.

desacoplados)

$$\begin{aligned} |+,n\rangle &\to |e,n\rangle \\ |-,n\rangle &\to |g,n+1\rangle\,, \end{aligned} \tag{1.36}$$

esto se verifica ya que cuando $\Delta \to \infty$, $\Theta_n \to 0$ (1.33) y en consecuencia $\cos(\Theta_n/2) \to 1$ (1.32a y 1.32b).

- La probabilidad de que ocurra una transición atómica acompañada de la emisión o absorción de un fotón tiende a ser despreciable. La probabilidad $P_e(t) \to \mathcal{O}\left(\lambda_n^2/\Delta^2\right)$ y $\lambda_n^2/\Delta^2 \ll 1$, como se esperaría también por las consideraciones heurísticas de la conservación de la energía para este caso.

Las observaciones anteriores nos llevarían a concluir que la interacción no resonante de un átomo con un campo podría considerarse como despreciable en el límite que estamos estudiando, excepto porque, las energías de los estados desnudos son ligeramente diferentes a las de los estados vestidos:

$$\begin{aligned} E_\pm &= \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \pm \hbar\Omega_n(\Delta) \\ &\simeq \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \pm \hbar\left(\frac{\Delta}{2}+\frac{\lambda_n^2}{\Delta}\right). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Esta expresión se interpreta como un corrimiento en la energía de los estados desnudos, debido a la interacción, dado por

$$\Delta_{e,n} = \frac{\lambda^2}{\Delta}(n+1), \quad \Delta_{g,n+1} = -\frac{\lambda^2}{\Delta}(n+1), \tag{1.38}$$

en donde $\Delta_{e,n}$ y $\Delta_{g,n+1}$ corresponden a los corrimientos de los estados $|e,n\rangle$ y $|g,n+1\rangle$ respectivamente (figura 1.4) y se pueden asociar ya sea al cambio en la energía de transición atómica o a la variación de la frecuencia del modo en la cavidad [21].

El corrimiento que experimenta la energía de transición atómica en la cavidad que contiene n fotones es:

$$\delta\omega_{eg} = \frac{1}{\hbar}\left(\Delta_{e,n} - \Delta_{g,n}\right) = (2n+1)\frac{\lambda^2}{\Delta} \tag{1.39}$$

y es el resultado de dos contribuciones, la primera que es proporcional al número de fotones n se explica por el efecto Stark que experimenta el átomo en presencia de la radiación lejos de la resonancia y la segunda se debe a un corrimiento tipo *Lamb* como consecuencia del acoplamiento entre el nivel excitado del átomo y las fluctuaciones del vacío en la cavidad.

1.2. Modelo de Jaynes-Cummings y procesos de dos fotones

Como una generalización del JCM [13,15,24,25] vamos a considerar un átomo de tres niveles cuyo estado intermedio, representado por $|i\rangle$, se acopla mediante transiciones dipolares permitidas con los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$, en la interacción con un modo de campo electromagnético de frecuencia ω_c en una cavidad sin disipación[5]. El hamiltoniano que describe este fenómeno en las aproximaciones dipolar y RWA es

$$\begin{aligned}\widehat{H}^{\Xi} &= \widehat{H}_c + \widehat{H}_a + \widehat{H}_{int} \\ &= \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{k=\{e,i,g\}} \hbar\omega_k \left|k\right\rangle \left\langle k\right| + \hbar\lambda_1 \left(\hat{a}\hat{\sigma}_{ig} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{gi}\right) + \hbar\lambda_2 \left(\hat{a}\hat{\sigma}_{ei} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_{ie}\right),\end{aligned} \tag{1.40}$$

donde los ω_k corresponden a las energías de los niveles atómicos y λ_1 y λ_2 son las constantes de acoplamiento correspondientes a cada transición atómica permitida. Los dos primeros términos de la ecuación (1.40) corresponden a la evolución libre del campo y el átomo de tres niveles respectivamente y los $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle \langle j|$ son los operadores escalera presentes en los términos de interacción.

El diagrama de niveles de la figura 1.5 muestra las transiciones que experimenta el átomo al intercambiar los fotones con el campo; se resaltan también las relaciones entre las energías a través de las desintonías

$$\delta_g = \omega_{ig} - \omega_c, \tag{1.41a}$$
$$\delta_e = \omega_{ei} - \omega_c, \tag{1.41b}$$
$$\Delta = \delta_e + \delta_g = \omega_{ei} + \omega_{ig} - 2\omega_c, \tag{1.41c}$$

la última de estas denominada *desintonía de dos fotones.*

Modelo de Jaynes-Cummings de dos fotones. Caso resonante $\Delta = 0$.

Consideremos ahora un átomo que interacciona con un campo de dos fotones dentro de una cavidad cuya energía se encuentra en resonancia con la transición atómica entre los estados

[5]Se debe resaltar que en esta situación el campo intercambia dos fotones de frecuencia ω_c con el átomo, para que este efectúe una sola transición entre los estados $|g\rangle$ y $|e\rangle$.

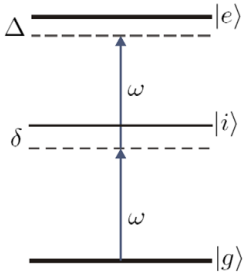


Figura 1.5: Representación esquemática de un átomo de tres niveles que interacciona con dos fotones de frecuencia ω.

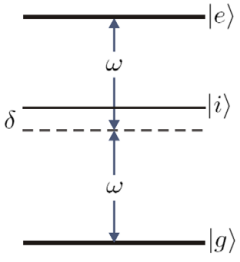


Figura 1.6: Un átomo de tres niveles en interacción con un campo resonante $\omega_{eg} = 2\omega_c$

$|g\rangle$, $|e\rangle$ de la misma paridad[6] (figura 1.6). Fijando el nivel de referencia para la energía en el *estado virtual* (línea a trazos cortos en la figura 1.6) resonante con la primera transición de energía $\hbar\omega_c$; el hamiltoniano libre del átomo puede escribirse como

$$\widehat{H}_a = \hbar\omega_c\,(\hat{\sigma}_{ee} - \hat{\sigma}_{gg}) + \hbar\delta_g\hat{\sigma}_{ii}, \tag{1.42}$$

y por lo tanto las energías asociadas a las estados desnudos $|e,n\rangle$, $|i,n+1\rangle$ y $|g,n+2\rangle$ estarían dadas por

$$\begin{aligned} \langle e,n|\, H_a + H_c\,|e,n\rangle &= \hbar\omega_c(n+1) \\ \langle i,n+1|\, H_a + H_c\,|i,n+1\rangle &= \hbar\delta_g + \hbar\omega_c(n+1) \\ \langle g,n+2|\, H_a + H_c\,|g,n+2\rangle &= \hbar\omega_c(n+1). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Puede observarse claramente como los estados $|e,n\rangle$ y $|g,n+2\rangle$ son estados degenerados y la energía del estado $|i,n+1\rangle$ está separada de ellos por la desintonía δ_g con el nivel intermedio (figura 1.7).

De esta forma el Hamiltoniano de Jaynes-Cummings escrito como una matriz en la base que generan los estados desnudos sería:

$$H_n^{\Xi} \doteq \hbar\omega_c(n+1)\boldsymbol{I}_3 + V_n, \tag{1.44}$$

con

$$V_n = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \lambda_2\sqrt{n+1} & 0 \\ \lambda_2\sqrt{n+1} & \delta_g & \lambda_1\sqrt{n+2} \\ 0 & \lambda_1\sqrt{n+2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.45}$$

De la ecuación (1.44) se sigue que el operador de evolución temporal $\widehat{U}(t) = \exp(-i\widehat{H}_n^{\Xi}t)$ se puede factorizar como

$$\widehat{U}(t) = \widehat{U}_I(t)\cdot\widehat{U}_{II}(t) \tag{1.46}$$

[6]Luego la transición directa entre $|g\rangle$ y $|e\rangle$ está prohibida y por eso se requieren dos fotones y no sólo uno de frecuencia $2\omega_c$

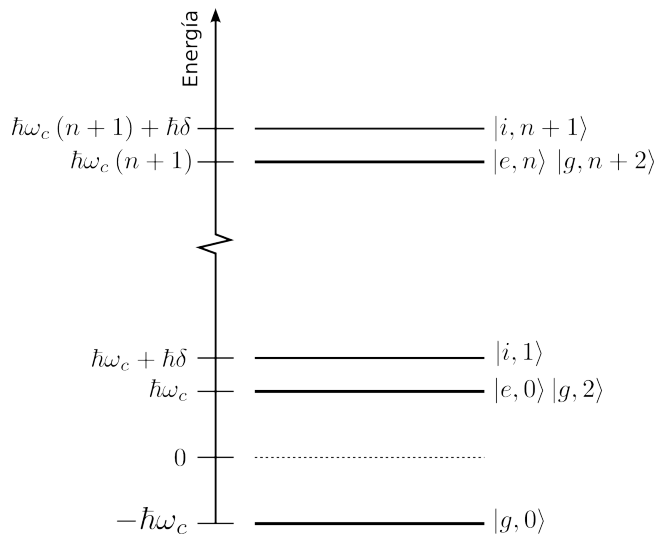


Figura 1.7: Energías asociadas a los estados desnudos del sistema átomo-campo

con

$$\widehat{U}_I(t) = e^{-i\omega_c(n+1)t}\cdot \boldsymbol{I}_3, \quad \widehat{U}_{II}(t) = \exp\left(-iV_n t\right). \tag{1.47}$$

$\widehat{U}_I(t)$ da solamente un factor de fase, mientras que $\widehat{U}_{II}(t)$ expresa la dinámica esencial del sistema. La diagonalización de V_n nos permite escribir las autoenergías de H_n^{Ξ} como

$$E_0 = 0 \tag{1.48a}$$

$$E_\pm = \frac{\hbar}{2}\delta_g\left(1 \pm \sqrt{1+4\frac{\Omega_n^2}{\delta_g^2}}\right) \tag{1.48b}$$

medidas desde la energía $\hbar\omega_c(n+1)$ asociada al estado $|e,n\rangle$ y con la frecuencia Ω_n definida así

$$\Omega_n^2 = \lambda_{1n}^2 + \lambda_{2n}^2. \tag{1.49}$$

Los autoestados con su correspondiente normalización se escriben:

$$|0,n\rangle = -\frac{\lambda_{1n}}{\Omega_n}|e,n\rangle + \frac{\lambda_{2n}}{\Omega_n}|g,n+2\rangle, \tag{1.50a}$$

$$|\pm,n\rangle = \frac{\lambda_{2n}}{\sqrt{E_\pm^2+\Omega_n^2}}|e,n\rangle + \frac{E_\pm}{\sqrt{E_\pm^2+\Omega_n^2}}|i,n+1\rangle + \frac{\lambda_{1n}}{\sqrt{E_\pm^2+\Omega_n^2}}|g,n+2\rangle. \tag{1.50b}$$

Población de los estados atómicos

Para determinar la probabilidad de población de los estados atómicos, vamos a considerar la dinámica del sistema a partir de un estado inicial separable, producto entre un estado de

Fock $|n\rangle$ para el campo y el estado de mayor energía átomo $|e\rangle$, es decir $|\psi_0\rangle = |e, n\rangle$ (ver por ejemplo [15]).

Ahora, bien, este resultado se puede estudiar en dos situaciones relevantes, una de ellas es que el sistema sea resonante con la transición al nivel intermedio ($\delta_g = 0$) y la otra, más importante aún para nuestro análisis posterior, es que dicha transición esté muy lejos de la resonancia. Para cada caso los resultados obtenidos son:

- En resonancia con el nivel intermedio ($\delta_g = 0$)

$$\bar{P}_e(t) = \left\{\bar{\lambda}_{1n}^2 + \bar{\lambda}_{2n}^2 \cos[\Omega_n\ t]\right\}^2 \tag{1.51a}$$

$$\bar{P}_i(t) = \bar{\lambda}_{2n}^2 \sin^2\left[\Omega_n\ t\right] \tag{1.51b}$$

$$\bar{P}_g(t) = \bar{\lambda}_{1n}^2 \bar{\lambda}_{2n}^2 \left(-1 + \cos[\Omega_n\ t]\right)^2; \quad \bar{\lambda}_{kn} = \frac{\lambda_{kn}}{\Omega_n} \tag{1.51c}$$

  en donde se han definido $\lambda_{2n} = \lambda_2\sqrt{n+1}$ y $\lambda_{1n} = \lambda_1\sqrt{n+2}$.

- Lejos de la resonancia con el nivel intermedio ($\delta_g^2 \gg \Omega_n^2$)

$$\tilde{P}_e(t) \simeq 1 - 2\bar{\lambda}_{1n}^2 \bar{\lambda}_{2n}^2 \left\{1 - \cos\left[\frac{\Omega_n^2}{\delta_g}\ t\right]\right\} \tag{1.52a}$$

$$\tilde{P}_i(t) \simeq \mathcal{O}(\Omega_n^2/\delta_g^2) \tag{1.52b}$$

$$\tilde{P}_g(t) \simeq 2\bar{\lambda}_{1n}^2 \bar{\lambda}_{2n}^2 \left\{1 - \cos\left[\frac{\Omega_n^2}{\delta_g}\ t\right]\right\}. \tag{1.52c}$$

Nótese que la probabilidad $\tilde{P}_i(t)$ puede llegar a ser tan pequeña que el átomo de tres niveles, bajo estas condiciones, tiende a comportarse como un átomo con sólo dos niveles relevantes ($|e\rangle$ y $|g\rangle$), es más, si efectuamos un análisis mas detallado de las probabilidades $\tilde{P}_e(t)$ y $\tilde{P}_g(t)$ observaremos que estas pueden escribirse como las expresiones en (1.34) que corresponden a las probabilidades de población de los estados permitidos en un átomo de dos niveles.

Redefiniendo las expresiones

$$\begin{aligned}\frac{\Omega_n^2}{\delta_g} = \frac{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2n}^2}{\delta_g} &= \sqrt{\left(\frac{\lambda_{2n}^2 - \lambda_{1n}^2}{\delta_g}\right)^2 + 4\left(\frac{\lambda_{2n}\lambda_{1n}}{\delta_g}\right)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta_n^{\mathrm{ef}})^2 + 4(\lambda_n^{\mathrm{ef}})^2} \equiv \Omega_n^{\mathrm{ef}}\end{aligned} \tag{1.53}$$

las probabilidades en (1.52) pueden escribirse:

$$\tilde{P}_g(t) \simeq 2(\bar{\lambda}_{1_n}\bar{\lambda}_{2_n})^2 \left\{1 - \cos\left[\frac{\Omega_n^2}{\delta_g}\ t\right]\right\} = \frac{\left(\lambda_n^{\mathrm{ef}}\right)}{\left(\Omega_n^{\mathrm{ef}}\right)^2} \sin^2\left(\Omega_n^{\mathrm{ef}}\ t\right) \tag{1.54a}$$

$$\tilde{P}_e(t) = 1 - \tilde{P}_g(t). \tag{1.54b}$$

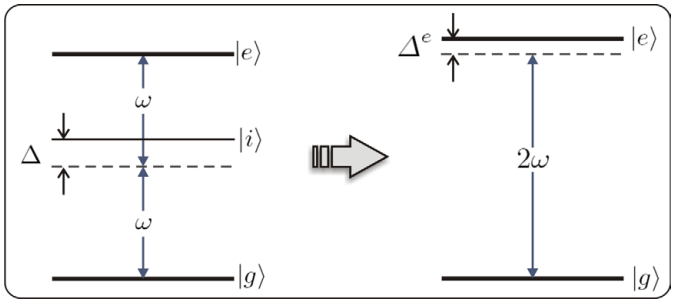


Figura 1.8: Interpretación de lo que sucede físicamente cuando un átomo de tres niveles interacciona con la radiación no resonante de una cavidad electromagnética.

La figura (1.8) ilustra la interpretación del fenómeno que ocurre cuando un átomo de tres niveles interactúa con la radiación lejos de resonancia a través del nivel intermedio, este átomo puede verse como un sistema de dos niveles efectivo que intercambia dos fotones de frecuencia ω_c con la cavidad cuando efectúa la transición entre $|e\rangle$ y $|g\rangle$. En este caso, a pesar de que $\omega_{eg} = 2\omega_c$, la transición al nivel "virtual" intermedio introduce un corrimiento en los niveles atómicos que se hace evidente por la existencia de la desintonía efectiva

$$\Delta^{\text{ef}} = \frac{\lambda_1^2(n+2) - \lambda_2^2(n+1)}{\delta_g} \tag{1.55}$$

que está relacionada con la magnitud del campo electromagnético al interior de la cavidad a través de los valores de las constantes λ_1 y λ_2. Así mismo, en esta interpretación como sistema efectivo de dos niveles, el acoplamiento efectivo sería

$$\lambda^{\text{ef}} = \frac{\lambda_1\lambda_2\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\delta_g}. \tag{1.56}$$

Se puede concluir que bajo estas condiciones, un proceso de segundo orden de dos fotones introduce un corrimiento de los niveles atómicos por efecto Stark dinámico que está relacionado con la magnitud del campo electromagnético de la radiación dentro de la cavidad.

Capítulo 2

Enredamiento y decoherencia en sistemas cuánticos

Nuestra visión intuitiva de cómo funciona el mundo considera que las propiedades físicas de los objetos están bien definidas antes de que las observemos. Sin embargo, entre las principales consecuencias de la teoría de la Mecánica Cuántica (MC en adelante) está la de considerar que una partícula no observada no posee propiedades físicas que existan independientemente de la observación y que más bien tales propiedades surgen como una consecuencia de la medida realizada. Esta nueva visión de la naturaleza tuvo en Albert Einstein su mayor contradictor, tanto que en el famoso artículo EPR [26], escrito en 1935 en compañía de Nathan Rosen y Boris Podolsky, propuso un experimento mental que pretendía demostrar que la MC no era una teoría completa de la naturaleza. La esencia del argumento EPR era la identificar lo que ellos llamaron *elementos de la realidad* que no estuvieran incluidos en la MC. La condición suficiente para que una propiedad física fuera denominada un elemento de la realidad, según los autores, es que se pudiera predecir el valor que tendría antes de ser medida. En la perspectiva de Bohm la idea es tomar el estado singlete cuántico

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B \Big), \tag{2.1}$$

que representa matemáticamente el estado de dos partículas de espín 1/2 separadas espacialmente y que posee simetría esférica. El principio de incertidumbre de Heisemberg limita el conocimiento simultaneo que podemos tener de observables conjugados (que no conmutan), por ejemplo, de las componentes de espín en alguna dirección S_z, S_x y S_y. Sin embargo, la correlación perfecta que existe entre los estados de espín de la partícula A con la de B hace posible que se conozcan completamente los estados de espín de la partícula del sistema B sin medirlas, solamente teniendo la información de la parte A del sistema. Luego es posible predecir el valor de la medida que se obtendría en la parte B, sin necesidad de medir el estado de espín de dicha partícula. De acuerdo a la condición de suficiencia esta propiedad

podría ser definida como un elemento de la realidad lo que está en total contradicción con las consecuencias de la MC.

La discusión propuesta en el artículo EPR dio lugar a lo que se conoce como teorías de Variables Ocultas Locales (VOL en adelante) en un intento por hacer "más completa" la MC[1]. La elección entre el modelo VOL y el de la MC fue durante mucho tiempo una cuestión de preferencias filosóficas, sin posible contraste experimental [27]. Treinta años después del artículo EPR, John Bell descubrió que si existen dichas VO locales, las correlaciones entre los valores de una componente de espín de la primera partícula y una de la segunda deben satisfacer cierta desigualdad, y que esta predicción puede someterse a comprobación experimental mediante mediciones efectuadas en un gran número de sistemas físicos igualmente preparados [28][2]. No obstante, los estados pueden elegirse de forma que las predicciones concretas de la MC violen las desigualdades de Bell. Como consecuencia, las VO Locales (y en particular los aparentemente irrebatibles elementos de realidad de EPR) no son pues una forma de completar la MC, sino una teoría alternativa incompatible con ella. Por lo que al menos una de las dos debería ser falsa. Los experimentos, con fotones principalmente, han demostrado que la naturaleza no obedece las desigualdades de Bell.

Erwin Schrödinger en 1935 introduce el término *Verchränkung* (en inglés *entanglement*) para designar la superposición de estados en sistemas de muchas partículas. En la actualidad la palabra inglesa que se traduce al español como enmarañado, entrelazado, entreverado, enredado, intrincado o anudado se utiliza para representar aquellos estados de un sistema compuesto que contiene correlaciones clásicamente inalcanzables[3]. El estado (2.1) es un claro ejemplo de este tipo de estados y que además tiene la particularidad de que viola maximalmente las desigualdades de Bell. La violación de las desigualdades de Bell muestra que el mundo no es *realista localmente*. La mayoría de quienes se interesan por el tema pone el énfasis en la exclusión de las VO, o de lo que genéricamente se suele llamar *realismo*. Otros autores, entre ellos Bell, enfatizan el rechazo de la *localidad*, entendiendo que las VO siguen siendo deseables, pero deben ser no-locales.

Los usos del enredamiento recientemente encontrados, entre los que podemos destacar los del campo de la información cuántica, por ejemplo el teletransporte cuántico, la criptografía, la metrología, los protocolos de corrección de errores y la computación cuántica, sustentan el hecho de que actualmente sea considerado un recurso importante para tareas informáticas que va más allá de los recursos clásicos. Una tarea enorme de la computación y la información

[1] El argumento que soportaba esta nueva teoría proponía que el hecho de que fuera imposible preparar conjuntos de sistemas físicos en un estado libre de dispersión simultáneamente para más de una componente de espín, no implicaba a priori que los sistemas individuales no pudieran tener bien definidas dichas componentes.

[2] Posteriormente se han escrito múltiples generalizaciones y mejoras de la desigualdad original, colectivamente llamadas *desigualdades de Bell*. Una de las más utilizadas es la llamada desigualdad de CHSH [29].

[3] Contrario a lo que se podría pensar por el hecho de que la teoría cuántica se ve más afectada por la incertidumbre que la mecánica clásica, los fenómenos cuánticos son más "disciplinados" que los clásicos. Esto concluye A. Peres al lograr demostrar que las correlaciones cuánticas son siempre más fuertes que las clásicas [31].

cuántica es la de explotarlo, por lo que se hace necesario conocer a fondo su naturaleza y las posibles formas de control.

No obstante, la realidad física implica tener en cuenta que los sistemas que estudiamos están expuestos al entorno y que por lo tanto se acoplan a grados de libertad no controlables que generan disipación (pérdida de la energía) y decoherencia (pérdida de la propiedades de interferencia), luego es de gran interés explicar también como estos fenómenos afectan los sistemas cuánticos y en particular el enredamiento.

En este capítulo discutiremos el concepto y la naturaleza del enredamiento, las formas de identificarlo y sobre todo cuantificarlo. De igual forma se estudia como se incluyen los procesos de disipación en la dinámica de los sistemas cuánticos.

2.1. El enredamiento y su medida

Cuando el sistema cuántico a estudiar está formado por dos o más sistemas distintos (subsistemas), el espacio de Hilbert del sistema físico compuesto es el producto tensorial de los espacios de estados de los sistemas físicos que lo componen[4] y su base se toma como el producto tensorial de las bases de los espacios correspondientes. Sin embargo, esto no significa que el estado global del sistema siempre pueda escribirse como el producto tensorial de los estados de cada subsistema.

En realidad se pueden identificar dos tipos de estados cuando se estudia el espacio global de un sistema compuesto. Los que se denominan *estados separables* que corresponden a los casos en donde el estado del sistema total puede ser escrito como producto de cada parte del sistema, por ejemplo para un sistema que tiene dos partes toma la forma

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^{(A)} \otimes \hat{\rho}_i^{(B)} \tag{2.2}$$

donde la suma de los valores positivos p_i satisfacen $\sum p_i = 1$ y tanto $\{\hat{\rho}_i^{(A)}\}$ como $\{\hat{\rho}_i^{(B)}\}$ son operadores densidad de los subsistemas A y B respectivamente. Es muy importante destacar que las descomposición (2.2) en general *no es diagonal* y tampoco es única. La última característica representa un problema ya que si se encuentra una descomposición separable, el estado será separable, pero en el caso contrario habría que buscar en las (infinitas) descomposiciones posibles.

Los estados que no pueden escribirse como productos de los estados de los subsistemas, como en (2.2), conforman la otra clase de estados que se denominan *estados enredados*. En particular, este tipo de estados se presentan en situaciones físicas en donde los resultados

[4]Esta afirmación se incluye como un postulado de la mecánica Cuántica ver por ejemplo [1].

de una medida sobre una parte del sistema están fuertemente condicionados por los estados de las otras partes que componen el sistema.

Supongamos que dos (sub)sistemas, sin correlaciones, empiezan a interaccionar, a partir de ese momento comienzan a compartir una información que ya no puede ser asociada a cada subsistema de forma individual. Así, la evolución temporal puede llevar de un estado inicial separable a un estado enredado, en esta situación se dice que hubo un proceso de enredamiento entre los subsistemas, debido a esto se hace necesario establecer criterios para determinar que "tan enredado" está un sistema en un momento determinado, es decir hallar una *medida del enredamiento*.

En el caso de un sistema bipartito, compuesto por los sistemas A y B, el enredamiento puede ser cuantificado por la entropía de Von Neumann de cualquiera de los dos subsistemas si el estado del sistema es puro

$$E(\psi) = -Tr\left(\hat{\rho}_A \log \hat{\rho}_A\right) = -Tr\left(\hat{\rho}_B \log \hat{\rho}_B\right), \tag{2.3}$$

teniendo en cuenta que $\hat{\rho}_A = Tr_B \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|$ ($\hat{\rho}_B = Tr_A \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|$) es el operador densidad reducido del sistema A (B). En el caso de qubits se acostumbra a emplear el logaritmo en base 2.

Sin embargo, los estados puros son solamente idealizaciones, toda vez que los sistemas físicos reales siempre interaccionan con su ambiente y como resultado se tiene una evolución no unitaria que genera estados mezclados, como se discutirá en la sección 2.2. En general, el estado del sistema se representa por una colectividad de estados $\left|\psi_i\right\rangle$ con probabilidades p_i por medio de

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|. \tag{2.4}$$

Para este tipo de estados la teoría del enredamiento es más complicada y menos comprensible que para el caso de estados puros. No obstante, en la literatura pueden encontrarse muchos criterios para la separabilidad de estados mezcla. En particular, discutimos los más útiles según el tipo de sistema que se considera en esta tesis.

2.1.1. Enredamiento de formación y concurrencia.

El *enredamiento de formación* fue propuesto inicialmente por Benett et al. [30] en 1996 como una generalización directa de la entropía de enredamiento aplicada a estados mezclados. Para los estados de la forma (2.4) el enredamiento de formación es el promedio de la entropía de enredamiento de los estados puros de la descomposición, minimizado sobre todas las posibles descomposiciones

$$E(\hat{\rho}_{AB}) = \min_{p_i,\psi_i} \sum_i p_i E(\psi_i), \tag{2.5}$$

donde $E(\psi_i)$ está definida como la entropía von Neummann de cualquiera de los dos subsistemas A o B.

Wootters resolvió el problema de optimización para el caso de dos qubits por medio de la *concurrencia* definida como [32]

$$C(\hat{\rho}_{AB}) = \text{máx}(0, \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - \xi_4) \tag{2.6}$$

en donde los números ξ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ son las raíces cuadradas en orden decreciente del operador no hermítico

$$\hat{\rho}_{AB}(\sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y})\hat{\rho}^*_{AB}(\sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y}), \tag{2.7}$$

en esta expresión $\hat{\rho}^*_{AB}$ es el complejo conjugado de $\hat{\rho}_{AB}$ y σ_{ky} es la matriz de Pauli que actúa sobre cada qubit.

La concurrencia definida por (2.6) ofrece una medida normalizada del enredamiento entre los dos qubits, donde $C(\hat{\rho}_{AB}) = 0$ significa que el estado es separable y $C(\hat{\rho}_{AB}) = 1$ se obtiene para los estados máximamente enredados, como los estados de Bell[5]. Pero además tiene la gran ventaja de ser fácil de calcular y estar relacionada directamente con el enredamiento de formación a través de la fórmula

$$E(\hat{\rho}_{AB}) = h\left(C(\hat{\rho}_{AB})\right), \tag{2.8}$$

con

$$h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x). \tag{2.9}$$

2.1.2. Criterio Peres-Horodecki. La transpuesta parcial positiva y la negatividad.

El criterio de Peres-Horodecki es una condición necesaria para que el operador densidad $\hat{\rho}$, de dos sistemas A y B, sea separable [33,34]. También se le llama criterio PPT (por las siglas en inglés de la transpuesta parcial[6] positiva) y para el caso de sistemas con dimensiones 2×2 y 2×3 es además una condición suficiente para la separabilidad.

[5]Los estados de Bell son los estados máximamente enredados de un sistema compuesto por dos sistemas de dos niveles (o *qubit* en el lenguaje de la información cuántica). Algunos ejemplos de qubit incluyen átomos de dos niveles, estados ortonormales de polarización de un fotón, etc. Estos estados forman una base ortonormal muy útil para describir sistemas bipartitos en numerosas situaciones de interés en el campo de la información cuántica, como la teleportación y tienen la forma $|\Phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 0_2\rangle \pm |1_1, 1_2\rangle)$, $|\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1, 1_2\rangle \pm |1_1, 0_2\rangle)$.

[6]La transpuesta parcial de la matriz densidad que representa un sistema compuesto esta dada por la transposición de uno de los sistemas. Por ejemplo, la transpuesta parcial respecto el subsistema A es

$$\rho^{T_A}_{m\mu,n\nu} = \rho_{n\mu,m\nu}$$

en donde se usaron los índices latinos para el sistema A y los griegos para el B.

La aplicación de este criterio es muy simple. El encontrar valores propios negativos en la transpuesta parcial de un estado bipartito $\hat{\rho}_{AB}$ dado, implica que el estado es enredado. Basados en este hecho Vidal y Werner [35] derivaron una medida del enredamiento. Esta medida se llama *la negatividad* y se define como

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}) = \frac{||\hat{\rho}^{T_A}|| - 1}{d - 1}, \tag{2.10}$$

donde $\hat{\rho}^{T_A}$ es la transpuesta parcial del estado $\hat{\rho}$ en $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, d corresponde a la dimensión del sistema menor y la norma $||\hat{A}|| = \sqrt{\hat{A}^\dagger \hat{A}}$ es la traza.

2.2. Decoherencia en los sistemas cuánticos

Un sistema físico real siempre estará bajo la influencia del entorno y la tarea de tratar de aislarlo completamente de esta influencia es casi imposible. Inclusive en el caso en que la evolución del sistema se diera de forma ideal, de todas maneras sería necesario exponerlo al entorno para poder efectuar un proceso de medición.

La decoherencia es la formación irreversible de correlaciones cuánticas de un sistema con su entorno. Estas correlaciones causan la pérdida de información del sistema de interés y generan una dinámica no unitaria que incluye procesos de *disipación*, mediante el cual las poblaciones de los estados cuánticos se reducen, y de *desfase* en el que las fases relativas de los estados se vuelven aleatorias. En otras palabras, la dinámica del sistema se vuelve más complicada dado que no obedece la ecuación de Schrödinger.

En esta sección vamos a ver que bajo ciertas aproximaciones se puede construir una descripción de la evolución temporal de un sistema que está siendo afectado por algún mecanismo de decoherencia, lo que da lugar a la *ecuación maestra* de la matriz densidad [21, 36].

2.2.1. Tratamiento formal de la decoherencia. La ecuación maestra.

La construcción de este modelo consiste en acoplar un sistema S con un entorno E mediante un Hamiltoniano de la forma

$$H = H_S + H_E + H_{SE}, \tag{2.11}$$

donde H_S y H_E son los Hamiltonianos para S y R respectivamente y H_{ES} es la parte Hamiltoniana que describe la interacción entre el sistema y el entorno. Si el estado del sistema total $S + E$ se representa mediante alguna matriz densidad ρ entonces la parte relevante del modelo es el operador que describe la dinámica del sistema S determinado por la fórmula

$$\rho_S = tr_E \rho \tag{2.12}$$

que se conoce como la matriz densidad reducida del sistema cuántico abierto S. Aquí tr_E denota la traza parcial sobre los grados de libertad del entorno E.

El estado del sistema en cualquier tiempo $t \geq 0$ se obtiene de la matriz densidad $\rho(t)$ del sistema total tomando la traza parcial sobre los grados de libertad del entorno y toda vez que ρ evoluciona unitariamente, entonces se tiene

$$\rho_S(t) = tr_E \left\{ U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0) \right\}, \tag{2.13}$$

donde $U(t, t_0)$ es el operador de evolución temporal del sistema total. De forma análoga la ecuación de movimiento para el matriz densidad reducida se obtiene tomando la traza parcial a ambos lados de la ecuación de Liouville-von Neumann del sistema total.

$$\frac{d}{dt}\rho_S = -i\ tr_E[H(t), \rho(t)]. \tag{2.14}$$

La dinámica definida por las ecuaciones exactas (2.13) y (2.14) puede ser formulada en términos de un semigrupo dinámico cuántico bajo la condición de tener tiempos de correlación cortos en el entorno (aproximación de Markov) de tal forma que se puedan despreciar sus efectos de memoria.

Considerando que dicho semigrupo dinámico existe (no discutiremos dicha existencia en esta sección, para ello ver por ejemplo [36]), se puede construir un mapa lineal $\mathcal{L}$, el generador del semigrupo, que permite representar el semigrupo de forma exponencial,

$$V(t) = \exp(\mathcal{L}t). \tag{2.15}$$

Esta representación inmediatamente lleva a una ecuación diferencial de primer orden para la matriz densidad reducida del sistema abierto,

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = \mathcal{L}\rho_S(t) \tag{2.16}$$

que se conoce como ecuación maestra Markoviana o ecuación de Lindblad.

Para la construcción de la forma más general que toma el generador $\mathcal{L}$ pueden utilizarse argumentos de la teoría de grupos u optar por una derivación microscópica, en cualquiera de los casos, la forma *diagonal* que adopta dicho generador es

$$\mathcal{L}\rho_S = -i\,[H, \rho_S] + \sum_k \left\{ L_k \rho_S L_k^\dagger - \frac{1}{2}\left(L_k^\dagger L_k \rho_S + \rho_S L_k^\dagger L_k \right) \right\}. \tag{2.17}$$

La primera parte del generador representa la dinámica unitaria dada por el Hamiltoniano H. Los operadores L_k se denominan usualmente como operadores de Lindblad, su estructura depende del tipo de proceso disipativo al que esté expuesto es sistema cuántico, veremos a continuación la forma particular que toman en el caso de nuestro interés que es un átomo interactuando con un modo de campo confinado en una cavidad.

Sistema átomo-campo amortiguado.

Ahora volvemos a tratar el sistema en el que un átomo interacciona con un modo de campo electromagnético confinado para analizar como se ve afectado por su acoplamiento con un entorno a temperatura T. La ecuación maestra que se tiene en cuenta para la evolución del operador densidad del sistema átomo-campo consiste de un conmutador asociado a la evolución coherente tipo Jaynes-Cummings y los operadores de Lindblad que describen los procesos de relajación del átomo y el campo en el generador (2.17) y cuyas formas son $\sqrt{\Gamma(1+n_{th})}\sigma_-$, $\sqrt{\Gamma n_{th}}\sigma_+$, $\sqrt{\kappa(1+n_{th})}a$ y $\sqrt{\kappa n_{th}}a^\dagger$.

Se espera que la evolución sea coherente, esto es, dominada por la contribución Hamiltoniana, cuando la frecuencia de Rabi del vacío Ω_0 es mucho mayor que las tasas de decaimiento irreversible $\Gamma(1+n_{th})$ y $\kappa(1+n_{th})$. Esto se conoce como la condición para el régimen de acoplamiento fuerte en una cavidad electrodinámica.

Debemos señalar que, en un experimento específico, frecuentemente la situación es mucho más sencilla que la descrita mediante la ecuación maestra general [21]. En experimentos ópticos con $\hbar\omega_c \ll k_B T$, el número promedio de fotones térmicos es despreciable y solamente dos operadores de Lindblad se mantienen, $\sqrt{\Gamma}\sigma_-$ y $\sqrt{\kappa}a$. El amortiguamiento del sistema se describe entonces por la tasa de emisión espontánea y el factor de calidad Q[7] de la cavidad. En experimentos en las microondas, por otro lado, la tasa de emisión atómica es usualmente despreciable con respecto al amortiguamiento de la cavidad y los fotones térmicos llegan a ser un factor relevante, excepto cuando T es extremadamente pequeña. En estas circunstancias hay de nuevo sólo dos operadores de Lindblad dominantes, $\sqrt{\kappa(1+n_{th})}a$ y $\sqrt{\kappa n_{th}}a^\dagger$.

Finalmente, para experimentos en las microondas a temperaturas extremadamente bajas, $n_{th} \sim 0$ la ecuación maestra se reduce a un sólo operador de Lindblad, $\sqrt{\kappa}a$. Por lo que se puede escribir

$$\frac{d}{dt}\rho_S = \frac{1}{i\hbar}\Big[H_a + H_c + H_{ac}, \rho_S\Big] + \frac{\kappa}{2}\left\{2a\rho_S a^\dagger - \Big(a^\dagger a\rho_S + \rho_S a^\dagger a\Big)\right\}. \tag{2.18}$$

[7] Cuyo valor está definido en términos de la tasa de pérdida de fotones de la cavidad κ, mediante $Q = \omega_c/\kappa$ y da información de la calidad de la cavidad con la que se está trabajando.

Capítulo 3

Control de enredamiento entre dos átomos que atraviesan una cavidad electrodinámica.

Como ya se ha mencionado, las correlaciones cuánticas están entre los efectos más sorprendentes de la mecánica cuántica. Su impacto ha sido tan relevante que (casi[1]) la única forma de hacer que los protocolos o algoritmos para el procesamiento de la información se vuelvan más eficientes es sacando ventaja de ellas, es decir aprovechando la existencia del enredamiento. Como consecuencia adicional, una tarea que se volvió realmente importante es la de producir, transferir y controlar el enredamiento entre partes de un sistema que pueden estar interaccionando directa o indirectamente; cómo hacerlo depende del sistema físico, de cuáles estados se pueden preparar y qué parámetros se pueden controlar. Entre las realizaciones experimentales de los fenómenos cuánticos se destaca la interacción de un átomo de dos niveles con un campo electromagnético cuantizado en una cavidad microondas con un factor de calidad Q alto[2]. Actualmente, se pueden preparar estados atómicos,($|e\rangle$, $|g\rangle$ y superposiciones de estos) y estados del campo (estados de Fock $|0\rangle$, $|1\rangle$, estados coherentes $|\alpha\rangle$) por demanda, se puede controlar la velocidad de los átomos, las condiciones de resonancia y el tipo de interacción (procesos de segundo orden de dos fotones) entre el átomo y el campo. Esta es un área de investigación muy avanzada.

Las técnicas desarrolladas en cQED han permitido la construcción de arreglos experimentales para la generación de enredamiento entre átomos que atraviesan una cavidad [37]. En 1994 Cirac *et al.* [8] propusieron un método que consiste en hacer pasar sucesivamente dos

[1] En realidad en la computación cuántica empleando NMR la existencia de correlaciones cuánticas no es necesaria.

[2] Esta rama de la óptica cuántica se denomina *electrodinámica cuántica de cavidades* o cQED por sus siglas en inglés.

átomos por una cavidad inicialmente vacía. El primer átomo se prepara en el estado excitado $|e_1\rangle$ y el segundo en el estado base $|g_2\rangle$. Mientras el primer átomo está en la cavidad, el sistema átomo-campo evoluciona de acuerdo con el modelo de Jaynes-Cummings (JCM) así (ver el capítulo 1, ecuación (1.26))

$$|e_1, 0\rangle \rightarrow \cos(\lambda\, t_1)\, |e_1, 0\rangle - i \sin(\lambda\, t_1)\, |g_1, 1\rangle\,. \tag{3.1}$$

Si la velocidad del átomo se elige de tal forma que $\lambda\, t_1 = \pi/4$ entonces se tiene

$$|e_1, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1, 0\rangle - i\, |g_1, 1\rangle). \tag{3.2}$$

Enviando el segundo átomo en su estado base y dejando evolucionar el sistema de nuevo

$$|e_1, g_2, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1, 0\rangle - i\, |g_1, 1\rangle) \otimes |g_2\rangle\,. \tag{3.3}$$

Teniendo en cuenta que el estado $|e_1, g_2, 0\rangle$ es estacionario y usando

$$|g_2, 1\rangle \rightarrow \cos(\lambda\, t_2)\, |g_2, 1\rangle - i \sin(\lambda\, t_2)\, |e_2, 0\rangle\,, \tag{3.4}$$

cuando se toma la velocidad del segundo átomo tal que $\lambda\, t_2 = \pi/2$ finalmente se obtiene

$$|e_1, g_2, 0\rangle \rightarrow |\Psi^+\rangle \otimes |0\rangle\,, \tag{3.5}$$

donde

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1, g_2\rangle + |g_1, e_2\rangle) \tag{3.6}$$

que corresponde a uno de los estados máximamente enredados de Bell.

Por su parte Biplap *et al.* en 2008 [18] estudian nuevamente el enredamiento atómico generado al hacer pasar los átomos por la cavidad, pero esta vez la interacción es un proceso no resonante de intercambio de dos fotones simultáneos, los átomos se preparan ambos en sus estados excitados y el tiempo de interacción es el mismo. Bajo estas condiciones no se logra crear un estado máximamente enredado entre los átomos para ningún tiempo de interacción.

De estos dos hechos y teniendo en cuenta que los procesos de dos fotones muestran un comportamiento diferente a los de un fotón queda la pregunta que nos motiva a realizar la investigación de esta tesis. ¿El no obtener enredamiento máximo se debe al tipo de proceso de interacción que ocurre entre el átomo y el campo (resonante o no, de un fotón o dos fotones) o a la diferencia en los tiempos de interacción de cada átomo?, la respuesta nos lleva a pensar en el control que se puede hacer del enredamiento mediante los parámetros físicos del sistema.

En este capítulo vamos a hacer una discusión del modelo de interacción tanto de un fotón como de dos fotones para analizar el comportamiento del enredamiento en términos del

número de fotones que se intercambian, la diferencia entre las frecuencias de transición atómicas y la frecuencia del campo, y el tiempo de interacción de cada átomo. Empezamos el capítulo con la construcción de un Hamiltoniano efectivo que se utilizará para modelar el proceso de segundo orden de dos fotones, partiendo de un átomo con tres niveles (sección 3.1). Luego hacemos una discusión sobre los puntos a favor y en contra del modelo propuesto por Biplap *et al.* en [18] y el modelo propuesto por nosotros; para esto construimos un Hamiltoniano adimensional del sistema compuesto por un átomo de tres niveles y la radiación, estudiamos además lo que vamos a llamar *la fidelidad* entre este sistema y uno compuesto por un átomo de dos niveles y el campo (sección 3.2). Con base en el modelo efectivo de dos niveles construido hacemos una generalización que describe, usando los parámetros adecuados, la interacción entre el átomo y el campo cuando entre estos se intercambian uno o dos fotones (sección 3.3). Terminamos en la sección 3.4 incluyendo los efectos de la disipación en nuestros modelos.

3.1. Procesos de dos fotones. Modelo efectivo de dos niveles

En la sección 1.2 se mostró que en el caso resonante, es decir cuando $\Delta = 0$, se puede construir un proceso de segundo orden de dos fotones partiendo de un átomo de tres niveles, $|g\rangle$, $|i\rangle$ y $|e\rangle$, en el que la transición entre el estado base y el excitado se logra solamente a través del estado intermedio, mediante lo que se denomina una *transición virtual*. En esta sección vamos a discutir el caso no resonante y las condiciones bajo las que se puede efectuar la aproximación de dos niveles efectivos[3] para describir el proceso de dos fotones.

La construcción de dicho modelo se ha planteado de diferentes formas: mediante (i) la *eliminación adiabática* del nivel intermedio en las ecuaciones de movimiento de las amplitudes de probabilidad [24]; (ii) una *expansión perturbativa* de los autovalores y autovectores del hamiltoniano completo para el sistema de tres niveles [13] (como se hizo en la sección 1.2) y (iii) el uso de una *transformación canónica* adecuada [38]. En la tabla 3.1 se resumen las ventajas y desventajas de cada uno de los métodos planteados, en particular optamos por utilizar la teoría de perturbaciones para analizar con más detalle los órdenes de magnitud relativos de cada uno de los parámetros que influyen en el modelo. A continuación, se discuten los resultados del estudio utilizando este procedimiento.

El hamiltoniano para el sistema de tres niveles no resonante escrito de forma matricial en la base que generan los estados desnudos $|e, n\rangle$, $|i, n+1\rangle$ y $|g, n+2\rangle$ es

$$H_{\Xi} = \hbar\omega_c\,(n+1)\,\boldsymbol{I}_3 + \hbar W_n \tag{3.7}$$

[3]La justificación para mantener dos niveles atómicos tiene que ver con el interés de estudiar el enredamiento entre qubits pero en el marco de los procesos de dos fotones.

Consideraciones	Eliminación adiabática	Teoría de perturbaciones	Transformación canónica
Se pueden estudiar interacciones por fuera de resonancia.	NO	SI	SI
Puede introducirse un incremento del efecto Stark aumentando el número de niveles intermedios fuera de resonancia.	SI	NO	SI
Se puede efectuar un buen control de la aproximación.	NO	SI	NO

Cuadro 3.1: Ventajas y desventajas de cada uno de los métodos encontrados en la literatura para la construcción del Hamiltoniano efectivo.

en donde

$$W_n = \begin{pmatrix} \Delta & \lambda_{2n} & 0 \\ \lambda_{2n} & \delta_g & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{1n} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Los símbolos λ_{jn} son una notación corta para

$$\lambda_{1n} = \lambda_1\sqrt{n+2}, \text{ y} \tag{3.9a}$$

$$\lambda_{2n} = \lambda_2\sqrt{n+1}. \tag{3.9b}$$

Para lograr que la transición al estado intermedio sea *virtual*, es necesario que la desintonía de dos fotones sea mucho menor que la de un fotón, esto es $\Delta \ll \delta_g$, ya que de esta forma se garantiza que la transferencia de población entre el estado excitado y el estado base ($|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$) es mayor que la transferencia de población al estado intermedio por las transiciones de un fotón $|e\rangle \leftrightarrow |i\rangle$ y $|g\rangle \leftrightarrow |i\rangle$. Particularmente, ser requiere que el proceso de dos fotones sea casi resonante, mientras que el de un fotón sea dispersivo, es decir que la desintonia de un fotón sea grande $\delta_g \gg \lambda_{1n}, \lambda_{2n}$ y la de dos fotones sea pequeña $\Delta \ll \lambda_{1n}, \lambda_{2n}$. Una consecuencia de estas condiciones, es que n no puede ser arbitrariamente grande.

La teoría de perturbaciones se desarrolla de la siguiente forma, definimos la desintonía de un fotón de orden cero, los términos proporcionales a los momentos dipolares como de primer orden (ϵ) y la desintonía de dos fotones como de segundo orden[4] (ϵ^2). Sí ϵ es lo suficientemente pequeño, la dinámica exacta se puede aproximar mediante el hamiltoniano

[4]Esta condición es consistente físicamente con el hecho de tomar la desintonía de dos fotones Δ del orden de λ_j^2/δ_g, es decir, del mismo orden del corrimiento por efecto Stark que sufren los niveles energéticos del átomo por la interacción dispersiva como se explicó en la sección (1.1).

efectivo total

$$\widehat{H}_{\text{ef}} = \left\{\Delta + \left(\frac{\lambda_1^2}{\delta_g} - \frac{\lambda_2^2}{\delta_g}\right)\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\} S_z - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{\delta_g} + \frac{\lambda_2^2}{\delta_g}\right)\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{\lambda_2\lambda_1}{\delta_g}\left\{\hat{a}^2\widehat{S}^+ + \hat{a}^{\dagger 2}\widehat{S}^-\right\} + \frac{\lambda_2^2}{\delta_g}|e\rangle\langle e| + \delta\widehat{H}_{\text{ef}} \quad (3.10)$$

donde el último término es la contribución del nivel intermedio,

$$\delta\widehat{H}_{\text{ef}} = \left(\delta_g + \frac{\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right)\left(a^\dagger a + 1\right) + \lambda_1^2}{\delta_g}\right)|i\rangle\langle i|\,, \quad (3.11)$$

que no será tenido en cuenta para la aproximación efectiva de dos niveles. Más detalles se pueden ver en el apéndice A.

Realización experimental

En 1987, Haroche y sus colaboradores utilizaron átomos de Rubidio (^{85}Rb) para la construcción de un máser de dos fotones resonante [13]. El volumen efectivo del modo del campo de interés dentro de la cavidad fue de $V = 70$ mm^3 y la cavidad se sintonizó a una frecuencia $\tilde{\omega}_c = 429869{,}589$ Mhz de tal forma que $\omega_{eg} = 2\tilde{\omega}_c$. Además se tenía que para los estados $40\text{S}_{1/2}$ como excitado, $39\text{P}_{3/2}$ intermedio y $39\text{S}_{1/2}$ estado base, las constantes dipolares y la desintonía con el nivel intermedio eran $\lambda_1 \simeq \lambda_2 = 0{,}7$ Mhz y $\tilde{\delta}_g = 245{,}004$ Mhz respectivamente, de esta forma, la constante de acoplamiento efectiva es $\widetilde{G} = \lambda_1\lambda_2/\tilde{\delta}_g = 2 \times 10^{-3}$ Mhz y $\tilde{\delta}_g/\tilde{\omega}_c \simeq 6 \times 10^{-4}$ (según este grupo este valor pequeño justifica adecuadamente la aproximación del proceso de dos fotones a partir de un átomo de tres niveles). Estos valores van a ser utilizados en los ejemplos numéricos que vamos a considerar en la próximas secciones. La vírgula (˜) se emplea para señalar que se trata de los valores del experimento de Haroche en resonancia de dos fotones y reservamos las cantidades sin vírgula para el caso fuera de resonancia.

3.2. Hamiltoniano adimensional

Tomando el hamiltoniano de la ecuación (3.8) y dividiéndolo por $\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$, definimos un hamiltoniano adimensional de la forma

$$W_n^a = \frac{W_n}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} = \begin{pmatrix} \Delta_a & \lambda_2^a\sqrt{n+1} & 0 \\ \lambda_2^a\sqrt{n+1} & \delta_a & \lambda_1^a\sqrt{n+2} \\ 0 & \lambda_1^a\sqrt{n+2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Además, teniendo en cuenta que las constantes de acoplamiento adimensionales λ_1^a y λ_2^a satisfacen $(\lambda_1^a)^2 + (\lambda_2^a)^2 = 1$, podemos reparametrizarlas como:

$$\lambda_1^a = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} = \cos\phi, \tag{3.13}$$

$$\lambda_2^a = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} = \sin\phi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi/2. \tag{3.14}$$

3.2.1. Fidelidad del modelo

Ahora, tenemos como objetivo principal estudiar bajo qué condiciones el modelo de tres niveles puede considerarse como uno de dos niveles efectivos en el que se requieren dos fotones para efectuar la transición entre el estado $|e\rangle$ y $|g\rangle$. Para ello calculamos los vectores propios del hamiltoniano exacto

$$W_0^a = \begin{pmatrix} \Delta_a & \sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \delta_a & \sqrt{2}\cos\phi \\ 0 & \sqrt{2}\cos\phi & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

que se obtiene de la ecuación (3.12) tomando la cavidad inicialmente vacía ($n = 0$), definidos como

$$W_0^a \left|\tilde{\psi}_{0,m}\right\rangle = \tilde{E}_{0,m} \left|\tilde{\psi}_{0,m}\right\rangle, \tag{3.16}$$

y los comparamos con el conjunto de vectores propios que caracterizan nuestro sistema efectivo de dos niveles,

$$|\psi_1\rangle = |i, 1\rangle, \tag{3.17a}$$

$$|\psi_{2,3}\rangle = |\psi_\pm\rangle = -\frac{\sqrt{2}\sin 2\phi}{\sqrt{2\mathcal{A}_\pm^a}} |e, 0\rangle - \frac{(1 + 3\cos 2\phi)/2 + \delta_a\Delta_a \pm \Theta_\Delta^a}{2\sqrt{\mathcal{A}_\pm^a}} |g, 2\rangle, \tag{3.17b}$$

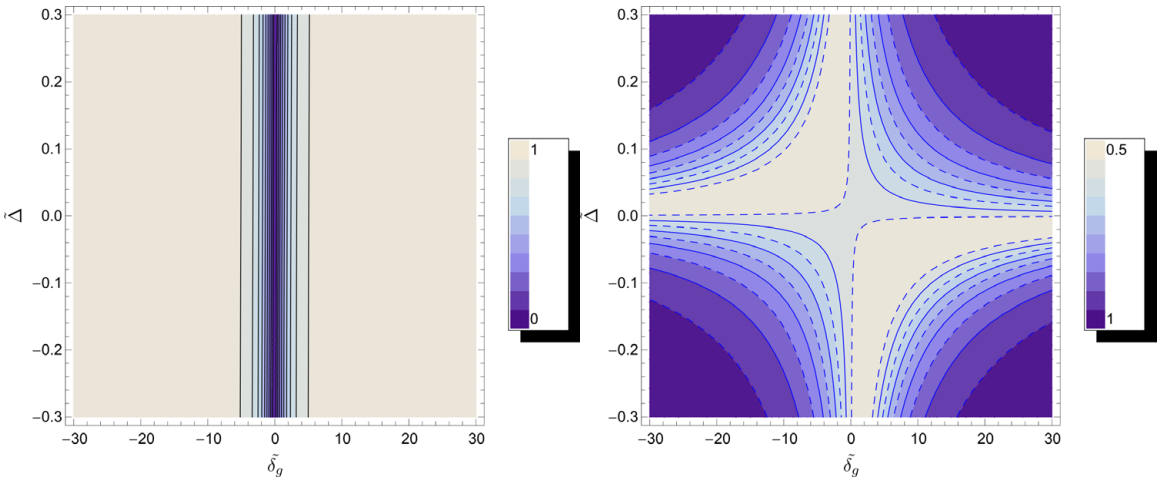
por medio de la *función de fidelidad*

$$\mathbb{F}(\phi, \Delta_a, \delta_a) = \max_P \left| \prod_{m=1}^{3} \langle\tilde{\psi}_{0,m}|\psi_{P(m)}\rangle \right| \tag{3.18}$$

que se maximiza sobre las 6 permutaciones de los tres estados $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$, para determinar la región de valores de Δ_a y δ_a en donde el modelo efectivo y el modelo exacto coinciden. Las regiones más claras de la gráfica (3.1a), que se construye para constantes de acoplamiento iguales ($\phi = \pi/4$), muestran en donde ocurre esto.

Sin embargo, $\mathbb{F}(\phi, \Delta_a, \delta_a) = 1$ es una condición necesaria, pero no suficiente para considerar que el modelo propuesto describe eficientemente el proceso de segundo orden de dos fotones, debido a esto definimos la *razón de participación*

$$\mathbb{P}(\phi, \Delta_a, \delta_a) = |\langle g, 2|\psi_2\rangle|^4 + |\langle e, 0|\psi_3\rangle|^4, \quad 1/2 \leq \mathbb{P} \leq 1 \tag{3.19}$$



(a) (b)

Figura 3.1: Comportamiento de la Fidelidad (a) y la razón de participación (b) en términos de las desitonías adimensionales cuando las constantes de acoplamiento dipolares son iguales ($\phi = \pi/4$).

que será (o estará muy cercana a) 1 cuando el modelo corresponda a un sistema de dos niveles desacoplado y muy cercano a 1/2 cuando se trate de dos niveles interactuantes. En la gráfica (3.1b) se puede ver el comportamiento de esta función cuando las constantes de acoplamiento son iguales, las regiones claras corresponden a valores cercanos a 1/2. La superposición de estas dos gráficas nos da una idea de la relación (ordenes de magnitud) que debe haber entre las desintonías para que el modelo construido describa eficientemente el proceso de segundo orden de dos fotones. En particular la fidelidad será mayor al 90 % si la desintonía de un fotón $|\delta_a| \gtrsim 4{,}0\times10^{0}$ en tanto que la razón de participación no será mayor a 0.6 si la desintonía de dos fotones cumple $|\Delta_a| \lesssim 4{,}0\times10^{-2}$, es decir que esté dos ordenes de magnitud por debajo de la desintonía de un fotón. Este resultado es realmente importante para nosotros porque nos aporta razones matemáticas que complementan las razones físicas consideradas para la construcción del modelo efectivo tratado en la sección 3.1.

Análisis de las condiciones particulares propuestas en el artículo de Biplab *et al.*

Entre los métodos para la construcción del modelo que describe un proceso de dos fotones en la interacción de un átomo con un campo electromagnético tenemos el método semiclásico de la referencia [40], a partir del cual V. Bartzis y N. Nayak [38] en 1991 desarrollan un

tratamiento completamente cuántico empleando la transformación canónica

$$\widehat{H}_{eff} = e^{-i\widehat{K}}\widehat{H}e^{i\widehat{K}}. \tag{3.20}$$

Si el operador independiente del tiempo $\widehat{K}$ satisface

$$\left[\widehat{K}, \widehat{H}_0\right] = -i\widehat{H}_1, \tag{3.21}$$

donde $\widehat{H}_0$ es la evolución libre tanto del átomo como del campo y $\widehat{H}_1 = \hbar\lambda_1\left(\hat{a}\hat{\sigma}_{ig} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{gi}\right) + \hbar\lambda_2\left(\hat{a}\hat{\sigma}_{ei} + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_{ie}\right)$ es el hamiltoniano de interacción de la ecuación (1.40), entonces el hamiltoniano efectivo se reduce a

$$\widehat{H}_{eff} = \widehat{H}_0 - \frac{i}{2}\left[\widehat{K}, \widehat{H}_1\right]. \tag{3.22}$$

Biplab *et al.* [18] en 2008, usando los resultados de [38], muestran que el enredamiento entre dos átomos de tres niveles que atraviesan sucesivamente una cavidad sin pérdidas se puede incrementar usando el corrimiento por efecto Stark. Nosotros encontramos que al menos para un solo nivel intermedio, los parámetros que les permiten tal control hacen que se invalide la aproximación de dos niveles empleada para modelar la interacción átomo-campo, en particular:

- En el modelo de interacción que describe el proceso de dos fotones planteado por ellos, aparecen unos β's que se introducen como parámetros de efecto Stark y que se definen como

$$\beta_e = \frac{\lambda_2^2}{\omega_{ei} - \omega} = -\frac{\lambda_2^2}{\delta - \Delta}, \quad \text{utilizando (1.41c)} \tag{3.23}$$

$$\beta_g = \frac{\lambda_1^2}{\omega_{ig} - \omega} = \frac{\lambda_1^2}{\delta}. \tag{3.24}$$

  Como caso particular los autores consideran $\beta_e = \beta_g = \beta$ y en consecuencia se tiene que

$$\frac{\lambda_1^2}{\delta} = -\frac{\lambda_2^2}{\delta - \Delta} \implies \delta\lambda_1^2 - \Delta\lambda_1^2 = -\delta\lambda_2^2$$

$$\delta = \left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\right)\Delta \tag{3.25}$$

  por lo que se concluye que $\delta \leq \Delta$ (que de entrada es una condición poco deseable ya que las transiciones de un sólo fotón serían más probables que las de dos fotones) o en términos de los parámetros adimensionales

$$\delta_a = \cos^2\phi\ \Delta_a. \tag{3.26}$$

Adicionalmente,

$$\beta_g = \frac{\lambda_1^2}{\delta} = \beta \quad \Rightarrow \quad \beta^a = \frac{\beta}{\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}} = \frac{\lambda_1^2/\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)}{\delta/\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}} = \frac{\cos^2\phi}{\delta_a},$$

luego,

$$\beta^a = \frac{1}{\Delta_a}, \tag{3.27}$$

lo que implica que β^a y Δ_a no son parámetros independientes uno del otro, como se utilizan en el artículo[5].

Por otro lado la constante de acoplamiento de dos fotones definida como

$$G = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2}\left\{\frac{1}{\omega_{ei}-\omega} - \frac{1}{\omega_{ig}-\omega}\right\} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2}\left\{\frac{1}{\Delta-\delta} - \frac{1}{\delta}\right\} = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{\delta}\left(\frac{\delta-\Delta/2}{\delta-\Delta}\right)$$

que en términos de los parámetros adimensionales quedaría escrita

$$\begin{aligned} G_a &= -\frac{\lambda_1^a\lambda_2^a}{\delta_a}\left(\frac{\delta_a-\Delta_a/2}{\delta_a-\Delta_a}\right) = -\frac{\cos\phi\ \sin\phi}{\cos^2\phi\ \Delta_a}\ \frac{(\cos^2\phi-1/2)\Delta_a}{(\cos^2\phi-1)\Delta_a} \\ &= -\frac{1-2\cos^2\phi}{2\cos\phi\sin\phi\Delta_a} = \frac{\cot 2\phi}{\Delta_a} \end{aligned}$$

o sea que

$$G_a\ \Delta_a = \cot 2\phi. \tag{3.28}$$

- Para las condiciones $-\frac{\Delta_a}{G_a} = x$ y $\frac{\beta_a}{G_a} = y$ con $x > 0$ y $y > 0$ analizadas como casos especiales en el artículo, se tiene entonces que $G_a\Delta_a = 1/y$ y $G_a = -\Delta_a/x$ de lo que se sigue $\Delta_a^2 = -x/y$ y esto es *imposible*.

- Ahora con las condiciones $\frac{\Delta_a}{G_a} = x$ y $\frac{\beta_a}{G_a} = y$ con $x > 0$ y $y > 0$, se tiene entonces que $G_a\Delta_a = 1/y$ y $G_a = \Delta_a/x$ de lo que se sigue $\Delta_a = \sqrt{\frac{x}{y}}$ y $G_a = \frac{1}{\sqrt{xy}}$, reemplazando estas definiciones en el Hamiltoniano adimensional (3.12) se obtiene:

$$W_n^a = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x}{y}} & \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}}\sqrt{\frac{n+1}{2}} & 0 \\ \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}}\sqrt{\frac{n+1}{2}} & \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}}\sqrt{\frac{x}{y}} & \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}}\sqrt{\frac{n+2}{2}} \\ 0 & \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}}\sqrt{\frac{n+2}{2}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

En el caso $x = 2 = y$ y $n = 0$ (planteado como caso particular por lo autores) los autovectores del Hamiltoniano adimensional (3.29) son (0.39, 0.76, 0.51) y (0.14, -0.60, 0.79), (-0.91, 0.24, 0.31). Se observa claramente que la aproximación como sistema de dos niveles no es válida.

Si hay 2 o más niveles intermedios es posible que puedan satisfacerse las condiciones planteadas, aún cuando esto no es del todo seguro.

[5]Esta conclusión es muy relevante para nuestro análisis ya que nos lleva a pensar, en contraste, que la desintonía juega un papel más importante que el corrimiento por efecto Stark en el control del enredamiento.

3.3. Construcción de un modelo general de interacción

Teniendo en cuenta que la representación matricial, en la base de los estados desnudos, tanto para el proceso de intercambio de uno ($N = 1$) como de dos ($N = 2$) fotones tiene la misma estructura, se puede considerar la construcción de un hamiltoniano generalizado que represente las dos dinámicas así

$$H_{Nph} \doteq C_n^{(N)} \boldsymbol{I}_2 + \begin{pmatrix} A_n^{(N)} & B_n^{(N)} \\ B_n^{(N)*} & -A_n^{(N)} \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

y para el que

$$A_n^{(N)} = \begin{cases} \frac{\delta}{2}, & \text{si } N = 1 \\ \frac{\Delta}{2} - \frac{\lambda_2^2(n+1) - \lambda_1^2(n+2)}{2\delta_g}, & \text{si } N = 2 \end{cases} \tag{3.31a}$$

$$B_n^{(N)} = \begin{cases} \lambda\sqrt{(n+1)}, & \text{si } N = 1 \\ -\frac{\lambda_1\lambda_2}{\delta_g}\sqrt{(n+1)(n+2)}, & \text{si } N = 2. \end{cases} \tag{3.31b}$$

$$C_n^{(N)} = \begin{cases} \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_c, & \text{si } N = 1 \\ \frac{\Delta}{2} - \frac{\lambda_2^2(n+1) + \lambda_1^2(n+2)}{2\delta_g}, & \text{si } N = 2. \end{cases} \tag{3.31c}$$

El término proporcional a la identidad en (3.30) solamente genera un factor de fase, por lo tanto la dinámica relevante estará contenida en el segundo término, cuya forma diagonal puede escribirse

$$V_{Nph} \doteq \begin{pmatrix} A_n^{(N)} & B_n^{(N)} \\ B_n^{(N)*} & -A_n^{(N)} \end{pmatrix} = E_n^{(N)} \left|\phi_1\right\rangle^{(N)} \left\langle\phi_1\right|^{(N)} - E_n^{(N)} \left|\phi_2\right\rangle^{(N)} \left\langle\phi_2\right|^{(N)}, \tag{3.32}$$

con

$$E_n^{(N)} = \sqrt{\left(A_n^{(N)}\right)^2 + \left(B_n^{(N)}\right)^2}.$$

Los estados propios son combinaciones lineales de los estados $|e, n\rangle$ y $|g, n + N\rangle$

$$\begin{aligned} \left|\phi_1\right\rangle^{(N)} &= \cos(\varphi_n^{(N)}/2)\left|e, n\right\rangle - \sin(\varphi_n^{(N)}/2)\left|g, n+N\right\rangle \\ \left|\phi_2\right\rangle^{(N)} &= \sin(\varphi_n^{(N)}/2)\left|e, n\right\rangle + \cos(\varphi_n^{(N)}/2)\left|g, n+N\right\rangle \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde N es 1 (2) para el proceso de uno fotón (dos fotones) y el ángulo $\varphi_n^{(N)}$ obedece la relación

$$\tan(\varphi_n^{(N)}) = -\frac{B_n^{(N)}}{A_n^{(N)}}. \tag{3.34}$$

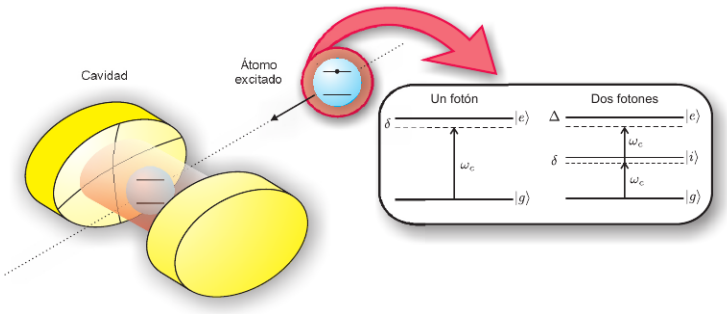


Figura 3.2: Sistema de estudio

3.3.1. El sistema de estudio y la dinámica

El sistema de interés está compuesto por dos átomos de Rydberg que atraviesan secuencialmente una cavidad ideal cuya frecuencia de resonancia puede ajustarse ligeramente (figura 3.2). La interacción de cada átomo con la cavidad puede hacerse mediante un proceso en el que la cavidad intercambia un sólo fotón (o dos fotones) con el átomo para que este efectúe una transición entre los dos niveles atómicos relevantes. El fenómeno ocurre garantizando que dentro de la cavidad hay un sólo átomo en cualquier momento.

La evolución temporal para el primer átomo preparado en su estado excitado $|e_1\rangle$ y la cavidad en el estado de Fock con n fotones $|n\rangle$ se describe por

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_1 &= e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}_{Nph}\ t}\,|e_1, n\rangle \\ &= (r_1 - is_1)\,|e_1, n\rangle + is_2\,|g_1, n+N\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.35}$$

donde

$$r_1 = \cos(E_n^{(N)}\ t) \tag{3.36a}$$
$$s_1 = -\cos(\varphi_n)\sin(E_n^{(N)}\ t) \tag{3.36b}$$
$$s_2 = \sin(\varphi_n)\sin(E_n^{(N)}\ t). \tag{3.36c}$$

Por lo tanto, el estado del sistema completo en el momento que un segundo átomo preparado en su estado excitado ingresa en la cavidad es

$$|e_2\rangle \otimes |\psi(\tau_1)\rangle_1 = (r_1 - is_1)\,|e_1, e_2, n\rangle + is_2\,|g_1, e_2, n+N\rangle\,, \tag{3.37}$$

y así, la dinámica del sistema mientras el segundo átomo atraviesa la cavidad está dada por

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}_{Nph}\ t}\,|e_2\rangle \otimes |\psi(\tau_1)\rangle_1 = (r_1 - is_1)\,|e_1\rangle \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}_{Nph}\ t}\,|e_2, n\rangle \\ + is_2\,|g_1\rangle \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{V}_{Nph}\ t}\,|e_2, n+N\rangle\,, \end{aligned} \tag{3.38}$$

en consecuencia el estado del sistema completo en términos del tiempo de interacción de cada átomo con la cavidad es

$$|\psi(\tau_1,\tau_2)\rangle_{(1,2)} = \eta_{ee}\,|e_1,e_2,n\rangle + \eta_{eg}\,|e_1,g_2,n+N\rangle + \eta_{ge}\,|g_1,e_2,n+N\rangle + \eta_{gg}\,|g_1,g_2,n+2N\rangle\,. \quad (3.39)$$

Hemos definido los η_{jk} como

$$\begin{aligned} &\eta_{ee} = (r_1 - is_1)\,(\tilde{r}_1 - i\tilde{s}_1)\,; \quad \eta_{eg} = (r_1 - is_1)\,(i\tilde{s}_2) \\ &\eta_{ge} = (is_2)\,\left(\tilde{r}'_1 - i\tilde{s}'_1\right); \quad \eta_{gg} = (is_2)(i\tilde{s}'_2), \end{aligned} \quad (3.40)$$

teniendo en cuenta que $r'_1 = r_1^{n\to n+N}$, $s'_1 = s_1^{n\to n+N}$ y que las expresiones con moñito se determinan cambiando t por τ_2 en (3.36).

3.3.2. Dinámica del enredamiento

Enredamiento atómico

Teniendo en cuenta que el interés principal recae en la evolución de los átomos, se toma la traza parcial sobre las variables del campo para obtener la matriz densidad del subsistema atómico

$$\rho(\tau_1,\tau_2)_{a_1a_2} = \begin{pmatrix} |\eta_{ee}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\eta_{eg}|^2 & \eta_{ge}\eta^*_{eg} & 0 \\ 0 & \eta_{eg}\eta^*_{ge} & |\eta_{ge}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\eta_{gg}|^2 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

y se calcula la concurrencia de Wootters (2.6) como una función del tiempo de interacción de cada átomo con la cavidad [39] para obtener

$$\begin{aligned} C(\tau_1,\tau_2)_{a_1a_2} &= 2\,\text{máx}\left\{0, |\eta^*_{eg}\eta_{ge}| - |\eta_{gg}||\eta_{ee}|\right\} \\ &= 2\,\text{máx}\left\{0, \sqrt{(r_1^2+s_1^2)\,s_2^2}\left(\sqrt{(\tilde{r}_1'^2+\tilde{s}_1'^2)\,\tilde{s}_2^2} - \sqrt{(\tilde{r}_1^2+\tilde{s}_1^2)\,\tilde{s}_2'^2}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Considerando además que

$$r_1^2 + s_1^2 = 1 - \sin^2(\varphi_n)\sin^2(E_n^{(N)}\,t) = 1 - s_2^2, \quad (3.43)$$

la concurrencia puede escribirse

$$C(\tau_1,\tau_2)_{a_1a_2} = 2\,\text{máx}\left\{0, \sqrt{\left(1-s_2^2\right)s_2^2}\left(\sqrt{\left(1-\tilde{s}_2'^2\right)\tilde{s}_2^2} - \sqrt{\left(1-\tilde{s}_2^2\right)\tilde{s}_2'^2}\right)\right\}. \quad (3.44)$$

Cuando los tiempos de interacción de cada átomo con la cavidad son iguales, es decir $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, la concurrencia (3.44) puede simplificarse como

$$C(\tau)_{a_1a_2} = 2\,\text{máx}\left\{0, s_2^2\sqrt{\left(1-s_2^2\right)\left(1-s_2'^2\right)} - \left|\left(1-s_2^2\right)s_2 s_2'\right|\right\}. \quad (3.45)$$

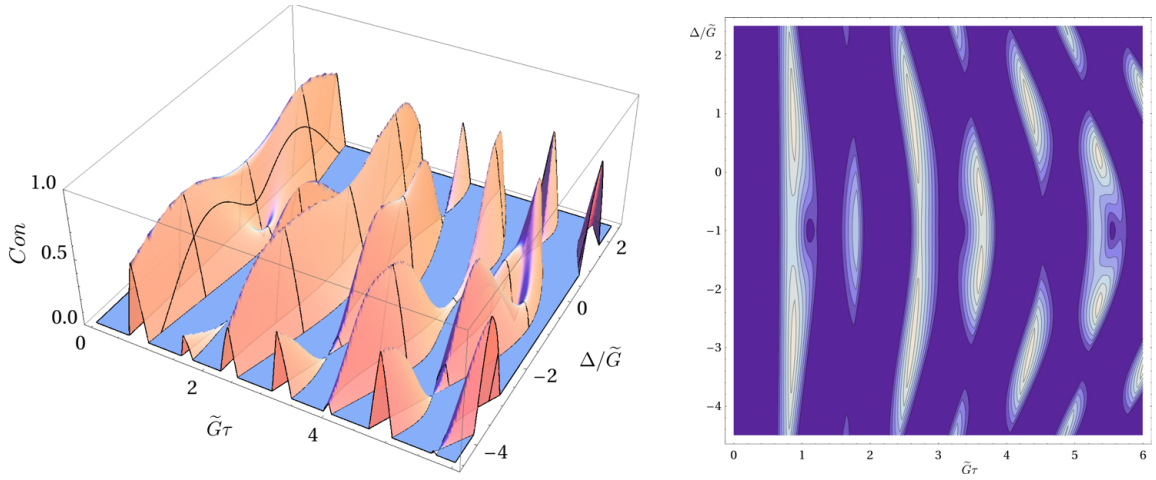


Figura 3.3: Concurrencia átomo-átomo en función del tiempo $\tilde{G}\tau$ y la desintonía $\Delta/\tilde{G}$ para el proceso de intercambio de dos fotones con la cavidad.

Este resultado es interesante porque corresponde a una expresión generalizada de la concurrencia para el proceso de uno y de dos fotones. A partir de esta ecuación podríamos decir que la concurrencia muestra un *comportamiento universal* en el sentido que se puede hacer una descripción de su evolución independientemente del proceso que se esté llevando a cabo dentro de la cavidad.

El comportamiento descrito por la ecuación anterior se ilustra en las figuras 3.3 (proceso de dos fotones) y 3.4 (proceso de un fotón), en las que se aprecia por ejemplo que el enredamiento atómico para el proceso de segundo orden de dos fotones es simétrico respecto a $\Delta/\tilde{G} = -1$, lo que significa $\Delta = -\lambda^2/\tilde{\delta}_g$ que corresponde al corrimiento efectivo (1.55), que sufren los niveles de energía atómicos, debido al efecto Stark dinámico. Por su parte en el proceso de un fotón el comportamiento de la concurrencia es simétrico respecto a $\delta/\lambda = 0$. En consecuencia, el efecto Stark que se genera en el proceso de dos fotones produce un corrimiento del enredamiento fuera de la resonancia.

Nótese también que la desintonía modifica (aumenta o disminuye) el enredamiento atómico. Para diferentes tiempos de interacción de los átomos con la cavidad, el enredamiento máximo solamente se logra por fuera de la resonancia, lo que es contraintuitivo dado que el aumento en la desintonía reduce la probabilidad de población de los estados atómicos, no obstante la actuación colectiva reduce el impacto negativo de la desintonía sobre un sólo átomo y contribuye en la transferencia del enredamiento. Otro resultado interesante tiene que ver con el momento en el que deja de ser cero el enredamiento atómico: obsérvese en la figura 3.4 que cuando $\delta/\lambda \gg 1$ el momento en el que se dispara la transferencia de enredamiento entre los átomos es independiente de la desintonía, es decir, que cuando hay una interacción dispersiva el *tiempo de nacimiento* es independiente de la desintonización entre el campo y

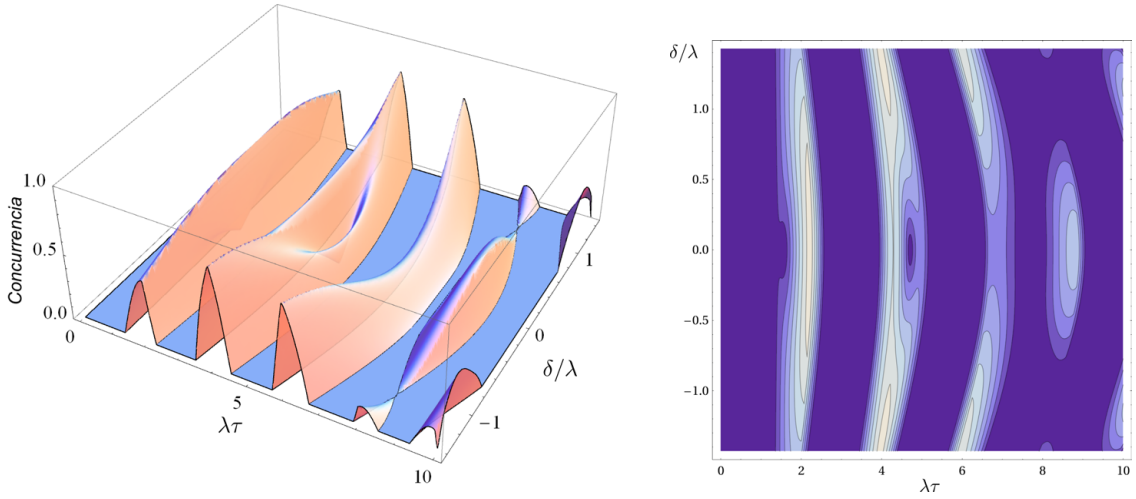


Figura 3.4: Comportamiento de la concurrencia átomo-átomo en función del tiempo λt y la desintonía δ/λ para el proceso de intercambio de un sólo fotón con la cavidad.

la transición atómica. Esto se ratifica en el proceso de dos fotones, como se ve en la gráfica de densidad de la figura 3.3.

Enredamiento Máximo.

Unos de los principales objetivos es determinar bajo que condiciones se puede generar el mayor enredamiento en el subsistema atómico, para ello vamos a estudiar los siguientes casos:

- Diferentes tiempos de interacción de cada átomo con la cavidad. Vamos a considerar τ_1 y τ_2 de tal manera que

$$s_2^2 = \sin^2\varphi_n \sin^2\left(E_n^{(N)}\tau_1\right) = 1/2 \quad \text{y} \tag{3.46a}$$

$$\tilde{s}_2'^2 = \sin^2\varphi_{n+N} \sin^2\left(E_{n+N}^{(N)}\tau_2\right) = 0 \tag{3.46b}$$

de esta forma la concurrencia (3.44) se reduce a

$$C(\tau_1,\tau_2)_{a_1a_2} = \left|\sin(\varphi_n)\sin\left(2k\pi\frac{E_n^{(N)}}{E_{n+N}^{(N)}}\right)\right|. \tag{3.47}$$

En particular se obtendrá un estado máximamente enredado en el subsistema atómico, independientemente del proceso que se este llevando a cabo dentro de la cavidad,

cuando

$$\tau_1 = 2\pi\left(k' + 1/3\right)/E_n^{(N)}, \tag{3.48a}$$

$$\tau_2 = 2k\pi/E_{n+N}^{(N)}, \tag{3.48b}$$

$$\frac{E_n}{E_{n+N}} = \frac{(m+1/4)}{k} \text{ y} \tag{3.48c}$$

$$\sin(\varphi_n) = 1 \tag{3.48d}$$

con k', k y m enteros mayores que cero. Cabe resaltar que aunque la condición (3.48c) no puede cumplirse exactamente debido a que la definición de $E_n^{(N)}$ (ecuación 3.3) hace que el cociente $E_n^{(N)}/E_{n+N}^{(N)}$ no sea racional, es posible acercarse tanto como se quiera si se deja evolucionar el sistema por tiempos arbitrariamente grandes (y en ausencia de disipación). Por otro lado, la condición (3.48d) implica que $A_n^{(N)} = 0$ (ecuación 3.31a), lo que quiere decir que la interacción debe ser resonante en el proceso de un fotón ($\delta = 0$) y no resonante para el proceso de dos fotones $\Delta = \frac{\lambda_e^2(n+1)-\lambda_g^2(n+2)}{\delta_g}$. Esta última condición significa que el estado máximamente enredado se obtendrá cuando la desintonía de dos fotones compense el corrimiento que produce el efecto Stark dinámico.

- Cuando los tiempos de interacción de cada átomo son iguales. En particular, para $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 2\pi k/E_{n+N}$ ($k \in \mathbb{Z}$), la concurrencia (3.45) se reduce a

$$C\left(\frac{2k\pi}{E_{n+N}}\right)_{a-a} = 2\sin^2(\varphi_n)\sin^2\left(2\pi k\frac{E_n}{E_{n+N}}\right)\sqrt{1-\sin^2(\varphi_n)\sin^2\left(2\pi k\frac{E_n}{E_{n+N}}\right)} \tag{3.49}$$

que podemos reescribir como

$$C^2(s) = 4s^2(1-s), \tag{3.50}$$

$$s = \sin^2(\varphi_n)\sin^2\left(2\pi k\frac{E_n}{E_{n+N}}\right), \tag{3.51}$$

cuyo máximo se obtiene cuando $s = 2/3$ con un valor de

$$C_{\text{máx}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} < 1. \tag{3.52}$$

En resumen, independientemente del tipo de interacción que suceda dentro de la cavidad, no se generan estados máximamente enredados cuando se consideran tiempos de interacción iguales y los átomos ingresan a la cavidad preparados en sus estados excitados.

Ahora bien, teniendo en cuenta que el valor máximo que puede llegar tomar la función $\sin^2\left(2\pi k\frac{E_n}{E_{n+N}}\right)$ es 1, siempre que

$$\sin^2(\varphi_n) \geq \frac{2}{3} \tag{3.53}$$

se cumplirá la condición $s = 2/3$ con la que se obtendrá la concurrencia máxima. Por otro lado, la función $\sin^2(\varphi_n)$ puede escribirse como

$$\left(1+\left(\frac{A_n^{(N)}}{B_n^{(N)}}\right)^2\right)^{-1} = \left(1+\chi_n^2\right)^{-1}, \tag{3.54}$$

luego el máximo de concurrencia (3.52) puede alcanzarse siempre y cuando

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \chi_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{3.55}$$

en donde los coeficientes $A_n^{(N)}$ y $B_n^{(N)}$ que definen χ_n están dados por (3.31a) y (3.31b).

Es claro que después de definir el χ_n, empleando los modelos físicos correspondientes al intercambio de N fotones, la desigualdad (3.55) delimita la región de parámetros para los cuales es posible obtener el valor máximo de enredamiento entre los átomos.

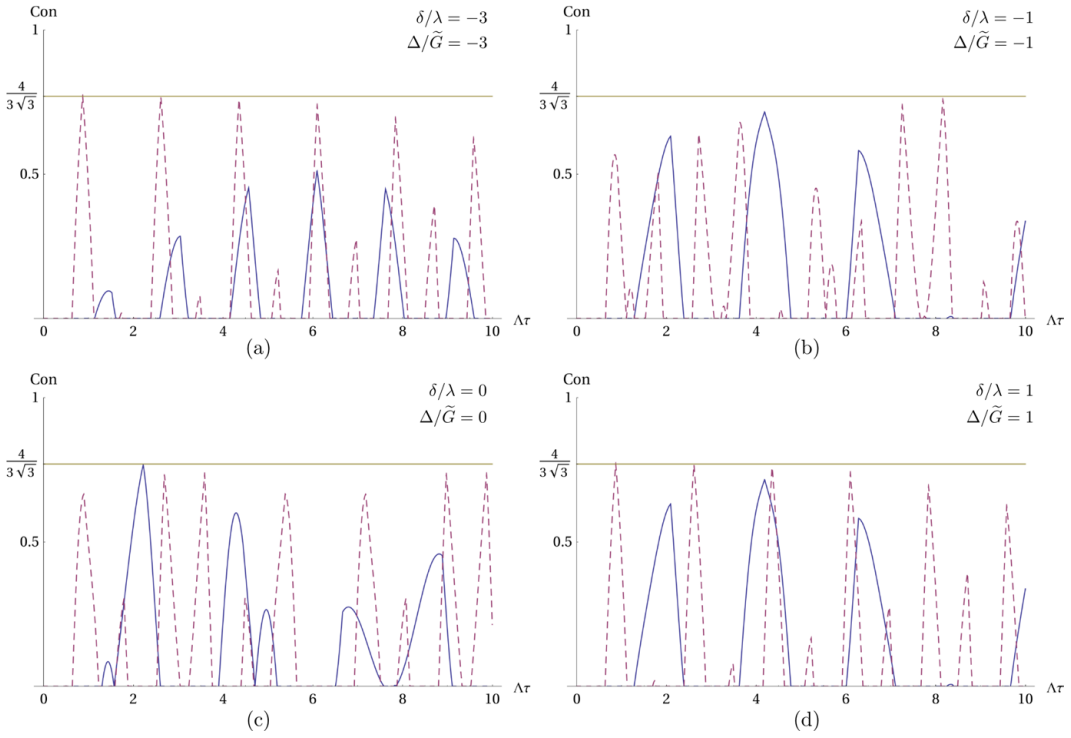


Figura 3.5: Comparación del grado de enredamiento que se logra en el proceso de uno (línea sólida) y de dos (línea a trazos cortos) fotones. En cualquiera de los casos y con las condiciones adecuadas se obtiene el mayor enredamiento posible $\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

En la figura 3.5 se observa que en cualquiera de los casos (un fotón y dos fotones) se obtiene la misma concurrencia máxima (3.52), siempre y cuando la desintonía sea tal que no se viole

la desigualdad (3.55). Nótese que en un proceso de dos fotones resonante no se alcanza el máximo enredamiento posible, pero en el caso de un fotón resonante dicho enredamiento máximo se logra obtener en los primeros tiempos.

Dinámica de los otros enredamientos

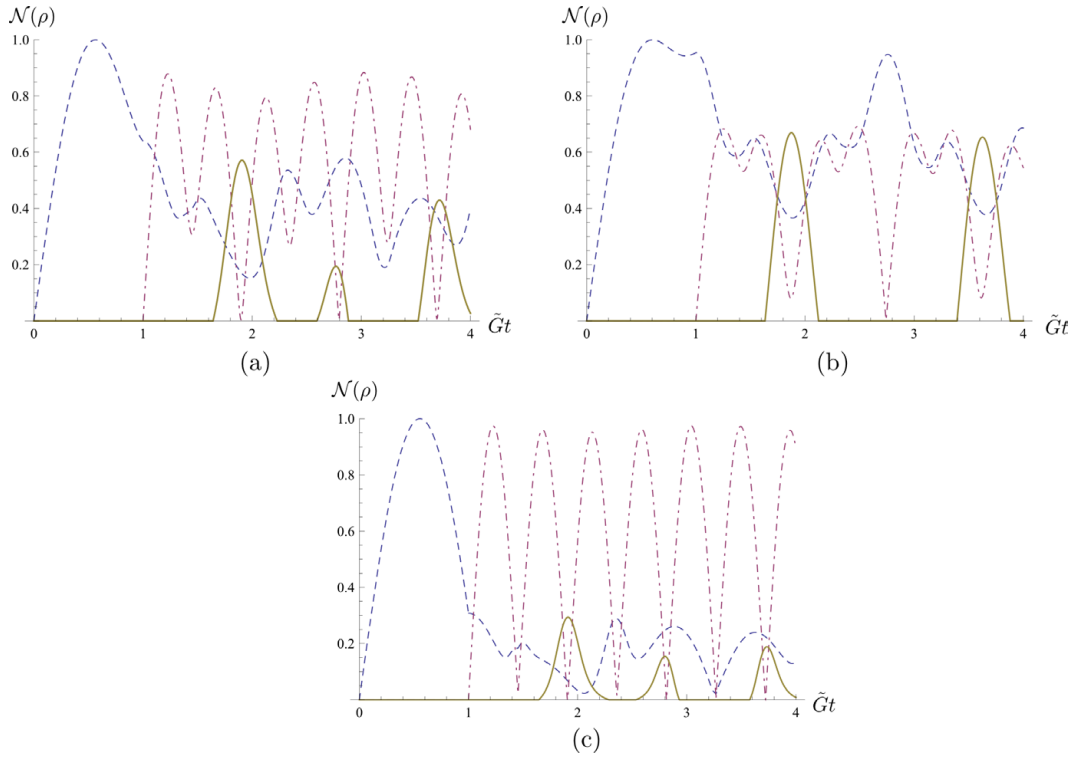


Figura 3.6: Dinámica del enredamiento (Negatividad) por pares en un proceso de dos fotones. La línea a trazos cortos representa el entrelazamiento entre el primer átomo y la cavidad, la línea de trazos y puntos corresponde al segundo átomo y la cavidad y la línea sólida al enredamiento atómico. (a) $\Delta/\tilde{G} = 0$, (b) $\Delta/\tilde{G} = 1$ y (c) $\Delta/\tilde{G} = -1$, todas para $\tilde{G}\tau_1 = 1$.

Con el ánimo de identificar más elementos que nos ayuden a explicar la dinámica del enredamiento atómico, en esta parte analizaremos cualitativamente el comportamiento del enredamiento bipartito, a través de la negatividad (2.10), entre los diferentes pares de subsistemas que intervienen en nuestro sistema de estudio, son ellos: el primer átomo y la cavidad (A1C), el segundo átomo y la cavidad ya perturbada (A2C) y los dos átomos (A1A2).

Las siguientes observaciones se refieren a las figuras 3.6 y 3.7. Aunque el enredamiento entre los átomos y la cavidad (por separado) muestra un comportamiento más o menos periódico,

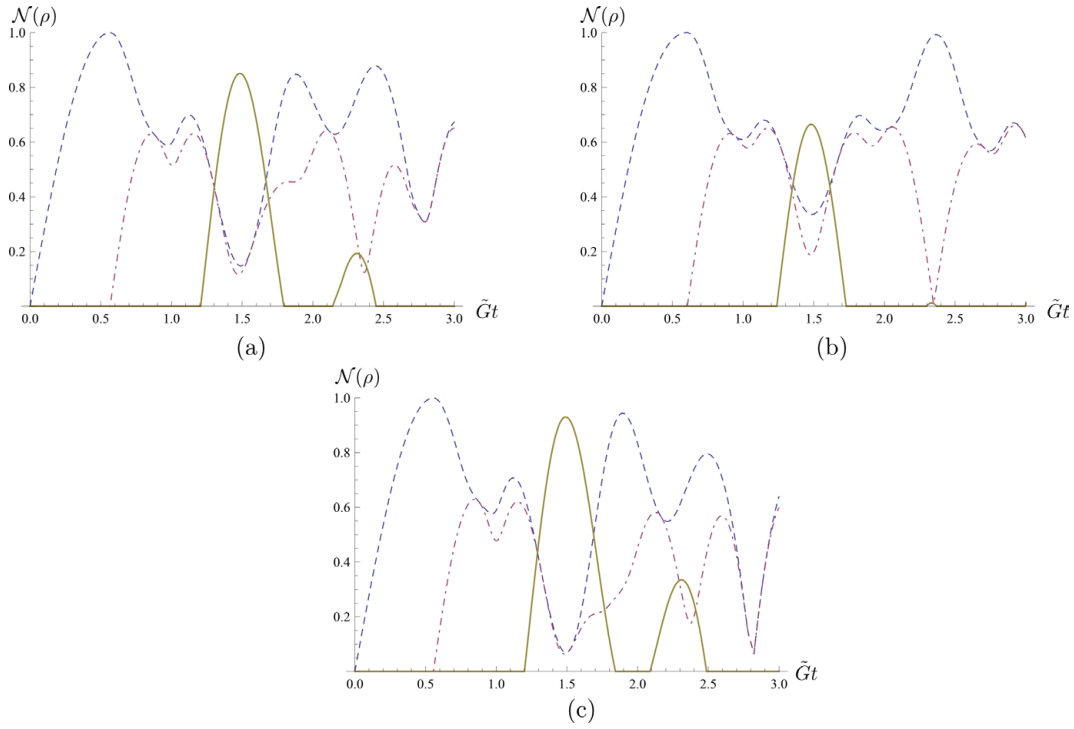


Figura 3.7: Dinámica del enredamiento (Negatividad) por pares en el proceso de dos fotones cuando el tiempo de interacción entre el primer átomo y la cavidad es tal que se genera un estado máximamente enredado entre estos. (a) $\Delta/\tilde{G} = 0$, (b) $\Delta/\tilde{G} = 1$ y (c) $\Delta/\tilde{G} = -1$.

el enredamiento entre los átomos no "hereda" esta misma dinámica; por el contrario presenta muertes y resurgimientos (cuasiperiódicos) que indican que hay una buena cantidad de valores de tiempo para los cuales no se logra la transferencia del enredamiento, por lo tanto deben cumplirse algunas condiciones más fuertes que solamente el hecho de tener una cierta cantidad de enredamiento entre el primer átomo y la cavidad. Una de estas condiciones puede sacarse de la ecuación de concurrencia (3.42) que obliga a que la norma de la coherencia $\eta_{eg}^{*}\eta_{ge}$ del estado atómico sea mayor que el producto de las poblaciones η_{ee} y η_{gg}, es decir

$$|\eta_{eg}^{*}\eta_{ge}| > |\eta_{ee}\eta_{gg}|. \tag{3.56}$$

No obstante, el grado de enredamiento A1A2 si está condicionado por el valor que logran los dos primeros sistemas, es decir que cuanto mayor es el enredamiento A1C, mayor podrá llegar a ser el enredamiento transferido. Para justificar esto, consideramos por ejemplo la negatividad del subsistema (A1C) que puede escribirse como

$$\mathcal{N}(\rho_{A1C}) = \sqrt{1 - s_2^2} + \left|s_2^2\right| - 1 \tag{3.57}$$

con s_2^2 definido en (3.36c). Para que el enredamiento A1C sea máximo, es decir

$$\mathcal{N}(\rho_{A1C}) = 1 \tag{3.58}$$

debe cumplirse,

$$s_2^2 = \frac{1}{2}, \tag{3.59}$$

que se deduce directamente (3.57) y que coincide con la condición (3.46a) para obtener el enredamiento máximo (de 1 cuando los tiempos de interacción son diferentes y $4/3\sqrt{3}$ cuando los tiempos son iguales) entre A1A2. Como se ve en 3.6(c) cuanto menor fue el enredamiento A1C menor fue también el máximo enredamiento A1A2.

Ya se comentó en la subsección anterior que el tiempo de nacimiento del enredamiento atómico era independiente de la desintonía de dos fotones, pero de lo que sí depende es del tiempo de interacción del sistema A1C.

3.4. Efectos de la disipación sobre el enredamiento atómico

Conviene ahora discutir sobre los efectos que tiene la pérdida de fotones de la cavidad sobre el enredamiento de los átomos. Para esto vamos a considerar solamente el caso en el que los tiempos de interacción son iguales y la pérdida se realiza fotón por fotón a una tasa κ a temperatura cero. No tenemos en cuenta procesos de emisión espontánea. Bajo estas condiciones el modelo disipativo que utilizamos viene dado por la ecuación (2.18), es decir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ac} &= \mathcal{L}\hat{\rho}_{ac} \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left[\widehat{H}_{Nph}, \hat{\rho}_{ac}\right] + \frac{\kappa}{2}\left\{2\hat{a}\hat{\rho}_{ac}\hat{a}^\dagger - \left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}_{ac} + \hat{\rho}_{ac}\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.60}$$

donde $\widehat{H}_{Nph}$ es el hamiltoniano definido por (3.30).

Esta ecuación de movimiento se resuelve numéricamente, bajo la mismas condiciones iniciales que se consideraron en el caso de la cavidad ideal, es decir los dos átomos se preparan en sus estados excitados y la cavidad se toma inicialmente vacía. En el apéndice B se expone con más detalle como se construye el conjunto de ecuaciones diferenciales que corresponde a cada elemento de la matriz densidad del sistema completo (los dos átomos y el campo), para el proceso de dos fotones.

Como ya se vió en la figura 3.5, la concurrencia del subsistema atómico presenta un comportamiento de muertes y resurgimientos, por lo que fijaremos nuestra atención en lo que en adelante se denominan los *ciclos de enredamiento*, cada uno de ellos con grado de enredamiento máximo que depende de la tasa disipativa, $C_{\text{máx},\kappa}$.

Cada ciclo de estos se ve afectado de forma diferente por el proceso disipativo, gráfica 3.8, luego, a cada ciclo de enredamiento le corresponde un tipo de estado diferente, que puede ser más o menos robusto a la disipación. Es importante resaltar el fenómeno que se observa

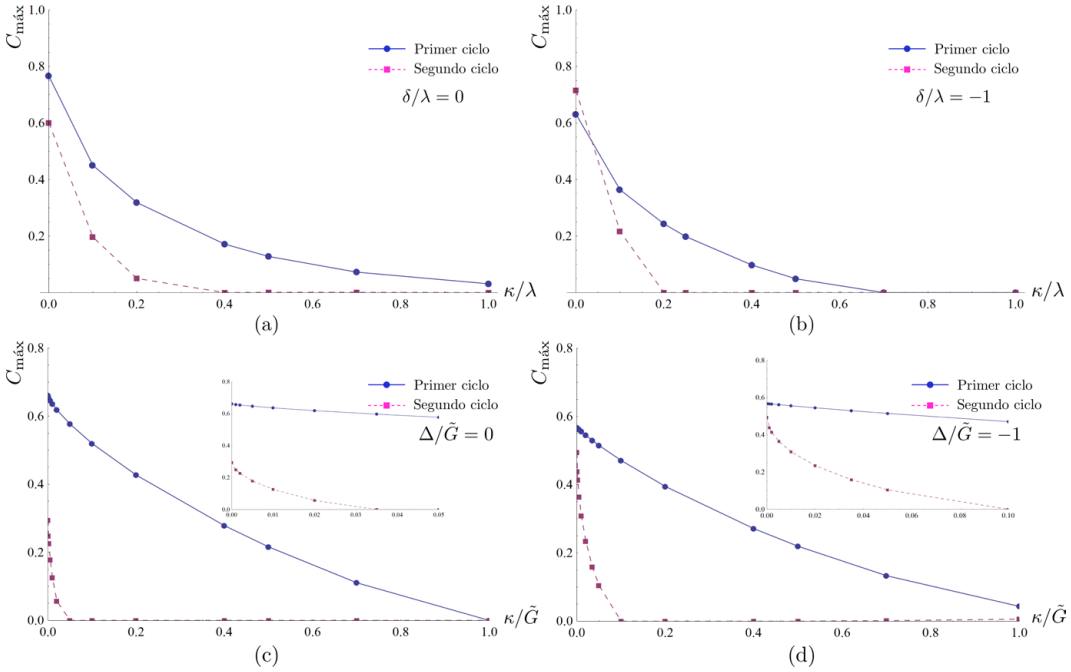


Figura 3.8: Concurrencia máxima alcanzada en los dos primeros ciclos de enredamiento atómico para diferentes valores de la tasa de disipación en el proceso de un sólo fotón (a) y (b) y de dos fotones (c) y (d).

en la gráfica 3.8(b) donde el segundo ciclo tiene un mayor valor de enredamiento cuando no hay pérdidas ($\kappa = 0$), pero que es más frágil y decae rápidamente con el valor de la tasa de disipación.

En particular, nótese que el primer ciclo es menos robusto en el proceso de un fotón (gráfica 3.9), sin embargo, el comportamiento del segundo ciclo es contrario, resiste menos la disipación el proceso de dos fotones. Esta situación condiciona las consideraciones que deben hacerse para efectuar el control del enredamiento ya que conviene utilizar tiempos de interacción para los que se obtengan estados más robustos.

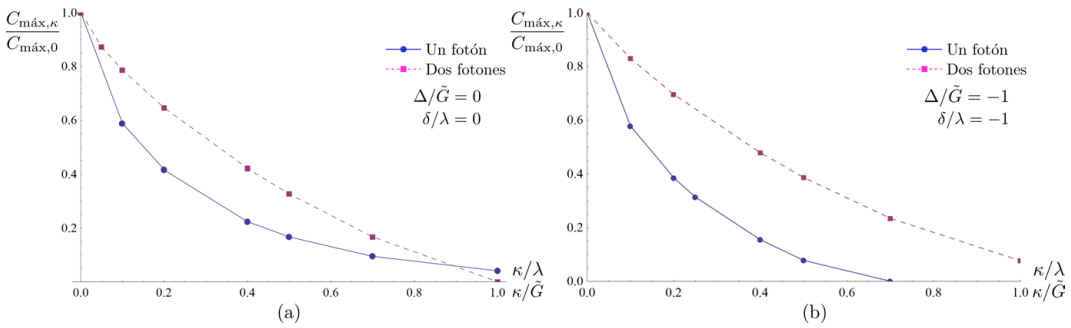


Figura 3.9: Comparación del cambio en el valor máximo de concurrencia del primer ciclo de enredamiento $C_{\text{máx},\kappa}/C_{\text{máx},0}$ en términos de la disipación para el proceso de un fóton (línea sólida) y de dos fotones (línea a trazos).

Capítulo 4

Conclusiones y perspectivas

4.1. Conclusiones

- Mediante la teoría de perturbaciones independiente del tiempo fue posible construir el modelo efectivo

$$\widehat{H}_{\text{efectivo}} = \left\{\Delta - \frac{\lambda_2^2}{\delta_g}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\right)\right\}|e\rangle\langle e| - \frac{\lambda_1^2}{\delta_g}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|g\rangle\langle g| - \frac{\lambda_2\lambda_1}{\delta_g}\left\{\hat{a}^2\widehat{S}^+ + \hat{a}^{\dagger 2}\widehat{S}^-\right\}. \quad (4.1)$$

  Este hamiltoniano que depende de la desintonía de dos fotones Δ, el efecto Stark dinámico $\lambda_{i,j}^2/\delta_g$ que se genera por la transición virtual al nivel intermedio y el acoplamiento efectivo $\lambda_1^2\lambda_2^2/\delta_g$, describe adecuadamente un proceso de segundo orden de dos fotones por fuera de la resonancia siempre y cuando se cumplan las condiciones

$$\Delta \sim \frac{\lambda_{1,2}^2}{\delta_g} \quad (4.2a)$$

$$\delta_g \gg \Delta \quad (4.2b)$$

$$\delta_g \gg \lambda_1\sqrt{n+2}, \lambda_2\sqrt{n+1} \quad (4.2c)$$

- Para el caso de uno y dos fotones se deriva la expresión

$$C(\tau_1,\tau_2) = 2\,\text{máx}\left\{0, \sqrt{(1-s^2)\,s^2}\left(\sqrt{(1-\tilde{s}'^2)\,\tilde{s}^2} - \sqrt{(1-\tilde{s}^2)\,\tilde{s}'^2}\right)\right\} \quad (4.3)$$

  en donde $s^2 = \sin^2(\varphi_n)\sin^2(E_n^{(N)}\,t)$, con φ_n y $E_n^{(N)}$ definidos por el hamiltoniano que describe la interacción átomo-campo. Este resultado nos permite calcular el grado de enredamiento atómico generado por la interacción con la cavidad e identificar un comportamiento global del enredamiento para estos casos. En particular, que el máximo valor de enredamiento que puede obtenerse es independiente del número de fotones que se requiere para efectuar la transición atómica.

- Del comportamiento que mostró el modelo de segundo orden de dos fotones en comparación con el de un sólo fotón y considerando que al reducir todo el problema de N fotones a un sistema efectivo de dos niveles, la estructura algebraica sigue siendo una matriz por bloques de dos por dos en su diagonal. No es descabellado intuir que es posible la construcción de un modelo generalizado para describir el proceso de intercambio de N fotones ($N > 3$) cuya estructura sería

$$\widehat{H}^{\text{efectivo}}_{N-\text{fotones}} = \mathcal{A}^{(N)} |e\rangle \langle e| + \mathcal{B}^{(N)} |g\rangle \langle g| + G^{(N)} \left(\hat{a}^N \hat{S}^+ + \hat{a}^{\dagger N} \hat{S}^- \right), \tag{4.4}$$

  en el cual los términos $\mathcal{A}^{(N)}$ y $\mathcal{B}^{(N)}$ incluirían la desintonía y el efecto Stark dinámico, presente en estos procesos dispersivos.

  Bajo esta consideración, se concluye que el enredamiento átomo-átomo generado por la interacción con una cavidad electrodinámica presenta un comportamiento "universal". Con esto queremos decir que no se obtiene más enredamiento solamente al considerar un intercambio mayor de fotones. Sin embargo, los detalles de la posibilidad de obtener un cierto valor de enredamiento para un determinado tiempo, dependen del modelo escrito en términos de los parámetros físicos. Es importante tener en cuenta que dichos parámetros se encuentran restringidos por la desigualdad (3.55), lo que impone limitaciones para escoger el átomo y la frecuencia de la radiación confinada.

- La desintonía (de dos fotones o de un fotón) y el tiempo de interacción juegan un papel crucial en el control del enredamiento atómico, en particular, cuando los tiempos de interacción son iguales no es posible generar estados máximamente enredados, esto solamente se logra si cada átomo interacciona durante un tiempo diferente con la cavidad y para el caso del proceso de dos fotones la desintonía debe compensar el corrimiento por efecto Stark dinámico que sufren los niveles de energía atómicos. El efecto Stark dinámico permite efectuar un control del enredamiento atómico a través de la preselección de los átomos.

- La dinámica de la concurrencia atómica cuando se tiene en cuenta la pérdida de fotones como proceso disipativo, presenta ciclos de enredamiento en los que se alternan ciclos robustos y débiles. En particular, el primer ciclo de enredamiento es más resistente a la disipación si la interacción es un proceso de dos fotones, sin embargo, el segundo ciclo es más robusto si el proceso es de un sólo fotón. Esto genera regímenes para los tiempos de interacción de los átomos con la cavidad que deben considerarse al momento de producir enredamiento vía una cQED.

4.2. Perspectivas

- Hacer un estudio formal de la dinámica del enredamiento bipartito y tripartito con el fin de identificar el *mecanismo físico* que genera la transferencia del enredamiento entre los sistemas no interactuantes.

- Definir la influencia del estado inicial en la dinámica, en este estudio solamente se consideró el mismo estado inicial para los átomos, pero sería también interesante estudiar un estado inicial que fuera por ejemplo la superposición de los estados atómicos o una mezcla estadística de estados puros, utilizar una cavidad que soporte estados coherentes o comprimidos de radiación.
- Estudiar la aplicación del método expuesto cambiando la cavidad por dispositivos de estado sólido, como microcavidades, micropilares y demás heteroestructuras, con el objeto de crear dispositivos optoelectrónicos que hagan esta función.
- Hacer un estudio más exhaustivo de la disipación para el caso en el que se consideran procesos no lineales como los de dos fotones.

Apéndice A

Derivación del hamiltoniano efectivo

Empezamos diagonalizando la matriz

$$\begin{pmatrix} \epsilon^2\,\Delta & \epsilon\,\lambda_{2n} & 0 \\ \epsilon\,\lambda_{2n} & \delta & \epsilon\,\lambda_{1n} \\ 0 & \epsilon\,\lambda_{1n} & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

en donde hemos introducido la cantidad ϵ como un mecanismo que nos ayuda a seguirle la pista a los órdenes relativos de cada uno de los términos que aparecen en los cálculos. Para los autovalores y autovectores hasta orden ϵ^2 obtenemos:

$$E_{\pm} \simeq \frac{\Delta}{2} - \frac{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2n}^2 \pm \Theta_{\Delta}}{2\delta_g} \tag{A.2a}$$

$$E_1 \simeq \delta_g + \frac{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2n}^2}{\delta_g}, \tag{A.2b}$$

$$|\pm, n\rangle \simeq -\frac{2\lambda_{1n}\lambda_{2n}}{\sqrt{2\mathcal{A}_{\pm}}}\,|e, n\rangle + \mathcal{O}(\epsilon)\,|i, n+1\rangle + \frac{\lambda_{2n}^2 - \lambda_{1n}^2 - \delta_g\Delta \mp \Theta_{\Delta}}{\sqrt{2\mathcal{A}_{\pm}}}\,|g, n+2\rangle\,, \tag{A.2c}$$

$$|1, n\rangle \simeq \frac{\lambda_{2n}}{\delta_g}\,|e, n\rangle + |i, n+1\rangle + \frac{\lambda_{1n}}{\delta_g}\,|g, n+2\rangle\,. \tag{A.2d}$$

En las ecuaciones anteriores hemos definido

$$\Theta_{\Delta} \equiv \delta_g \sqrt{\left(\frac{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2n}^2}{\delta_g}\right)^2 - 2\left(\frac{\lambda_{2n}^2 - \lambda_{1n}^2}{\delta_g}\right)\Delta + \Delta^2} \tag{A.3}$$

y

$$\mathcal{A}_{\pm} \equiv \lambda_{2n}^4 - \lambda_{2n}^2\Big(2\delta_g\Delta - 2\lambda_{1n}^2 \pm \Theta_{\Delta}\Big) + \Big(\delta_g\Delta + \lambda_{1n}^2\Big)\Big(\lambda_{1n}^2 + \delta_g\Delta \pm \Theta_{\Delta}\Big). \tag{A.4}$$

Nótese en las ecuaciones (A.2c) y (A.2d) que si el estado inicial del átomo es $|e\rangle$, $|g\rangle$ o una combinación lineal de estos, la evolución del sistema bajo las condiciones ya fijadas no permite que se pueble el estado $|i\rangle$. De manera semejante, si comenzamos preparando el átomo en el nivel intermedio y bajo las mismas condiciones anteriores, los estados $|e\rangle$ y $|g\rangle$ no se pueblan apreciablemente. Así, se pueden redefinir estos estados de la siguiente forma

$$|\tilde{k}_n^{\pm}\rangle = -\frac{2\lambda_{1n}\lambda_{2n}}{\sqrt{2\mathcal{A}_{\pm}}}\,|e,n\rangle + \frac{\lambda_{2n}^2 - \lambda_{1n}^2 - \delta_g\Delta \mp \Theta_{\Delta}}{\sqrt{2\mathcal{A}_{\pm}}}\,|g,n+2\rangle\,, \tag{A.5a}$$

$$|\tilde{k}_n^{1}\rangle = |i,n+1\rangle\,. \tag{A.5b}$$

En consecuencia, el hamiltoniano efectivo queda definido en términos de los estados (A.5a) como:

$$\begin{aligned}\widehat{H}_n^{eff} &= E_+\,|\tilde{k}_n^+\rangle\,\langle\tilde{k}_n^+| + E_-\,|\tilde{k}_n^-\rangle\,\langle\tilde{k}_n^-| \\ &= \frac{E_+ + E_-}{2}\Big\{|\tilde{k}_n^+\rangle\,\langle\tilde{k}_n^+| + |\tilde{k}_n^-\rangle\,\langle\tilde{k}_n^-|\Big\} + \frac{E_+ - E_-}{2}\Big\{|\tilde{k}_n^+\rangle\,\langle\tilde{k}_n^+| - |\tilde{k}_n^-\rangle\,\langle\tilde{k}_n^-|\Big\}.\end{aligned} \tag{A.6}$$

Efectuando el cambio de base obtenemos

$$\begin{aligned}\widehat{H}_n^{eff} &\simeq \left(\frac{\Delta}{2} - \frac{\lambda_{1n}^2 + \lambda_{2n}^2}{2\delta_g}\right)\Big\{|e,n\rangle\,\langle e,n| + |g,n+2\rangle\,\langle g,n+2|\Big\} \\ &\quad - \frac{1}{2\delta_g}\Big\{(\lambda_{2n}^2 - \lambda_{1n}^2 - \delta_g\Delta)\,|e,n\rangle\,\langle e,n| + 2\lambda_{2n}\lambda_{1n}\big(|e,n\rangle\,\langle g,n+2| + |g,n+2\rangle\,\langle e,n|\big) \\ &\qquad + \big(-\lambda_{2n}^2 + \lambda_{1n}^2 + \delta_g\Delta\big)\,|g,n+2\rangle\,\langle g,n+2|\Big\} \\ &= \left(\Delta - \frac{\lambda_{2n}^2}{\delta_g}\right)|e,n\rangle\,\langle e,n| - \frac{\lambda_{1n}^2}{\delta_g}\,|g,n+2\rangle\,\langle g,n+2| - \frac{\lambda_{2n}\lambda_{1n}}{\delta_g}\Big\{|e,n\rangle\,\langle g,n+2| + h.c.\Big\}.\end{aligned} \tag{A.7}$$

De forma más conveniente se escribe el hamiltoniano anterior como

$$\widehat{H}_n^{eff} = \frac{1}{2}\left(\Delta - \frac{\lambda_{2n}^2}{\delta_g} - \frac{\lambda_{1n}^2}{\delta_g}\right)\mathbb{I}_n + \frac{1}{2}\left(\Delta - \frac{\lambda_{2n}^2}{\delta_g} + \frac{\lambda_{1n}^2}{\delta_g}\right)\mathbb{Z}_n - \frac{\lambda_{2n}\lambda_{1n}}{\delta_g}\mathbb{X}_n, \tag{A.8}$$

en donde hacemos uso de la notación

$$\mathbb{I}_n = |e,n\rangle\,\langle e,n| + |g,n+2\rangle\,\langle g,n+2| \tag{A.9a}$$

$$\mathbb{Z}_n = |e,n\rangle\,\langle e,n| - |g,n+2\rangle\,\langle g,n+2| \tag{A.9b}$$

$$\mathbb{X}_n = |e,n\rangle\,\langle g,n+2| + |g,n+2\rangle\,\langle e,n|\,. \tag{A.9c}$$

Vale la pena notar que todos los términos del hamiltoniano efectivo H_n^{eff} son del mismo orden (ϵ^2).

Ahora, teniendo en cuenta la forma como actúan los operadores de creación y destrucción de fotones

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{A.10a}$$

$$\hat{a}^{\dagger}\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{A.10b}$$

podemos escribir

$$\sqrt{(n+1)(n+2)}\,|e,n\rangle\langle g,n+2| = \hat{a}^2\,|e,n+2\rangle\langle g,n+2|\,,$$
$$\sqrt{(n+1)(n+2)}\,|g,n+2\rangle\langle e,n| = \hat{a}^{\dagger 2}\,|g,n+2\rangle\langle e,n+2|\,;$$

en consecuencia, el hamiltoniano efectivo $\widehat{H}^{eff}$, calculado empleando la ecuación (A.7), es

$$\begin{aligned}\widehat{H}^{eff} &= \sum \widehat{H}_n^{eff} \\ &= \left\{\Delta - \frac{\lambda_2^2}{\delta_g}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\right)\right\}|e\rangle\langle e| \otimes \sum |n\rangle\langle n| - \frac{\lambda_1^2}{\delta_g}\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|g\rangle\langle g| \otimes \sum |n+2\rangle\langle n+2| \\ &\quad - \frac{\lambda_2\lambda_1}{\delta_g}\Big\{\hat{a}^2\,|e\rangle\langle g| \otimes \sum |n\rangle\langle n| + \hat{a}^{\dagger 2}\,|g\rangle\langle e| \otimes \sum |n+2\rangle\langle n+2|\Big\}.\end{aligned} \tag{A.11}$$

Una manera alternativa de escribir el hamiltoniano efectivo es

$$\widehat{H}^{eff} = \left\{\Delta - \frac{\lambda_2^2}{\delta_g}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\right)\right\}|e\rangle\langle e| - \frac{\lambda_1^2}{\delta_g}\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|g\rangle\langle g| - \frac{\lambda_2\lambda_1}{\delta_g}\Big\{\hat{a}^2\widehat{S}^+ + \hat{a}^{\dagger 2}\widehat{S}^-\Big\} \tag{A.12}$$

en el que se ha empleado la notación para la desintonía de dos fotones definida en (1.41c), $\Delta = \omega_{ei} + \omega_{ig} - 2\omega_c$, y $\widehat{S}^+ = |e\rangle\langle g| = \left(\widehat{S}^-\right)^\dagger$.

Apéndice B

Ecuación de movimiento con disipación

Vamos a considerar en detalle los elementos de matriz del estado compuesto del sistema cuando la interacción de cada átomo con la cavidad es un proceso de dos fotones. Tomamos entonces la ecuación maestra

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{ac} &= \mathcal{L}\hat{\rho}_{ac} \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left[\widehat{H}_{2ph}, \hat{\rho}_{ac}\right] + \frac{\kappa}{2}\left\{2\hat{a}\hat{\rho}_{ac}\hat{a}^{\dagger} - \left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{\rho}_{ac} + \hat{\rho}_{ac}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)\right\}\end{aligned} \tag{B.1}$$

en donde $\widehat{H}_{2ph}$ se toma como el Hamiltoniano efectivo $\widehat{H}_{eff}$ definido por la ecuación (A.12). El primer átomo y el campo se preparan en el estado inicial

$$\rho_1(0) = |e_1, 0\rangle \langle e_1, 0| , \tag{B.2}$$

y al cabo del tiempo τ de interacción el estado conjunto es

$$\rho_1(\tau) = \sum_{a_1,m;b_1,n} \rho_{a_1,m}^{b_1,n}(\tau) |a_1, m\rangle \langle b_1, n| . \tag{B.3}$$

Los $\rho_{a_1,m}^{b_1,n}(t)$ corresponden a las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\rho}_{a_1,m}^{b_1,n}(t) = \langle a_1, m| \frac{d}{dt}\hat{\rho}_1 |b_1, n\rangle \tag{B.4}$$

con la condición inicial (B.2) y definiendo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\rho}_1 = \sum_{\substack{a_1,m\\ b_1,n}} \rho_{a_1,m}^{b_1,n}(t)\Big\{ &-i\Big((\Delta+\beta_2(m+1))\delta_{e_1}^{a_1}\,|e_1,m\rangle\langle b_1,n| + \beta_1 m\delta_{g_1}^{a_1}\,|g_1,m\rangle\langle b_1,n| \\ &+ G\left(\delta_{g_1}^{a_1}\sqrt{m(m-1)}\,|e_1,(m-2)\rangle\langle b_1,n| + \delta_{e_1}^{a_1}\sqrt{(m+1)(m+2)}\,|g_1,(m+2)\rangle\langle b_1,n|\right) \\ &- (\Delta+\beta_2(n+1))\delta_{e_1}^{b_1}\,|a_1,m\rangle\langle e_1,n| - \beta_1 n\delta_{g_1}^{b_1}\,|a_1,m\rangle\langle g_1,n| \\ &- G\left(\delta_{e_1}^{b_1}\sqrt{(n+1)(n+2)}\,|a_1,m\rangle\langle g_1,(n+2)| + \delta_{g_1}^{b_1}\sqrt{n(n-1)}\,|a_1,m\rangle\langle e_1,(n-2)|\right)\Big) \\ &+ \frac{\kappa}{2}\left(2\sqrt{mn}\,|a_1,m-1\rangle\langle b_1,n-1| - (m+n)\,|a_1,m\rangle\langle b_1,n|\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Para construir el estado conjunto de los dos átomos con el campo vamos a suponer que comenzamos a contar el tiempo t desde cero. En ese instante el estado conjunto es

$$\begin{aligned}\rho_{1,2}(0) &= \sum_{\substack{a_1,m\\ b_1 n}} \rho_{a_1,m}^{b_1,n}(\tau)\,|a_1,m\rangle\langle b_1,n| \otimes |e_2\rangle\langle e_2| = \sum_{\substack{a_1,m\\ b_1,n}} \rho_{a_1,m}^{b_1,n}(\tau)\,|a_1,e_2,m\rangle\langle b_1,e_2,n| \\ &+ \sum_{\substack{a_1,m\\ b_1,n}} 0\,|a_1,e_2,m\rangle\langle b_1,g_2,n| + \sum_{\substack{a_1,m\\ b_1,n}} 0\,|a_1,g_2,m\rangle\langle b_1,e_2,n| \\ &+ \sum_{\substack{a_1,m\\ b_1,n}} 0\,|a_1,g_2,m\rangle\langle b_1,g_2,n| \\ &= \sum_{\substack{a_1,a_2,m\\ b_1,b_2,n}} \tilde{\rho}_{a_1,a_2,m}^{b_1,b_2,n}(0)\,|a_1,a_2,m\rangle\langle b_1,b_2,n|\,. \end{aligned}$$

Comparando las dos expresiones obtenemos

$$\tilde{\rho}_{a_1 a_2 m}^{b_1 b_2 n}(0) = \rho_{a_1 m}^{b_1 n}(\tau)\delta_{a_2,e_2}\delta_{b_2,e_2}. \tag{B.6}$$

La ecuación de movimiento se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{1,2} = \mathcal{L}\hat{\rho}_{1,2}$$

en donde $\mathcal{L}$ actúa solamente en los dos últimos subsistemas

$$\sum_{\substack{a_1 a_2,m\\ b_1 b_2,n}} \dot{\tilde{\rho}}_{a_1,a_2,m}^{b_1,b_2,n}(t)\,|a_1,a_2,m\rangle\langle b_1,b_2,n| = \sum_{\substack{a_1,a_2,m\\ b_1,b_2,n}} \tilde{\rho}_{a_1,a_2,m}^{b_1,b_2,n}(t)\,|a1\rangle\langle b1| \otimes \mathcal{L}\left(|a_2,m\rangle\langle b_2,n|\right)$$

así

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{\rho}_{1,2} = \sum_{\substack{a_1,a_2,m\\ b_1,b_2,n}} \tilde{\rho}_{a_1,a_2,m}^{b_1,b_2,n}(t)\Big\{ &-i\Big((\Delta+\beta_2(m+1))\delta_{e_2}^{a_2}\,|a_1,e_2,m\rangle\langle b_1,b_2,n| + \beta_1 m\delta_{g_1}^{a_2}\,|a_1,g_2,m\rangle\langle b_1,b_2,n| \\ &+ G\left(\delta_{g_2}^{a_2}\sqrt{m(m-1)}\,|a_1,e_2,(m-2)\rangle\langle b_1,b_2,n| + \delta_{e_2}^{a_2}\sqrt{(m+1)(m+2)}\,|a_1,g_2,(m+2)\rangle\langle b_1,b_2,n|\right) \\ &- (\Delta+\beta_2(n+1))\delta_{e_2}^{b_2}\,|a_1,a_2,m\rangle\langle b_1,e_2,n| - \beta_1 n\delta_{g_2}^{b_2}\,|a_1,a_2,m\rangle\langle b_1,g_2,n| \\ &- G\left(\delta_{e_2}^{b_2}\sqrt{(n+1)(n+2)}\,|a_1,a_2,m\rangle\langle b_1,g_2,(n+2)| + \delta_{g_2}^{b_2}\sqrt{n(n-1)}\,|a_1,a_2,m\rangle\langle b_1,e_2,(n-2)|\right)\Big) \\ &+ \frac{\kappa}{2}\left(2\sqrt{mn}\,|a_1,a_2,m-1\rangle\langle b_1,b_2,n-1| - (m+n)\,|a_1,a_2,m\rangle\langle b_1,b_2,n|\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales se resuelve numéricamente y de esta forma se determina el estado del sistema completo. Para conocer el estado del subsistema atómico, nuevamente se toma la traza parcial sobre las variables del campo y se calcula la concurrencia con forme cambia el tiempo de interacción y la desintonía de dos fotones.

Bibliografía

[1] M. A. Nielsen y I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge University Press, New York, 2000.

[2] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter y A. Zeilinger. *Experimental quantum teleportation.* Nature **390**, 575, Londres, 1997.

[3] I. Marcikic, H. de Riedmatten, W. Tittel, H. Zbinden, y N. Gisen. *Long-distance teleportation of qubits at telecommunication wavelengths.* Nature **421**, 509, Londres, 2003.

[4] S. Bose, P. L. Knight, M. B. Plenio, y V. Vedral. *Proposal for teleportation of an atomic state via cavity decay.* Phys. Rev. Lett. **83**, 5158, 1999.

[5] S.-B. Zheng y G.-C. Guo. *Scheme for atomic-state teleportation between two bad cavities.* Phys. Rev. A **73**, 032329, 2006.

[6] M. Riebe, H. Häffner, C. F. Roos, W. Hänsel, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, T. W. Körber, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, D. F. V. James y R. Blatt. *Deterministic quantum teleportation with atoms.* Nature **429**, 734, Londres, 2004.

[7] M. D. Barrett, J. Chiaverini, T. Schaetz, J. Britton, W. M. Itano, J. D. Jost, E. Knill, C. Langer, D. Liebfried, R. Ozeri y D. J. Wineland. *Deterministic quantum teleportation of atomic qubits.* Nature **429**, 737, Londres, 2004.

[8] J. I. Cirac y P. Zoller. *Preparation of macroscopic superpositions in many-atom systems.* Phys. Rev. A **50**, R2799, 1994.

[9] Daniel Braun. *Creation of Entanglement by Interaction with a Common Heat Bath.* Phys. Rev. Lett. **89**, 277901, 2002.

[10] J.-W. Pan, D. Bouwmeester, H. Weinfurter, y A. Zeilinger. *Experimental Entanglement Swapping: Entangling Photons That Never Interacted.* Phys. Rev. Lett. **80**, 3891, 1998.

[11] D. Meschede, H. Walther, y G. Müller. *One-Atom Maser.* Phys. Rev. Lett. **54**, 551, 1985.

[12] S. J. D. Phoenix y S. M. Barnett. *Non-local interatomic correlations in the micromaser.* J. Mod. Opt. **40** 979, 1993.

[13] M. Brune, J. M. Raimond y S. Haroche. *Theory of the Rydberg-atom two-photon micromaser.* Phys. Rev. A. **35**. 154, 1987.

[14] H. Moya-Cessa, P. L. Knight, y A. Rosenhouse-Dantsker. *Photon amplification in a two-photon lossless micromaser.* Phys. Rev. A **50**, 1814, 1994.

[15] H.I. Yoo y J.H. Eberly. *Dynamical theory of an atom with two or three levels interacting with quantized cavity fields.* Phys. Rep. **118**, Issue 5, 239, 1985.

[16] M.F. Fang y X. Liu. *Influence of the Stark shift on the evolution of field entropy and entanglement in two-photon processes.* Phys. Lett. A. **210**. 11, 1996.

[17] M. S. Ateto. *Control of a nonlocal entanglement in the micromaser via two quanta non-linear processes induced by dynamic Stark shift.* Int. J. Theor. Phys. **48**. 545, 2009.

[18] Biplab Ghosh, A. S. Majumdar y N. Nayak. *Control of atomic entanglement by the dynamic Stark effect.* J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **41** 065503, 2008.

[19] J. León y C. Sabín. *Photon exchange and correlation transfer in atom-atom entanglement dynamics.* Phys. Rev. A. **79**. 012301, 2009.

[20] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, y G. Grynberg. Nueva York. *Photons y Atoms. Introduction to quantum electrodynamics.* Wiley, Nueva York, 1992.

[21] S. Haroche y J. M. Raimond. *Exploring the Quantum. Atoms, cavities anf photons.* Oxford University Press, Nueva York, 2009.

[22] M. O. Scully y M. S. Zubairy. *Quamtum Optics.* Cambridge University Press, New York, 1997.

[23] E.T. Jaynes y F.W. Cummings. *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser.* Proc. IEEE **51**, 89, 1963.

[24] P. Alsingh y M.S. Zubairy. *Collapse and revivals in a two-photon absorption process.* J. Opt. Soc. Am. **B 4**. 177, 1987.

[25] R.R. Puri y R.K. Bullough. *Quantum electrodynamics of an atom making two-photon transitions in an ideal cavity.* J. Opt. Soc. Am. **B 5**. 2021, 1988.

[26] A. Einstein, B. Podolsky, y N. Rosen. *Can Quantum-Mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Rev. **47**, 777, 1935.

[27] G. García Alcaine. *Enredo cuántico* Revista española de física, **14**(1), 17, 2000.

[28] J. S. Bell. *On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics* Rev. Mod. Phys. **38**, 447, 1966.

[29] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony y R. A. Holt. *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories* Phys. Rev. Lett. **23**, 880, 1969.

[30] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. Smolin y W. K. Wootters. *Mixed-state entanglement and quantum error correction* Phys. Rev. A. **54**, 3824, 1996.

[31] A. Peres *Quantum Theory: Concepts and methods.* Kluwer Academic Publishers, Nueva York, 2002.

[32] W. K. Wootters. *Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits.* Phys. Rev. Lett. **80**, 2245, (1998).

[33] A. Peres. *Separability criterion for density matrices.* Phys. Rev. Lett. **77**, 1413, (1996).

[34] M. Horodecki, P. Horodecki, y R. Horodecki. *Separability of mixed states, necessary and sufficient conditions.* Phys. Lett. A **223**, 1, (1996).

[35] G. Vidal y R. F. Werner. *Computable measure of entanglement.* Phys. Rev. A 65, 032314 (2002).

[36] H. P. Breuer y F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems.* Oxford. University Press, Nueva York, 2002.

[37] E. Hagley, X. Maître, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond y S. Haroche. *Generation of Einstein-Podolsky-Rosen Pairs of Atoms.* Phys. Rev. Lett. **79**, 1, 1997.

[38] V. Bartzis y N. Nayak. *Two-photon Jaynes-Cummings model.* J. Opt. Soc. Am. B **8**, 1779, 1991.

[39] T. Yu y J. H.Eberly. *Evolution from Entanglement to Decoherence of Bipartite Mixed "X" States.* arXiv:quant-ph/0503089v3, 2007.

[40] M. Takatsuji. *Theory of coherent two-photon resonance.* Phys. Rev. A. **11**. 2, 1975.