



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Unidad Didáctica para la Construcción y significación del concepto de número real con los estudiantes del grado undécimo

I.Q. Yecid Eduardo Puerto Laytón

Universidad Nacional de Colombia

Facultad De Ciencias

Bogotá, Colombia

2011

Unidad Didáctica para la Construcción y significación del concepto de número real con los estudiantes del grado undécimo

I.Q. Yecid Eduardo Puerto Laytón

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:
Ph.D. Leonardo Rendón Arbeláez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad De Ciencias
Bogotá, Colombia
2011

Mientras sus hermanos estudiaban, se casaban, tenían hijos y dirigían el negocio de la familia, desaprovechando su vida junto con el resto de la humanidad anónima en las rutinas diarias de la subsistencia, la procreación y el ocio, él, como un Prometeo redivivo, se esforzaba por echar luz sobre el más oscuro e inaccesible rincón del conocimiento.

El tío Petros y la conjetura de Goldbach.

¡Cuánto mayor sentido tiene ahora la vida! En lugar de nuestro lento y pesado ir y venir a los pesqueros, ¡hay una razón para vivir! Podemos alzarnos sobre nuestra ignorancia, podremos descubrirnos como criaturas de perfección, inteligencia y habilidad. ¡Podremos ser libres!

Juan Salvador Gaviota

A Mamá, Papá y mi Zoila.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional de Colombia, mi segunda casa, artífice de lo que soy.

Al profesor Leonardo Rendón, su permanente interés en mi formación, la claridad y profundidad de sus explicaciones así como su conocimiento inspirador supieron mostrarme que en verdad se puede tener un excelente director (GB).

Al profesor Crescencio Huertas, por las acertadas y pertinentes observaciones que orientaron en forma decisiva los aspectos pedagógicos de este trabajo.

A la profesora Clara Helena Sánchez, tanto por su preocupación por la formación docente y su compromiso con la Universidad así como por su decidido empeño en perfeccionar esta Maestría de manera continua.

A mi gran amigo, Brian Gómez; su nobleza y orientación al servicio, su apoyo moral así como la inteligencia y profundidad de sus aportes y comentarios fueron decisivos en la culminación de este trabajo.

A los demás amigos y compañeros, especialmente a Herson Hincapié, cuya compañía y buen sentido del humor fueron un soporte valioso durante el transcurrir de la Maestría.

A mis padres, mi hermano y hermanas, quienes supieron sobrellevar mis estados de ánimo y mis afanes. Especialmente a Mamá, cuyo amor y paciencia no están acotados superiormente.

A todas aquellas personas que, de uno u otro modo, colaboraron de manera significativa en la culminación de este trabajo y que, por razones de espacio, me es imposible mencionar en su totalidad.

Resumen

El siguiente trabajo presenta la construcción detallada de una Unidad Didáctica destinada a la apropiación y manejo de las propiedades fundamentales del sistema numérico real (estructura algebraica, de orden, densidad y propiedad de completitud) así como de las diversas representaciones empleadas para dicho conjunto numérico (representación fraccionaria, decimal y en base n -ésima, fracciones continuas simples, intervalos encajados) y dirigida a estudiantes que culminan su formación en educación secundaria. Se hace una aproximación histórica y disciplinar relacionada tanto con las diversas construcciones de los números reales así como de las fracciones continuas simples, que proporcionan un respaldo epistemológico y teórico a las actividades allí propuestas. La Unidad Didáctica está pedagógicamente enmarcada dentro del modelo del aprendizaje significativo y presenta de manera concreta las estrategias, los contenidos así como el resultado esperado por parte de los y las estudiantes luego de su posible aplicación.

Palabras clave: Didáctica, educación secundaria, fundamentos de matemáticas, estrategias de enseñanza, números reales, historia de las matemáticas, aprendizaje significativo.

Abstract

This paper offers a detailed construction of a Didactical Unit intended to the understanding and a competent handling of the fundamental properties related to the real number system (algebraic structure, ordering, density and completeness) as well as the several schemes used to depict such quantities (common fractions, decimal and n th base expansions, simple continued fractions and nested intervals); the Didactical Unit is to be applied to students that are about to end their secondary school. Historical and technical approaches are made, mainly related to the several theoretic constructions about real numbers and simple continued fractions as well. Those are intended to give an epistemological and technical support to the classroom activities. The Didactical Unit is framed inside “meaningful learning” approach and shows the strategies and contents, as well as the expected results from the students after a possible application.

Keywords: Didactics, secondary school mathematics, mathematics foundations, teaching methods, real numbers, history of mathematics, meaningful learning.

Contenido

	Pág.
Resumen	V
Contenido	VI
Lista de Figuras.....	VIII
Lista de Tablas	IX
Introducción.....	1
1. Identificación Del Problema Didáctico.....	3
1.1. Objetivo General	4
1.2. Objetivos Específicos.....	4
2. Aspectos históricos en la construcción de los números reales	5
2.1. Inconmensurabilidad y Matemática Griega	5
2.2. Razón, proporción y la solución eudoxiana.....	7
2.3. El Siglo XIX y la Aritmetización del Análisis	9
2.4. Intentos concretos en la fundamentación aritmética del continuo numérico	10
2.4.1. Martin Ohm y la construcción de los racionales	10
2.4.2. William Rowan Hamilton y la continuidad del tiempo.....	10
2.4.3. Bernhard Bolzano y las críticas hacia el Método	11
2.4.4. Las variables progresivas de Charles Méray.....	12
2.4.5. George Cantor y las sucesiones fundamentales	13
2.4.6. Richard Dedekind. La esencia de la continuidad y las cortaduras racionales	14
2.4.7. Los agregados de Karl Weierstrass.....	16
2.4.8. Introducción axiomática de David Hilbert.....	17
2.5. Aproximación histórica de las Fracciones Continuas	19
2.5.1. Antecedentes el Matemática Griega e Hindú	19
2.5.2. Nacimiento y primeros desarrollos en la teoría de las fracciones continuas	22

2.5.3.	Desarrollo formal de la teoría de las fracciones continuas.....	26
2.5.4.	Contribuciones modernas a la teoría de las fracciones continuas.....	30
3.	Aspectos disciplinares en la construcción de los números reales	33
3.1.	Definición Axiomática	33
3.2.	Construcción mediante cortaduras de Dedekind	35
3.3.	Construcción mediante Sucesiones Regulares.....	40
3.4.	Aproximación a los números reales desde las Fracciones Continuas	45
3.4.1.	Fracciones continuas finitas	45
3.4.2.	Fracciones continuas infinitas	47
4.	Aspectos pedagógicos en la construcción de los números reales	55
4.1.	Introducción e intencionalidad	55
4.2.	Marco pedagógico.....	55
4.3.	Caracterización de la Institución	56
4.4.	Estrategias generales de la U.D.....	57
4.5.	Estrategias específicas de la U.D.....	57
4.6.	Contenidos de la U.D.....	57
4.6.1.	Conceptuales	57
4.6.2.	Procedimentales.....	58
4.6.3.	Actitudinales.....	58
4.7.	Metodología de la U.D.	58
4.8.	Materiales y Recursos	59
4.9.	Actividades de Introducción.....	59
4.10.	Actividades de Desarrollo.....	60
4.11.	Evaluación: Criterios e Instrumentos	61
5.	Conclusiones y recomendaciones	63
5.1.	Conclusiones.....	63
5.2.	Recomendaciones	64
	Bibliografía.....	65
A.	Anexo: Actividades introductorias y de exploración sobre números reales.....	67
B.	Anexo: Expresiones decimales y fracciones continuas en \mathbb{Q}	71
C.	Anexo: Números irracionales: Expresiones decimales y fracciones continuas.	89
D.	Anexo: Orden y Álgebra para números racionales e irracionales.	105

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 2-1: Segmentos conmensurables [15].....	5
Figura 2-2: Segmentos conmensurables A y B en razón 14 a 5 [15].	6
Figura 2-3: Proporcionalidad entre el cuadrado de la diagonal y el cuadrado del lado [10].	6
Figura 2-4: Construcción eudoxiana del concepto de razón [15].....	7
Figura 2-5: Construcción eudoxiana del concepto de proporción [15].....	8
Figura 2-6: División en extrema y media razón [15].....	19

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 2-1: Números lado y diagonal para $\sqrt{2}$	21
Tabla 4-1: Caracterización general del plantel.....	56

Introducción

La construcción formal del concepto de número real planteó serias dificultades a la comunidad matemática desde milenios. La aprehensión y entendimiento de sus propiedades así como el establecimiento riguroso de las mismas solo se pudo completar hasta finales del siglo *XIX* mediante los trabajos de matemáticos de primera categoría quienes, haciendo uso de diversos acercamientos y representaciones, consiguieron fundamentar sólidamente el Cálculo y el Análisis; es entonces comprensible que la transposición didáctica de sus construcciones resulte compleja, ardua y, en algunos casos, excesivamente prolongada.

Los libros de texto de enseñanza del Cálculo en enseñanza media, abordan el sistema de los números reales haciendo una descripción más o menos completa de los conjuntos numéricos, señalando algunos de sus elementos así como ciertas “reglas” de clasificación que no son discutidas con un sentido crítico. La correspondencia recta real - número real se da por sentada (desde un punto de vista muy intuitivo) y a partir de aquella se construyen los conceptos de orden e intervalo así como las operaciones asociadas con estos. Es sobre esta base que se discuten posteriormente los conceptos cruciales del Cálculo: Límite, Continuidad y Derivada. Sin embargo, quedan sin analizar algunas de las propiedades fundamentales del continuo numérico, tales como la densidad y completitud, esenciales para una correcta descripción y un completo entendimiento de los conceptos cruciales mencionados.

El trabajo realizado presenta un acercamiento al sistema de los números reales para enseñanza media, abordando diversas representaciones (fraccionaria, decimal, fracción continua, esquemática sobre la recta numérica) para los números reales y examinando, a partir de aquellas, las propiedades de cuerpo y orden, así como las topológicas densidad y completitud, para este conjunto ordenado y completo. La correspondencia entre número real y recta real, introducida apelando a la propiedad fundamental de los intervalos anidados, permite definir con precisión el álgebra entre números reales así como el orden, la densidad y la completitud que los caracterizan. Las actividades de desarrollo están dirigidas, principalmente, a estudiantes de grado undécimo los cuales, a lo largo de su formación matemática durante la enseñanza básica y media, han construido un concepto de “número real” que permite tanto su refinamiento con las actividades propuestas así como la introducción de nuevos conceptos, fracciones continuas e intervalos anidados, necesarios para el trabajo posterior sobre álgebra y orden.

La Maestría en la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales es enfática en el sentido de fortalecer la labor docente desde una perspectiva epistemológica y disciplinar. Por tal motivo, este trabajo inicia con un recorrido histórico y epistemológico sobre la construcción del concepto de número real, desde los inconmensurables de la matemática griega hasta constructos más elaborados como los realizados por Cantor, Dedekind y Weierstrass, que se exponen con cierto detalle. El desarrollo histórico sobre las fracciones continuas ofrece un panorama sobre su

nacimiento, desarrollo y uso en contextos físicos y matemáticos concretos así como su relación con el tópico central de este trabajo, esto es, con la identificación y expresión de números reales y la aproximación de los mismos mediante números racionales, punto crucial en la actividad de desarrollo 3 donde se exploran los conceptos de álgebra y orden.

A continuación se exponen rigurosamente los aspectos disciplinares asociados a la construcción del sistema de números reales bajo la óptica axiomática, las cortaduras de Dedekind y las sucesiones fundamentales de Cantor junto con una exposición de las propiedades que caracterizan a las expresiones en forma de fracción continua simple, finita o infinita, para números reales; este capítulo se considera como la columna vertebral de las actividades de desarrollo ya que respalda dichos contenidos desde un punto de vista teórico consiguiendo el balance entre unos contenidos puramente pedagógicos y didácticos (presentes en cualquier libro de texto para la enseñanza) y exposiciones de carácter técnico las cuales, siendo imprescindibles en toda labor matemática, son de difícil (si no imposible) acceso a estudiantes de educación media a quienes están dirigidas dichas actividades de desarrollo.

1. Identificación Del Problema Didáctico

A lo largo de la práctica docente y de la observación de las actividades realizadas por los y las estudiantes en lo concerniente al análisis, interpretación y planteamiento de metodologías sistemáticas en resolución de problemas de carácter matemático, así como de las posibles formas de presentación de los resultados, se han evidenciado dificultades tanto de carácter conceptual como de tipo analítico e interpretativo en la representación, manejo algebraico y topológico del sistema de números reales cuya incidencia es primaria dentro de los exámenes de estado y en las pruebas académicas con las que son evaluados regularmente.

La necesidad de propender por el desarrollo conceptual así como de estas capacidades de análisis e interpretación surge desde los propios estándares curriculares en Matemáticas referentes a los pensamientos *Númérico, Espacial, Métrico y Variacional* [1, 23], así como del carácter vocacional de la Institución, que en sus cursos superiores (grados 10° y 11°) requiere que el o la estudiante represente, aproxime, ordene y opere números reales de forma apropiada. Desde un punto de vista pedagógico, la apropiación usual del concepto de número real es incompleta, entendida como la simple adjunción de un conjunto de números (a uno preexistente) cuyas propiedades, así como sus características, no son explícitas, por lo que no se identifica su necesidad, tanto en la representación de ciertas soluciones a ecuaciones polinómicas como en la cuantificación de la medida de ciertas magnitudes (longitudes, áreas, pesos) que llevan al concepto de continuidad numérica. De este modo, es vital el fortalecimiento de componentes disciplinares y competencias matemáticas establecidas en los estándares, como será expuesto a lo largo de este trabajo.

Bajo esta perspectiva se pretenden realizar acciones educativas que fortalezcan este tipo de competencias y que no se limiten al simple cumplimiento de los contenidos programáticos del Área de Matemáticas, sino que promuevan aquellos procesos cognitivos indispensables en la Educación Superior.

En concordancia con lo anterior, se desprende la siguiente pregunta problema:

“¿Cómo desarrollar e introducir las nociones algebraicas, de ordenamiento y topológicas de densidad y completitud en los estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Distrital Colegio Rafael Uribe Uribe para dar significado al concepto de número real?”

El concepto de número real que se pretende construir considera los siguientes aspectos:

- Diferencias entre números racionales e irracionales.
- Representación y construcción de un número real.
- Ubicación en la recta numérica. Estructura algebraica y de orden.
- Densidad y propiedad de completitud.

1.1. Objetivo General

Como objetivo general se propone:

Diseñar una unidad didáctica que introduzca al estudiante al concepto de número real, así como en el reconocimiento de sus propiedades, necesarias en la construcción formal de un sistema numérico apropiado para desarrollos matemáticos rigurosos.

1.2. Objetivos Específicos

Con el propósito de cumplir el objetivo general establecido en este trabajo, se hace necesario:

- Aproximar, desde una perspectiva histórica, a las nociones de inconmensurabilidad, irracionalidad y continuidad mediante el análisis de textos históricos y matemáticos, poniendo especial énfasis en los momentos de definición de los mismos y las razones de su introducción.
- Identificar las diversas aproximaciones disciplinares de los conceptos ya mencionados, así como señalar las ventajas e inconvenientes tanto a nivel teórico como pedagógico.
- Diseñar instrumentos que permitan rastrear las preconcepciones de los estudiantes en lo tocante a las propiedades, completitud y densidad del sistema numérico real.
- Elaborar actividades de aula destinadas al reconocimiento de las propiedades (densidad, completitud, estructura algebraica) y a la necesidad de la introducción de los números reales.

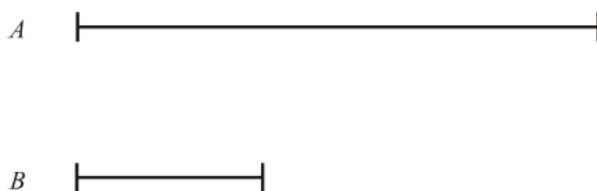
2. Aspectos históricos en la construcción de los números reales

2.1. Inconmensurabilidad y Matemática Griega

La consigna pitagórica “Todo es número” representaba la armonía universal y el concepto de número como principio rector del cosmos y materia constitutiva del universo. En un plano estrictamente matemático, los pitagóricos tenían el absoluto convencimiento de la conmensurabilidad de cualquier par de segmentos sin importar su longitud. Basados en este supuesto, las construcciones y razonamientos matemáticos condujeron a los conceptos cruciales de razón y proporción entre magnitudes.

Es de importancia para la discusión que sigue aclarar el concepto de medida común a dos segmentos así como del proceso llevado a cabo para hallarlo. Tal proceso fue denominado como *antifairesis*, que no es más que una sustracción sucesiva de segmentos y en términos modernos se reconoce como el algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos números tal y como se demuestra en los *Elementos* [11]. Considere los segmentos que se muestran en la Figura 2-1:

Figura 2-1: Segmentos conmensurables [15].

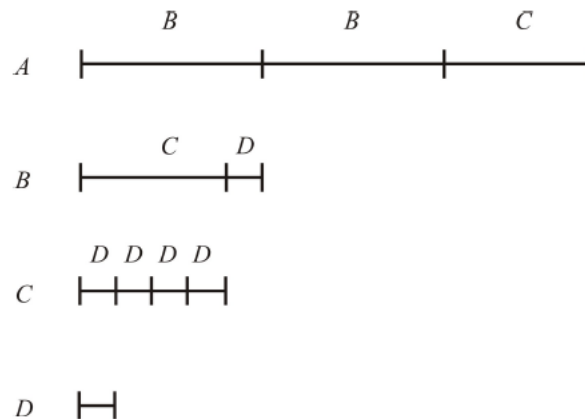


Se observa que el segmento B es de menor longitud que el segmento A ; el método antifairético requiere “medir” el segmento mayor con el segmento menor, es decir, incluir el segmento B dentro del segmento A tantas veces como sea posible. En el caso especial cuando el segmento menor cabe un número exacto de veces en el segmento mayor, se dice que B es la medida común de ambos. El caso más común se presenta cuando la medición deja un resto C menor al segmento B , en este caso puede emplearse este segmento menor con el fin de medir al segmento B y el procedimiento se repite. Si los dos segmentos iniciales son conmensurables, el proceso antifairético termina y el último segmento obtenido es su medida común (Figura 2-2).

Algunas de las proposiciones expuestas en los Elementos son de carácter antifairético y, de hecho, son fácilmente reconocibles en sus versiones modernas, como la Proposición 1 del Libro X (empleada para demostrar no solamente la inconmensurabilidad de la razón diagonal-lado sino también la inconmensurabilidad de los segmentos divididos en extrema y media razón) que en su versión moderna es conocida como *propiedad arquimediana*:

Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud mayor que la de su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.

Figura 2-2: Segmentos conmensurables **A** y **B** en razón 14 a 5 [15].



Al examinar las razones y proporciones establecidas en un cuadrado, el teorema de Pitágoras aplicado sobre el triángulo rectángulo formado por dos lados adyacentes y la diagonal genera la siguiente proporción: El cuadrado construido sobre la diagonal del cuadrado es al cuadrado original como 2 es a 1, esto es, la razón entre el cuadrado de la longitud de la diagonal y el cuadrado de la longitud de un lado es de 2 a 1, como lo muestra la Figura 2-3:

Figura 2-3: Proporcionalidad entre el cuadrado de la diagonal y el cuadrado del lado [10].



La proporción recién mencionada origina la siguiente pregunta: ¿Cuál es la proporción que se establece cuando se comparan la diagonal y el lado de un rectángulo? La respuesta a esta pregunta (y la consecuente demostración de la inconmensurabilidad de los segmentos implicados) trajo consigo una ruptura con la naturaleza epistemológica e, incluso, ontológica del concepto de número [15], y en consecuencia, un cambio de visión acerca de la propia naturaleza y definición de los conceptos de razón y proporción.

La demostración de la inconmensurabilidad apela a la *antifairesis* así como a la “aversión” que manifestaba la matemática griega frente a los procesos infinitos y es posible consultar demostraciones de la inconmensurabilidad de las razones diagonal-lado en un cuadrado y de los segmentos generados por la división en extrema y media razón [15].

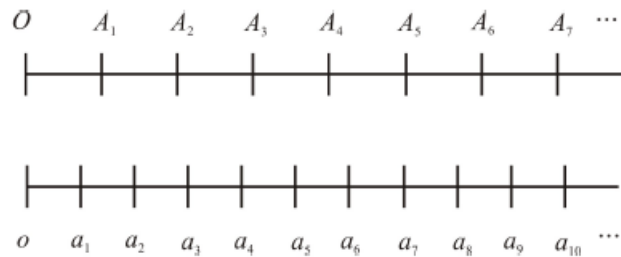
2.2. Razón, proporción y la solución eudoxiana

Los motivos de carácter epistemológico acerca de la propia naturaleza de número así como de las definiciones de razón y proporción demandaron una re-conceptualización de estos dos últimos conceptos de manera que abarcaran tanto las magnitudes conmensurables como las inconmensurables en vista que la teoría clásica de las proporciones que sustentaba la geometría pitagórica se mostró incompleta. La solución fue proporcionada brillantemente por Eudoxio de Cnido quién reconoció la vital importancia de la propiedad arquimediana en una nueva definición del concepto de razón, tal y como lo expone Euclides en la Definición 4 del Libro V de los Elementos:

Se dice que las magnitudes guardan razón entre sí cuando, al multiplicarse, puedan exceder la una a la otra.

El propósito de esta definición es el siguiente: Suponga que el segmento D , correspondiente a la diagonal de un cuadrado, se lleva de manera consecutiva sobre una línea recta desde un origen O generando una serie de marcas sobre ésta denotadas como A_1, A_2, A_3, \dots . Ahora, si sobre una línea recta (paralela a la anterior) y desde un origen o se posiciona consecutivamente el segmento L , se generan marcas consecutivas designadas como a_1, a_2, a_3, \dots . El patrón generado se muestra en la Figura 2-4:

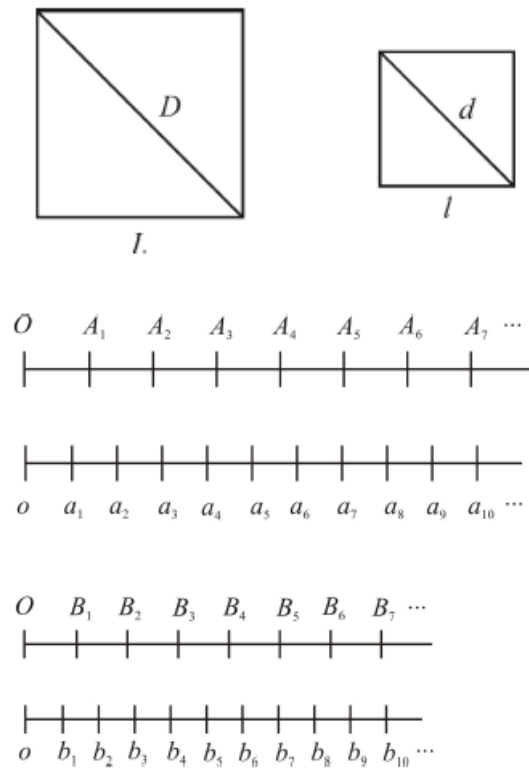
Figura 2-4: Construcción eudoxiana del concepto de razón [15].



Si las magnitudes en cuestión fueran conmensurables, alguna de las marcas superiores coincidiría con alguna de las inferiores, esto es, alguna A_m se ubicaría en la misma posición que alguna a_n , de modo que se establecería la proporción $D : L :: n : m$. La clave de la definición eudoxiana de razón radica en la observación que, para magnitudes inconmensurables, *ninguna* de las marcas A_i coincidiría con alguna de las a_j , lo que implica que toda A será superada por alguna a y viceversa lo cual, en términos de los segmentos dados inicialmente, afirma que un múltiplo de D superará cualquier múltiplo particular de L y viceversa. Es de notar que la definición de razón manejada por Eudoxo abarca tanto el caso conmensurable (en el cual la coincidencia entre marcas se presentará un número infinito de veces) como el inconmensurable (no hay coincidencia alguna entre marcas por lo que toda A se encontrará entre dos a sucesivas y viceversa, toda a se encontrará entre dos A consecutivas).

Con esta definición de razón en mente, el concepto de proporción se establece casi que de manera inmediata apelando a la noción de “misma razón”. Si, de manera intuitiva, se espera establecer una proporción entre las diagonales y lados de dos cuadrados distintos, denotadas como D, L y d, l , respectivamente, entonces construcciones similares a las de la figura Nº 4 realizadas para ambos cuadrados mostrarán idénticas posiciones relativas entre las marcas generadas para cada uno de ellos como lo ilustra la Figura 2-5:

Figura 2-5: Construcción eudoxiana del concepto de proporción [15].



Que la identidad de las posiciones relativas entre las marcas A, a y B, b abarcan la proporcionalidad para magnitudes conmensurables es inmediato ya que, para éstas, tal identidad puede incluir la coincidencia entre marcas. El paso lógico a continuación es precisar esa noción de “misma razón”, labor que se concreta en la Definición 5 del Libro V de los Elementos:

Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

De este modo, la proporción $D : L :: d : l$ significa que, para cualquier par de números m, n , se tiene:

- Si $m \cdot D > n \cdot L$, entonces $m \cdot d > n \cdot l$, ó
- Si $m \cdot D = n \cdot L$, entonces $m \cdot d = n \cdot l$, ó
- Si $m \cdot D < n \cdot L$, entonces $m \cdot d < n \cdot l$.

Así, mediante la Definición 6 del Libro V de los Elementos se consigue dominar el concepto de proporción para magnitudes conmensurables e inconmensurables:

Llámense proporcionales las magnitudes que guardan misma razón.

Tal y como lo menciona Jiménez [15]:

“Exposiciones metódicas como éstas sólo son posibles si vienen precedidas de un largo proceso, teóricamente doloroso, compuesto de pocos aciertos y muchos errores, en los que el expositor se presenta casi como un prodigioso armador de un difícil rompecabezas histórico, que le llegó con todas o casi todas las piezas incluidas. De hecho, cualquier libro de matemática actual no es más que una instancia de un proceso de esta naturaleza, algunos no más que simples reconstrucciones de rompecabezas ya armados. Todo profesor de matemática haría bien informando de esto a sus discípulos”.

2.3. El Siglo XIX y la Aritmetización del Análisis

Al inicio del siglo XIX, la imprecisión de algunos conceptos así como la carencia de rigor en algunos de los razonamientos y demostraciones en el análisis, suscitaron fuertes cuestionamientos acerca de los métodos empleados y de los vacíos conceptuales en áreas cruciales, entre las que se distinguían [5]:

- Imprecisión y vaguedad del concepto de función así como de su continuidad.
- Uso indiscriminado de las series infinitas sin atender a cuestiones relacionadas con su convergencia.
- Representación de funciones mediante series trigonométricas y la continuidad de las mismas.
- Fundamentación conceptual de las nociones de límite, derivada e integral.

Sobre el asunto, Gauss ya se había pronunciado [21], en su memoria *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*, acerca de los métodos que hacían un uso indiscriminado de evidencias geométricas y generalizaciones no probadas, todo como producto de la confianza sobre la base intuitiva en la que descansaba el Análisis. Dentro de los propósitos que persiguió la comunidad matemática de la época denominada la *era del rigor en el análisis*, se destacaban:

- Fundamentar el Análisis sobre la Aritmética y no sobre la Geometría, esto es, liberarlo de nociones geométricas e intuitivas.
- Dotar de fundamentación lógica y consistente otras áreas de la Matemática cuyos resultados dependían fuertemente del Análisis, p. ej. El Análisis Complejo.

A continuación se realizará una breve descripción de los intentos hechos por matemáticos del siglo XIX destinados a rigORIZAR una parte fundamental del Análisis: *La fundamentación lógica del sistema de números reales*.

2.4. Intentos concretos en la fundamentación aritmética del continuo numérico

2.4.1. Martin Ohm y la construcción de los racionales

El intento de unificar la Matemática desde la Aritmética en una forma análoga a como lo hizo Euclides con la Geometría fue su principal objetivo, expuesto en su obra *Versuch eines vollständig konsequenten Systems der Mathematik* hacia el año 1822. Su construcción presupone el conocimiento tanto de los números naturales y sigue una ruta similar al método genético descrito por Hilbert, esto es, define dos operaciones de composición interna (+, ·) y prueba las propiedades conmutativa y asociativa así como la distributividad del producto respecto a la suma, luego introduce expresiones del tipo $\frac{1}{b}$ y define los cocientes como productos de la forma $a \cdot \left(\frac{1}{b}\right)$. Esto supone una “construcción”, más o menos detallada, de los racionales. Para los irracionales, Ohm sólo considera expresiones de la forma $a^{\frac{1}{b}}$.

Históricamente, el intento de Ohm es importante ya que constituye el primer intento de fundamentación aritmética de la Matemática, si bien carece del rigor requerido para tal fin [21].

2.4.2. William Rowan Hamilton y la continuidad del tiempo

En su obra *Algebra as the science of pure times*, presentada ante la Academia Real de Irlanda hacia el año 1835, basaba su construcción en la noción de “movimiento y tiempo” para todos los números, la cual era poco satisfactoria dado que apelaba a una noción puramente física, imprescindible para justificar los conceptos que en dicha obra desarrollaba. En su trabajo, el cual parte del conocimiento de los números naturales y sus propiedades, construye los enteros negativos y el cero considerándolos como *series equidistantes de momentos* [5] en la forma (Ecuación 2.1):

$$\dots E'', E', E, A, B, B', B'' \dots \quad (2.1)$$

Cada variable representa momentos o instantes de tiempo sucesivos en los que los intervalos de tiempo entre ellos son constantes. Es tácito un ordenamiento entre los instantes mencionados lo cual apela, claramente, a una imagen física del flujo de tiempo percibido solamente de manera intuitiva. Desde un instante patrón, denominado instante cero o instante A , Hamilton define los momentos positivos y negativos mediante un operador “de salto” y uno de “inversión”, que en términos modernos se interpretan como la adición repetida de la unidad “de tiempo” (para momentos positivos) y sus opuestos (para momentos negativos), éstos últimos con la introducción de “ordinales” $-1, 0, 1, 2, 3 \dots$, haciendo posible la representación de los momentos (con referencia al patrón A) en la forma (Ecuación 2.2):

$$\dots -3a, -2a, -1a, 0, 1a, 2a, 3a \dots \quad (2.2)$$

Donde a es la unidad de tiempo mencionada. Ya definidos estos momentos, Hamilton consigue demostrar el cumplimiento de las propiedades usuales de la adición y el producto entre enteros, esto es: conmutatividad, asociatividad, distributividad y la existencia de opuestos aditivos. Una

vez definidos los enteros y demostradas sus propiedades, introduce los racionales de una forma similar [5].

La analogía física de la continuidad del tiempo, que impregna fuertemente el trabajo de Hamilton, le sugiere lo siguiente: Si dada una partición de los números racionales en dos clases A y B de forma que cada elemento del primer conjunto es menor que todo elemento del segundo y, además, no existe ningún racional entre aquellos, la partición determina un número irracional. Si b es un racional positivo entonces, tomando como conjunto A una sucesión μ_j de racionales $\frac{m}{n}$ tales que $(\frac{m}{n})^2 < b$ y como conjunto B otra sucesión ν_j de racionales $\frac{p}{q}$ tales que $(\frac{p}{q})^2 < b$, el número designado como \sqrt{b} es, esencialmente, la partición determinada por estas dos sucesiones. Esta teoría de los números similares, similar en su desarrollo a la expuesta por Dedekind (aunque no en su carácter y fundamento lógico), no fue llevada a cabo hasta sus últimos términos, sin embargo, es un referente importante del tipo de razonamiento que se emplearía posteriormente en diversas construcciones, esto es, la construcción de los irracionales exclusivamente a partir de los racionales.

2.4.3. Bernhard Bolzano y las críticas hacia el Método

Fue uno de los primeros en reconocer la necesidad de un soporte lógico y riguroso de los números reales. Su demostración del Teorema de los valores intermedios¹, contenida en la obra *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes* hacia el año 1817, tenía una debilidad de carácter técnico asociada a una comprensión incompleta del sistema numérico real². Bolzano criticaba el carácter de las demostraciones hechas hasta ese momento de tal teorema las cuales, empleando métodos geométricos que no suponían objeción alguna para él, pretendían deducir verdades generales a partir de resultados que pertenecen a un campo particular. Aunque este trabajo pasó desapercibido por los matemáticos contemporáneos, fue redescubierto hacia el año 1870 [21] y su contenido revela resultados que pueden considerarse como decisivos en la fundamentación aritmética del análisis, entre los que se destaca el reconocimiento de la suficiencia de lo que posteriormente se reconocería como el criterio de Cauchy para la convergencia de sucesiones: al considerar, para un x fijo, una sucesión de funciones $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ si se tiene que, para un n suficientemente grande, la diferencia $f_{n+r}(x) - f_n(x)$ puede hacerse menor que cualquier cantidad positiva dada, sin importar el valor del índice r , entonces existe una magnitud fija X tal que la sucesión “se acerca cada vez más” a tal valor y tanto como se desee. Aquí se manifiesta otra debilidad técnica acerca de la naturaleza de ese “valor fijo” X ya que carecía, nuevamente, de una fundamentación adecuada de \mathbb{R} sobre la cual basarse [16]. Este resultado adolece de otra deficiencia aún más sutil, esto es, la asunción del conocimiento de la propiedad de completitud de \mathbb{R} con el propósito de definir tales “aproximaciones” con la precisión deseada sin haber definido con anterioridad los objetos matemáticos sobre los que es posible aplicar tal definición de “aproximación”. Este círculo vicioso en el razonamiento fue percibido posteriormente por la comunidad matemática de la época e impulsó la fundamentación aritmética del análisis sobre criterios de convergencia y aproximación que hicieran uso exclusivo de las propiedades conocidas de \mathbb{Q} [3].

¹ Si para una función continua en un intervalo $[a, b]$ se tiene $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces existe al menos un real $c \in [a, b]$ para el que $f(c) = 0$.

² De hecho, la propiedad que sustenta el Teorema es la propiedad de completitud de \mathbb{R} .

Los resultados más importantes y de mayor relevancia para la aritmetización del análisis son presentados hacia el año 1830 en su obra inédita *Teoría de las Magnitudes* que recoge tópicos relacionados con:

- Continuidad de las funciones: Demostración del Teorema del valor Intermedio, en el que emplea el método de bisección de un intervalo junto con una proposición (que no demuestra) y es conocida en análisis superior como el Teorema de Bolzano-Weierstrass³. Se percibe aquí con claridad el argumento circular ya que el cumplimiento del teorema de Bolzano-Weierstrass en \mathbb{R} equivale a la completitud de este último cuerpo ordenado y arquimediano [19].
- Construcción de funciones continuas en un intervalo con infinitos máximos y mínimos así como de funciones continuas y no derivables en ningún punto a manera de contraejemplos para la discusión suscitada en aquella época respecto a la suficiencia de la continuidad frente a la derivabilidad.
- Desmitificación del concepto de derivada interpretada por él como un número concreto al que tendía el cociente incremental $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ conforme h se acerca a 0 con valores negativos y positivos.
- Construcción explícita de \mathbb{R} considerando expresiones infinitas en las que intervienen las cuatro operaciones racionales. Aunque con ciertas faltas de rigor, Bolzano logra establecer una noción similar al “encajonamiento por intervalos racionales” diciendo que una expresión S es medible si, para todo $q \in \mathbb{Q}$, $q \geq 1$, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que (Ecuación 2.3):

$$S = \frac{p}{q} + P_1 = \frac{p+1}{q} + P_2 \quad (2.3)$$

Con P_1, P_2 positivos. Esta construcción hace uso de la propiedad de densidad de \mathbb{R} en \mathbb{Q} .

2.4.4. Las variables progresivas de Charles Méray

Su trabajo de construcción, desarrollado hacia 1872 en la obra *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*, se destaca principalmente por señalar un error de razonamiento en lo concerniente a la definición y naturaleza de los límites de sucesiones racionales. Este error consistía en definir los números reales a partir de los límites de tales sucesiones y recíprocamente, definir el límite de una sucesión como un número real. Méray sigue un camino alternativo a este razonamiento circular apelando al criterio de Cauchy para sucesiones, donde no se hace referencia alguna a los números irracionales.

Para Méray, un número corresponde a cualquiera de los números racionales propiamente dichos y define una variable μ , que la denomina “variable progresiva”, como aquella que toma valores de una sucesión infinita $\{\mu_n\}$ de números racionales. A continuación examina la convergencia de

³ Si un conjunto acotado S de números reales contiene una infinidad de puntos, existe al menos un número real que es punto de acumulación de S .

dichas sucesiones de acuerdo tanto al criterio de Cauchy como a la definición clásica de límite, dependiendo de si tal límite es racional o no, así:

- Sucesiones que convergen dentro de \mathbb{Q} y para las que existe $N \in \mathbb{Q}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = N$.
- Sucesiones que no convergen dentro de \mathbb{Q} y verifican el criterio de Cauchy.

A las sucesiones del segundo tipo Méray las denomina *números ficticios*, esto es, define los irracionales como los valores a los cuales convergen los límites $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ (denominados *límites ficticios*) para las sucesiones del segundo tipo. Posteriormente ordena el conjunto de números ficticios con referencia a la ordenación usual en \mathbb{Q} así como define las operaciones usuales en \mathbb{Q} aplicadas al conjunto de números ficticios y demuestra sus propiedades.

Es claro que dichos números ficticios se identifican de manera única con los irracionales y proporciona ejemplos concretos de dichos números. Por último, establece la equivalencia entre variables progresivas que generan el mismo número ficticio bajo la condición que la diferencia entre aquellas converja a cero.

2.4.5. George Cantor y las sucesiones fundamentales

El trabajo de Cantor, publicado en el artículo *Über die Ausdehnung eines Satz es aus der Théorie der trigonometrischen Reihen* hacia 1872, y que posteriormente se conocería como Construcción de Cantor-Heine, según unas simplificaciones introducidas por este último en el artículo *Die Elemente der Funktionenlehre* en el *Journal de Crellé* ese mismo año [5], introduce un nuevo tipo de números, denominados *números reales*, que contienen tanto a los racionales como a los irracionales. Esta construcción, basada en los números racionales y aceptando la validez de sus propiedades de cuerpo y orden, parte del tratamiento de las sucesiones en \mathbb{Q} que satisfacen el criterio de Cauchy, el cual no invoca algún tipo de límite hacia un número irracional o hace referencia a objetos matemáticos aún sin definir evitando los argumentos circulares de los que fue consciente Méray y evitó de manera similar. Dichas sucesiones que satisfacen el criterio las denomina *sucesiones fundamentales*; así mismo llama *elementales* a las sucesiones racionales cuyo límite es cero o nulo.

Cantor establece que, si dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que la sucesión $\{a_n - b_n\}$ sea una sucesión nula, entonces $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se denominan *equivalentes*. Esta definición de equivalencia entre sucesiones permite establecer una relación de equivalencia propiamente dicha en el conjunto de las sucesiones fundamentales; el conjunto cociente resultante es entonces el conjunto de los números reales y hace posible incluir el conjunto de los números racionales si se identifica cada número racional a con la sucesión $a_n = a$, para cada n .

A continuación, clasifica las sucesiones fundamentales en tres categorías:

- Sucesiones positivas: Son aquellas sucesiones para las que existe un racional positivo q y un número natural N tal que si $n > N$ se tiene $a_n > q$.
- Sucesiones negativas: Sucesiones fundamentales para las que existe un racional positivo q y un número natural N tal que si $n > N$ se tiene $a_n < -q$.

- Sucesiones equivalentes a cero: Sucesiones fundamentales que son elementales.

Esta clasificación permite establecer un orden entre sucesiones fundamentales y, por tanto, entre números reales. Cantor prueba además que, si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones fundamentales, las sucesiones $\{a_n + b_n\}$ y $\{a_n \cdot b_n\}$, que definen tanto la adición como el producto de números reales, son compatibles con la relación de equivalencia antedicha y con el orden establecido según la categorización anterior. Las restantes operaciones racionales son definidas sin problema una vez se establece que las sucesiones $\{-a_n\}$ y $\{\frac{1}{a_n}\}$ (bajo ciertas restricciones sobre esta última) representan los inversos aditivo y multiplicativo de la sucesión $\{a_n\}$. La compatibilidad con la relación de equivalencia muestra entonces que las clases de equivalencia para $\{-a_n\}$ y $\{\frac{1}{a_n}\}$ representan los reales inverso aditivo e inverso multiplicativo, respectivamente, del número real definido por la clase de equivalencia de $\{a_n\}$.

Demostradas las propiedades de cuerpo y orden esperadas para el conjunto de los números reales, Cantor demuestra la propiedad de completitud para los números reales en la siguiente forma: Si $\{A_n\}$ representa una sucesión fundamental de números reales (rationales o irracionales), existe un único número real A determinado por una sucesión fundamental de números racionales $\{a_n\}$ equivalente a $\{A_n\}$, esto es, las sucesiones $\{A_n\}$ y $\{a_n\}$ definen el mismo número real A . Este resultado puede reformularse diciendo que una sucesión $\{A_n\}$ de números reales que satisface el criterio de Cauchy es convergente en los reales; es fácil reconocer que esto no es más que la demostración de la suficiencia del criterio de Cauchy para la convergencia de sucesiones, resultado que ni Bolzano ni Cauchy demostraron debido a su conocimiento incompleto [16] de la estructura y de las propiedades de los números reales.

2.4.6. Richard Dedekind. La esencia de la continuidad y las cortaduras racionales

La necesidad de una construcción rigurosa y de un fundamento lógico adecuado para la aritmética de los números reales fue percibida por Dedekind ya hacia el año 1858 cuando, siendo profesor de cálculo, tuvo que recurrir a la evidencia geométrica con el propósito de demostrar que toda magnitud que crece continuamente de forma monótona, pero no sin límite, debe aproximarse a un valor fijo. Aunque no atacaba esta postura desde un punto de vista pedagógico, resaltaba el hecho que este tipo de razonamiento no puede considerarse científico [13]. Notaba, además, que muchos teoremas básicos de la aritmética no poseían una demostración rigurosa debido, precisamente, a esa carencia de fundamento lógico sobre la cual debiera construirse el análisis. Estos resultados fueron publicados en el libro *Stetigkeit un die Irrationalzahlen* hacia el año 1872, luego de leer la ya mencionada memoria de Heine, la cual lo animó a escribir su libro.

El análisis de Dedekind inicia reconociendo la vaguedad del concepto de *continuidad* y la relación entre la *continuidad geométrica* (sentada por la geometría) y la *continuidad aritmética*, cuya esencia persigue Dedekind. Científicos de la época y anteriores, como Galileo, Leibniz [3] y Bolzano [16], habían pensado que por continuidad de la línea recta se entendía el hecho que entre dos puntos de ella siempre hay un tercero. Esta propiedad, conocida como *densidad*, también es exhibida por los racionales, señala Dedekind.

Dedekind aprehendió acertadamente la esencia de la continuidad mediante el siguiente razonamiento: Cada punto de la recta produce una separación de la misma en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de todo punto de la segunda clase. Si, recíprocamente, todos los puntos de la recta se sitúan en dos clases tales que los puntos de la primera clase se encuentren a la izquierda de los puntos de la segunda clase, entonces existe uno y sólo un punto que produce esta división.

Tal y como lo expresó el propio Dedekind [13]:

“Creo que no me equivoco al suponer que la mayoría de mis lectores quedarán muy decepcionados al saber que mediante esta trivialidad se pretende haber descubierto el misterio de la continuidad. Sobre esto anoto lo siguiente. Me gustará mucho que todo el mundo encuentre el principio anterior tan evidente y tan coincidente con sus representaciones de una línea; porque no estoy en condiciones de ofrecer ninguna demostración de su corrección, y nadie lo está. La suposición de esta propiedad de la línea no es más que un axioma⁴ mediante el cual atribuimos a la línea por primera vez su continuidad, [...] mediante el cual introducimos la continuidad en nuestra idea de línea”

Este enunciado recoge sus reflexiones frente a la riqueza relativa de la línea recta (en términos de *individuos punto*) frente al conjunto de los racionales (en términos de *individuos número*). Dedekind además afirma que la introducción habitual de los números irracionales en términos de la noción de magnitud (que no se define rigurosamente) obliga que la aritmética deba desarrollarse a partir de sí misma, argumentando que las fundamentaciones, llevadas a cabo en ese entonces, de los números negativos y de los racionales se basan exclusivamente en las leyes de cálculo para los naturales, por lo que consideraciones ajenas a la propia aritmética deben quedar al margen de la construcción de los números irracionales.

Dedekind procede entonces a *arimetizar* su afirmación de continuidad considerando una partición de los racionales (concediendo validez a sus propiedades) en dos clases disjuntas de tal manera que cada número de la primera clase es menor que cada número de la segunda. A dicha partición la denomina *cortadura (schnitt)* y la denota como (A_1, A_2) siendo A_1 y A_2 las clases generadas por la partición. Ahora bien, es posible que, entre los racionales de la clase A_1 , exista uno que sea mayor o, entre los números de la clase A_2 , uno que sea el menor, en este caso la cortadura será producida por un número racional.

Dedekind demuestra, a partir de la separación producida, que existen infinitas cortaduras que no son producidas por números racionales para las cuales ni la clase A_1 exhibe un máximo elemento ni la clase A_2 un mínimo. En este caso, cuando la cortadura no es producida por un número racional, se *crea* un número irracional α definido mediante aquella. Es de notar cierta falta de precisión en la anterior definición [16] de α ya que deja “en el aire” de donde proviene o qué es exactamente este número irracional, preguntas ante las cuales Dedekind responde que α es *producido* por la cortadura y no la cortadura misma, esto es, de igual manera a como un número racional a genera una cortadura racional recíprocamente se establece que una cortadura con elementos máximo o mínimo en las clases es, esencialmente, el número racional que la produce.

⁴ Enunciado que actualmente se conoce como axioma de Cantor-Dedekind

Una vez establecida la naturaleza de la cortadura, Dedekind analiza las relaciones entre dos de ellas (A_1, A_2) , (B_1, B_2) y define, mediante relaciones de contención entre las clases A_1 y B_1 , una relación de orden " $<$ " y la igualdad entre cortaduras. Estos resultados son sistemáticamente presentados como *propiedades fundamentales* [16], destacando entre ellas la continuidad que persigue con su trabajo, así [13]:

- Si $\alpha > \beta$ y $\beta > \gamma$, entonces también $\alpha > \gamma$. Diremos que el número β está entre los números α y γ .
- Si α y γ son dos números diferentes, hay siempre infinitos números distintos β que están entre α y γ .
- Si α es un número determinado, todos los números del sistema \mathfrak{R} se descomponen en dos clases \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 , cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase \mathcal{U}_1 abarca todos los números α_1 que son $< \alpha$ [sic], la segunda clase \mathcal{U}_2 abarca todos los números α_2 que son $> \alpha$ [sic]; el propio número α puede asignarse a voluntad a la primera o a la segunda clase, y de acuerdo con ello es el mayor número de la primera clase o el menor de la segunda.
- Si el sistema \mathfrak{R} de todos los números reales se descompone en dos clases \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 tales que todo número α_1 de la primera clase \mathcal{U}_1 es menor que todo número α_2 de la segunda clase \mathcal{U}_2 , existe un y sólo un número α mediante el cual se produce esa división.

En lo concerniente a los aspectos operativos y de cálculo con números reales, Dedekind restringe su análisis a la definición de adición, señalando que las restantes operaciones y sus propiedades pueden definirse de manera similar, aunque no sin cierta prolijidad, y así obtener demostraciones de hechos básicos en aritmética, los cuales no se habían probado hasta entonces.

La construcción de Dedekind experimentó una ligera simplificación hecha por Bertrand Russell, descrita sucintamente en su obra *Introduction to Mathematical Philosophy*⁵, en la que cada una de las clases A_1 y A_2 de una cortadura está definida unívocamente por la otra, esto es, basta con una sola de ellas, denominada *segmento* [30], para definir completamente un número real.

2.4.7. Los agregados de Karl Weierstrass

Conocido como el padre de la aritmetización del análisis no solamente por sus trabajos en la construcción de los números reales sino también por la definición precisa de los conceptos de límite⁶ y derivada (que desterraron de la Matemática expresiones metafísicas y carentes de precisión como "acercarse indefinidamente a un límite" o "hacerse menor que cualquier cantidad dada") que contaminaron el análisis por más de una centuria, Weierstrass buscó separar el cálculo y el análisis de la Geometría, esto es, aritmetizarla en el sentido de fundamentarlos desde el concepto de número solamente [3].

⁵ RUSSELL, Bertrand. *Introduction to Mathematical Philosophy*. Dover Publications Inc. New York. 1993. p. 72. En esta obra el autor remite, para un tratamiento más completo del asunto, a su *opera magna: Principia Mathematica*, Volúmenes I y II.

⁶ De hecho, la definición actual de límite en términos de $\epsilon - \delta$ (conocida como definición estática de límite) es, con ligeras modificaciones, debida a Weierstrass.

Observaciones similares a las hechas por Méray llevaron a Weierstrass a definir el concepto de número irracional de manera totalmente independiente al concepto de límite [5]. Un hecho curioso es que su trabajo de aritmetización no fue publicado de manera formal y lo que se conoce está basado en las notas publicadas por alumnos suyos como Lindemann, Heine (quién refinó la construcción de Cantor) y Hurwitz, entre otros [21]. La esencia de la construcción de Weierstrass está en las relaciones de inclusión y de igualdad que se establecen entre ciertos conjuntos numerables que él denomina como *agregados*. Con mayor precisión Weierstrass, asumiendo como válidos los números naturales (a los que denomina *cantidades numéricas absolutas*) y sus propiedades, define las *partes exactas de la unidad* a las colecciones del tipo $\left[\frac{1}{n}\right]$ y que satisfacen $n \cdot \frac{1}{n} = 1$, siendo n una cantidad numérica absoluta. A continuación, y para definir los racionales positivos, introduce los *agregados finitos* como colecciones finitas de partes exactas de la unidad y en donde estas pueden repetirse; añade además que dos agregados finitos son iguales si y solo si tienen la misma suma. Este criterio de igualdad entre agregados permite establecer una relación de equivalencia en el conjunto que forman, definiendo el conjunto cociente resultante como el conjunto de racionales positivos.

Una vez definidos los números racionales, Weierstrass considera los agregados *infinitos numerables* de partes exactas de la unidad, restringiendo cada uno de ellos de manera que sea finito el número de veces que aparece cada parte exacta de la unidad [21]. Dice además que un agregado finito A está contenido en un agregado B (finito o infinito numerable) si, dado un racional r estrictamente menor que la suma de los elementos de A , puede extraerse un agregado finito de B de manera que su suma sea mayor o igual a r . Esta definición de contenencia permite expresar la igualdad de dos agregados siempre que cada parte finita de uno de ellos esté contenida en el otro y viceversa; así mismo, si de un agregado B puede extraerse un agregado finito B' de modo que un racional q sea tanto menor que la suma de los elementos de B' como mayor que la suma de cualquier agregado finito extraído de un agregado A , se tiene entonces que el agregado A es *menor* que el agregado B .

Esta definición de *menor* permite decir que un agregado verifica el *criterio de finitud* siempre y cuando sea *menor* que un agregado finito. El conjunto cociente generado por la relación de equivalencia que define la igualdad entre agregados que satisfacen el criterio es el conjunto de los números reales no negativos, en el que Weierstrass define las operaciones básicas de adición y producto. De manera similar a la construcción hecha por Cantor, Weierstrass introduce dichas operaciones y el orden usual entre agregados que verifican el criterio de finitud y los extiende al conjunto cociente mostrando la compatibilidad de aquellas frente a la relación de equivalencia.

De este modo, en la construcción de Weierstrass, los números racionales se identifican con aquellas clases de equivalencia a las que pertenecen los agregados finitos y los irracionales se identifican con las restantes clases que, aún no conteniendo ningún agregado finito, verifican el criterio de finitud.

2.4.8. Introducción axiomática de David Hilbert

Reconociendo los beneficios pedagógicos, así como de fundamentación, en las construcciones del sistema numérico real basadas exclusivamente en algunos enunciados básicos sobre los números naturales, en el año 1900 Hilbert sugirió, en su artículo *Über den Zahlbegriff*, anexo a su obra

Grundlagen der geometrie, una simplificación de dicho enfoque (que denominó como *método genético* [16]). Por razones de carácter lógico, consideraba más seguro la introducción de los números reales como elementos *no definidos* y procedió a expresar sus propiedades fundamentales como *axiomas*; este procedimiento de carácter no constructivo [2], el cual es apropiado para un primer curso de Cálculo y de Análisis, clasifica y enuncia los mencionados axiomas así:

Axiomas de conexión: Conjunto de axiomas que definen las dos leyes de composición interna entre números reales, así como postulan la existencia de los elementos identidad para cada una de ellas.

Axiomas de Cálculo: Axiomas que recogen las propiedades algebraicas usuales de las leyes de composición, esto es, las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

Axiomas de Orden: Postulando la existencia de una relación de orden entre dos números reales, este conjunto de axiomas definen las propiedades transitiva y uniforme para cada una de las dos operaciones de composición interna.

Axiomas de Continuidad: Este conjunto de axiomas contiene las propiedades de los números reales que no se suelen exponer en los cursos de Álgebra elemental, esto es, la propiedad arquimediana y la propiedad de completitud, entendida como la imposibilidad de anexar de más elementos a los números reales de manera que el conjunto resultante cumpla en su totalidad con los axiomas precedentes.

Hilbert señala que este conjunto de axiomas no es independiente y lo único que resta para mostrar la existencia lógica de los objetos matemáticos que estos axiomas definen es probar su consistencia, labor nada fácil en los tiempos de Hilbert y que de hecho propuso como uno de los famosos 23 problemas expuestos ante el Congreso Internacional de Matemáticos, en el año 1900⁷. Cabe señalar que esta introducción axiomática no fue del todo bien recibida por la comunidad matemática de la época, tal y como Russell lo señaló [30]:

The "method" of postulating what we want has many advantages; they are the same as the advantages of theft over honest toil.

Siendo un juicio de valor bastante duro, no puede desconocerse el incalculable valor pedagógico de la propuesta para una primera aproximación a los resultados y métodos del Cálculo, especialmente en la enseñanza secundaria.

⁷ Puede hallarse una conclusión a dicha interrogante en CUESTA, Norberto. *Análisis metamatemático de los números reales*. El Basilisco: Filosofía, ciencias humanas, teoría de la ciencia y de la cultura. Oviedo. Número 10. 1980. p. 4-7.

2.5. Aproximación histórica de las Fracciones Continuas

2.5.1. Antecedentes el Matemática Griega e Hindú

El uso de las fracciones continuas y de sus propiedades inicia con el algoritmo euclidiano de la división para la extracción del máximo común divisor de dos números. Este procedimiento, que permite el cálculo de los cocientes parciales en la expansión de un número en forma de fracción continua, fue empleado más con propósitos antifairéticos en la demostración de la inconmensurabilidad de razones entre magnitudes de acuerdo a lo establecido en la Proposición 2 del Libro X de los Elementos [11]:

Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la que queda nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.

Un ejemplo de demostración antifairética, así como de su relación con la expansión en forma de fracción continua para un número dado, es el siguiente: Se dice que un segmento \overline{AC} está dividido en *extrema y media razón* si, dado un punto D sobre dicho segmento, se establece la siguiente proporción, ilustrada en la Figura 2-6, entre los segmentos generados por la división (Ecuación 2.4):

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} \quad (2.4)$$

Figura 2-6: División en extrema y media razón [15].



Al indagar acerca de la conmensurabilidad de las razones implicadas, se razona del siguiente modo: Si se lleva el segmento \overline{DC} sobre \overline{AD} , se genera un punto E para el cual $\overline{DC} = \overline{AE}$ de manera que la proporción establecida inicialmente se transforma en (Ecuación 2.5):

$$\frac{\overline{AD} + \overline{DC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE} + \overline{ED}}{\overline{DC}} \quad (2.5)$$

Separando las razones anteriores y recordando que $\overline{DC} = \overline{AE}$, se obtiene (Ecuación 2.6):

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{AE}} \quad (2.6)$$

Mediante inversión y alternancia, lo anterior se reduce a (Ecuación 2.7):

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} \quad (2.7)$$

Proporción que establece el hecho que llevar el segmento menor \overline{DC} sobre el segmento mayor \overline{AD} reproduce la división en extrema y media razón. Ahora bien, si los segmentos \overline{AC} y \overline{AD} tuvieran una medida común, esta mediría también a $\overline{DC} = \overline{AE}$, luego esa medida común también mediría a \overline{ED} ; así, el traslado sucesivo de los segmentos menores de las divisiones resultantes generan segmentos más pequeños que también deberán medirse con esa medida común. Puesto que en cada proceso de superposición se reproduce la división en extrema y media razón y el segmento mayor es más grande que la mitad del segmento total, las consecutivas superposiciones conllevarán a obtener un segmento *menor* que dicha medida común supuesta, lo que es absurdo y obliga a concluir que los segmentos de la división en extrema y media razón son inconmensurables.

Desde la Proposición 2 es posible hacer el siguiente análisis: La resta continua y sucesiva del menor y el mayor de los segmentos originados por la división en extrema y media razón genera tanto “cocientes”, entendidos como las veces que dicho segmento mayor contiene al menor, así como “residuos” cuya periodicidad es consecuencia de la reproducción de esa división en extrema y media razón como lo indica el siguiente esquema (Ecuaciones 2.8):

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD} + \overline{DC}}{\overline{AD}} = 1 + \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = 1 + \frac{1}{\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}}}} \quad (2.8)$$

Y se identifica, de manera inmediata, la proporción que es denominada actualmente como proporción *áurea* (ϕ), cuya expansión en fracción continua simple infinita está dada por (Ecuación 2.9):

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (2.9)$$

La matemática griega también hace uso implícito de las fracciones continuas en lo que Teón de Esmirna denominaba como los números *lado* y *diagonal* [15], sucesiones que se identifican actualmente como aquellas que definen las convergentes de una fracción continua simple. Si se considera un cuadrado de lado y diagonal iguales a a_1 y d_1 , respectivamente, y se construye un segundo cuadrado cuyo lado a_2 satisface $a_2 = a_1 + d_1$ se encuentra, mediante el Teorema de Pitágoras, que la diagonal de dicho cuadrado es igual a $2 \cdot a_1 + d_1$. La repetición de este proceso de construcción da origen a la siguiente sucesión recurrente de valores para los lados y diagonales de los cuadrados generados (Ecuaciones 2.10):

$$a_n = a_{n-1} + d_{n-1}$$

$$d_n = 2 \cdot a_{n-1} + d_{n-1} \quad (2.10)$$

Válidas para $n \geq 2$. Teón de Esmirna inicia el proceso de recurrencia con $a_1 = 1$ y $d_1 = 1$ generando los siguientes valores (Tabla 2-1):

Tabla 2-1: Números lado y diagonal para $\sqrt{2}$

n	1	2	3	4	5
a_n	1	2	5	12	29
d_n	1	3	7	17	41

Y se observa que la secuencia $\frac{d_n}{a_n}$ proporciona las convergentes sucesivas de la fracción continua simple infinita para $\sqrt{2}$. Puede demostrarse, además, que las sucesiones (Ecuaciones 2.11):

$$a_n = a_{n-1} + d_{n-1}$$

$$d_n = k \cdot a_{n-1} + d_{n-1} \quad (2.11)$$

generan las convergentes sucesivas del desarrollo en fracción continua para \sqrt{k} .

Otras contribuciones a las fracciones continuas, además de las griegas, son las proporcionadas por los hindúes a través de los trabajos del matemático Bhaskara [4] en el siglo *XII*. En su intento por hallar soluciones a la ecuación diofántica $a \cdot x + c = b \cdot y$, prueba que dichas soluciones pueden ser obtenidas a partir del desarrollo en forma de fracción continua simple para la fracción $\frac{a}{b}$ (Ecuación 2.12):

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \quad (2.12)$$

Muestra, además, que las sucesiones $\{A_k\}_0^\infty$ y $\{B_k\}_0^\infty$ que definen los numeradores y denominadores de las convergentes satisfacen las relaciones de recurrencia encontradas en textos modernos sobre fracciones continuas; así mismo, expresa la solución a la ecuación diofántica en la forma (Ecuaciones 2.13):

$$x = \bar{\mp}c \cdot q + b \cdot t$$

$$y = \bar{\mp}c \cdot p + a \cdot t \quad (2.13)$$

Donde $\frac{p}{q}$ es la penúltima convergente del desarrollo en fracción continua simple para $\frac{a}{b}$.

2.5.2. Nacimiento y primeros desarrollos en la teoría de las fracciones continuas

▪ Pietro Antonio Cataldi

Este matemático italiano es considerado como el real descubridor de las fracciones continuas [4] no sólo por haber proporcionado un algoritmo para la extracción de raíces cuadradas, sino por haber ideado una notación particular para aquellas así como haber demostrado algunas de sus propiedades fundamentales. Los resultados de su trabajo en este tema son recogidos en su obra *Trattato* [...], en la que hace uso genuino de las expresiones en forma de fracción continua para \sqrt{A} , siendo A un natural que no es cuadrado perfecto. En la extracción de la raíz cuadrada \sqrt{A} , Cataldi observa que las aproximaciones (Ecuaciones 2.14):

$$\sqrt{A} \sim a + \frac{r}{2a}$$

$$\sqrt{A} \sim a + \frac{r}{2a+1} \quad (2.14)$$

son por exceso y por defecto, respectivamente; luego indaga por el valor x que satisfaga la siguiente igualdad (Ecuación 2.15):

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{2a+x} \quad (2.15)$$

Para ello, encuentra la diferencia entre los cuadrados de esta expresión y de $\sqrt{a^2+r}$, donde r tiene el mismo significado que el dado por Bombelli, para así obtener (Ecuación 2.16):

$$\left(a + \frac{r}{2a+x}\right)^2 - (a^2+r) = \left(\frac{r}{2a+x} - x\right) \cdot \left(\frac{r}{2a+x}\right) \quad (2.16)$$

Puesto que, en principio, la diferencia del lado izquierdo de la anterior expresión es nula, se tiene entonces que el factor $\frac{r}{2a+x} - x$ debe ser igual a cero, así obtiene una representación explícita para x que no se apoya en algún tipo de aproximación sucesiva, para así obtener (Ecuación 2.17):

$$x = \frac{r}{2a+x} \quad (2.17)$$

De este modo, la raíz buscada es igual a (Ecuación 2.18):

$$\sqrt{A} = a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \ddots}}} \quad (2.18)$$

Cataldi aplica su método para hallar el valor de $\sqrt{18}$, determinando su valor con la precisión dada por la decimoquinta convergente y observando, antes que cualquiera, que dichas convergentes son alternativamente mayores y menores al valor real de la raíz.

La notación empleada por Cataldi difiere sustancialmente de la empleada actualmente. Por razones de espacio y de impresión, Cataldi propone el siguiente simbolismo para $\sqrt{18}$ (Ecuación 2.19):

$$\sqrt{18} = 4. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \& \frac{2}{8}. \dots \quad (2.19)$$

En donde el punto luego de la cifra 8 indica que la siguiente fracción es una fracción del denominador; claramente el uso del *ampersand* (en inglés) o *et* (en español) (&) es equivalente al signo + en la notación actual.

Cataldi encuentra relaciones recurrentes que le permiten el cálculo de las convergentes para \sqrt{A} con una generalidad mayor a las determinadas por Bhaskara, quién las determinó para fracciones continuas *simples*. A partir de la definición (Ecuación 2.20):

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{2a + \frac{r}{\ddots + \frac{r}{2a}}}}} \quad (2.20)$$

Cataldi establece lo siguiente (Ecuación 2.21):

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{r}{2a + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}} \quad (2.21)$$

Obteniendo entonces las relaciones $p_n = r \cdot q_{n-1}$ y $q_n = 2a \cdot q_{n-1} + p_{n-1}$. Mediante sustitución de esta última expresión (con el índice $n - 1$) en la primera, obtiene (Ecuación 2.22):

$$p_n = r \cdot (2a \cdot q_{n-2} + p_{n-2}) = 2ar \cdot q_{n-2} + r \cdot p_{n-2} \quad (2.22)$$

Puesto que $p_{n-1} = r \cdot q_{n-2}$, Cataldi obtiene, finalmente, las siguientes relaciones (Ecuaciones 2.23):

$$\begin{aligned} p_n &= 2a \cdot p_{n-1} + r \cdot p_{n-2} \\ q_n &= 2a \cdot q_{n-1} + r \cdot q_{n-2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Manipulaciones algebraicas elementales le llevan a obtener la siguiente identidad entre las expresiones recurrentes para p_n y q_n (Ecuación 2.24):

$$p_{n+1} \cdot q_n - q_{n+1} \cdot p_n = (-1)^n \cdot r^{n+1} \quad (2.24)$$

Hacia mediados del siglo *XVII*, varios matemáticos contribuyen en menor medida al desarrollo y aplicación de las fracciones continuas:

- Daniel Schwenter en su libro *Geometriae practicae novae et auctae tractatus* encuentra aproximaciones racionales de fracciones mediante la expansión en forma de fracción continua aunque no brinda explicación alguna de su método [4].
- Adriaen Metius en su obra *Geometria practica*, encuentra cotas racionales superior e inferior al número π con ayuda de las convergentes de la expansión en forma de fracción continua simple para dicho número obteniendo la siguiente desigualdad (Ecuación 2.25):

$$3 \frac{15}{106} = \frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120} = 3 \frac{17}{120} \quad (2.25)$$

Siendo la fracción $3 + \frac{15+17}{106+120} = \frac{355}{133}$ una de las convergentes de la fracción continua simple para π y que lo aproxima con una precisión de seis cifras decimales.

▪ William Brouncker y John Wallis

En los comienzos de la teoría formal de las fracciones continuas se sitúan estos dos matemáticos ingleses. Ambos descubrieron una expansión en forma de fracción continua para el número π cuya simetría y regularidad son notables (Ecuación 2.26):

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \ddots}}}}} \quad (2.26)$$

Esta expresión guarda una estrecha relación con aquella hallada por Leibniz para $\frac{\pi}{4}$ en forma de serie infinita (Ecuación 2.27):

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \quad (2.27)$$

De hecho, las convergentes de la fracción continua mostrada coinciden con las sumas parciales de la serie de Leibniz (Ecuaciones 2.28):

$$c_1 = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2}} = 1 - \frac{1}{3} \quad c_2 = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2}}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \quad c_3 = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2}}} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \quad (2.28)$$

Wallis, en su obra *Arithmetica Infinitorum* publicada hacia el año 1655, es quien primero emplea el término *fracción continua* para designar este tipo de expresiones [4] además de proporcionar, con

demostración, una fórmula recurrente para la determinación de las convergentes de dicha expresión, 500 años después de los trabajos del hindú Bhaskara. Designando con C_n la fracción continua finita obtenida mediante truncamiento hasta el n -ésimo cociente parcial (Ecuación 2.29):

$$C_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\ddots + \frac{a_n}{b_n}}}} \quad (2.29)$$

Wallis proporciona las siguientes expresiones para el cálculo de las convergentes (Ecuaciones 2.30):

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0 \\ B_0 &= 1 \\ A_{-1} &= 1 \\ B_{-1} &= 0 \\ A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Al aplicar las anteriores relaciones a la fracción continua para $\frac{\pi}{4}$, Wallis observa que las convergentes obtenidas resultan ser sucesivamente mayores y menores, por lo que conjetura que dicho proceso de cálculo es convergente. Dentro de las aplicaciones que Wallis encontró para las fracciones continuas, se encuentra la aproximación, mediante convergentes, de fracciones con numeradores y denominadores elevados así como del número π [4].

▪ Christiaan Huygens

El uso de fracciones continuas con propósitos de aproximación es empleado convenientemente por el físico-matemático holandés Christiaan Huygens. En su obra *Descriptio automati planetarii*, publicada hacia 1698, expresa como una fracción la razón entre los ángulos barridos por el movimiento de traslación de la Tierra y Saturno obteniendo el valor $\frac{77708431}{2640858}$. Mediante aplicación del algoritmo euclidiano de la división, obtiene cocientes y residuos sucesivos que le permiten expresar este valor en la forma (Ecuación 2.31):

$$\frac{77708431}{2640858} = 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}}} \quad (2.31)$$

Huygens aproxima la anterior razón mediante el uso de la cuarta convergente de su expansión en forma de fracción continua simple finita (Ecuación 2.32):

$$\frac{77708431}{2640858} \sim 29 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} \quad (2.32)$$

Dicha convergente, $\frac{206}{7}$, proporciona una relación de transmisión para los engranajes del mecanismo planetario que genera un error de 40' en un siglo, lo que muestra la bondad en el uso de las convergentes para fracciones continuas con propósitos de aproximación.

Huygens reconoce que las fracciones continuas proporcionan las mejores aproximaciones racionales a un número dado y aplica su procedimiento a la determinación de valores para el número π , obteniendo la ya conocida expansión (Ecuación 2.33):

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1+\ddots}}}}} \quad (2.33)$$

La cual le permite aproximar π empleando la decimotercera convergente. Posteriormente en su obra *De circuli magnitudine inventa* refina las aproximaciones para este número mediante la introducción de funciones de extrapolación [4], de carácter trigonométrico, las cuales son aprovechadas por matemáticos de la época, tales como van Roomen y van Ceulen, este último encontrando hasta 35 cifras decimales exactas.

2.5.3. Desarrollo formal de la teoría de las fracciones continuas

▪ Leonhard Euler

Sus contribuciones fueron las más significativas y enriquecedoras a la teoría de las fracciones continuas. El trabajo de este matemático suizo, expuesto en el artículo *De fractionibus continuis* hacia el año 1731, demuestra los siguientes resultados:

- Todo número racional genera una expansión en forma de fracción continua finita así como del carácter infinito de dicha expresión para números irracionales.
- Toda fracción continua infinita de carácter periódico es una raíz de una ecuación cuadrática.

Por otra parte, Euler proporciona expansiones en forma de fracción continua infinita, cuya regularidad es notable, para ciertas constantes matemáticas (Ecuaciones 2.34):

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}}}} \quad \frac{e+1}{e-1} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (2.34)$$

En vista de la extensión y el consumo de espacio por parte de estas expresiones, Euler idea una notación especial para las fracciones continuas. Representa la expresión (Ecuación 2.35):

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} \quad (2.35)$$

en la forma $\frac{(a,b,c)}{(b,c)}$, de modo que fracciones similares a (Ecuación 2.36):

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (2.36)$$

son convenientemente representadas por Euler como $\frac{(a,b,c,d,\dots)}{(b,c,d,\dots)}$, facilitando el establecimiento y demostración de ciertas propiedades relacionadas con los cocientes parciales y las convergentes de una fracción continua. De hecho, su artículo *Specimen Algorithmi Singularis* escrito hacia 1764, proporciona relaciones recurrentes para el cálculo de dichas convergentes así: Denotando la n -ésima convergente de la fracción continua (Ecuación 2.37):

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (2.37)$$

en la forma (Ecuación 2.38):

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{(b_0, b_1, \dots, b_n)}{(b_1, b_2, \dots, b_n)} \quad (2.38)$$

Le permite a Euler establecer las siguientes reglas de cálculo en la determinación de los numeradores y denominadores de cada convergente (Ecuaciones 2.39):

$$(b_k, b_{k+1}, \dots, b_n) = b_n \cdot (b_k, b_{k+1}, \dots, b_{n-1}) + (b_k, b_{k+1}, \dots, b_{n-2})$$

$$(b_k, b_{k+1}) = b_k \cdot (b_{k+1}) + 1$$

$$b_{k+1} = (b_{k+1}) \quad (2.39)$$

Volviendo al trabajo descrito en *De fractionibus*, Euler consigue mostrar la equivalencia entre series infinitas y fracciones continuas [4], siendo iguales los valores entre las sumas parciales de aquella y las convergentes de esta última. La igualdad entre la expresión de Brouncker y la serie de Leibniz es un caso especial de esta equivalencia.

Analizando la periodicidad de las expansiones en forma de fracción continua infinita, Euler proporciona un método general para la solución de ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 = ax + b$ al escribirlas como $x = a + \frac{b}{x}$ y procediendo de un modo similar al empleado por Cataldi para la extracción de raíces cuadradas (Ecuaciones 2.40):

$$x = a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \frac{b}{a + \dots}}} \quad (2.40)$$

Euler emplea, además, las expansiones en forma de fracción continua con el propósito de encontrar soluciones a la ecuación de Pell (Ecuación 2.41):

$$x^2 = Dy^2 + 1 \quad (2.41)$$

Para ello, determina la expansión de \sqrt{D} en forma de fracción continua infinita y expresa las soluciones para x e y con ayuda de las convergentes de dicha expansión. Dependiendo de la paridad en el período de la fracción continua para \sqrt{D} , Euler generaliza sus resultados a ecuaciones del tipo $x^2 = Dy^2 \pm 1$.

▪ Johann Heinrich Lambert

Este matemático alemán y de origen francés, demostró la irracionalidad del número π y del número e de Euler (como un caso especial de la función e^x) a través de expresiones en forma de fracción continua para ciertas funciones. Su búsqueda de rutinas de cálculo más eficientes lo llevó a encontrar fracciones continuas *algebraicas* que generalizan, de algún modo, los resultados de Euler y entre las que se cuentan (Ecuaciones 2.42):

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x} - \frac{5}{x} - \frac{1}{x} - \frac{7}{x} - \frac{1}{x} - \dots} & \arctan(x) &= \frac{x}{1 + \frac{1 \cdot x^2}{3 + \frac{4 \cdot x^2}{5 + \frac{9 \cdot x^2}{7 + \frac{1}{x^2}}}}} \\ \frac{e^x - 1}{e^x + 1} &= \frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{6}{x} + \frac{10}{x} + \frac{14}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \dots} & \ln(1+x) &= \frac{x}{1 + \frac{1^2 \cdot x^2}{2 + \frac{1^2 \cdot x^2}{3 + \frac{2^2 \cdot x^2}{4 + \frac{2^2 \cdot x^2}{x^2}}}}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Estas relaciones, demostradas rigurosamente por Lambert hacia 1761, le permitieron extraer las siguientes conclusiones:

- Si x es un racional no nulo, entonces $\tan(x)$ es irracional.
- Si x es un racional no nulo, entonces e^x es irracional.
- Si x es un racional positivo, entonces $\ln(x)$ es irracional.

La irracionalidad de π es deducida por Lambert como sigue: Puesto que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ es racional, el contrarrecíproco de la primera conclusión establece que $\frac{\pi}{4}$, y por ende, π son irracionales. La irracionalidad de e , así como la de los logaritmos naturales para números irracionales, las deduce de manera similar mediante las conclusiones restantes.

EL trabajo de Lambert le permite conjeturar el carácter trascendente de π y e , los cuales serían posteriormente demostrados por Hermite en 1873 y Lindemann en 1882, respectivamente.

▪ Joseph Louis Lagrange

La principal contribución de Lagrange a la teoría de las fracciones continuas, descrita en su obra *Mémoire sur la résolution des équations numériques* escrita hacia el año 1767, es la demostración del recíproco del resultado obtenido por Euler, esto es, que todo cero irracional de una ecuación cuadrática tiene una expansión en forma de fracción continua simple y periódica que se ajusta a alguna de las siguientes expresiones (Ecuaciones 2.43):

$$[q_0; \overline{q_1, \dots, q_n, q_n, \dots, q_1, 2q_0}]$$

$$[q_0; \overline{q_1, \dots, q_n, k, q_n, \dots, q_1, 2q_0}] \quad (2.43)$$

siendo k un entero positivo. A continuación, demuestra que las convergentes de estos desarrollos son soluciones enteras de la ecuación $x^2 - Dy^2 = \pm 1$. Con mayor precisión, Lagrange demuestra que las convergentes del desarrollo en fracción continua para \sqrt{D} (Ecuaciones 2.44):

$$\frac{x}{y} = [q_0; q_1, \dots, q_n, q_n, \dots, q_1, 2q_0, q_1, \dots, q_n, q_n, \dots, q_1]$$

$$\frac{x}{y} = [q_0; q_1, \dots, q_n, k, q_n, \dots, q_1] \quad (2.44)$$

son las soluciones más pequeñas de la ecuación $x^2 - Dy^2 = 1$. Adicionalmente, Lagrange señala que la ecuación $x^2 - Dy^2 = -1$ tiene soluciones enteras solo si la expresión en forma de fracción continua para \sqrt{D} se ajusta a la primera de las expansiones periódicas anteriores y la convergente que proporciona la solución más pequeña está dada por (Ecuación 2.45):

$$\frac{x}{y} = [q_0; q_1, \dots, q_n, q_n, \dots, q_1] \quad (2.45)$$

Lagrange emplea también las fracciones continuas para aproximar las raíces reales de ecuaciones polinómicas de la siguiente manera: Suponga que se desea hallar una raíz real del polinomio $f(x) = x^3 + 5x - 8$; al observar que $f(1) = -2$ y $f(2) = 10$, el Teorema de los valores intermedios garantiza la existencia de un $x_1 \in [1, 2]$ tal que $f(x_1) = 0$, por lo que dicha raíz puede expresarse en la forma (Ecuación 2.45):

$$x_1 = 1 + \frac{1}{y} \quad (2.45)$$

Al sustituir esta expresión en el polinomio original se obtiene un nuevo polinomio dado por $g(y) = -2y^3 + 8y^2 + 3y + 1$. Puesto que $g(4) = 13$ y $g(5) = -34$, una nueva aplicación del Teorema garantiza la existencia de un $y_1 \in [4, 5]$ tal que $g(y_1) = 0$.

Si se expresa esta raíz en la forma $y_1 = 4 + \frac{1}{z}$ se sustituye en $g(y)$, se genera un polinomio $h(z)$ con el que puede repetirse el proceso ya descrito y así obtener una aproximación a la raíz original dada por (Ecuación 2.46):

$$x = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (2.46)$$

Entre otros de los usos dados por Lagrange a las fracciones continuas se menciona la solución de ecuaciones diofánticas lineales y formas cuadráticas binarias [4].

2.5.4. Contribuciones modernas a la teoría de las fracciones continuas

Si bien gran parte de las propiedades y algoritmos relacionados con las fracciones continuas fueron descubiertos a principios del siglo XIX, varios resultados de importancia fueron demostrados en épocas recientes. Hacia mediados del siglo XIX, John Stephen Smith demostró la propiedad de aproximación de las convergentes, esto es, si la expresión en forma de fracción continua para un número x está dada por (Ecuación 2.47):

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (2.47)$$

Y si se denotan con c_k y c_{k-1} las convergentes de orden k y $k-1$, respectivamente, se satisface la desigualdad $|x - c_k| < |x - c_{k-1}|$, es decir, la convergente k -ésima aproxima con mayor precisión el valor de x . Así mismo, demuestra que dicha convergente proporciona la mejor aproximación al valor de x en el sentido que si un racional $\frac{a}{b}$ satisface la desigualdad $|x - \frac{a}{b}| < |x - c_k|$, entonces $b > q_k$ siendo q_k el denominador de la convergente k -ésima.

Felix Klein hacia el año 1897, proporciona una interpretación geométrica de las convergentes de una fracción continua simple infinita para un número irracional α . Si se representa en el plano cartesiano la función lineal $y = \alpha x$, los puntos (q_n, p_n) del plano con coordenadas enteras "más cercanas" a la línea generada por la función son, precisamente, las convergentes $\frac{p_n}{q_n}$ del desarrollo $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. Por "más cercanas" se entienden aquellos puntos del plano de coordenadas enteras y cercanos a dicha línea recta con la menor abscisa posible.

En el plano de la teoría de la aproximación racional a números irracionales, Theodore Vahlen demuestra que de dos convergentes sucesivas en el desarrollo en forma de fracción continua de un número x , al menos una de ellas satisface la desigualdad (Ecuación 2.48):

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2} \quad (2.48)$$

Aproximación que es mejorada casi simultáneamente por Adolf Hurwitz y Emile Borel demostrando que de cada tres convergentes sucesivas en el desarrollo en forma de fracción continua de x , al menos una satisface la desigualdad (Ecuación 2.49):

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2} \quad (2.49)$$

Mejores aproximaciones han sido desarrolladas si se excluyen ciertos conjuntos de irracionales [28].

3. Aspectos disciplinares en la construcción de los números reales

3.1. Definición Axiomática

En esta sección, se definirá el conjunto de los números reales considerando sus elementos como conceptos no definidos que satisfacen un cierto número de propiedades (las cuales se dan por sentadas) llamadas axiomas, las cuales son clasificadas según su funcionalidad, así:

- Axiomas que dotan de una estructura algebraica a \mathbb{R} (Axiomas de cuerpo)
- Axiomas que definen una relación de orden sobre \mathbb{R} (Axiomas de Orden)
- Axioma de completitud, el cual garantiza que todo conjunto no vacío de números reales posee la propiedad de la cota superior mínima. De carácter no algebraico.

Al adoptar esta postura axiomática, se gana tanto en tiempo como en claridad en la introducción de tópicos especializados del Cálculo y del Análisis, los cuales principalmente requieren de las consecuencias que se derivan de estos axiomas y rara vez necesitan de los fundamentos lógicos de la construcción de los números reales.

DEFINICIÓN 1: Por *sistema de números reales* se entiende una tripleta $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ donde \mathbb{R} representa un conjunto (cuyos elementos se denominarán *números reales*) y $(+, \cdot)$ dos leyes de composición tales que para todo par de números reales x, y se puede formar la *adición* (o *suma*) de x e y y el *producto* (o *multiplicación*) de x por y designados como $x + y$ y $x \cdot y$, respectivamente. La suma $x + y$ y el producto $x \cdot y$ están unívocamente determinados por x e y . Estas leyes satisfacen las siguientes propiedades:

AXIOMAS DE CUERPO

C_1 (PROPIEDAD CLAUSURATIVA): Las leyes $(+, \cdot)$ son de composición interna, esto es, para cada par de números reales x, y la suma $x + y$ y el producto $x \cdot y$ son números reales.

C_2 (PROPIEDAD CONMUTATIVA): Para todo par de números reales x, y se tiene (Ecuación 3.1):

$$x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x \quad (3.1)$$

C_3 (PROPIEDAD ASOCIATIVA): Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene (Ecuación 3.2):

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (3.2)$$

C_4 (PROPIEDAD MODULATIVA O EXISTENCIA DE ELEMENTOS NEUTROS): Existen dos números reales distintos, indicados por **0** y **1**, tales que para todo número real x se tiene (Ecuación 3.3):

$$x + \mathbf{0} = x, \quad x \cdot \mathbf{1} = x \quad (3.3)$$

C_5 (EXISTENCIA DE OPUESTO ADITIVO): Para cada número real x existe un número real y tal que $x + y = \mathbf{0}$. Este elemento se denota como $-x$.

C_6 (EXISTENCIA DE RECÍPROCO O INVERSO MULTIPLICATIVO): Para cada número real $x \neq \mathbf{0}$ existe un número real y tal que $x \cdot y = \mathbf{1}$. Este elemento se denota como x^{-1} .

C_7 (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA): Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene (Ecuación 3.4):

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (3.4)$$

Este conjunto de axiomas hace posible demostrar varias propiedades algebraicas de \mathbb{R} tales como:

- La posibilidad de la sustracción y la división.
- Las leyes de los signos para el producto.
- Las operaciones suma y producto para expresiones del tipo $a \cdot b^{-1}$.
- Las leyes de cancelación para la adición y el producto.

AXIOMAS DE ORDEN

Se supone la existencia de un subconjunto de \mathbb{R} , llamado conjunto de reales positivos \mathbb{R}^+ que satisface los siguientes axiomas:

O_1 (PROPIEDAD CLAUSURATIVA): Las leyes $(+, \cdot)$ son de composición interna en \mathbb{R}^+ , esto es, para cada par de números reales $x, y \in \mathbb{R}^+$, la suma $x + y$ y el producto $x \cdot y$ pertenecen a \mathbb{R}^+ .

O_2 : Para todo número real x , una y solo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- $x \in \mathbb{R}^+$
- $x = \mathbf{0}$
- $-x \in \mathbb{R}^+$

Este conjunto de axiomas permite definir una relación de orden " $<$ " en \mathbb{R} , así como unas expresiones denominadas *desigualdades*, con la cual se hace posible demostrar:

- Propiedad de tricotomía.
- Propiedad transitiva.
- Propiedad uniforme para la adición y producto.
- Consistencia de los símbolos \leq, \geq con la relación de orden definida.

AXIOMA DE COMPLETITUD

La introducción de este axioma requiere ciertas definiciones preliminares referentes a la acotación de subconjuntos de \mathbb{R} .

DEFINICIÓN 2: Sea $S \subset \mathbb{R}$. Se dice que S está **acotado superiormente** si existe un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq s$ para todo $s \in S$. Un número x con esta propiedad se dice que es una **cota superior** de S .

DEFINICIÓN 3: Se dice que número real x es una **cota superior mínima** de un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ si:

- x es una cota superior de S
- Si y es una cota superior de S , entonces $x \leq y$.

Una característica de las mínimas cotas superiores es que, si existen, son únicas, como lo demuestra el siguiente teorema.

TEOREMA 1: Si x, y son cotas superiores mínimas de un conjunto $S \subset \mathbb{R}$, entonces $x = y$.

De este modo, se puede hablar de *la* mínima cota superior de un conjunto $S \subset \mathbb{R}$. Esta se denomina **supremo** de S y se denota como $\sup S$.

AXIOMA DE COMPLETITUD: Todo conjunto $S \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, tiene supremo.

Esta propiedad completa la definición axiomática de \mathbb{R} .

En este proceso, de carácter evidentemente no constructivo, deja de lado el punto de vista “realista” de los objetos matemáticos, que los considera como *cosas en sí* de las cuales solo se pretende determinar las propiedades. Se centra más en todas las propiedades y relaciones que los ligán entre sí, las cuales agotan todos los posibles aspectos bajo los cuales intervienen tales objetos en la actividad matemática.

El propósito de las secciones siguientes es mostrar la posibilidad de construir rigurosamente el conjunto \mathbb{R} de números reales a partir del conjunto \mathbb{Q} de los números racionales, aceptando como conocidas las propiedades de cuerpo y orden de este último conjunto así como la propiedad arquimediana⁸, obteniendo como resultado un cuerpo ordenado y completo en donde se verifiquen las antedichas propiedades junto con la propiedad de completitud, dejando de lado la descripción puramente axiomática que es comúnmente mostrada en los libros de texto.

3.2. Construcción mediante cortaduras de Dedekind

Se parte entonces de la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4: Un número real es un conjunto A de números racionales que satisface las siguientes propiedades

- 1) Si $x \in A$ e y es un número racional con $y < x$, entonces $y \in A$.
- 2) $A \neq \emptyset$
- 3) $A \neq \mathbb{Q}$
- 4) Si $x \in A$, existe un $r \in A$ que satisface $r > x$

En esencia, las propiedades establecen lo siguiente [18]:

- El conjunto A es no vacío pero no contiene todos los números racionales.
- Si $x \in A$ y $y \notin A$, entonces $y > x$

⁸ Una deducción rigurosa de las propiedades de cuerpo y orden del conjunto \mathbb{Q} , aceptando como verdaderos los axiomas de Peano para \mathbb{N} y empleando relaciones de equivalencia, puede encontrarse en cualquier texto de álgebra abstracta o de fundamentos de Matemáticas. Véase también LANDAU, Edmund. *Foundations of Analysis*. Chelsea Publishing Company. New York. 1966.

- Para todo $x \in A$, el conjunto contiene todos los racionales y menores a aquel.
- El conjunto A no contiene elemento máximo.

Se define ahora la relación de orden $<$ entre estos subconjuntos de \mathbb{Q} .

DEFINICIÓN 5: Si A y B son dos números reales (entendidos como subconjuntos de \mathbb{Q} con las propiedades ya mencionadas), entonces $A < B$ significa $A \subsetneq B$.

Basados en la definición anterior, pueden entonces definirse los símbolos $>$, \leq y \geq así:

- $A > B$ sí y sólo si $B < A$
- $A \leq B$ sí y sólo si $A \subseteq B$
- $A \geq B$ sí y sólo si $B \subseteq A$

La definición 5 es consistente con el principio de tricotomía y la transitividad de orden esperada para \mathbb{R} como lo muestra el siguiente teorema.

TEOREMA 2: Si A y B son números reales una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera (Ecuaciones 3.5):

$$A < B, \quad A = B, \quad A > B \quad (3.5)$$

Así mismo, si A, B y C son números reales con $A < B$ y $B < C$, se tiene entonces que $A < C$.

Con estas definiciones, es posible demostrar rigurosamente todas las propiedades de cuerpo, de orden y de completitud que caracterizan a \mathbb{R} . Se procederá enunciando en primera instancia la propiedad de completitud, seguida de las propiedades de cuerpo y orden, de manera simultánea [32].

Se define primeramente el concepto de cota superior para una colección \mathcal{A} de números reales.

DEFINICIÓN 6: Sea \mathcal{A} una colección de números reales, se dice que \mathcal{A} está acotada superiormente si existe un número real C tal que:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \leq C$$

De manera similar, se dice que \mathcal{A} está acotada inferiormente si existe un número real D que cumple:

$$D \leq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

Con esta definición, es posible demostrar la propiedad fundamental de \mathbb{R} y que la distingue de \mathbb{Q} , esto es, su completitud basada en la existencia de una *mínima* cota superior, como sigue

TEOREMA 3: Sea \mathcal{A} una colección no vacía de números reales. Si \mathcal{A} está acotada superiormente entonces existe un número real B que es la mínima cota superior.

DEFINICIÓN 7: Sean A y B números reales, entonces $A + B$ es el conjunto

$$A + B = \{x + y : x \in A \wedge y \in B\}$$

De este modo es posible enunciar lo siguiente.

TEOREMA 4 (PROPIEDAD CLAUSURATIVA DE LA ADICIÓN): Si A y B son números reales la suma $A + B$ es un número real.

TEOREMA 5 (PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA ADICIÓN): Si A y B son números reales, entonces $A + B = B + A$.

TEOREMA 6 (PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA ADICIÓN): Si A , B y C son números reales, entonces $A + (B + C) = (A + B) + C$.

La propiedad modulativa así como la existencia de inversos aditivos requiere definir primeramente el número real $\mathbf{0}$.

DEFINICIÓN 8: El número cero ($\mathbf{0}$) se define como (Ecuación 3.6):

$$\mathbf{0} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\} \quad (3.6)$$

TEOREMA 7 (PROPIEDAD MODULATIVA DE LA ADICIÓN): Si A es un número real, se tiene que $A + \mathbf{0} = A$.

Con el propósito de mostrar la existencia de inversos aditivos, se hace necesaria la siguiente definición:

DEFINICIÓN 9: Si A es un número real, se define el conjunto $-A$ de la siguiente manera (Ecuación 3.7):

$$-A = \{x \in \mathbb{Q} : -x \notin A \wedge -x \text{ no es el elemento mínimo de } \mathbb{Q} - A\} \quad (3.7)$$

La razón de introducir la última proposición en la definición condicional de $-A$ es evitar la ocurrencia de un elemento máximo. Por ejemplo, sea $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < a\}$ con $a \in \mathbb{Q}$. Esta cortadura define el número real a . Si se omite la segunda proposición, se tendría entonces que $-a = \{x \in \mathbb{Q} : -x \notin a\}$, sin embargo, $-x \notin a$ implica $-x \geq a$ y esto, a su vez, $x \leq -a$ con x racional. Este conjunto posee el elemento máximo $-a$ lo que entra en contradicción con la propiedad 4, definición 4; al considerar el conjunto $\mathbb{Q} - a$, esto es, $\{x \in \mathbb{Q} : x \geq a\}$ cuyo mínimo es a , se tiene entonces que $-x \neq a$ lo que resulta en $x \neq -a$, excluyendo la ocurrencia de dicho elemento máximo. El siguiente teorema garantiza que $-A$ es un número real.

TEOREMA 8: Si A es un número real entonces $-A$, como fue definido anteriormente, es un número real.

Una vez se demuestra que $-A$ es un número real, es posible ahora enunciar la propiedad del inverso aditivo.

TEOREMA 9 (INVERSO ADITIVO): Sea A un número real, entonces $A + (-A) = \mathbf{0}$

Se procede ahora a enunciar las propiedades de orden. Siguiendo una estructura similar a la establecida en los libros de texto de enseñanza del cálculo [2], se procede a definir un subconjunto de \mathbb{R} , denominado reales positivos (\mathbb{R}^+), sobre el que se basan dichas propiedades.

DEFINICIÓN 10: $\mathbb{R}^+ = \{A \in \mathbb{R} : A > \mathbf{0}\}$

Esta definición simplemente establece que los reales positivos son todos aquellos subconjuntos de \mathbb{Q} que contienen al conjunto $\mathbf{0}$ de la definición 5. Se observa, además, que si A y B pertenecen a \mathbb{R}^+ , $A + B$ también pertenece a \mathbb{R}^+ puesto que pueden escogerse dos racionales positivos $a \in A$ y $b \in B$ con los que se tiene $a + b > \mathbf{0}$.

A partir de lo anterior pueden demostrarse los siguientes teoremas concernientes al ordenamiento en \mathbb{R} .

TEOREMA 10: Si A es un número real entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- $A \in \mathbb{R}^+$
- $A = \mathbf{0}$
- $-A \in \mathbb{R}^+$

Se concluye entonces que, dado cualquier número real A , debe cumplirse al menos una de estas tres condiciones. Para mostrar la unicidad de estas, se observa que $A = \mathbf{0}$ es incompatible con $A > \mathbf{0}$ (ya que esto último exigiría al menos la ocurrencia de un racional positivo perteneciente a $\mathbf{0}$) y con $A < \mathbf{0}$ (implicando entonces la ausencia de un racional negativo perteneciente a $\mathbf{0}$). Similarmente, $A > \mathbf{0}$ y $A < \mathbf{0}$ (o su equivalente $-A > \mathbf{0}$) son incompatibles debido a que $\mathbf{0} = A + (-A) > \mathbf{0}$.

Se enuncia ahora otra propiedad relacionada con el ordenamiento en \mathbb{R} .

TEOREMA 11 (PROPIEDAD UNIFORME DE LAS DESIGUALDADES): Sean A, B y C números reales, si $A < B$ entonces $A + C < B + C$.

Este teorema permite definir la operación de producto (\cdot) entre dos números reales positivos.

DEFINICIÓN 11: Si A y B son dos números reales tales que $A, B > \mathbf{0}$, entonces (Ecuación 3.8):

$$A \cdot B = \{z \in \mathbb{Q} : z \leq \mathbf{0}\} \cup \{z = x \cdot y : x \in A \wedge y \in B \wedge x, y > \mathbf{0}\} \quad (3.8)$$

El hecho que esta definición es consistente con aquella de número real requiere la comprobación de cada una de las cuatro propiedades de la definición 4.

TEOREMA 12 (PROPIEDAD CLAUSURATIVA DEL PRODUCTO EN \mathbb{R}^+): Si A y B son dos números reales tales que $A, B > \mathbf{0}$, entonces $A \cdot B$ es un número real positivo.

DEFINICIÓN 12: Si A es un número real, entonces:

$$|A| = \begin{cases} A, & A \geq \mathbf{0} \\ -A, & A < \mathbf{0} \end{cases}$$

Obviamente, en cada caso se tiene un número real.

DEFINICIÓN 13: Si A y B son números reales, entonces:

$$A \cdot B = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{si } A = \mathbf{0} \text{ o } B = \mathbf{0} \\ |A| \cdot |B|, & \text{si } A > \mathbf{0} \text{ y } B > \mathbf{0} \text{ o } A < \mathbf{0} \text{ y } B < \mathbf{0} \\ -(|A| \cdot |B|), & \text{si } A > \mathbf{0} \text{ y } B < \mathbf{0} \text{ o } A < \mathbf{0} \text{ y } B > \mathbf{0} \end{cases}$$

De este modo, pueden demostrarse las restantes propiedades del producto en \mathbb{R} reduciéndolas a casos que solo involucren reales positivos.

TEOREMA 13 (PROPIEDAD CONMUTATIVA DEL PRODUCTO): Si A y B son números reales, entonces $A \cdot B = B \cdot A$.

De manera similar a la definición del módulo de la adición, se define el módulo del producto y la propiedad modulativa de esta operación así:

DEFINICIÓN 14: El número uno (**1**) se define como (Ecuación 3.9):

$$\mathbf{1} = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\} \quad (3.9)$$

TEOREMA 14 (PROPIEDAD MODULATIVA DEL PRODUCTO): Si A es un número real, se tiene que $A \cdot \mathbf{1} = A$.

TEOREMA 15 (PROPIEDAD ASOCIATIVA DEL PRODUCTO): Si A , B y C son números reales, entonces se satisface $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Para demostrar la existencia de inversos multiplicativos, se hace la siguiente definición:

DEFINICIÓN 15: Si $A > \mathbf{0}$, se define el conjunto A^{-1} de la siguiente manera (Ecuación 3.10):

$$A^{-1} = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\} \cup \left\{x \in \mathbb{Q}^+ : \frac{1}{x} \notin A \wedge \frac{1}{x} \text{ no es el elemento mínimo de } \mathbb{Q} - A\right\} \quad (3.10)$$

Si $A < \mathbf{0}$, entonces $A^{-1} = -(|A|^{-1})$.

Como es usual, se requiere demostrar que el conjunto recién definido es un número real.

TEOREMA 16: Si A es un número real distinto de $\mathbf{0}$, entonces A^{-1} es un número real.

Es claro entonces que A^{-1} es un número real. Con ayuda de ciertos resultados auxiliares, puede demostrarse la propiedad del inverso multiplicativo.

TEOREMA 17 (INVERSO MULTIPLICATIVO): Sea A un número real distinto de $\mathbf{0}$, entonces $A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}$.

El teorema que se presenta a continuación y que prueba la última propiedad de cuerpo completa la construcción mediante cortaduras.

TEOREMA 18 (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA): Si A, B y C son números reales, entonces (Ecuación 3.11):

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (3.11)$$

3.3. Construcción mediante Sucesiones Regulares

Esta construcción hace uso del concepto de sucesión racional, que se precisa de acuerdo a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 16: Una sucesión de números racionales es una función $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Se denota $a(n)$ como a_n y es llamado el n -ésimo término de la sucesión. Así mismo, el conjunto de valores de la sucesión a se denota como $\{a_n\}$.

De manera similar a las sucesiones de números reales, es posible definir la convergencia de estas sucesiones racionales del siguiente modo:

DEFINICIÓN 17: Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números racionales y $b \in \mathbb{Q}$. Se dice que $\{a_n\}$ converge al número racional b sí y solo sí, para todo ε racional positivo, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica $|a_n - b| < \varepsilon$. En términos de cuantificadores (Ecuación 3.12):

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+, \exists N \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon) \quad (3.12)$$

Esta definición de convergencia, aunque precisa, adolece de ciertos inconvenientes a la hora de construir los números reales; en particular, se requiere de antemano conocer el valor b hacia el cual converge una sucesión dada. Este valor puede no ser racional (como en el caso de las aproximaciones racionales a la raíz cuadrada seguidas por los babilonios o las aproximaciones al número π dadas por Arquímedes mediante el método de exhaustión [13]) de modo que la definición anterior se invalida. Es por eso que se emplea otro criterio de convergencia, el cual no requiere del conocimiento explícito del valor de b , que permite, como se verá más adelante, definir una relación de equivalencia sobre las sucesiones en \mathbb{Q} lo que se tomará *a priori* como definición de número real.

DEFINICIÓN 18: Una sucesión se dice que satisface el criterio de Cauchy si y solo si (Ecuación 3.13):

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+, \exists N \in \mathbb{N}, (n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon) \quad (3.13)$$

Intuitivamente, cuando una sucesión de Cauchy se representa sobre la recta numérica de puntos racionales, la distancia o separación entre los términos de la sucesión se hace tan pequeña como se quiera sólo con tomar los índices suficientemente grandes. Aún cuando una sucesión de puntos racionales pueda converger hacia un valor no racional, este último no requiere hacerse explícito, de manera que no se cae en una definición circular de número real dado que las definiciones dadas dependen, en su integridad, de las propiedades de cuerpo y orden de \mathbb{Q} . A continuación se muestra que la convergencia de una secuencia racional implica el cumplimiento del criterio de Cauchy.

TEOREMA 19: Toda sucesión $\{a_n\}$ de números racionales convergente satisface el criterio de Cauchy.

Un punto a resaltar del teorema es el siguiente: Si bien asume la existencia de un valor racional hacia el cual converge una secuencia, ¿Qué sucede con aquellas secuencias, como las ya mencionadas, cuyo valor de convergencia se sabe *a posteriori* que es irracional? En este punto surge un problema de carácter enteramente epistemológico y está íntimamente relacionado con la definición que busca precisar el concepto de número real; más que apelar al concepto de convergencia de sucesiones racionales con el propósito de definir el número real, el cual requiere

conocer de antemano el valor b (aún sin definir en el caso de no ser racional), se emplea como piedra angular de la construcción el criterio de Cauchy, que no hace referencia explícita a tal valor y maneja únicamente expresiones racionales. De hecho, las sucesiones que cumplen con tal criterio en un cuerpo ordenado y arquimediano hacen a este último completo [19] lo que, en cierto modo, garantiza la existencia de al menos un cuerpo con tales características de modo que no se trabaje “en el vacío”.

De acuerdo entonces con lo mencionado en el párrafo anterior, se proporcionan las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 19: Una sucesión $\{a_n\}$ de racionales se denomina fundamental (o regular) si y solo si verifica el criterio de Cauchy.

DEFINICIÓN 20: Una sucesión $\{a_n\}$ de racionales se dice nula o equivalente a cero si satisface (Ecuación 3.14):

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+, \exists N \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon) \quad (3.14)$$

Esto es, si los términos de la sucesión, posteriores a cierto N , pueden hacerse arbitrariamente pequeños en valor absoluto. Claramente, una sucesión $\{a_n\}$ equivalente a cero es fundamental ya que, de acuerdo a la desigualdad del triángulo (Ecuación 3.15):

$$|a_n - a_m| \leq |a_n| + |a_m| \quad (3.15)$$

El primer término puede ser arbitrariamente pequeño cuando a_n y a_m lo sean. Esta última definición permite precisar la noción de “igualdad” entre sucesiones fundamentales ya que es perfectamente posible que dos sucesiones de números racionales converjan al mismo número racional, por ejemplo, aún siendo distintas. Como ejemplo, las sucesiones $\{\frac{1}{n}\}$ y $\{0\}$ convergen ambas al mismo valor y sus términos son distintos. Esta última sucesión es un caso particular de una sucesión equivalente a cero y para denotar la equivalencia se escribe $\{a_n\} \sim \{0\}$.

Como fue mencionado, dos sucesiones racionales pueden converger al mismo valor sin ser necesariamente iguales; tómense, por ejemplo, las aproximaciones al número π obtenidas por Arquímedes mediante el método de exhaustión. La idea que se desarrolla a continuación es precisar la “igualdad” entre dichas sucesiones que, se espera, converjan al mismo valor real.

DEFINICIÓN 21: Sea \mathcal{S} el conjunto de sucesiones regulares sobre \mathbb{Q} . Dos sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{S}$, son equivalentes si y solo si la sucesión $\{a_n - b_n\}$ es una sucesión equivalente a cero y se escribe $\{a_n\} \sim \{b_n\}$

Puede demostrarse que la relación “es equivalente a” sobre \mathcal{S} es una relación de equivalencia, de modo \mathcal{S} se particiona en clases de equivalencia según la relación “ \sim ”. El conjunto cociente \mathcal{S} / \sim se define entonces como el conjunto \mathbb{R} de los números reales y las propiedades que se enuncian a continuación permiten demostrar que las operaciones definidas sobre \mathcal{S} inducen unas similares sobre \mathbb{R} , que gozan de las propiedades de cuerpo, orden y completitud esperadas para él. La clase de equivalencia correspondiente a la sucesión $\{a_n\}$ se designa como $[\{a_n\}]$, esto es (Ecuación 3.16):

$$[\{a_n\}] = \{\{x_n\} \in \mathcal{S} : \{x_n\} \sim \{a_n\}\} \quad (3.16)$$

DEFINICIÓN 22: Dadas dos sucesiones regulares $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, se define la sucesión suma $\{s_n\}$ como (Ecuación 3.17):

$$\{s_n\} = \{a_n + b_n\} \quad (3.17)$$

Siendo $+$ la suma ordinaria en \mathbb{Q} . Para que sea aceptable esta definición de suma, debe mostrarse que la sucesión obtenida es regular y que tal definición es estable frente a la relación de equivalencia.

TEOREMA 20 (PROPIEDAD CLAUSURATIVA DE LA ADICIÓN): Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones regulares, la sucesión suma $\{s_n\} = \{a_n + b_n\}$ es regular.

Una vez demostrada la estabilidad de la operación definida en \mathcal{S} se demuestran de manera inmediata las propiedades de cuerpo relativas a la adición.

TEOREMA 21 (PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA ADICIÓN): Sean $[\{a_n\}]$ y $[\{b_n\}]$ dos números reales (definidos a partir del conjunto cociente \mathcal{S}/\sim), entonces (Ecuación 3.18):

$$[\{a_n\}] + [\{b_n\}] = [\{b_n\}] + [\{a_n\}] \quad (3.18)$$

TEOREMA 22 (PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA ADICIÓN): Sean $[\{a_n\}]$, $[\{b_n\}]$ y $[\{c_n\}]$ números reales, entonces (Ecuación 3.19):

$$([\{a_n\}] + [\{b_n\}]) + [\{c_n\}] = [\{a_n\}] + ([\{b_n\}] + [\{c_n\}]) \quad (3.19)$$

Si se define el número real $\mathbf{0}$ como la clase de equivalencia correspondiente a la sucesión $\{0\}$, pueden demostrarse las restantes propiedades de cuerpo relativas a la adición.

TEOREMA 23 (PROPIEDAD MODULATIVA DE LA ADICIÓN): Si $[\{a_n\}]$ es un número real, se tiene que $[\{a_n\}] + \mathbf{0} = [\{a_n\}]$.

DEFINICIÓN 23: Si $[\{a_n\}]$ es un número real, se define el opuesto $-[\{a_n\}]$ de la siguiente manera (Ecuación 3.20):

$$-[\{a_n\}] = [\{-a_n\}] \quad (3.20)$$

Claramente, $[\{-a_n\}]$ es una sucesión regular⁹.

TEOREMA 24 (INVERSO ADITIVO): Sea $[\{a_n\}]$ un número real, entonces $[\{a_n\}] + (-[\{a_n\}]) = \mathbf{0}$

Se define ahora la operación de producto (\cdot) entre dos sucesiones regulares de \mathcal{S} .

DEFINICIÓN 24: Dadas dos sucesiones regulares $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, se define la sucesión producto $\{p_n\}$ como (Ecuación 3.21):

$$\{p_n\} = \{a_n \cdot b_n\} \quad (3.21)$$

⁹ Esto es consecuencia de la identidad $|a_n - a_m| = |(-a_n) - (-a_m)|$.

Donde \cdot es la multiplicación ordinaria en \mathbb{Q} . Al igual que con la adición, puede mostrarse que la sucesión obtenida es regular y que tal definición es estable frente a la relación de equivalencia.

TEOREMA 25 (PROPIEDAD CLAUSURATIVA DEL PRODUCTO): Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones regulares, la sucesión producto $\{p_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$ es regular.

Las demostraciones de las propiedades de cuerpo conmutativa, asociativa y modulativa relativas al producto son esencialmente similares a aquellas pertenecientes a la adición definiendo el número real $\mathbf{1}$ como la clase de equivalencia correspondiente a la sucesión $\{1\}$ y se enuncian a continuación.

TEOREMA 26 (PROPIEDAD CONMUTATIVA DEL PRODUCTO): Sean $[\{a_n\}]$ y $[\{b_n\}]$ dos números reales, entonces (Ecuación 3.22):

$$[\{a_n\}] \cdot [\{b_n\}] = [\{b_n\}] \cdot [\{a_n\}] \quad (3.22)$$

TEOREMA 27 (PROPIEDAD ASOCIATIVA DEL PRODUCTO): Sean $[\{a_n\}]$, $[\{b_n\}]$ y $[\{c_n\}]$ números reales, entonces (Ecuación 3.23):

$$([\{a_n\}] \cdot [\{b_n\}]) \cdot [\{c_n\}] = [\{a_n\}] \cdot ([\{b_n\}] \cdot [\{c_n\}]) \quad (3.23)$$

TEOREMA 28 (PROPIEDAD MODULATIVA DEL PRODUCTO): Si $[\{a_n\}]$ es un número real, se tiene que $[\{a_n\}] \cdot \mathbf{1} = [\{a_n\}]$.

Con ayuda de ciertos resultados auxiliares, puede definirse la sucesión inversa multiplicativa de una sucesión no equivalente a cero y demostrarse la propiedad del inverso multiplicativo.

DEFINICIÓN 25: Sea $\{a_n\}$ una sucesión regular no equivalente a cero, esto es, $|a_n| > q$ para n mayor a un cierto N natural. Se define la sucesión $\{d_n\}$ así (Ecuación 3.24):

$$d_n = \begin{cases} 0, & n < N \\ \frac{1}{a_n}, & n \geq N \end{cases} \quad (3.24)$$

La sucesión $\{d_n\}$ se llama la inversa multiplicativa (o recíproca) de la sucesión $\{a_n\}$, siendo denotada como $\{a_n\}^{-1}$. Puede demostrarse que esta sucesión es equivalente a la sucesión $\{1\}$ y se tiene entonces:

TEOREMA 29 (INVERSO MULTIPLICATIVO): Sea $\{a_n\}$ una sucesión regular no equivalente a cero y $\{d_n\}$ la sucesión de la definición 25, entonces:

- $\{d_n\}$ es regular
- Si $\{x_n\} \in [\{a_n\}]$, $\{y_n\} = \{x_n\}^{-1}$ entonces $\{y_n \cdot d_n\} \in [\{0\}]$

Para finalizar la construcción de las propiedades de cuerpo para \mathbb{R} , se enuncia la última propiedad de cuerpo para \mathbb{R} .

TEOREMA 30 (PROPIEDAD DISTRIBUTIVA): Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ números reales, entonces (Ecuación 3.25):

$$\{a_n\} \cdot (\{b_n\} + \{c_n\}) = \{a_n\} \cdot \{b_n\} + \{a_n\} \cdot \{c_n\} \quad (3.25)$$

Esto finaliza la exposición de las propiedades de cuerpo en \mathbb{R} . De manera similar a como se mostró en la construcción por cortaduras, se define un subconjunto de \mathcal{S} / \sim que se denominará \mathbb{R}^+ de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 26: Sea $\{a_n\} \in \mathbb{R}$. Se dice que $\{a_n\}$ es positivo si y solo si (Ecuación 3.26):

$$\exists q \in \mathbb{Q}^+, \exists N \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow a_n > q) \quad (3.26)$$

Esto es, un número real es positivo si y solo si sus términos, luego de cierto N , están acotados inferiormente por un racional positivo. De este modo, se define \mathbb{R}^+ como el conjunto de clases de equivalencia que satisface la definición y a partir de ella, puede demostrarse lo siguiente:

TEOREMA 31: Si $\{a_n\}$ es un número real entonces una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

- $\{a_n\} \in \mathbb{R}^+$
- $\{a_n\} = \mathbf{0}$
- $-\{a_n\} \in \mathbb{R}^+$

TEOREMA 32 (PROPIEDAD CLAUSURATIVA DE LA ADICIÓN Y EL PRODUCTO EN \mathbb{R}^+): Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos números reales positivos entonces, tanto $\{a_n\} + \{b_n\}$ como $\{a_n\} \cdot \{b_n\}$, son reales positivos.

Ya es posible definir un orden sobre \mathbb{R} . Dados dos números reales $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, la expresión $\{a_n\} < \{b_n\}$ significa que $\{b_n\} + (-\{a_n\})$ pertenece a \mathbb{R}^+ . De este modo, se desprenden las siguientes definiciones:

- $\{a_n\} > \{b_n\}$ significa $\{b_n\} < \{a_n\}$
- $\{a_n\} \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $\{a_n\} > \mathbf{0}$
- $-\{a_n\} \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $\{a_n\} < \mathbf{0}$
- $\{a_n\} \leq \{b_n\}$ significa que $\{a_n\} < \{b_n\}$ ó $\{a_n\} = \{b_n\}$
- $\{a_n\} \geq \{b_n\}$ significa $\{b_n\} \leq \{a_n\}$

De este modo $\{a_n\} > \mathbf{0}$ si y solo si $\{a_n\}$ es positivo y si $-\{a_n\} > \mathbf{0}$ se dice que $\{a_n\}$ es negativo. Que " $<$ " define una relación de orden en \mathbb{R} se aprecia teniendo en cuenta lo siguiente:

- Es total como consecuencia de los Teoremas 20 y 31.
- Es transitivo como consecuencia de los Teoremas 20, 31 y 32.
- Es antisimétrico ya que la proposición (Ecuación 3.27):

$$\{a_n\} < \{b_n\} \wedge \{b_n\} < \{a_n\} \Rightarrow \{a_n\} = \{b_n\} \quad (3.27)$$

Se cumple de manera trivial al ser el antecedente falso para cualquier par de números $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

Queda por enunciar la propiedad más importante de \mathbb{R} , la propiedad de completitud. Para hacerlo, se enunciará una propiedad equivalente [19], esto es, que toda sucesión regular de números reales es convergente en \mathbb{R} . Esto requiere mostrar primero que \mathbb{R} hereda la propiedad arquimediana de \mathbb{Q} .

TEOREMA 33 (PROPIEDAD ARQUIMEDIANA EN \mathbb{R}): Para todo $[\{a_n\}] \in \mathbb{R}^+$, $[\{b_n\}] \in \mathbb{R}$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \cdot [\{a_n\}] > [\{b_n\}]$

Una consecuencia de la propiedad arquimediana (que se demuestra en textos de cálculo con la ayuda del principio de buena ordenación) es la siguiente: para todo número real positivo $[\{a_n\}]$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo ε racional positivo, subsiste la siguiente desigualdad (Ecuación 3.28):

$$n \cdot \varepsilon \leq [\{a_n\}] < (n + 1) \cdot \varepsilon \quad (3.28)$$

Los números $n \cdot \varepsilon$ y $(n + 1) \cdot \varepsilon$ son llamados *aproximaciones por defecto y exceso* del número real $[\{a_n\}]$. Si se toma ε racional de la forma 10^{-k} , con k natural, se obtienen entonces las *aproximaciones decimales* al número real. Teniendo esto en cuenta, es posible demostrar la completitud de \mathbb{R} .

TEOREMA 34 (PROPIEDAD DE COMPLETITUD DE \mathbb{R}): Toda sucesión regular de números reales es equivalente a una sucesión regular de racionales y ambas definen el mismo valor real.

3.4. Aproximación a los números reales desde las Fracciones Continuas

3.4.1. Fracciones continuas finitas

DEFINICIÓN 27: Una fracción continua finita de orden n es una expresión de la forma (Ecuación 3.29):

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \quad (3.29)$$

En ella, cada a_k es un número real con $a_0 \geq 0$, $a_k > 0$ para $k \geq 1$. Los números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ se denominan *cocientes parciales* y si estos son enteros positivos, a excepción tal vez de a_0 , la fracción continua se denomina *fracción continua simple*. Para efectos de economía en la escritura, la fracción continua anterior se denota como $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Toda fracción continua simple puede transformarse en un número racional equivalente y aunque puede ejemplificarse de manera intuitiva que cada fracción continua simple finita es equivalente a un número racional, la demostración de este hecho para **toda** fracción continua simple finita debe realizarse formalmente y se enuncia como un resultado independiente.

TEOREMA 35: Toda fracción continua simple y finita es equivalente a un número racional.

El problema inverso, esto es, determinar la expresión en forma de fracción continua simple finita para un racional dado se lleva a cabo empleando el Algoritmo de Euclides para la división, lo que formalmente se enuncia en el siguiente teorema.

TEOREMA 36: Todo número racional puede expresarse en forma de fracción continua simple y finita.

Es importante para la discusión que se tiene cuestionarse acerca de la unicidad de la representación de un número racional en forma de fracción continua simple y finita. Es posible obtener dos representaciones totalmente equivalentes de un racional en forma de fracción continua simple y finita, esto es, si el racional $\frac{a}{b}$ tiene una representación (garantizada por el Teorema 36) dada por $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, esta última es totalmente equivalente a $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$ siempre que $a_n > 1$ (cuando $a_n = 1$, la otra representación equivalente es $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1]$). El siguiente teorema garantiza que estas dos representaciones de un número racional son únicas.

TEOREMA 37: Si un número racional $\frac{a}{b}$ tiene dos representaciones en forma de fracción continua simple y finita dadas por $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ y $[b_0; b_1, b_2, \dots, b_m]$ con $a_j > 1$ y $b_k > 1$ para $1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m$, entonces $n = m$ y $a_i = b_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Los teoremas 35, 36 y 37 proporcionan condiciones necesarias y suficientes para que un número racional esté representado de manera única por una fracción continua simple y finita, que se resume en el siguiente corolario.

COROLARIO 1: Una fracción continua simple y finita $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ representa un número racional $\frac{a}{b}$ y recíprocamente, esto es, todo número racional $\frac{a}{b}$ puede representarse de manera única por una fracción continua simple y finita $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ para la que $a_n > 1$.

Cuando se "truncan" o suprimen los términos posteriores a un cierto a_i , con $0 \leq i \leq n$, de una fracción continua simple y finita de la forma $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, se obtiene una secuencia $\{c_k\}$ de fracciones continuas (también simples y finitas) llamadas *convergentes*, denominación debida al hecho que son aproximaciones racionales cada vez más cercanas al número racional x que genera la fracción continua original. Esto es, las convergentes de la fracción continua simple y finita (Ecuación 3.30):

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \quad (3.30)$$

Son aquellas fracciones continuas dadas por (Ecuaciones 3.31):

<p>Convergente cero: (c_0)</p> $[a_0] = \frac{a_0}{1}$ <p>Primera convergente: (c_1)</p> $[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$ <p>Segunda convergente: (c_2)</p> $[a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$	<p>$(n - 1)$-ésima convergente: (c_{n-1})</p> $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1}}}}}$ <p style="text-align: center;">⋮</p> <p>n-ésima convergente: (c_n)</p> $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$
---	--

(3.31)

En donde la n -ésima convergente corresponde a la fracción continua original. Estas fracciones convergentes tienen algunas propiedades dignas de mención para lo que sigue:

- Cada convergente c_k se aproxima cada vez más a la fracción original a medida que k se incrementa, lo que puede observarse si se efectúan sustracciones entre la fracción original y cada una de las c_k .
- Dichas sustracciones exhiben alternancia de signos lo que sugiere que las convergentes de orden par, esto es, de la forma c_{2j} , se aproximan al racional x a través de valores *menores* que él mientras que las convergentes de orden impar c_{2j+1} lo hacen a través de valores *mayores*.

La obtención de las fracciones convergentes a una fracción continua simple puede efectuarse sin necesidad de recurrir a la simplificación, paso por paso, de las fracciones continuas obtenidas por truncamiento. De hecho, es posible demostrar que una definición recurrente apropiada permite obtener las fracciones convergentes de una fracción continua simple.

TEOREMA 38: La convergente c_k , con $0 \leq k \leq n$, de la fracción continua $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ está dada por (Ecuación 3.32):

$$c_k = \frac{p_k}{q_k}, \quad 0 \leq k \leq n \tag{3.32}$$

Donde p_k y q_k se definen de manera recurrente como (Ecuaciones 2.81):

$p_0 = a_0$	$q_0 = 1$
$p_1 = a_1 \cdot p_0 + 1$	$q_1 = a_1$
$p_k = a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}$, para $2 \leq k \leq n$	$q_k = a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}$, para $2 \leq k \leq n$

3.4.2. Fracciones continuas infinitas

La presentación hecha hasta el momento solo ha tratado acerca de los números racionales y de sus expansiones en forma de fracción continua simple finita. El proceso de expansión para números

irracionales es, en cierta forma, similar al descrito anteriormente para los números racionales en el sentido en que se efectúan sustracciones sucesivas de un número irracional dado y se generan ciertos residuos con los que se repite dicho procedimiento de sustracción. Una demostración formal de este procedimiento requiere definir en primera instancia lo que se entiende por *fracción continua simple infinita* así como de ciertos resultados asociados a sus fracciones convergentes.

DEFINICIÓN 28: Sea $\{a_k\}_0^\infty = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ una sucesión de enteros positivos, excepto tal vez a_0 . Una **fracción continua simple infinita** es una expresión de la forma (Ecuación 3.33):

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}} \quad (3.33)$$

Alternativamente, se escribe $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$.

TEOREMA 39: Sea $\{a_k\}_0^\infty = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ una sucesión infinita de enteros positivos, excepto tal vez a_0 . Se definen de manera recurrente las siguientes sucesiones p_k y q_k (Ecuaciones 3.34):

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0 & q_0 &= 1 \\ p_1 &= a_1 \cdot p_0 + 1 & q_1 &= a_1 \\ p_k &= a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}, \text{ para } k \geq 2 & q_k &= a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}, \text{ para } k \geq 2 \end{aligned}$$

Si x es un número real positivo, entonces (Ecuación 3.35):

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, x] = \frac{x \cdot p_n + p_{n-1}}{x \cdot q_n + q_{n-1}} \quad (3.35)$$

De este modo, puede considerarse el Teorema 39 como una generalización del Teorema 38. Su importancia yace en el hecho que permite tanto *definir* las convergentes de una fracción continua simple infinita así como mostrar las sucesivas aproximaciones de aquellas al valor de dicha fracción continua simple infinita una vez se le haya dado un significado concreto mediante límites.

DEFINICIÓN 29: Dada una fracción continua simple infinita $[a_0; a_1, a_2, \dots]$, sus *fracciones convergentes* c_k están dadas por (Ecuación 3.36):

$$c_k = \frac{p_k}{q_k} \quad (3.36)$$

Donde p_k y q_k están dadas por las definiciones recurrentes del Teorema 39.

Estas fracciones exhiben ciertas propiedades útiles en demostraciones de convergencia, aproximación y significado concreto de fracciones continuas simples infinitas.

TEOREMA 40: Sea $c_k = \frac{p_k}{q_k}$ la k -ésima convergente de una fracción continua simple. Entonces la expresión (Ecuación 3.37):

$$p_k \cdot q_{k-1} - q_k \cdot p_{k-1} = (-1)^{k-1} \quad (3.37)$$

Es válida para todo $k \in \mathbb{N}$ si la fracción continua simple es infinita ó para $1 \leq k \leq n$ si es finita, siendo n el orden de la fracción.

La identidad anterior tiene varias consecuencias que serán de gran utilidad posteriormente. Las definiciones recurrentes para q_k , así como el hecho que todos los a_k son enteros positivos para $k \geq 1$, implican la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} 1 &= q_0 \leq q_1 = a_1 \\ q_1 &\leq q_2 = a_2 \cdot q_1 + q_0 \\ q_2 &\leq q_3 = a_3 \cdot q_2 + q_1 \\ &\vdots \\ q_k &\leq q_{k+1} = a_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1} \end{aligned}$$

De este modo, los q_k forman una sucesión *creciente* de enteros positivos. Si se dividen ambos lados de la identidad demostrada en el Teorema 40 entre $q_k \cdot q_{k-1}$ y se simplifican términos, se llega a (Ecuación 3.38):

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k \cdot q_{k-1}} \quad (3.38)$$

Con lo que se obtiene, a partir de los resultados de los Teoremas 38 y 39 (Ecuación 3.39):

$$c_k - c_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k \cdot q_{k-1}} \quad (3.39)$$

Este resultado puede interpretarse en conexión con lo expuesto en la construcción de los números reales mediante sucesiones fundamentales. La sucesión racional $\{c_k\}$, determinada a partir de las convergentes de una fracción continua, satisface el Criterio de Cauchy de modo que definen un número real, según lo expuesto en aquella sección.

Considerando ahora la diferencia entre las convergentes de orden k y $k - 2$ se obtiene, no sin cierta manipulación algebraica, lo siguiente (Ecuación 3.40):

$$c_k - c_{k-2} = \frac{(-1)^{k-2} \cdot a_k \cdot q_{k-1}}{q_k \cdot q_{k-1} \cdot q_{k-2}} = \frac{(-1)^{k-2} \cdot a_k}{q_k \cdot q_{k-2}} \quad (3.40)$$

Esta igualdad permite establecer otros resultados de importancia en relación con las fracciones convergentes de una fracción continua simple finita o infinita, a saber:

- Las fracciones convergentes de orden *par* forman una sucesión *creciente* mientras que las de orden *impar* forman una sucesión *decreciente* como puede verse si se reemplaza el índice k por uno de la forma $2j$ (para el caso par) o $2j + 1$ (en el caso impar) y se recuerda que, para $k \geq 2$, los a_k son positivos.
- Cada fracción convergente c_k , con $k \geq 2$, se ubica entre las dos fracciones convergentes precedentes, de modo que se satisface la siguiente cadena de desigualdades:

$$c_0 < c_2 < c_4 < \dots < c_5 < c_3 < c_1$$

Esto último permite responder un interrogante relacionado con el significado concreto, así como el valor, de una fracción continua simple infinita. Para ello es necesario el siguiente teorema (cuya demostración puede hallarse en textos de cálculo [2]) que apela a la propiedad de completitud en \mathbb{R} y enlaza el propósito perseguido en este capítulo con lo expuesto en esta sección, a saber, la aproximación al concepto de número real mediante fracciones continuas:

TEOREMA 41: Una sucesión $\{s_n\}_0^\infty$ monótona converge si y sólo si es acotada.

La cadena de desigualdades $c_0 < c_2 < c_4 < \dots < c_5 < c_3 < c_1$, junto con la primera de las consecuencias del Teorema 6 permite afirmar lo siguiente:

- La sucesión de fracciones convergentes de orden par $\{c_{2k}\}_0^\infty$ es creciente y acotada superiormente por la convergente c_1 .
- La sucesión de fracciones convergentes de orden impar $\{c_{2k+1}\}_0^\infty$ es decreciente y acotada inferiormente por la convergente c_0 .

El Teorema 41 permite entonces concluir que la sucesión de convergentes pares *converge* a un límite l_1 , donde $l_1 \leq c_1$; de manera similar, la sucesión de convergentes impares *converge* a un límite l_2 con $c_0 \leq l_2$; así, es posible escribir (Ecuaciones 3.41):

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k} &= l_1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k+1} &= l_2\end{aligned}\tag{3.41}$$

Hasta el momento sólo se ha mostrado la existencia de un límite para las convergentes pares e impares, más no se ha demostrado la igualdad de aquellos; intuitivamente se esperaría que $l_1 = l_2$ ya que la sucesión de convergentes $\{c_k\}$ (con k par o impar) *define* un número real, según lo expuesto en la construcción de \mathbb{R} mediante sucesiones regulares. El propósito del siguiente teorema es enunciar tal hecho:

TEOREMA 42: Sea c_k la k -ésima convergente de la fracción continua simple infinita $[a_0; a_1, a_2, \dots]$, entonces (Ecuación 3.42):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} c_{2k+1}\tag{3.42}$$

Una consecuencia del teorema anterior es la siguiente: El límite l al que convergen tanto la sucesión de convergentes de orden par como las de orden impar satisface:

$$c_0 < c_2 < c_4 < c_{2k} \dots < l < \dots c_{2k+1} < c_5 < c_3 < c_1$$

De no ser esto cierto, el límite l sería menor a alguna convergente c_{2i} de orden par y por ende menor a todas las subsiguientes contradiciendo el hecho que es la *mínima cota superior* de la sucesión $\{c_{2k}\}_0^\infty$. Un comentario similar se aplica en el caso en que l fuera mayor a alguna convergente c_{2i+1} de orden impar.

El resultado anterior tiene una consecuencia importante en el trabajo que se está desarrollando y es la siguiente: Las convergentes de orden par e impar convergen al mismo límite $l_1 = l_2 = l$ de modo que es posible hablar del *valor* de una fracción continua simple infinita, definido como el límite común a las convergentes de orden par e impar de la misma. Así, el concepto de fracción continua simple infinita adquiere un significado concreto dentro del marco del sistema de números reales, por lo que es lícito escribir (Ecuación 3.43):

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots] \quad (3.43)$$

El Corolario al Teorema 37 establece la equivalencia entre la finitud de una fracción continua simple y los números racionales por lo que surge inmediatamente una pregunta: ¿Qué tipo de número representa una fracción continua simple infinita? Puede decirse, aunque no elegantemente, que el recíproco de dicho corolario permite afirmar la irracionalidad de esta representación, sin embargo, se establecerá esta propiedad como un resultado independiente.

TEOREMA 43: Una fracción continua simple infinita $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ representa un número irracional.

Al inicio de esta sección se esbozó un procedimiento mediante el cual es posible obtener una representación en forma de fracción continua simple infinita para un irracional x , sin embargo, ninguno de los teoremas mencionados permite mostrar que el valor de dicha fracción continua, entendido como el límite al que convergen las sucesiones de fracciones convergentes de orden par e impar, sea igual al número irracional que le dio origen. En el siguiente teorema se establece la veracidad de este hecho, cuya demostración formal valida el proceso descrito para obtener aquella representación.

TEOREMA 44: Sea x un número irracional. Se define de manera recurrente la sucesión $\{a_k\}_0^\infty$ de enteros como sigue (Ecuaciones 3.44):

$$\begin{aligned} a_k &= \llbracket x_k \rrbracket \\ x_{k+1} &= \frac{1}{x_k - a_k} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Donde $\llbracket x \rrbracket$ es el mayor entero menor a x . La anteriores relaciones son válidas para $k \geq 0$ si se define $x_0 = x$. Además, $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$

Los resultados de los Teoremas 43 y 44 permiten establecer el hecho que toda fracción continua simple infinita genera un número irracional y recíprocamente, no obstante, nada de lo dicho hasta el momento permite establecer la *unicidad* de dicha representación. El siguiente teorema enuncia este hecho de manera formal.

TEOREMA 45: Sean $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ y $[b_0; b_1, b_2, \dots]$ dos representaciones en forma de fracción continua simple infinita de un número irracional x , entonces $a_k = b_k$, para todo $k \geq 0$.

En un ámbito más práctico las fracciones continuas, así como sus convergentes, fueron empleadas con el propósito de encontrar *aproximaciones* a números racionales o irracionales dados e históricamente se han empleado con fines tan diversos como [4]:

- Calibración y ajuste de calendarios.
- Ajustes de observaciones astronómicas destinadas a determinar los tamaños relativos entre el Sol y los planetas.
- Determinación de cifras decimales para π .
- Solución de ecuaciones diofánticas.

De este modo, es necesario precisar la aproximación a un número racional o irracional dado mediante el uso de fracciones continuas y sus convergentes. En primera instancia se enunciará formalmente una observación realizada con anterioridad, a saber, que las convergentes de una fracción continua simple se aproximan cada vez más al número que genera la fracción continua de donde provienen.

TEOREMA 46: Cada convergente c_k de una fracción continua simple, finita o infinita, está más próxima al valor x de dicha fracción que la convergente precedente c_{k-1} . Esto es (Ecuación 3.45):

$$|x - c_k| < |x - c_{k-1}| \quad (3.45)$$

Adicionalmente, el error cometido al aproximar x mediante la convergente $c_k = \frac{p_k}{q_k}$ satisface las siguientes desigualdades (Ecuación 3.46):

$$\frac{1}{2 \cdot q_k \cdot q_{k+1}} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k \cdot q_{k+1}} \quad (3.46)$$

El teorema anterior hace necesarios ciertos comentarios con referencia al propósito que persigue, esto es, el de la *aproximación* de números, racionales o irracionales, mediante el uso de fracciones continuas. El primero de ellos está relacionado con las *mejores aproximaciones* racionales posibles; es claro que un irracional x puede aproximarse con la precisión que se desee simplemente observando su representación en forma decimal y expresando dicha aproximación mediante un racional con un denominador, en forma de potencia de 10, lo suficientemente grande. Sin embargo, las convergentes de la fracción continua simple para ese irracional brindan mejores aproximaciones en el sentido de emplear denominadores lo más pequeños posibles, hecho que se enuncia en el siguiente teorema, cuya demostración se omite:

TEOREMA 47: Sea x un número racional o irracional. Si $\frac{a}{b}$ es un racional con denominador positivo y satisface $\left| x - \frac{a}{b} \right| < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right|$ para algún $k \geq 0$, entonces $b > q_k$.

Esto es, la convergente $\frac{p_k}{q_k}$ brinda la mejor aproximación racional posible al número x de entre todas las fracciones con denominador menor a q_k . A manera de ejemplo, las primeras 6 aproximaciones racionales para el número π obtenidas a partir de su expresión decimal son:

$$\frac{3}{1}, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \frac{31415}{10000}, \frac{314159}{100000}$$

Si se considera su expresión en forma de fracción continua simple infinita:

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1+\dots}}}}}$$

La primera convergente $\frac{22}{7}$ brinda una mejor aproximación que las tres primeras obtenidas según su expresión decimal, de hecho, la segunda convergente $\frac{333}{106}$ es precisa hasta la cuarta cifra decimal, superando en precisión a las cinco primeras expresiones decimales.

El segundo comentario está relacionado con la *calidad* de las aproximaciones por fracciones continuas. En el Teorema 46 se mostró que una cota superior para la precisión de dichas aproximaciones era igual a $\frac{1}{q_k \cdot q_{k+1}}$; esta cota puede estrecharse considerablemente y se enuncia como un teorema:

TEOREMA 48: Sea x un número racional o irracional. Si $\frac{p_k}{q_k}$ y $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ son dos convergentes consecutivas de la expresión en forma de fracción continua para x , al menos una de ellas, denominada $\frac{p}{q}$, satisface

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2 \cdot q^2}$$

Haciendo uso del ejemplo anterior, la aproximación racional para π igual a $\frac{22}{7}$ satisface la desigualdad establecida en el teorema, al igual que la tercera convergente $\frac{355}{113}$. Implícitamente, el Teorema 49 establece la *infinitud* de racionales $\frac{p}{q}$ con los que es posible aproximar el número x dado con la precisión estipulada.

El tercer y último comentario tiene que ver con la posibilidad de estrechar la cota superior para las aproximaciones. Esto es, dado un número racional o irracional x ¿Existe algún valor m de modo que la desigualdad $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{m \cdot q^2}$ sea satisfecha por una infinidad de racionales? De ser así ¿Qué tan grande puede ser este valor de m ? La respuesta a estas interrogantes depende en gran medida de los cocientes parciales en la expresión en forma de fracción continua para x . Hacia finales del siglo XIX, Adolf Hurwitz demostró la existencia de un máximo valor para m para el que pueden encontrarse infinitos racionales que satisfacen la desigualdad planteada.

TEOREMA 50: Sea x un número racional o irracional. Existen infinitas aproximaciones racionales $\frac{p}{q}$ que satisfacen la desigualdad $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot q^2}$. La constante $\sqrt{5}$ es la mejor posible, esto es, el teorema sería falso si se empleara una constante mayor.

4. Aspectos pedagógicos en la construcción de los números reales

4.1. Introducción e intencionalidad

Es ya un pilar de la educación en Colombia el reconocimiento de la cultura matemática como elemento esencial para una vida productiva y con sentido de los individuos [1] de modo que es responsabilidad de la escuela la preparación de ciudadanos competentes así como en el potenciamiento de las destrezas y habilidades de razonamiento necesarias para la vida, tanto laboral como académica. En un entorno particular, son cada vez mayores las situaciones laborales, sociales y académicas en las que las competencias matemáticas y las destrezas cognitivas son imprescindibles para un adecuado desempeño social y comunicativo.

La Matemática escolar, como herramienta constructora de significado y potenciadora de destrezas (de razonamiento, procedimiento y argumentales) debe concebirse como un constructo socio-cultural, esto es, plena de sentidos, así como de contextos y significaciones, lo que hace sus principios orientadores fundamentalmente distintos a los de la Matemática disciplinar; de este modo, las actividades de enseñanza y aprendizaje deben estar destinadas a fortalecer la *competencia matemática*, entendida como [1]:

“...el uso flexible y comprensivo del conocimiento matemático escolar en diversidad de contextos, de la vida diaria, de la matemática misma y de otras ciencias. Este uso se evidencia, entre otros, en la capacidad del individuo para analizar, razonar, y comunicar ideas efectivamente y para formular, resolver e interpretar problemas.”

4.2. Marco pedagógico

Concebida desde la perspectiva de los Estándares en Matemáticas, establecidos por el Ministerio de Educación Nacional, la Unidad Didáctica (U.D.) se constituye como elemento orientador en la Enseñanza de la Matemática y como promotor de las relaciones entre los procesos de aprendizaje, los conocimientos básicos y los contextos donde estos toman lugar.

La U.D., enmarcada dentro del modelo de aprendizaje significativo, pretende:

- Potenciar la autonomía de los y las estudiantes frente al aprendizaje.
- Motivar a los y las estudiantes con el propósito de mantener un excelente nivel de trabajo en el aula de clase. Esto implica el uso de diversos recursos cuyo uso crítico fortalezca las representaciones mentales de los conceptos expuestos.
- Desarrollar el pensamiento matemático a través del abordaje de problemas y ejercicios en los que la Matemática no está presente de manera exclusiva.

- Fortalecer el vínculo existente entre la Matemática escolar y las situaciones cotidianas. Esto implica el diseño y la construcción de actividades que ofrezcan múltiples oportunidades para establecer conexiones entre los conocimientos al interior de la propia Matemática y situaciones fuera de ella.

4.3. Caracterización de la Institución

El IED Rafael Uribe Uribe se encuentra ubicado en la localidad de Tunjuelito, una de las zonas con mayor crecimiento comercial en el sur de Bogotá, dentro de esta localidad está situado el barrio el Tunal, clasificado bajo los estratos 2 y 3; de acuerdo con los datos suministrados por el Departamento Administrativo de Planeación Distrital, este barrio presenta una de las densidades de población más bajas debido a que es un sitio planificado en su estructura, por lo tanto hace que existan pocas viviendas, así como un bajo índice de inquilinatos. La accesibilidad a servicios públicos es amplia y refleja aspectos socioeconómicos sobresalientes en la zona, además el nivel de los habitantes desde el punto de vista ocupacional y social es alto en comparación con los demás barrios de la localidad. Dentro del barrio se destaca el hospital “El Tunal” por ser el único centro asistencial de tercer nivel con el que cuenta la localidad, que cubre no solo un gran porcentaje de la población local sino también de toda la ciudad.

Bajo este panorama, se encuentra el IED Rafael Uribe Uribe, institución distrital de carácter público que presta el servicio educativo desde el nivel preescolar hasta grado undécimo (Tabla 4-1), enfocado en las especialidades de comercial y académico, los y las estudiantes de la jornada de la tarde son niños y jóvenes entre los 4 y 18 años de edad, la estructura física de la institución se divide en dos sedes, en la sede A se encuentran los y las jóvenes de secundaria, en la B se ubican los grados preescolar y primaria; este tipo de organización limita las relaciones entre unos y otros, lo que conlleva a que los y las estudiantes tengan muy poco conocimiento acerca de las dinámicas escolares que se desarrollan en ambas sedes.

Tabla 4-1: Caracterización general del plantel

Característica	Descripción
PEI	Pedagogía en la Convivencia participativa para la transformación de Uribistas trascendentes y transformadores
MISIÓN	Institución educativa que propicia vivencias que permitan la formación de niños y jóvenes en las dimensiones corporal, socioafectiva, estética, ética y espiritual en los campos comunicativos, tecnológicos y de desarrollo del pensamiento y de convivencia humana y ecológica.
VISIÓN	Forjar ciudadanos competentes capaces de incursionar en la vida académica superior y en los sectores productivo y laboral, a través del bachillerato técnico comercial.
Atención por Género	MIXTO
Jornada	MAÑANA Y TARDE
Niveles, ciclos y especializaciones	PRIMARIA, BÁSICA Y MEDIA

Desde la experiencia docente en el marco del aprendizaje de los y las estudiantes, algunos evidencian dificultades en la realización de cálculos elementales entre naturales y racionales así como en la

comprensión y resolución de problemas relacionados con este tipo de números. Suelen hacer uso acrítico de la calculadora sin atender a la naturaleza de las cifras reportadas por ella y sin emplear criterios claros para el truncamiento de dígitos; así mismo, exhiben dificultades en la interiorización y manejo del lenguaje propio de la Matemática escolar. De este modo, la U.D. así construida propende por el fortalecimiento de los aspectos operativos de la Matemática a la vez que asigna un significado concreto a los resultados obtenidos en cada operación mediante discusiones detalladas sobre la naturaleza de los resultados en conexión con lo perseguido por aquella, esto es, la comprensión de las propiedades fundamentales del sistema numérico real.

4.4. Estrategias generales de la U.D.

- Reconocer los criterios de clasificación para números racionales e irracionales.
- Identificar las diversas formas de representación: decimal, fracción continua, sucesión numérica, empleadas en la construcción de un número real.
- Reconocer la necesidad de completitud del sistema numérico racional para expresar algunas cantidades numéricas.
- Identificar, de acuerdo a las representaciones de un número real, las propiedades topológicas de densidad y completitud.

4.5. Estrategias específicas de la U.D.

- Expresar fracciones en forma decimal, en fracción continua y recíprocamente
- Reconocer los números racionales o irracionales a partir de su expresión decimal o según su expresión en forma de fracción continua.
- Clasificar un número real dado como racional o irracional.
- Representar números racionales o irracionales en la recta real.
- Emplear, de manera correcta y crítica, la calculadora para operar números reales.

4.6. Contenidos de la U.D.

4.6.1. Conceptuales

Entendidos como los aspectos disciplinares o técnicos que se desean enseñar a los y las estudiantes:

- Expresión decimal y en forma de fracción continua de un número racional.
- Expresión fraccionaria de decimales finitos, periódicos puros y mixtos.
- Expresión fraccionaria de una fracción continua.
- Números irracionales.
- Expresiones decimales y en forma de fracción continua de un número irracional.
- Clasificación de distintos tipos de números.
- Aproximaciones por exceso y por defecto de números reales.
- Operaciones con números reales: Aproximación y acercamiento.
- Ordenamiento de números reales y representación en la recta real.
- Completitud y densidad del sistema numérico real.

4.6.2. Procedimentales

Son las habilidades técnicas que se espera desarrollen los y las estudiantes:

- Obtención de la expresión decimal de una fracción.
- Obtención de la expresión fraccionaria de decimales finitos, periódicos puros y mixtos.
- Obtención de una fracción continua para un número racional dado y recíprocamente.
- Clasificación de un número real dado según el conjunto numérico al que pertenece.
- Aproximación de números reales mediante expresiones decimales finitas o fracciones continuas.
- Operación de números reales a partir de las expresiones obtenidas para estos.
- Ubicación de números reales en la recta real mediante sucesiones y aproximaciones decimales.
- Ordenamiento de números reales mediante sus aproximaciones decimales.
- Hallazgo de racionales e irracionales en un intervalo dado.
- Uso de la calculadora científica en la obtención de aproximaciones decimales finitas y de fracciones continuas para propósitos algebraicos y de orden.

4.6.3. Actitudinales

Actitudes, comportamientos y valores que los y las estudiantes adquieren a través del proceso de enseñanza y aprendizaje perseguido con esta U.D.:

- Despertar el interés y la curiosidad por los métodos empleados en la resolución de problemas y ejercicios.
- Respeto por la opinión ajena, las estrategias y las respuestas (acertadas o no) dadas por otros.
- Reconocimiento de la importancia del trabajo en equipo así como del trabajo individual para la identificación de las fortalezas y dificultades propias del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Interés por la presentación de trabajos en forma clara, ordenada y precisa.
- Desarrollo del sentido crítico y constructivo en el uso de la calculadora.

4.7. Metodología de la U.D.

La metodología empleada en la U.D. priorizará la conexión existente entre los conocimientos, así como las destrezas matemáticas, adquiridos en los años anteriores de formación y los nuevos contenidos, haciendo hincapié en el carácter constructivo de la Matemática sin recaer en exposiciones demasiado formales. También se señalará la importancia y aplicación de la Matemática en contextos cotidianos, haciéndola accesible y de mayor aprehensión por parte de los y las estudiantes en comparación con los libros de texto.

Toda actividad estará precedida de una o varias exposiciones, según la complejidad del tema, por parte del docente en las que se hará especial énfasis en:

- Antecedentes históricos.
- Presencia y utilidad de los números racionales e irracionales en contextos cotidianos.
- Manejo de algoritmos apoyados con la calculadora científica.

En cuanto a la dificultad de los temas a desarrollar, se parte de la premisa acerca de un manejo del algoritmo de la división así como de las operaciones básicas entre números racionales, tópicos fundamentales para el acercamiento y desarrollo de los mismos. Los y las estudiantes manifiestan

dificultades en la clasificación de un número real según el conjunto numérico específico al que pertenece de modo que el manejo de expresiones decimales y la interconversión entre formas de representación es de vital importancia en la apropiación y aplicación de los criterios. Específicamente, las tres actividades de desarrollo enfatizarán:

- La equivalencia entre expresiones decimales, simbólica y en forma de fracción continua para los números reales, sean racionales o irracionales.
- Los criterios de clasificación para números reales apoyados tanto en su expresión decimal como en su forma en fracción continua.
- El ordenamiento de los números reales atendiendo a la expresión decimal que los caracteriza.

Los aspectos algebraicos para números reales se apoyarán, principalmente, en las aproximaciones decimales a dichos números. Se espera que dichas aproximaciones, cuando son esquematizadas sobre la recta numérica, muestren de manera intuitiva el “acercamiento” a cantidades fijas que, formalmente, constituyen el conjunto de los números reales

4.8. Materiales y Recursos

Los materiales y recursos que se emplearán en la U.D. deben establecer un balance entre su fácil consecución (por parte del estudiante), su funcionalidad y su costo. Los y las estudiantes, además del manejo y la posesión de las herramientas básicas de construcción geométrica (regla graduada, compás, lápiz), manejarán los siguientes materiales:

- Papel milimetrado: Para efectos de ubicación de números reales dados en la recta numérica así como para facilitar los aspectos métricos de las construcciones que se realicen.
- Calculadora científica: En la obtención de expresiones decimales para números reales así como en los aspectos operatorios que ellos implican. Así mismo, facilita la visualización inmediata de expresiones periódicas o regulares cuando se trabajen las diversas representaciones de los números reales.
- Lápices y/o bolígrafos de diversos colores como instrumentos de diferenciación tanto en las representaciones decimales como en las gráficas.

Dentro de los recursos que manejará el docente, se encuentran:

- Pizarra acrílica, marcadores de colores.
- Computador portátil con un programa de hoja de cálculo.
- Lectura preliminar y de acondicionamiento: El Diablo de los números de Hans Ensenzberger, Capítulo 4: *Cuarta Noche*. Aquí se hace una amena introducción, apoyada en el uso de la calculadora, de los decimales periódicos y la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos sin recurrir a formalismos excesivos.
- Video: El universo matemático, Capítulos 1 y 2: *Pitágoras: Mucho más que un teorema e Historias de π* . Estos muestran, de forma sencilla, la irracionalidad de raíz cuadrada de dos y la del número π .

4.9. Actividades de Introducción

Estas actividades tienen como propósito explorar los preconceptos de los y las estudiantes relacionados con los contenidos que se van a trabajar. El propósito de la lectura introductoria es mostrar como el uso

crítico de la calculadora conlleva al refinamiento de algunas nociones relativas a la expresión decimal de las fracciones y los números irracionales. El siguiente grupo de actividades está destinado a la observación, mediante cálculo directo, de los patrones numéricos generados por dichas expresiones decimales. Se incluyen, además, dos actividades (en un ámbito cotidiano) que introducen el concepto de fracción continua, su obtención a partir de una fracción dada, así como del cálculo de los convergentes; finalmente, los y las estudiantes se apoyan en la calculadora para explorar algunos conceptos relacionados con el orden y la densidad de los racionales e irracionales.

4.10. Actividades de Desarrollo

Este grupo de actividades pretende emplear crítica y exhaustivamente las diferentes formas de representación de números reales con el propósito que los y las estudiantes:

- Identifiquen y clasifiquen un número real en el (los) conjunto (s) numérico (s) al que pertenece.
- Operen y ordenen números reales a partir de las representaciones obtenidas para ellos.
- Ubiquen números reales en la recta numérica e identifiquen la correspondencia biunívoca entre puntos de aquella y números reales.

Gran parte del trabajo a desarrollar en este grupo de actividades se apoya en el uso de la calculadora científica, reduciendo enormemente tanto el tiempo empleado en la realización de operaciones básicas (sobre las cuales los y las estudiantes han estado trabajando durante los primeros años de su formación) como en la obtención de conclusiones a partir de los resultados numéricos obtenidos por medio de aquellas.

A pesar que el criterio de irracionalidad basado en la representación decimal de un número real **no** permite de manera inmediata identificar a un real como irracional, **si** permite la construcción efectiva de algunos de ellos (análogamente a como Liouville definió su número trascendente), lo cual es invaluable a la hora de ubicar irracionales en un intervalo dado.

El uso e interpretación de las marcas decimales sobre la recta numérica facilita la aprehensión intuitiva de “aproximación decimal” y de intervalo encajado a la hora de ubicar números específicos. Un conjunto de actividades de este tipo está destinado a trabajar dichas ubicaciones y mostrar su utilidad en el momento de operar con números reales.

Con este grupo de actividades se espera que los y las estudiantes estén en la capacidad de:

- Representar, bien sea en forma decimal o mediante fracciones continuas, un número real dado.
- Identificar y clasificar, de acuerdo al tipo de representación así como a la naturaleza de la misma, un número real dado.
- Construir aproximaciones a números reales y reconocer, a través de la representación en la recta numérica, el carácter infinito de dichos procesos de aproximación.
- Ordenar números reales con base en su representación fraccionaria, decimal o mediante fracciones continuas.
- Operar números reales y reconocer en ello la noción de aproximación y redondeo.
- Reconocer las limitaciones inherentes a todo proceso de cálculo mediante aproximaciones.
- Identificar la densidad y completitud del sistema numérico real.

4.11. Evaluación: Criterios e Instrumentos

Entendida como un proceso formativo e integral, la evaluación estará sujeta al marco legal establecido en cuanto a los contenidos, procedimientos y destrezas allí estipulados; siendo de carácter dinámico tendrá en cuenta los diversos ritmos de aprendizaje así como los avances de los y las estudiantes y priorizará el trabajo y la participación en clase.

Los criterios de evaluación de la U.D. se corresponden con lo establecido en los Estándares en Matemáticas para grado Undécimo [23] proferidos por el Ministerio de Educación Nacional en los siguientes aspectos:

Pensamiento numérico y sistemas numéricos

- Analizar representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.
- Reconocer la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.
- Comparar y contrastar las propiedades de los números (enteros, racionales, reales) sus relaciones y operaciones (sistemas numéricos).
- Establecer relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.

Pensamiento espacial y sistemas geométricos

- Usar argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

Pensamiento métrico y sistemas de medidas

- Justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos

- Utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.

Concretamente, la evaluación de la U.D. tendrá en cuenta tanto la adquisición de ciertos conocimientos y destrezas y el fortalecimiento de procedimientos a nivel matemático así como los aspectos hacia la misma, a saber:

Conocimientos

- Representación decimal y en fracción continua simple de números reales.
- Distinción entre expresiones decimales finitas, infinitas periódicas y no periódicas.
- Distinción entre fracciones continuas simples finitas e infinitas.
- Clasificación y reconocimiento de números reales según el conjunto específico al que pertenecen.
- Reconocer la propiedad de densidad y completitud de \mathbb{R} .

Procedimientos y destrezas

- Interconversión entre representaciones decimales y en fracciones continuas simples para números reales.
- Representación de números reales en la recta numérica.
- Aproximación de números reales mediante fracciones decimales.
- Empleo apropiado de la calculadora científica en la obtención de expresiones decimales y aproximaciones para propósitos algebraicos y de orden.

Actitudes

- Trabajo y participación en clase.
- Presentación ordenada y correcta de las actividades en el cuaderno de trabajo.
- Respeto hacia las opiniones de otros.
- Puntualidad en la asistencia y entrega de trabajos.

En cada actividad de desarrollo, los instrumentos de evaluación se condensan en tres aspectos primordiales:

- Trabajo en clase: Mediante observación directa, ya sea este trabajo de carácter individual o en grupo.
- Pruebas escritas al finalizar cada actividad para evaluar los conocimientos adquiridos en cada una de aquellas. Se hará énfasis en los procedimientos y razonamientos seguidos para el hallazgo de soluciones a los problemas planteados.
- Actitud ante la asignatura: Mantenimiento del cuaderno de trabajo ordenado y actualizado, con los procedimientos y operaciones requeridas y necesarias. Se destacan, además, el comportamiento en clase así como la puntualidad en la asistencia y entrega de los trabajos asignados.

5. Conclusiones y recomendaciones

5.1. Conclusiones

El trabajo realizado muestra, efectivamente, la posibilidad de diseñar una unidad didáctica dirigida a estudiantes de los últimos cursos en educación media que cubra las propiedades fundamentales del sistema de los números reales que revisten mayor importancia para el estudio del Cálculo, de una manera sencilla y sin los formalismos excesivos de libros especializados en el tema.

En el diseño de la Unidad Didáctica, es fundamental el respaldo otorgado por las aproximaciones históricas y disciplinares dado que:

- Contextualizan cronológicamente los conceptos abordados lo que permite observar la naturaleza de los objetos matemáticos relevantes de la época así como la evolución en cuanto a riqueza y profundidad de los razonamientos matemáticos en los que se ven implicados dichos objetos.
- Sitúan a la Matemática en un plano más humano, es decir, despojada de ese misticismo al que se nos ha acostumbrado a verla; es interesante observar que, tras ese cuerpo teórico tan refinado que sustenta la teoría de los números reales, la construcción de conocimiento matemático también experimenta los tropiezos, aciertos y desaciertos propios de cualquier ciencia exacta. Es vital señalar este hecho a los estudiantes de manera que no se intimiden ante las herramientas y teorías propias del quehacer matemático.

Las pautas proporcionadas en la Unidad Didáctica ubican las Actividades de Introducción y Desarrollo en un marco legal y pedagógico que satisfaga tanto los requerimientos del Ministerio en materia de currículo así como el perfil de estudiante proyectado por la Institución. El manejo de herramientas algebraicas y gráficas facilita la asimilación de los conceptos de representación y notación para números reales y los contextualiza; el manejo crítico de la calculadora y la interpretación de sus resultados introduce al estudiante los conceptos de algoritmo y proceso infinito, cruciales desde un punto de vista variacional y métrico.

La revisión histórica muestra el carácter dinámico del proceso de construcción de conocimiento en Matemática; problemas e inconvenientes antiquísimos surgidos desde consideraciones geométricas fueron abordados desde variadas técnicas y de diversos grados de sofisticación lo que ilustra el poder y la cobertura del razonamiento matemático. Lo anterior está en marcado contraste con la enseñanza matemática que suele proporcionar en la escuela, tan llena de procedimientos y rutinas de cálculo lo que oculta no solo su faceta creativa sino su empleo en la solución de problemas prácticos.

5.2. Recomendaciones

Siguiendo una línea similar y que complemente lo expuesto en el presente trabajo, se abre la posibilidad de desarrollar unidades didácticas que expongan las propiedades algebraicas y de orden esta vez para *números racionales*, las cuales son asumidas como dadas dentro del presente trabajo. Dentro de las estrategias de dicha unidad, se encontrarían:

- Conceptualización de la fracción como “partes de la unidad” así como las representaciones simbólicas y sobre la recta numérica de esta noción.
- Fracción como operador y como razón entre números enteros.
- Diversos tipos de fracciones: propias, impropias y mixtas.
- Álgebra de las fracciones, simplificación y amplificación.
- Ordenamiento de fracciones.
- Expansiones polinómicas para fracciones: Representación decimal y en base n -ésima.

Todo esto enmarcado dentro de situaciones problema dirigidos al reconocimiento de la necesidad del concepto de fracción dentro de situaciones cotidianas.

En el marco de las representaciones para números reales empleadas en la Unidad Didáctica, pueden tratarse con mayor profundidad algunos de los conceptos expuestos en relación con las fracciones continuas, sus propiedades convergencia y aproximación, así como las características periódicas de dichas expresiones en la representación de irracionales cuadráticos.

En un desarrollo posterior sobre números irracionales para estudiantes de educación media puede abordarse la necesidad de la introducción de números irracionales en la expresión de soluciones a ecuaciones polinómicas así como la exposición y aplicación de métodos elementales de demostración de la irracionalidad de ciertos números, todo esto apoyado desde la Teoría elemental de Números que los y las estudiantes han aprendido desde su educación primaria, lo que amplía de un modo considerable y ofrece soporte teórico a los criterios de irracionalidad expuestos en la Unidad Didáctica del presente trabajo.

Bibliografía

[1]ACEVEDO, Myriam. (Mayo de 2007). *Fundamentación Conceptual Área de Matemáticas*. [Artículo en Internet]. http://web2.icfes.gov.co/index.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=1197 [Consulta: 15 de marzo de 2011].

[2]APOSTOL, Tom. *Calculus, Volumen 1*, Editorial Reverté, Barcelona, 1988.

[3]BOYER, Carl. *A History of Mathematics*. New York, Jhon Wiley & Sons., 1991.

[4]BREZINSKI, Claude. *History of continued fractions and Padé approximants*. Springer-Verlag, New York, 1991.

[5]COLLETTE, Jean- Paul. *Historia de las Matemáticas Volumen. 2*. México, Siglo XXI Editores, 1986.

[6]COURANT, Richard y ROBBINS, Herbert. *¿Qué es la Matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*. Aguilar S.A. de Ediciones, Madrid, 1967.

[7]CRESPO, Cecilia. *Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática*. Artículo en Internet. <http://www.soarem.org.ar/Documentos/41%20Crespo.pdf> [Consulta: 20 de marzo de 2011].

[8]CUESTA, Norberto. *Análisis metamatemático de los números reales*. El Basilisco: Filosofía, ciencias humanas, teoría de la ciencia y de la cultura. Oviedo. Número 10. 1980.

[9]ECCLES, Peter. *An introduction to mathematical reasoning. Numbers, sets and functions*. Cambridge University Press. United Kingdom. 1997.

[10]ENSENZBERGER. Hans. *El diablo de los números*. Editorial Siruela. Madrid. 1997.

[11]EUCLIDES. *Elementos. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños*. Editorial Gredos. Madrid. 1991.

[12]FLORES, Francisco. *Historia y didáctica de los números racionales e irracionales*. Ittakus. España. 2008.

[13]HAWKING, Stephen. *Dios creó los números*. Crítica. Barcelona. 2007.

[14]HISTORIAS DE π . Serie Universo Matemático. Guión: Antonio Pérez. RTVE. 2000.

- [15]JIMÉNEZ, Douglas. *Historia de la Matemática, Pitágoras y el pitagorismo*. Venezuela, TForMA Ediciones, 2007.
- [16]KLINE, Morris. *Pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días Vol. 3*. Madrid, Alianza Editorial S.A., 2002.
- [17]KOSHY, Thomas. *Elementary number theory with applications*. Elsevier Inc., 2007.
- [18]LANDAU, Edmund. *Foundations of Analysis*. Chelsea Publishing Company. New York. 1966.
- [19]LAY, Steven. *Analysis with an introduction to proof*. Prentice Hall, New Jersey. 1990.
- [20]LENTIN, A y RIVAUD, J. *Álgebra Moderna*. Aguilar S.A. de ediciones, Madrid, 1969.
- [21]LÓPEZ, Manuel. *Las construcciones de los números reales*. Historia de la Matemática. Real Academia de Ciencias Exactas y Naturales. Madrid. 1994.
- [22]LUQUE, Carlos, MORA, Lyda y TORRES, Johanna. *Una construcción de los números reales positivos*. Universidad Pedagógica Nacional. 2004.
- [23]MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Estándares básicos de calidad en Matemáticas*. [Artículo en Internet]. <http://menweb.mineducacion.gov.co/estandares/matematicas.pdf> [Consulta: 21 de marzo de 2011].
- [24]NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *El sistema de los números reales*. Editorial Trillas. México. 1994.
- [25]NIVEN, Ivan. *Números racionales e irracionales*. Editorial Norma, Colombia, 1961.
- [26] NIVEN, Ivan y ZUCKERMANN, Herbert. *Introducción a la teoría de los números*. Editorial Limusa, México, 1976.
- [27]PELEGINO, Samuel. *Didáctica en los números reales*. Ittakus. España. 2010.
- [28]OLDS, Carl. *Continued Fractions*. Mathematical Association of America, United States. 1963.
- [29]RUDIN, Walter. *Principios de análisis matemático*. McGraw-Hill, México, 1980.
- [30] RUSSELL, Bertrand. *Introduction to Mathematical Philosophy*. Dover Publications Inc. New York. 1993.
- [31]SIROTIC, Natasa y ZAZKIS, Rina. *Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge*. Educational Studies in Mathematics, Mayo 2007, Vol. 65, Nº1, p. 49-76.
- [32]SPIVAK, Michael. *Cálculo Infinitesimal*. Editorial Reverté, México, 1996.

A. Anexo: Actividades introductorias y de exploración sobre números reales.

I.E.D. RAFAEL URIBE URIBE

GRADO UNDÉCIMO

ACTIVIDADES INTRODUCTORIAS Y DE EXPLORACIÓN SOBRE NÚMEROS REALES

1. Con ayuda de la calculadora, obtenga las expresiones decimales de las siguientes fracciones y responda, para cada resultado obtenido, las siguientes preguntas:

- ¿Qué resultado obtiene?
- ¿Cuántas cifras decimales resultan?
- ¿Es exacto el valor que reporta la calculadora?
- ¿Se manifiesta algún tipo de regularidad en el resultado obtenido? Descríbalo.

a. $\frac{31}{20}$

d. $\frac{48}{54}$

g. $\frac{71}{300}$

b. $\frac{6106}{9990}$

e. $\frac{98}{875}$

h. $\frac{6}{42}$

c. $\frac{601}{1332}$

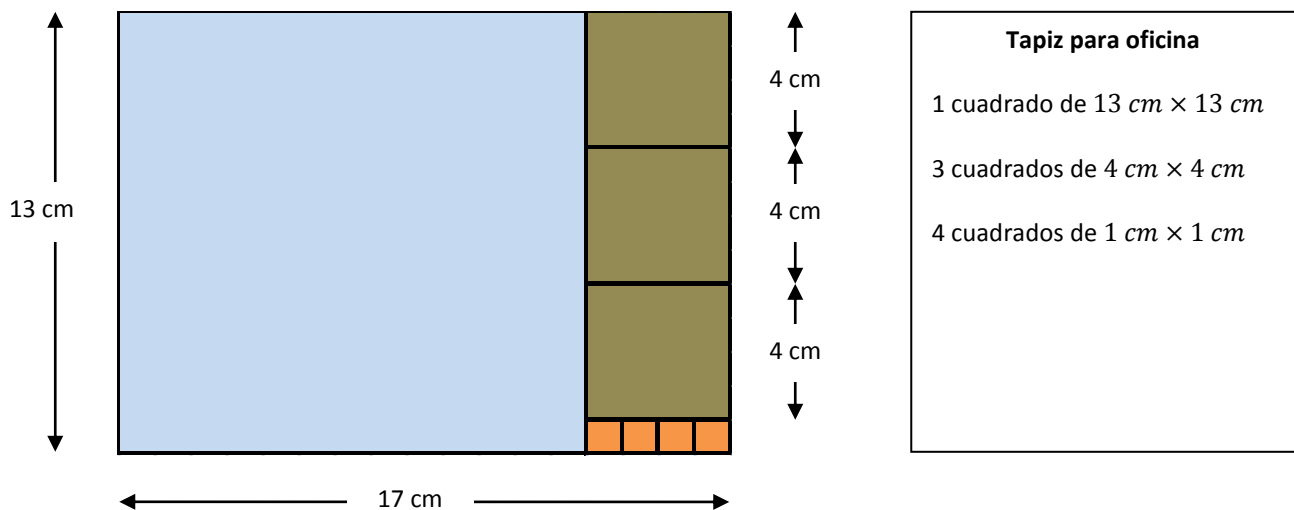
f. $\frac{41}{33}$

i. $\frac{455}{104}$

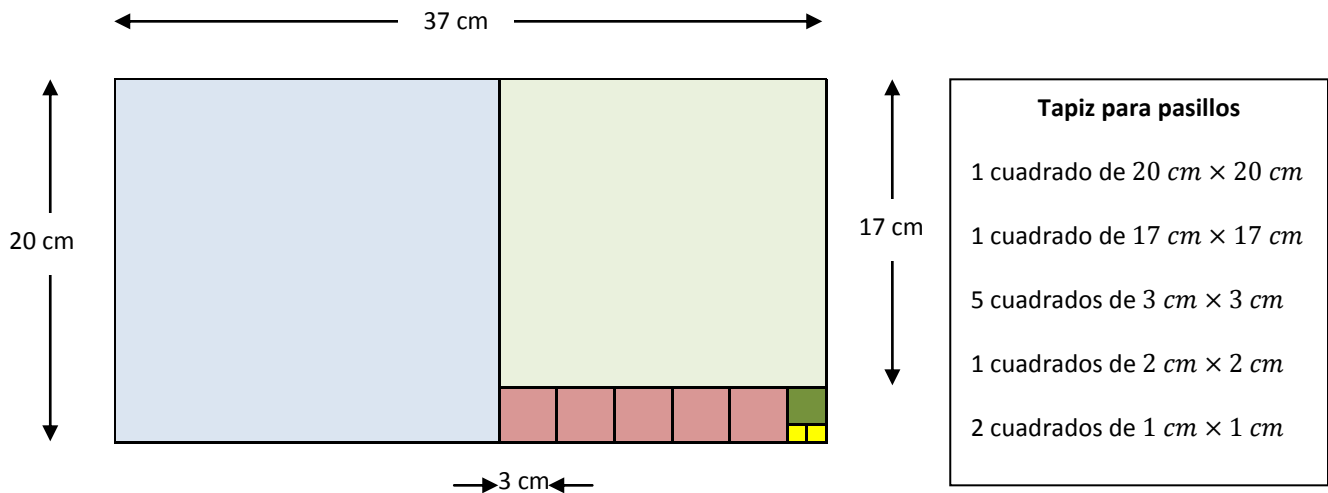
2. Tome de nuevo la calculadora y obtenga el valor de $\sqrt{2}$. De acuerdo con el resultado obtenido, responda las siguientes preguntas:

- ¿Son esas las únicas cifras que posee?
- ¿Exhiben algún tipo de regularidad?
- ¿Es exacto el valor que reporta la calculadora?
- ¿Conoce más números que muestren un comportamiento similar? Señálelos.

3. Un decorador, diseñando un papel tapiz para las paredes de una oficina, decide cubrir completamente con cuadrados un rectángulo de dimensiones $13\text{ cm} \times 17\text{ cm}$ de la siguiente forma:

**Tapiz para oficina**1 cuadrado de $13\text{ cm} \times 13\text{ cm}$ 3 cuadrados de $4\text{ cm} \times 4\text{ cm}$ 4 cuadrados de $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$

Para la zona de pasillos, las dimensiones del tapiz son $20\text{ cm} \times 37\text{ cm}$, de manera que el decorador lo cubre así:



Muestre, con ayuda de una figura hecha sobre papel cuadrículado, la forma en la que el decorador diseñaría los cubrimientos si las dimensiones del papel tapiz a emplear son:

- a. $23\text{ cm} \times 52\text{ cm}$
 - b. $21\text{ cm} \times 34\text{ cm}$
 - c. $10\text{ cm} \times 37\text{ cm}$
 - d. $30\text{ cm} \times 41\text{ cm}$
4. Debido a su excelente desempeño, nuestro decorador va a reemplazar a un colega que se fue de vacaciones. Al llegar a su nuevo lugar de trabajo, encuentra las siguientes especificaciones para los tapices en cada una de las instalaciones de una casa:

Tapiz para sala

2 cuadrados de $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$

1 cuadrado de $7\text{ cm} \times 7\text{ cm}$

2 cuadrados de $3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$

Tapiz para comedor

1 cuadrado de $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$

2 cuadrados de $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$

2 cuadrados de $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$

Tapiz para baño

1 cuadrado de $3\text{ cm} \times 3\text{ cm}$

3 cuadrados de $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$

Tapiz para garaje

2 cuadrados de $5\text{ cm} \times 5\text{ cm}$

2 cuadrados de $2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$

2 cuadrados de $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$

¿Podría usted decir cuáles son las dimensiones de los tapices empleados en cada uno de los lugares mencionados de la casa? Muestre su solución con ayuda de una figura sobre papel cuadriculado.

5. De nuevo, nuestro decorador se presenta a cumplir un contrato ligeramente distinto a los anteriores. Las nuevas tendencias en decoración de interiores le exigen poner una cinta delgada que cruce un salón rectangular desde una de las esquinas a la opuesta. Las dimensiones del salón son $10\text{ m} \times 8\text{ m}$.
 - a. ¿Qué longitud debe tener la cinta?
 - b. ¿Es posible que pueda conseguir **exactamente** la longitud requerida?
 - c. Si la cinta se vende por centímetros, ¿Cuánta cinta deberá comprar para asegurar el cumplimiento de la labor que le fue asignada al menor costo posible?

Se le pide al decorador, debido a su excelencia laboral, rodear con el mismo tipo de cinta una fuente circular de 2 m de radio.

- a. ¿Qué tan larga debe ser la cinta para rodear completamente la fuente?
 - b. ¿Es posible que pueda conseguir **exactamente** la longitud requerida?
 - c. Si la cinta se vende por centímetros, ¿Cuánta cinta deberá comprar para asegurar el cumplimiento de la labor que le fue asignada al menor costo posible?

6. Con ayuda de la calculadora, obtenga los valores decimales de $\sqrt{2}$ y π y responda las siguientes preguntas:
 - a. ¿Cuántos números cree usted que existen entre los dos?
 - b. ¿Cuántos de ellos son racionales?
 - c. ¿Cuántos de ellos son irracionales?
 - d. Pruebe a encontrar dos números racionales y dos irracionales entre ellos.

7. El capítulo *Cuarta Noche*, del texto *El Diablo de los números*, muestra unas características interesantes de las expresiones decimales. Realice una lectura del texto en mención y responda las siguientes preguntas:

- ¿Son iguales las expresiones $0,333 \dots$ y $\frac{1}{3}$? ¿Por qué?
- Hay una discusión entre Robert y el anciano acerca del decimal $0,999 \dots$. Robert argumenta que tal número es “casi uno” mientras el anciano asegura que no es así y que tal decimal es, efectivamente, igual a 1. ¿Podría explicar, en sus propias palabras, los argumentos del anciano para convencer a Robert?
- ¿Qué significado matemático podrían tener las palabras *rábano* e *irrazonable*?
- Robert construye, muy inteligentemente, un número entre $0,1$ y $0,2$. ¿Este número es racional o irracional?
- ¿Por qué el anciano asegura que el cuadrado rojo tiene un tamaño igual al doble del negro?

B. Anexo: Expresiones decimales y fracciones continuas en \mathbb{Q}

I.E.D. RAFAEL URIBE URIBE

GRADO UNDÉCIMO

ACTIVIDADES DE DESARROLLO, PRIMERA PARTE

EXPRESIONES DECIMALES Y FRACCIONES CONTINUAS EN \mathbb{Q}

1. Las fracciones se conciben, para nuestros propósitos, como números y/o operadores que expresan cantidades derivadas de “dividir” o “partir” una unidad arbitraria de medida y como tales nos son útiles para expresar cantidades para las que dicha unidad resulta demasiado grande o nos es imposible subdividirla en partes exactas; por ejemplo:

- Reparto 29 lb. de carne entre 6 personas.

Unidad de medida: 1 libra

Empleo de la fracción: Fracción como número $\left(\frac{29}{6}\right)$

- Me comí la mitad de la torta.

Unidad de medida: Una torta entera

Empleo de la fracción: Fracción como operador $\left(\frac{1}{2} de\right)$

- El 25% del electorado de la ciudad votará por Pepito Pérez para alcalde.

Unidad de medida: Población votante en una ciudad

Empleo de la fracción: Fracción como operador $\left(\frac{25}{100} de\right)$

- Los intereses del préstamo son de \$216 y 49 ¢.

Unidad de medida: Un peso (\$1)

Empleo de la fracción: Fracción como número $\left(\frac{49}{100}\right)$

- $\frac{7}{10}$ partes de la superficie del planeta Tierra están cubiertas de agua.

Unidad de medida: Superficie total del planeta

Empleo de la fracción: Fracción como operador $\left(\frac{7}{10} de\right)$

Nuestro sistema de numeración emplea potencias positivas de 10 con el fin de expresar cantidades enteras y mayores a cero. Las fracciones, al representar partes de una unidad de medida, también pueden expresarse en este sistema en forma decimal con ayuda del conocido procedimiento

denominado el *algoritmo de la división* (o división larga), que la representa como una suma de fracciones cuyos denominadores son potencias de 10.

Para ilustrar el procedimiento, obtendremos las cifras decimales de la fracción $\frac{1}{4}$. Si multiplicamos el numerador de esta fracción por 10 y efectuamos la división entre este producto y el denominador original, obtenemos:

$$10 \cdot 1 = 10 = 2 \cdot 4 + 2$$

Así, la fracción original resulta expresada como:

$$\frac{1}{4} = \frac{10 \cdot 1}{10 \cdot 4} = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2 \cdot 4 + 2}{4} \right) = \frac{1}{10} \cdot \left(2 + \frac{2}{4} \right)$$

Multiplicando de nuevo por 10 el numerador de la fracción resultante y efectuando la división entre el denominador 4, se obtiene:

$$10 \cdot 2 = 20 = 5 \cdot 4 + 0$$

Y la fracción original toma la forma:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{10} \cdot \left(2 + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{5 \cdot 4 + 0}{4} \right) \right) = \frac{1}{10} \cdot \left(2 + \frac{1}{10} \cdot (5) \right) = \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

Dado que el último residuo obtenido es igual a 0, el algoritmo termina y los valores en rojo determinan las cifras decimales buscadas. En vista de la considerable extensión de dicho proceso, se suelen ilustrar de manera simplificada las divisiones que originan las cifras decimales, así:

$$\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 0 \cdot 4 + 1 \\ 10 = 2 \cdot 4 + 2 \\ 20 = 5 \cdot 4 + 0 \end{cases} \quad \text{De modo que} \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = 0,25$$

Este arreglo puede emplearse para obtener las cifras decimales de cualquier fracción. Por ejemplo, para $\frac{35}{8}$, se tiene lo siguiente:

$$\frac{35}{8} \Rightarrow \begin{cases} 35 = 4 \cdot 8 + 3 \\ 30 = 3 \cdot 8 + 6 \\ 60 = 7 \cdot 8 + 4 \\ 40 = 5 \cdot 8 + 0 \end{cases} \quad \text{De modo que} \quad \frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = 4,375$$

Sin embargo, suceden ciertas cosas “curiosas” al efectuar las divisiones con algunas fracciones ya que hay casos en los cuales los residuos **nunca** se anulan. Tomemos por ejemplo la fracción $\frac{8}{3}$ y realicemos el proceso de multiplicación por 10 y división entre el denominador para obtener:

$$\frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 2}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

Multiplicando por 10 el numerador de la fracción resultante y efectuando la división entre el denominador 3, resulta en:

$$10 \cdot 2 = 20 = 6 \cdot 3 + 2$$

De forma que la fracción original se expresa como:

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{20}{3}\right) = 2 + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{6 \cdot 3 + 2}{3}\right) = 2 + \frac{1}{10} \cdot \left(6 + \frac{2}{3}\right)$$

Procediendo de manera similar con la última fracción, obtenemos:

$$10 \cdot 2 = 20 = 6 \cdot 3 + 2$$

Por lo que la fracción original toma la forma:

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{10} \cdot \left(6 + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{6 \cdot 3 + 2}{3}\right)\right) = 2 + \frac{1}{10} \cdot \left(6 + \frac{1}{10} \cdot \left(6 + \frac{2}{3}\right)\right)$$

Al sintetizar los resultados del proceso de obtención de cifras decimales para $\frac{8}{3}$, se observa inmediatamente que los cocientes obtenidos se repiten como se ilustra a continuación:

$$\frac{8}{3} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 2 \cdot 3 + 2 \\ 20 = 6 \cdot 3 + 2 \\ 20 = 6 \cdot 3 + 2 \\ \vdots \end{cases} \quad \text{De modo que} \quad \frac{8}{3} = 2 + \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots = 2,666\dots$$

Empleando el esquema sintético mostrado con anterioridad, puede observarse dicho comportamiento repetitivo para otras fracciones, por ejemplo:

$$\frac{50}{55} \Rightarrow \begin{cases} 500 = 9 \cdot 55 + 5 \\ 50 = 0 \cdot 55 + 50 \\ 500 = 9 \cdot 55 + 5 \\ 50 = 0 \cdot 55 + 50 \\ \vdots \end{cases} \quad \text{De modo que} \quad \frac{50}{55} = \frac{9}{10} + \frac{0}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{0}{10000} + \dots = 0,9090\dots$$

$$\frac{71}{90} \Rightarrow \begin{cases} 710 = 7 \cdot 90 + 80 \\ 800 = 8 \cdot 90 + 80 \\ 800 = 8 \cdot 90 + 80 \\ \vdots \end{cases} \quad \text{De modo que} \quad \frac{71}{90} = \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \dots = 0,788\dots$$

$$\frac{427}{300} \Rightarrow \begin{cases} 427 = 1 \cdot 300 + 127 \\ 1270 = 4 \cdot 300 + 70 \\ 700 = 2 \cdot 300 + 100 \\ 100 = 3 \cdot 300 + 100 \\ \vdots \end{cases} \quad \text{De modo que } \frac{427}{300} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = 1,4233 \dots$$

Las expresiones que se generan al realizar el algoritmo de la división con estas fracciones se conocen como *decimales infinitos periódicos*, esto último indicando la no finalización del algoritmo dado que los residuos se repiten después de un número finito de pasos. Al igual que el caso finito, las representaciones obtenidas son completamente equivalentes, es decir, tienen el mismo valor.

Las sumas representadas en el lado derecho de las expresiones decimales anteriores, sean estas finitas o infinitas, reciben el nombre de *expansiones polinómicas* y brindan una idea tanto del orden de magnitud como del valor relativo de cada uno de los dígitos empleados en la representación decimal. La denominación *polinómica* se debe a que tales expresiones decimales pueden escribirse como una suma de términos de la forma $a \cdot 10^n$, donde a representa un dígito del conjunto $0, 1, 2, \dots, 9$ y n es un número entero, por ejemplo:

$$\begin{aligned} 0,25 &= 0 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} \\ 4,375 &= 4 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} \\ 1,4233 \dots &= 1 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + \dots \end{aligned}$$

En cada una de las expresiones infinitas periódicas pueden identificarse tres elementos:

- Parte entera: Cifras posicionadas a la izquierda de la coma decimal; representan las partes enteras en las que el numerador puede subdividirse según el denominador.
- Bloque periódico: Cifras a la derecha de la coma decimal que exhiben repetición.
- Anteperíodo: Cifras a la derecha de la coma decimal y que **no** presentan repetición. Preceden al bloque periódico.

De este modo, para los decimales mostrados inicialmente, se tiene:

Decimal	Parte entera	Bloque periódico	Anteperíodo
2,666...	2	6	No tiene
0,9090...	0	90	No tiene
0,788...	0	8	7
1,4233...	1	3	42

La escritura de los decimales periódicos se simplifica introduciendo un símbolo denominado *testa* “^”, que se ubica sobre el bloque periódico indicando precisamente su repetición, así:

$$\begin{aligned} 2,666 \dots &= 2, \hat{6} & 0,788 \dots &= 0,7\hat{8} \\ 0,9090 \dots &= 0, \hat{90} & 1,4233 \dots &= 1,42\hat{3} \end{aligned}$$

A manera de resumen, los decimales vistos hasta el momento pueden ser:

- Finitos: El algoritmo de la división termina en un número finito de pasos, por lo que las cifras decimales son finitas en número.
- Infinitos periódicos: El algoritmo de la división no tiene fin debido a que los residuos que se generan se repiten luego de cierto número de pasos. Así, las cifras decimales manifiestan periodicidad.

Los ejemplos anteriores muestran que una fracción puede generar o bien un decimal finito o bien un decimal infinito periódico. Más adelante veremos el proceso inverso, es decir, como a partir de un decimal finito o infinito periódico es posible obtener una fracción que lo genere.

Pueden realizarse varias observaciones al respecto. En el proceso de obtención de cifras decimales es necesario en cada paso efectuar una multiplicación por 10, lo que justifica el uso de la expresión *decimal*; si se escoge otro entero positivo para efectuar dichos productos, se generan expresiones polinómicas distintas. Por ejemplo, al emplear el entero 2 para obtener la expresión polinómica del número $\frac{4}{7}$, se tiene:

$$\frac{4}{7} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 0 \cdot 7 + 4 \\ 8 = 1 \cdot 7 + 1 \\ 2 = 0 \cdot 7 + 2 \\ 4 = 0 \cdot 7 + 4 \\ \vdots \end{cases} \quad \text{De modo que } \frac{4}{7} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{0}{8} + \frac{1}{16} + \frac{0}{32} + \frac{0}{64} \dots = 0,1001001 \dots$$

Mientras que si se emplea el entero 7 como factor en el algoritmo de la división, las expresiones que resultan son las siguientes:

$$\frac{4}{7} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 0 \cdot 7 + 4 \\ 28 = 4 \cdot 7 + 0 \end{cases} \quad \text{De modo que } \frac{4}{7} = 0 + \frac{4}{7} = 0,4$$

El factor empleado se denomina comúnmente como **base** de la expansión polinómica y se reserva el uso de la palabra **decimal** si dicho factor es 10. Es claro que dichas expansiones son distintas y dependientes de la base empleada, llegando incluso a darse el caso en que las cifras obtenidas con una base en particular son finitas en número mientras que esto no sucede con otras.

Otra característica que resulta del uso de distintas bases en la generación de expansiones polinómicas para expresiones fraccionarias es el hecho que los dígitos empleados *siempre* serán menores a la base establecida, esto es, si se emplea como base el entero positivo n , las expansiones polinómicas de toda representación en esa base tomarán los valores $0, 1, 2, \dots, n - 1$, resultado que se ejemplifica en la siguiente tabla:

Base	Dígitos empleados
2	0, 1
5	0, 1, 2, 3, 4
8	0, 1, 2, ..., 6, 7
n	0, 1, 2, ..., $n - 1$

Esto sucede así debido a que los dígitos empleados en la expansión polinómica provienen de los residuos obtenidos mediante la aplicación repetida del algoritmo de la división y es claro que estos siempre van a ser menores que el divisor el cual está determinado precisamente por la base empleada.

A lo largo de las actividades de desarrollo se empleará exclusivamente una base decimal, esto es, se usará *únicamente* el número 10 como factor del algoritmo de la división en la generación de expansiones polinómicas.

EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

- a. Mediante el algoritmo de la división, determine la expresión decimal de las siguientes fracciones y mencione si son finitas o infinitas periódicas. En el último caso, construya una tabla similar a la mostrada en esta sección, en la que se señale la parte entera, el bloque periódico y el anteperíodo.

- | | | |
|-------------------------|----------------------|------------------------|
| i. $\frac{3}{13}$ | iv. $\frac{16}{50}$ | vii. $\frac{143}{99}$ |
| ii. $\frac{143}{55}$ | v. $\frac{19}{11}$ | viii. $\frac{603}{40}$ |
| iii. $\frac{13}{11000}$ | vi. $\frac{71}{300}$ | ix. $\frac{13}{121}$ |

- b. Determine las expansiones polinómicas para las siguientes fracciones empleando la base que se indica junto a cada una de ellas.

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| i. $\frac{1}{3}$ Base 6 | iv. $\frac{1}{7}$ Base 3 |
| ii. $\frac{3}{8}$ Base 4 | v. $\frac{9}{17}$ Base 5 |
| iii. $\frac{2}{15}$ Base 9 | vi. $\frac{4}{13}$ Base 7 |

2. En Matemáticas existe otra manera de expresar fracciones, muy empleada hacia el siglo *V* por los hindúes y árabes así como por los constructores de relojes del siglo *XVII* con el fin de determinar la precisión de sus mecanismos. Para verla, hagamos la división a la que recurrimos para hallar la expresión decimal de una fracción y nos detenemos en el primer paso. Por ejemplo, para la fracción

$$\frac{41}{30} :$$

41	30
11	1

Si ubicamos el residuo (11) al lado del cociente (30), se tiene:

41	30	11
	1	

Con este ligero cambio, prosigamos la división con este nuevo dividendo (30) y divisor (11), teniendo cuidado de ubicar el residuo a la derecha del divisor, así:

41	30	11	8
	1	2	

Si el proceso se continúa en la forma descrita hasta finalizar las divisiones se tendrá un arreglo, o tabla de división, similar a la mostrada a continuación:

41	30	11	8	3	2	1	0
	1	2	1	2	1	2	

Los números de la fila inferior pueden disponerse en una forma especial conocida como *fracción continua simple* del número $\frac{41}{30}$, la cual es **equivalente** a esta última y se escribe:

$$\frac{41}{30} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} = [1; 2, 1, 2, 1, 2]$$

Los números de la fila inferior en la tabla de división se llaman *cocientes parciales* y la fracción continua también puede escribirse como $[1; 2, 1, 2, 1, 2]$.

Que esta representación es algebraicamente equivalente a la fracción original puede verse si se recuerda el algoritmo de la división visto anteriormente en la obtención de cifras decimales para una fracción dada. Por ejemplo, la fracción $\frac{41}{30}$ puede ser expresada como:

$$\frac{41}{30} = \frac{1 \cdot 30 + 11}{30} = 1 + \frac{11}{30} = 1 + \frac{1}{30/11}$$

Aplicando de nuevo el algoritmo de la división a la fracción del lado derecho de la expresión anterior cuyo numerador es mayor al denominador, se tiene:

$$\frac{30}{11} = \frac{2 \cdot 11 + 8}{11} = 2 + \frac{8}{11} = 2 + \frac{1}{11/8}$$

La aplicación repetida del algoritmo de la división sobre las fracciones obtenidas en el lado derecho de las expresiones resulta entonces en:

$$\frac{11}{8} = \frac{1 \cdot 8 + 3}{8} = 1 + \frac{3}{8} = 1 + \frac{1}{8/3}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2 + \frac{1}{3/2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 2 + 1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

Al sustituir las expresiones obtenidas mediante el algoritmo de la división en la fracción original, se tiene:

$$\frac{41}{30} = 1 + \frac{1}{30/11} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{11/8}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8/3}}}$$

$$\frac{41}{30} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3/2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$$

Con lo que se demuestra la equivalencia entre la fracción original y la obtenida mediante la tabla de división. De este modo, se tienen a disposición **dos** estrategias para representar una fracción común en términos de una fracción continua simple, a saber:

- Con ayuda de una tabla de división.
- Aplicación repetida del algoritmo usual de la división y sustitución sucesiva de las expresiones resultantes.

EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

- c. Mediante los procedimientos que se acaban de mostrar (tabla de división y aplicación repetida del algoritmo de la división), determine la expresión en forma de fracción continua simple de las siguientes fracciones:

i. $\frac{31}{26}$

iv. $\frac{41}{18}$

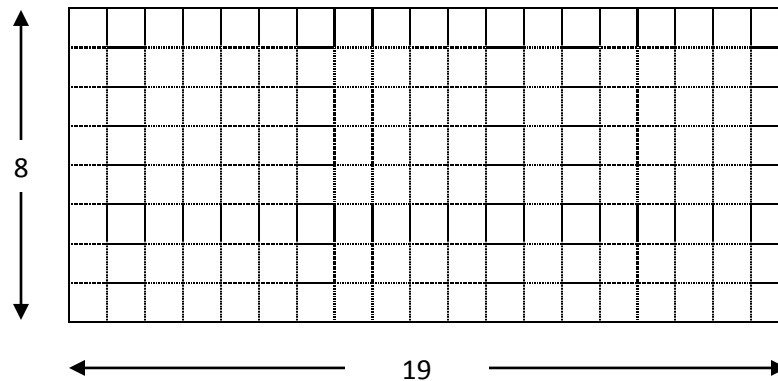
ii. $\frac{196}{27}$

v. $\frac{7}{19}$

iii. $\frac{131}{15}$

vi. $\frac{15}{131}$

Una aplicación interesante de las fracciones continuas está en el recubrimiento de superficies rectangulares mediante cuadrados, como se observó en la actividad introductoria. Si un rectángulo, cuya base es m y su alto es n (con m mayor a n), se cubre totalmente con cuadrados del mayor tamaño posible, la cantidad de cada uno de ellos así como su tamaño, puede hallarse mediante el desarrollo en fracción continua de la fracción m/n . Por ejemplo, para recubrir el rectángulo que se muestra en la siguiente figura:



Es necesario desarrollar $19/8$ en forma de fracción continua simple. Si se emplea una tabla de división, se obtiene:

19	8	3	2	1	0
	2	2	1	2	

De este modo:

$$\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = [2; 2, 1, 2]$$

Si se opta por aplicar repetidamente el algoritmo de la división y sustituir las expresiones resultantes en la fracción original, se tiene:

$$\frac{19}{8} = \frac{2 \cdot 8 + 3}{8} = 2 + \frac{3}{8} = 2 + \frac{1}{8/3}$$

Una nueva aplicación del algoritmo de la división resulta en:

$$\frac{8}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2 + \frac{1}{3/2}$$

Procediendo de este modo, se tiene:

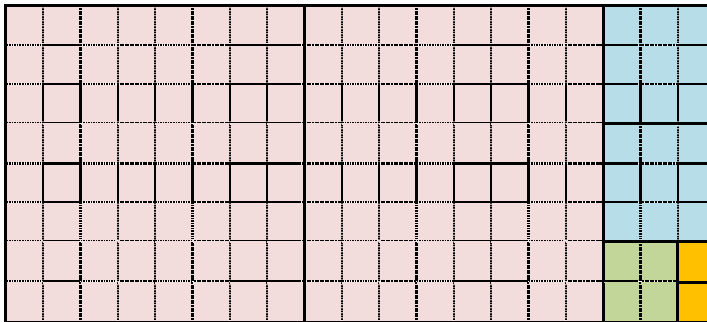
$$\frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 2 + 1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

La sustitución de las expresiones obtenidas mediante el algoritmo de la división en la fracción original resulta en lo siguiente:

$$\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{8/3} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3/2}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Con lo que se muestra nuevamente la equivalencia de las dos estrategias ya mencionadas.

A partir de los resultados obtenidos en la tabla de división, se observa que los cocientes parciales (números de la fila inferior en la tabla) proporcionan la cantidad de cuadrados y los de la fila superior su tamaño, de esta manera:



Cubrimiento	
2	cuadrados de 8×8
2	cuadrados de 3×3
1	cuadrado de 2×2
2	cuadrados de 1×1

PROBLEMAS DE AFIANZAMIENTO

d. Mediante el uso de una tabla de división o de la aplicación repetida del algoritmo de la división, determine la cantidad y el tamaño de las baldosas cuadradas que emplearía para cubrir un rectángulo con los tamaños indicados con ayuda de las fracciones continuas simples:

- i. 126×285
- ii. 1401×2308
- iii. 37×85
- iv. 18×41
- v. 972×421
- vi. 151×124

3. Ahora, se presentará la situación inversa a las dos planteadas anteriormente. Esto es, conocida una expresión decimal (finita o infinita periódica) o una fracción continua simple, ¿cómo determinar la fracción que las genera?

Para el caso decimal, el método para hallar la fracción se basa en el efecto que resulta de multiplicar una expresión decimal por una potencia de 10. Por ejemplo, para el decimal finito $a = 3,758$, las multiplicaciones por potencias de 10 resultan en:

$$\begin{aligned} 1 \cdot a &= 3,758 \\ 10 \cdot a &= 37,58 \\ 100 \cdot a &= 375,8 \\ 1000 \cdot a &= 3758 \\ 10000 \cdot a &= 37580 \end{aligned}$$

elaborado. Al igual que las expresiones finitas, la multiplicación por las potencias de 10 desplaza la coma decimal hacia la derecha. Si es posible hallar **dos** potencias apropiadas de 10 de tal manera que las partes periódicas se ubiquen **inmediatamente** después de la coma decimal, el hallazgo de la fracción se reduce a un sencillo problema de sustracción entre las dos cantidades resultantes. Por ejemplo, considere la expresión $c = 0,\widehat{3} = 0,333 \dots$. La multiplicación por potencias sucesivas de 10 da como resultado:

$$\begin{aligned} 1 \cdot c &= 0,333 \dots \\ 10 \cdot c &= 3,333 \dots \\ 100 \cdot c &= 33,333 \dots \end{aligned}$$

Si se toman las dos primeras expresiones y se sustrae la primera de la segunda, se tiene:

$$\begin{array}{r} 10 \cdot c = 3,333 \dots \\ 1 \cdot c = 0,333 \dots \\ \hline 9 \cdot c = 3 \end{array}$$

De modo que la fracción $c = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. En algunos casos, más específicamente aquellos decimales cuyo período tiene varios dígitos o cuando hay anteperíodo, las potencias de 10 requeridas no son consecutivas, como lo muestra el siguiente ejemplo con $d = 1,7\widehat{25} = 1,72525 \dots$

$$\begin{aligned} 1 \cdot d &= 1,7252525 \dots \\ 10 \cdot d &= 17,252525 \dots \\ 100 \cdot d &= 172,52525 \dots \\ 1000 \cdot d &= 1725,2525 \dots \end{aligned}$$

Mediante la sustracción entre la cuarta y segunda expresiones, se obtiene la fracción buscada:

$$\begin{array}{r} 1000 \cdot d = 1725,2525 \dots \\ 10 \cdot d = 17,2525 \dots \\ \hline 990 \cdot c = 1708 \end{array}$$

Así, c es igual a $\frac{1708}{990}$. Un último ejemplo con $e = 0,471\widehat{23} = 0,47123123 \dots$

$$\begin{aligned} 1 \cdot e &= 0,47123123 \dots \\ 10 \cdot e &= 4,7123123 \dots \\ 100 \cdot e &= 47,123123 \dots \\ 1000 \cdot e &= 471,23123 \dots \\ 10000 \cdot e &= 4712,3123 \dots \\ 100000 \cdot e &= 47123,123 \dots \end{aligned}$$

Sustrayendo,

$$\begin{array}{r} 100000 \cdot e = 47123,123123 \dots \\ 100 \cdot e = \quad \quad 47,123123 \dots \\ \hline 99900 \cdot e = 47076 \end{array}$$

De este modo, $e = \frac{47076}{99900}$

Es notorio que, a pesar de la infinidad de cifras decimales que poseen cada una de las expresiones anteriores, ha sido posible manipularlas como objetos concretos y, mediante procesos y operaciones comunes a las entidades finitas, les fue asignado un significado preciso. Esto es parte de lo que se conoce como *infinito actual*, a diferencia del infinito denominado *potencial*, que se concibe como inacabado y lejos de ser gobernado por leyes precisas.

EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

e. Halle la fracción que genera los siguientes decimales y simplifíquela a su mínima expresión.

i. $0,03215$

iv. $5,0182$

vii. $0,3546$

ii. $0,\overline{0036}$

v. $0,\widehat{894}$

viii. $2,\widehat{144}$

iii. $0,876\hat{1}$

vi. $4,13\hat{4}$

ix. $0,144\hat{7}$

f. Con el procedimiento descrito, determine la fracción que genera los siguientes decimales. A partir de la fracción encontrada emplee el algoritmo de la división para obtener el decimal correspondiente. Compare con los valores dados inicialmente y establezca una conclusión al respecto.

i. $0,\hat{9}$

iii. $3,12\hat{9}$

ii. $0,04\hat{9}$

iv. $0,2\hat{9}$

4. Ahora mostraremos como, a partir de una fracción continua simple, obtener la fracción que la genera. A partir de los cocientes parciales, el procedimiento genera una serie de fracciones intermedias, llamadas *convergentes*, que cada vez se aproximan más (como puede comprobarse mediante una simple sustracción) a la fracción deseada. Para ilustrarlo, tomemos la fracción continua simple dada por $[2; 4, 3, 5]$, esto es:

$$[2; 4, 3, 5] = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}}$$

Dispongamos el primer cociente parcial en la siguiente tabla, que ya contiene tres números en ella:

1	2
---	---

0	1
---	---

Ahora, multiplicamos el siguiente cociente parcial (4) por cada uno de los números de la última columna y sumamos los resultados con los números de la columna anterior, esto genera dos resultados que pueden ser dispuestos en una columna adicional así:

1	2	$4 \cdot 2 + 1 = 9$
0	1	$4 \cdot 1 + 0 = 4$

Si se toma el siguiente cociente parcial (3) y se repite el proceso con las dos últimas columnas, se obtiene:

1	2	9	$3 \cdot 9 + 2 = 29$
0	1	4	$3 \cdot 4 + 1 = 13$

El procedimiento se continúa hasta operar todos los cocientes parciales, lo que resulta (paso a paso) en:

1	2	9	29	$5 \cdot 29 + 9 = 154$
0	1	4	13	$5 \cdot 13 + 4 = 69$

Y la tabla final, que resume los resultados obtenidos, es la siguiente:

1	2	9	29	154
0	1	4	13	69

Todas las columnas que siguen a la primera forman el conjunto de fracciones *convergentes*, siendo la última de ellas la fracción pedida, es decir, las fracciones $\frac{2}{1}, \frac{9}{4}$ y $\frac{29}{13}$ son convergentes y $\frac{154}{69}$ la fracción que genera la fracción continua simple dada inicialmente.

Aunque parezca algo artificial, la disposición de los cocientes parciales dentro de la tabla anterior y en la forma indicada es consecuencia directa de las propiedades ya conocidas para fracciones. Si se operan las fracciones resultantes cuando se consideran secuencialmente los cocientes parciales, se obtiene:

Primera convergente:

$$[2] = 2$$

Segunda Convergente:

$$[2; 4] = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

Tercera Convergente:

$$[2; 4, 3] = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3}} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{3}} = \frac{29}{13}$$

Cuarta Convergente:

$$[2; 4, 3, 5] = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{5}{16}} = 2 + \frac{1}{\frac{69}{16}} = 2 + \frac{16}{69} = \frac{154}{69}$$

Como ejemplo adicional, determinaremos las fracciones convergentes así como la fracción que genera a la fracción continua $[1; 3, 5, 7, 9]$. La primera parte de la tabla se muestra a continuación:

1	1
0	1

Operando el siguiente cociente parcial (3), la tabla se amplía así:

1	1	$3 \cdot 1 + 1 = 4$
0	1	$3 \cdot 1 + 0 = 3$

El cociente parcial 5 añade una nueva columna así:

1	1	4	$5 \cdot 4 + 1 = 21$
0	1	3	$5 \cdot 3 + 1 = 16$

Repitiendo el proceso hasta agotar todos los cocientes parciales, se llega finalmente a:

1	1	4	21	151	1380
0	1	3	16	115	1051

Así, las convergentes y la fracción final pedida son:

Convergentes: $\frac{1}{1}, \frac{4}{3}, \frac{21}{16}, \frac{151}{115}$

Fracción final: $\frac{1380}{1051}$

Si, en cambio, se encuentran las fracciones convergentes mediante la operación directa con los cocientes parciales, se tiene:

Primera convergente:

$$[1] = 1$$

Segunda Convergente:

$$[1; 3] = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Tercera Convergente:

$$[1; 3, 5] = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{\frac{16}{5}} = 1 + \frac{5}{16} = \frac{21}{16}$$

Cuarta Convergente:

$$[1; 3, 5, 7] = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{7}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{36}{7}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{7}{36}} = 1 + \frac{36}{115} = \frac{151}{115}$$

Quinta Convergente:

$$[1; 3, 5, 7, 9] = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{7 + \frac{1}{9}}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{9}{64}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{64}{329}} = 1 + \frac{329}{1051} = \frac{1380}{1051}$$

A pesar de la rigurosidad del procedimiento algebraico descrito, se observa inmediatamente la facilidad que proporciona el arreglo tabular en el proceso de obtención de convergentes, por lo que se prefiere su uso.

PROBLEMAS DE AFIANZAMIENTO

g. Para cada fracción continua dada, obtenga las convergentes así como la fracción final que la genera.

i. $[1; 2, 2]$

iii. $[1; 2, 2, 2, 2]$

ii. $[0; 1, 2, 3, 4]$

iv. $[3; 7, 15, 1, 292]$

h. Cada uno de los siguientes cubrimientos fue generado mediante el uso de fracciones continuas. Determine las dimensiones de cada rectángulo original.

i. $[2; 4, 3, 2]$

ii. $[1; 1, 1, 1, 1]$

Es claro que, dada una fracción, puede obtenerse su expresión decimal así como su representación en forma de fracción continua. Los procedimientos que permiten revertir estas expresiones a las fracciones originales pueden ser intercambiados; con esto queremos decir que, dada una expresión

decimal, puede obtenerse una representación en forma de fracción continua simple y recíprocamente convirtiendo primero a la fracción original y luego transformando a la expresión deseada mediante las estrategias ya mencionadas.

RESUMEN DE LA ACTIVIDAD

Se precisaron los conceptos de *expresión decimal* y *expansión polinómica*, mostrando su obtención de acuerdo al *algoritmo de la división* y distinguiendo los casos *finito* e *infinito periódico*. En estas últimas se identificaron la *parte entera*, *bloque periódico* y *anteperíodo*. Se mostró además la obtención de una *fracción continua*, *cocientes parciales* y *fracciones convergentes*. Así mismo, se expusieron procedimientos que permiten, a partir de las expresiones decimales o en forma de fracción continua, obtener fracciones que las generan, lo que es de vital importancia en el manejo y comprensión tanto de objetos como de procesos *infinitos*, aspecto crucial en la aprehensión del concepto de *infinito actual*. Se señaló, además, la dependencia de una expansión polinómica con respecto a la *base* empleada en el algoritmo de la división así como de la cantidad y naturaleza de las cifras generadas por dicha expansión.

C. Anexo: Números irracionales: Expresiones decimales y fracciones continuas.

I.E.D. RAFAEL URIBE URIBE

GRADO UNDÉCIMO

ACTIVIDADES DE DESARROLLO, SEGUNDA PARTE

NÚMEROS IRRACIONALES: EXPRESIONES DECIMALES Y FRACCIONES CONTINUAS

1. En la actividad anterior observábamos que los números racionales generaban expresiones decimales finitas o infinitas periódicas. También advertíamos que para las expresiones decimales finitas e infinitas periódicas **siempre** puede encontrarse un número racional que las genere. Esto puede resumirse así:

Un número es racional si y solo si su expresión decimal es finita o infinita periódica.

Es decir, todo número racional **puede representarse** como una expresión decimal finita o infinita periódica y todo decimal finito o infinito periódico **se hace equivalente** a un número racional. Con las fracciones continuas sucede algo muy similar que se enuncia así:

Un número es racional si y solo si su fracción continua es finita.

Sin embargo surge la pregunta: ¿Qué sucede con expresiones decimales de la siguiente forma, que no tienen un bloque periódico?:

- $0,12345678910\dots$ (Los decimales siguen la sucesión de números naturales).
- $0,14916253649\dots$ (Los decimales siguen la sucesión de números cuadrados).
- $\sqrt{2} = 1,41421356237\dots$ (Los decimales aparentemente no siguen un patrón fijo)
- $\pi = 3,14159265359\dots$

¿O con fracciones continuas como las siguientes?:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

$$z = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

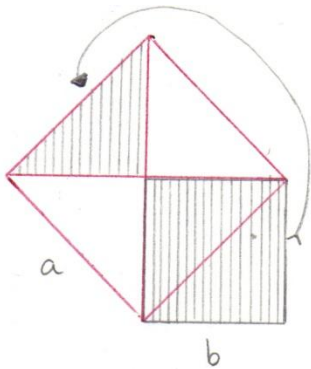
¿Son racionales los números dados por estas expresiones? Puesto que los decimales no experimentan repetición alguna (o al menos eso creemos) y las fracciones continuas **no** son finitas, podemos asegurar con certeza que **no son racionales**. Esto permite enunciar el siguiente “criterio de no racionalidad”:

*Un número **no** es racional si y solo si su expresión decimal es infinita no periódica o su expresión en forma de fracción continua es infinita.*

Este enunciado, a pesar de su validez, carece de valor práctico porque ¿qué método nos asegura poder observar infinitas cifras decimales y garantizar que no hay periodicidad? Este es un serio problema al que se ha enfrentado la comunidad matemática desde hace milenios y son muy contados los casos en los que se ha podido mostrar la no racionalidad de un número (usualmente asociado a una magnitud geométrica como la longitud o el área) sin observar directamente la expresión decimal (que es un concepto relativamente reciente) del número en cuestión.

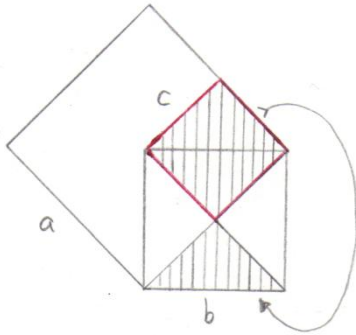
Vamos a mostrar una de ellas, muy sencilla, que emplearon los griegos para mostrar la no racionalidad de $\sqrt{2}$ hace más de 2000 años y se basa en lo siguiente: Para probar que $\sqrt{2}$ no es racional se supone lo contrario, esto es, que tal número **si** es racional y luego mostrar que tal afirmación genera alguna contradicción, verificando de manera indirecta lo que se desea probar. Para aclarar este tipo de razonamiento, suponga que queremos demostrar que “Ninguna vaca es verde”. Si asumimos lo opuesto, es decir, que hay al menos una vaca de color verde, encontramos tal afirmación contradictoria en cuanto los pigmentos que otorgan el color verdoso pertenecen exclusivamente a las plantas, de manera que es genéticamente imposible que exista una vaca con características de planta y nos vemos forzados a aceptar la afirmación de que ninguna vaca es verde.

Aclarado este punto, supongamos entonces que $\sqrt{2}$ es racional, de modo que hay al menos una fracción $\frac{a}{b}$ tal que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ donde a y b son enteros positivos, es decir, números de la secuencia $1, 2, 3, 4, \dots$. Si elevamos al cuadrado la anterior expresión, encontramos que $2 = \frac{a^2}{b^2}$ o, de forma equivalente, $a^2 = 2 \cdot b^2$.

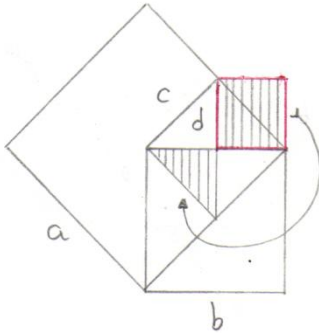


Ahora, la geometría. ¿Qué es b^2 ? Es el área de un cuadrado de lado b . Si se construye otro cuadrado tal y como lo muestra la figura a la izquierda, se aprecia que ese nuevo cuadrado es, precisamente, el doble del cuadrado de lado b de modo que su lado es, de acuerdo a la relación anterior, igual al valor de a . Es obvio que a es mayor que b y, además, son enteros positivos.

Si ahora dividimos por mitad el lado del cuadrado más grande y se construye un cuadrado sobre ese segmento, se obtiene algo similar a lo mostrado en la siguiente figura:

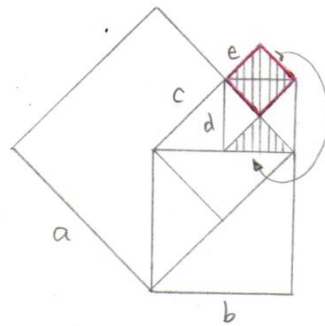


Claramente el cuadrado de lado b es el doble del cuadrado de lado c , por lo que puede escribirse $b^2 = 2 \cdot c^2$ así como se hizo en la construcción anterior. De nuevo es obvio que b es mayor que c siendo ambos enteros positivos.



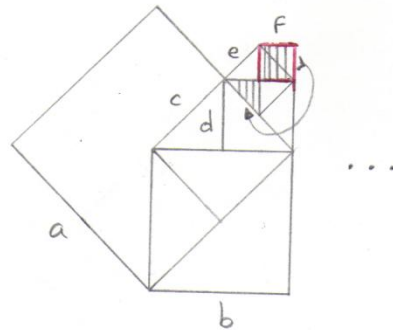
Continuando el proceso de construcción con la diagonal del cuadrado de lado c , se observa que el nuevo cuadrado de lado d es exactamente la mitad del cuadrado a partir del cual fue generado, de este modo se tiene $c^2 = 2 \cdot d^2$ siendo c y d enteros positivos con c mayor a d .

Un análisis similar a los ya realizados nos muestra que el proceso de construcción de cuadrados sobre las diagonales puede continuarse y se obtiene:



$$d^2 = 2e^2$$

d mayor a e



$$e^2 = 2f^2$$

e mayor a f

¿Cuántas veces puede repetirse el proceso de construcción de cuadrados mostrado en las figuras anteriores? La respuesta es: Infinitas veces ya que la Matemática, sin estar limitada por razones de espacio y tiempo, permite continuar el proceso de construcción puesto que las líneas y puntos geométricos e idealizados carecen de espesor y tamaño y no están sometidos a los límites de precisión de nuestros toscos instrumentos de dibujo.

Ahora bien, del proceso se obtiene una secuencia de enteros positivos que disminuye de manera indefinida

$$a > b > c > d > e > f \dots$$

¿Existe algún entero positivo que decrezca de manera indefinida y siga conservando su carácter de entero positivo? Obviamente **no** existe ya que en algún momento el decrecimiento llevará a ese entero positivo a un valor igual a 1, siendo imposible disminuir aún más su valor y continuar siendo entero positivo. De este modo, la suposición inicial de la existencia de enteros a y b es absurda y se concluye entonces que $\sqrt{2}$ **no** es racional.

$\sqrt{2}$ pertenece a una categoría de números que convendremos en llamar *IRRACIONALES*, es decir, no racionales. No es el único y de hecho hay infinidad de ellos, algunos de los cuales se han trabajado en los cursos de Matemática y que tienen importancia crucial en ella, entre los que se cuentan:

- El número pi (π), la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro siendo $\pi = 3,141592 \dots$
- El número de Euler (e), importante en modelos matemáticos que describen el crecimiento y decrecimiento continuos, $e = 2,718281 \dots$
- El número áureo (ϕ), idealizado por los geómetras griegos y artistas del Medioevo como modelo de la razón divina, la belleza y la perfección, $\phi = 1,618033 \dots$

Probar la irracionalidad de estos números no es nada fácil y de hecho solo se ha conseguido hasta fechas recientes, quedando aún todavía muchos sin demostrar. Todos ellos poseen infinitas cifras decimales no periódicas y su expresión en forma de fracción continua es infinita:

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5 + \frac{9}{7 + \frac{16}{9 + \frac{25}{11 + \frac{36}{\ddots}}}}}}}$$

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\ddots}}}}}}}}}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Estas hermosas relaciones dan origen a una pregunta ¿Cómo resulta la expresión en fracción continua de un número irracional? Es claro que el algoritmo de la división visto en la actividad anterior **no** es aplicable en toda su generalidad de modo que recurriremos a la calculadora científica. Este instrumento posee una función muy importante llamada *recíproco* cuya tecla se

simboliza como x^{-1} . Su función es brindar el inverso multiplicativo de un número x distinto de cero, esto es, el valor de $\frac{1}{x}$, por ejemplo:

- Al teclear 5, x^{-1} , = obtenemos 0,2 que es la expresión decimal de $\frac{1}{5}$
- Si se escribe -17 , x^{-1} , = se llega a $-0,058823 \dots$ que es la expresión decimal de $-\frac{1}{17}$

Para obtener la fracción continua de un número con ayuda de la calculadora, hacemos lo siguiente:

- Hallamos la parte entera del número (este será el primer cociente parcial) y la sustraemos para obtener un número menor a 1.
- Hallamos el recíproco del número anterior, sustraemos su parte entera (este será el segundo cociente parcial) y obtenemos otro decimal menor a 1.
- Repetimos el procedimiento desde el segundo paso con los últimos decimales resultantes.

Por ejemplo, para el número racional $\frac{58}{17} = 3,41176 \dots$, tenemos:

Paso	Parte entera	Parte decimal	Recíproco
1	3	0,41176 ...	2,42857 ...
2	2	0,42857 ...	2,33333 ...
3	2	0,33333 ...	3
4	3	0	-----

Así, $\frac{58}{17} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} = [3; 2, 2, 3]$. Si se aplica este procedimiento con $\sqrt{2} = 1.41421 \dots$, se obtiene:

Paso	Parte entera	Parte decimal	Recíproco
1	1	0,41421 ...	2,41421 ...
2	2	0,41421 ...	2,41421 ...
3	2	0,41421 ...	2,41421 ...
4	2	0,41421 ...	2,41421 ...

En este caso los cocientes parciales se repiten luego del segundo paso así que la fracción continua para este número es infinita puesto que, como ya se demostró, es irracional.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} = [1; 2, 2, 2, \dots]$$

Hasta el momento, sólo se ha analizado con cierto detalle el número $\sqrt{2}$. ¿Qué pasa con los demás irracionales?, ¿cómo reconocerlos? Si se da un número x , ¿será este racional o irracional? Como ya se mencionó, demostrar que un número es irracional es sumamente complejo aunque se pueden dar ejemplos concretos para los propósitos que se persiguen con esta actividad:

- Son irracionales todas las raíces (cuadradas, cúbicas, cuartas, etc.) que no sean exactas. Por ejemplo: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{27}$, etc.
- Son irracionales, por lo general, los valores de las funciones trigonométricas para ángulos con excepción de algunos ángulos notables. Por ejemplo: $\text{sen}(15^\circ), \text{tan}(37^\circ), \text{cos}(83^\circ)$, etc.
- El número π , el número e de Euler y demás constantes matemáticas notables cuya irracionalidad se haga explícita.
- Todos los logaritmos de números positivos que **no** sean potencias enteras de la base. Por ejemplo: $\log_5 17, \log_3 48, \log_{11} 0,47$, etc.

Al margen de toda esta discusión, dedicada principalmente a la naturaleza y representación de expresiones decimales infinitas y no periódicas, se origina una pregunta algo más sutil y relacionada íntimamente con el concepto de número: ¿Pueden las expresiones decimales infinitas **no** periódicas ser consideradas como *números* propiamente dichos? La validez y pertinencia de esta pregunta se sustenta desde los siguientes puntos de vista:

- La anexión sucesiva e indefinida de cifras decimales (con o sin algún patrón preestablecido) aumenta progresivamente el valor del racional resultante de este proceso, como se evidencia al emplear, por ejemplo, la expansión polinómica para el número $\pi = 3,1415 \dots$

$$3 + \frac{1}{10} = 3,1$$

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} = 3,141$$

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} = 3,14$$

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} = 3,1415$$

De este modo, los números racionales obtenidos resultan cada vez mayores de modo que es plausible la **no existencia** de un valor concreto al que se “aproxime” π .

- Desde una óptica similarmente intuitiva puede argumentarse que, dado que las adiciones emplean sumandos **cada vez menores**, el valor “final” de dicho proceso de adición, si se permite cierto abuso de lenguaje, es uno concreto por lo que es posible hablar de un “resultado” para dicha suma y, por tanto, de la expresión decimal que lo representa.

Claramente, la pregunta original, apoyada desde estas dos posturas intuitivas y contradictorias entre sí, demanda una respuesta. En Matemática superior es posible demostrar que, a pesar de la adición sucesiva de cantidades positivas, **existe** un valor concreto para dicha suma y que tal valor puede ser asignado razonablemente a la expresión decimal infinita y no periódica.

EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

- a. Con ayuda de la calculadora, halle la expresión en forma de fracción continua para los siguientes números y determine si tal expresión es finita o no.

i. $\sqrt{3}$

iv. $\frac{55}{34}$

ii. $\frac{71}{41}$

v. $\tan(20^\circ)$

iii. π

vi. $\sqrt[3]{20}$

- b. Tal y como se señaló, la definición de número irracional basada en la representación decimal de un número **no** permite la identificación de un número como tal, sin embargo **si** permite la construcción efectiva de algunos de ellos siempre y cuando se haga explícita la regla que siguen las cifras decimales de tal manera que se garantice una secuencia **no** periódica. Construya dos números irracionales para cada una de las secuencias dadas.

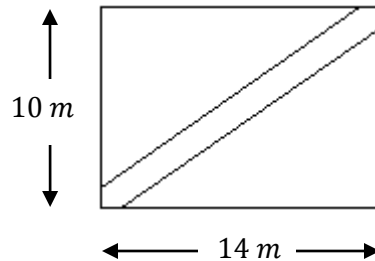
- i. Secuencia de números pares:
2, 4, 6, 8, 10, ...

- iii. Secuencia de potencias de 2:
1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

- ii. Secuencia de números primos:
2, 3, 5, 7, 11, ...

- iv. ¿Podría usted pensar en una secuencia para construir su propio número irracional?

2. Habiendo observado el comportamiento de las expresiones decimales y en forma de fracción continua para números racionales e irracionales, vamos a emplear en esta ocasión dichas expresiones para propósitos algo distintos. Supongamos que a un carpintero se le encarga la tarea de instalar un listón de madera en un techo rectangular de dimensiones $10\text{ m} \times 14\text{ m}$ como lo muestra la siguiente figura:



El carpintero, que sabe algo de Trigonometría, propone lo siguiente: El listón de madera y los dos lados consecutivos del techo forman un triángulo rectángulo así que puedo hallar la longitud L del listón de manera muy sencilla aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$L = \sqrt{10^2 + 14^2} = \sqrt{296}\text{ m}$$

El carpintero toma su calculadora, teclea $\sqrt{296}$ y obtiene $\sqrt{296} = 17,2046505341 \dots$ (???)

¿Cuánta madera debe, realmente, comprar el carpintero? Obviamente **nunca** va a adquirir de manera exacta los $17,2046505341 \dots$ metros que necesita, luego debe hacer una “aproximación” para así poder comprarla y esta depende de la precisión del instrumento con el que se mida. Para aclarar este punto, supongamos que el proveedor de madera **solamente** vende la madera por metros; entonces la decisión del carpintero es sencilla: Si compro 17 m me quedo corto en madera y si compro 18 m me sobra y puedo después cortar el excedente en mi taller, así:

- Venta por metros: $\sqrt{296}$ está entre 17 y 18 .

Ahora, si el proveedor vende la madera por decímetros, nuestro carpintero razona así: Si compro $17,2\text{ m}$ entonces, dado que $17,2^2 = 295,84$, quedo corto en madera pero si compro $17,3\text{ m}$ entonces, dado que $17,3^2 = 299,29$, me sobra madera, por tanto:

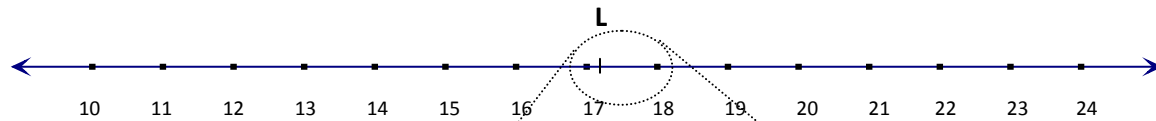
- Venta por decímetros: $\sqrt{296}$ está entre $17,2$ y $17,3$.

Un razonamiento similar en el caso en que la madera se venda por centímetros o milímetros muestra que:

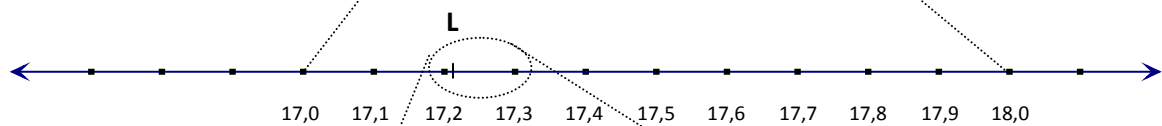
- Venta por centímetros: $\sqrt{296}$ está entre $17,20$ y $17,21$.
- Venta por milímetros: $\sqrt{296}$ está entre $17,204$ y $17,205$.

Surgen varias apreciaciones al respecto. La primera tiene que ver con una representación gráfica de la situación del carpintero. Si representamos cada uno de los resultados anteriores en la recta numérica, designando con L la longitud buscada se tiene:

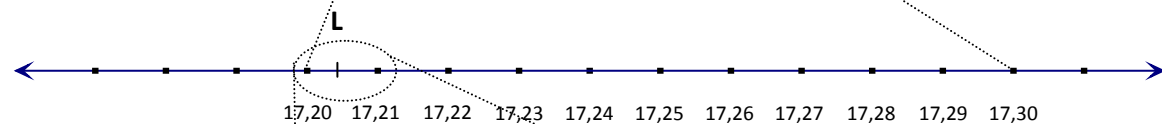
- Venta por metros:



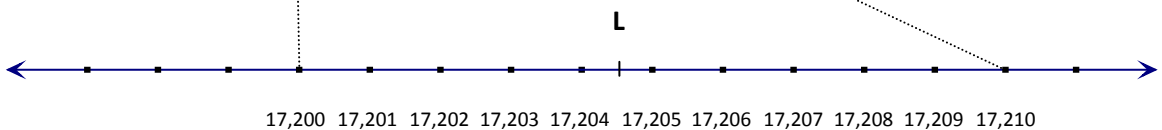
- Venta por decímetros:



- Venta por centímetros:



- Venta por milímetros:



En cada paso, se subdividió el intervalo que contiene a L en diez partes iguales¹⁰ y enfocamos nuestra atención solamente en aquella parte en cuyo interior está nuestro segmento L , esto es análogo a como si miráramos la parte que contiene a L bajo una serie de lentes de aumento (los óvalos en la figura) cuyo poder de resolución es diez veces mayor que el anterior. A partir del dibujo se aprecia que nuestro segmento L puede ubicarse en “cajones” cada vez más estrechos cuyos bordes o límites son las aproximaciones más cercanas a él. Así:

- Cajón 1: $[17; 18]$ Tamaño = $18 - 17 = 1$
- Cajón 2: $[17,2; 17,3]$ Tamaño = $17,3 - 17,2 = 0,1$
- Cajón 3: $[17,20; 17,21]$ Tamaño = $17,21 - 17,20 = 0,01$
- Cajón 4: $[17,204; 17,205]$ Tamaño = $17,205 - 17,204 = 0,001$

¹⁰ Otro motivo por el cual se valida la denominación *expresión decimal*.

La segunda cuestión, relacionada con lo anterior, es ¿Hasta qué punto podemos estrechar los cajones que contienen a L ? Esto depende de si la expresión decimal del número es finita o infinita, lo que está relacionado directamente con la certidumbre acerca de la ubicación del número. Para observarlo, supongamos que se repite el procedimiento anterior de ubicación y encajonamiento para las expresiones:

$$x = 12,37$$

$$y = 4,25897$$

$$z = 5,\hat{3} = 5,33333\dots$$

Se tiene, para $x = 12,37$:

- Cajón 1: $[12; 13]$ Tamaño = $13 - 12 = 1$
- Cajón 2: $[12,3; 12,4]$ Tamaño = $12,4 - 12,3 = 0,1$
- Cajón 3: $[12,37; 12,38]$ Tamaño = $12,38 - 12,37 = 0,01$

Y es en la tercera etapa de subdivisión donde finaliza el proceso de estrechamiento ya que el valor de x se ubica, precisamente, en el borde de uno de los cajones de modo que cualquier cajón adicional tendría este valor de x como punto inicial y la localización de tal punto estaría determinada de manera única.

Para $y = 4,25897$:

- Cajón 1: $[4; 5]$ Tamaño = $5 - 4 = 1$
- Cajón 2: $[4,2; 4,3]$ Tamaño = $4,3 - 4,2 = 0,1$
- Cajón 3: $[4,25; 4,26]$ Tamaño = $4,26 - 4,25 = 0,01$
- Cajón 4: $[4,258; 4,259]$ Tamaño = $4,259 - 4,258 = 0,001$
- Cajón 5: $[4,2589; 4,2590]$ Tamaño = $4,2590 - 4,2589 = 0,0001$
- Cajón 6: $[4,25897; 4,25898]$ Tamaño = $4,25898 - 4,25897 = 0,00001$

De manera similar que el ejemplo anterior, es en la sexta etapa de subdivisión donde finaliza el proceso de estrechamiento. El valor de y se ubica, nuevamente, en uno de los extremos del cajón final, localizando a y de manera única.

Para $z = 5,\hat{3} = 5,33333\dots$ los cajones son los siguientes:

- Cajón 1: $[5; 6]$ Tamaño = $6 - 5 = 1$
- Cajón 2: $[5,3; 5,4]$ Tamaño = $5,4 - 5,3 = 0,1$
- Cajón 3: $[5,33; 5,34]$ Tamaño = $5,34 - 5,33 = 0,01$
- Cajón 4: $[5,333; 5,334]$ Tamaño = $5,334 - 5,333 = 0,001$

Por cada cajón que se construya en cada etapa, la expresión decimal de z permitirá construir otro adicional que precise aún más la localización del punto sin que este coincida con alguno de los bordes.

Así, si la expresión decimal de un número es finita, el proceso de estrechamiento en cajones decimales finaliza después de un número finito de pasos, resultando la última cifra igual al extremo izquierdo del último cajón mientras que con una expresión decimal infinita el estrechamiento continúa indefinidamente, reduciendo en cada paso la incertidumbre acerca de la localización del número. Intuitivamente, los cajones se estrecharán cada vez más hasta *contraerse* en un punto, que es donde se localiza *exactamente* el número en cuestión.

Las fracciones continuas también son de utilidad en el momento de encontrar cajones que encierren un número dado. Por ejemplo, la expresión en forma de fracción continua para $\sqrt{2}$ fue hallada anteriormente, siendo igual a:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} = [1; 2, 2, 2, \dots]$$

Calculemos las primeras seis convergentes para esta fracción continua infinita mediante el esquema tabular expuesto en la sección anterior:

1	3	7	17	41	99
1	2	5	12	29	70

En forma decimal:

1	1,5	1,4	1,416...	1,413...	1,414...
---	-----	-----	----------	----------	----------

En este caso, los cajones se construyen tomando las convergentes por parejas en el orden en que son encontradas, de este modo:

- Cajón 1: $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ Tamaño = $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} = 0,5$
- Cajón 2: $\left[\frac{7}{5}; \frac{17}{12}\right]$ Tamaño = $\frac{17}{12} - \frac{7}{5} = \frac{1}{60} = 0,0166 \dots$
- Cajón 3: $\left[\frac{41}{29}; \frac{99}{70}\right]$ Tamaño = $\frac{99}{70} - \frac{41}{29} = \frac{1}{2030} = 0,00049 \dots$

El encajonamiento por fracciones continuas es aplicable también al caso racional y dado que estos números generan fracciones continuas finitas, eventualmente el proceso de encajonamiento terminará en un número finito de pasos. Esta característica aventaja a las fracciones continuas frente al proceso de encajonamiento decimal ya que, en el caso infinito periódico, tal encajonamiento decimal nunca finaliza mientras que el realizado con las fracciones continuas si lo hace.

Otra ventaja de dicho encajonamiento es la siguiente: Las fracciones continuas generan cajones más cercanos al número dado, esto es, lo estrechan con mayor precisión que los cajones decimales en un mismo número de etapas. Este es un hecho que se demuestra en Matemática superior y para ejemplificarlo, se realizarán dichos encajonamientos para el número $\sqrt{3}$. Con ayuda de la calculadora observamos que $\sqrt{3} = 1,7320508 \dots$ de modo que los primeros cuatro cajones decimales son:

- Cajón 1: $[1; 2]$ Tamaño = $2 - 1 = 1$
- Cajón 2: $[1,7; 1,8]$ Tamaño = $1,8 - 1,7 = 0,1$
- Cajón 3: $[1,73; 1,74]$ Tamaño = $1,74 - 1,73 = 0,01$
- Cajón 4: $[1,732; 1,733]$ Tamaño = $1,733 - 1,732 = 0,001$

Los cajones determinados por la fracción continua para $\sqrt{3}$ se hallan a partir de los convergentes de la misma. Apliquemos el procedimiento descrito anteriormente para hallarlas con ayuda de la calculadora:

Paso	Parte entera	Parte decimal	Recíproco
1	1	0,73205 ...	1,36602 ...
2	1	0,36602 ...	2,73205 ...
3	2	0,73205 ...	1,36602 ...
4	1	0,36602 ...	2,73205 ...

Así:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}}} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots]$$

Las primeras ocho convergentes (dos por cada cajón) son:

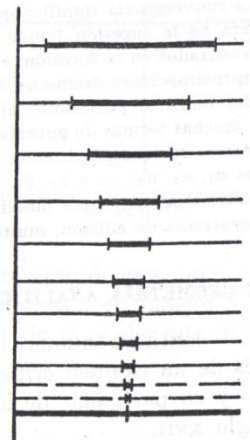
1	2	5	7	19	26	71	97
1	1	3	4	11	15	41	56

De este modo:

- Cajón 1: $[1; 2]$ Tamaño = $2 - 1 = 1$
- Cajón 2: $[\frac{5}{3}; \frac{7}{4}]$ Tamaño = $\frac{7}{4} - \frac{5}{3} = \frac{1}{12} = 0,083 \dots$
- Cajón 3: $[\frac{19}{11}; \frac{26}{15}]$ Tamaño = $\frac{26}{15} - \frac{19}{11} = \frac{1}{165} = 0,0060 \dots$
- Cajón 4: $[\frac{71}{41}; \frac{97}{56}]$ Tamaño = $\frac{97}{56} - \frac{71}{41} = \frac{1}{2296} = 0,00043$

Y se observa que para el mismo número de pasos, los cajones por fracciones continuas localizan el número más precisamente, esto es, en un cajón más estrecho.

La tercera y última cuestión está relacionada con la naturaleza misma de L , la longitud del listón de madera, así como de las otras expresiones decimales y fracciones continuas infinitas. ¿Qué número representan exactamente? El proceso de encajonamiento antes descrito permite responder esta pregunta de la siguiente manera: **El número representado por los procesos consecutivos de encajonamiento, sea decimal o por fracciones continuas, es aquel número común a todos los cajones.** Es interesante observar que esta respuesta se apoya fuertemente en nuestra intuición geométrica sobre la recta ya que es decididamente evidente que una secuencia de segmentos, cada uno más estrecho que el anterior y contenido en este, terminarán por contraerse en un solo punto común a todos ellos, como lo muestra la siguiente figura:



Estos cajones, sean decimales o por fracciones continuas, nos ayudarán a operar y ordenar dichos números representados como decimales infinitos o como fracciones continuas, evitando inconvenientes relacionados con el “acarreo” infinito de cifras, como consecuencia de la aplicación de los algoritmos usuales de operación aprendidos en la enseñanza primaria.

RESUMEN

En esta actividad se expuso el problema de la *no racionalidad*, entendida como el incumplimiento de una o varias condiciones relacionadas con las características que definen un número racional según su representación y se expuso una demostración, con bases históricas y geométricas, de tal característica no racional para el número $\sqrt{2}$. Se mostraron las representaciones decimales y en fracción continua para algunos de estos números irracionales y se dieron criterios que permiten identificarlos en la mayoría de las ocasiones. Se señaló la importancia del uso de la calculadora en el hallazgo de la expresión en forma de fracción continua para expresiones decimales para así llegar al concepto de encajonamiento decimal y por fracción continua (señalando sus ventajas) que permitirá definir posteriormente con precisión lo que se quiere decir con *operar* y *ordenar* números decimales.

Se generó una discusión acerca del carácter o estatus de número que puede ser otorgado a las expresiones decimales infinitas no periódicas desde la perspectiva de su expansión polinómica; la asignación de un valor concreto a la “suma” de los términos de dicha expansión es un hecho que se justifica en gran medida con uno de los resultados de la siguiente Actividad de Desarrollo, lo que evidencia la necesidad del infinito actual en la significación de resultados originados por procesos de tal carácter.

EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

- c. Tal y como fue mostrado en el ejemplo del carpintero y el listón de madera, hallar cuatro cajones decimales (cada uno más estrecho que el anterior) de modo que encierren a los números dados. Emplee la calculadora científica para hallar sus valores e indique, para cada cajón, su tamaño. Represente este proceso de estrechamiento en la recta numérica.

- | | | | | | |
|-----|---------------|------|----------------|-----|------------------------|
| i. | $\frac{7}{6}$ | iii. | $\frac{3}{7}$ | v. | $\log_{10} 3$ |
| ii. | $\sqrt{12}$ | iv. | $\sqrt[3]{73}$ | vi. | $\text{sen}(15^\circ)$ |

- d. Observe la parte decimal de los siguientes números. Determine y argumente si son racionales o no.

- | | | |
|------|--------------|--|
| i. | 3,1392781... | Los decimales siguen la secuencia de las potencias de 3. |
| ii. | 4,1357911... | Los decimales siguen la secuencia de los números impares. |
| iii. | 0,494949... | Los decimales repiten los dígitos 4 y 9. |
| iv. | 7,3000000... | Los decimales, luego del 3, siguen una secuencia de ceros. |

- e. Con ayuda de la calculadora científica, determine la expresión en forma de fracción continua así como los primeros ocho convergentes para cada uno de los siguientes números.

- | | | | | | |
|-----|-----------------|------|----------------|-----|------------------------|
| i. | $\sqrt{17}$ | iii. | $\frac{3}{17}$ | v. | $\text{sen}(20^\circ)$ |
| ii. | $\frac{14}{11}$ | iv. | $\sqrt[3]{50}$ | vi. | $\frac{25}{31}$ |

- f. Con las convergentes halladas en el ejercicio anterior construya cuatro cajones que encierren el número dado. Indique el tamaño del cajón en cada caso.

- g. En el video: El universo matemático, Capítulos 2: *Historias de π* se muestra, mediante una animación, el proceso de encajonamiento que hemos descrito en esta actividad. Escriba los cajones empleados en cada uno de los sucesivos aumentos que hacen de la recta numérica e indique su tamaño. ¿Hasta dónde es posible llevar a cabo este proceso?

D. Anexo: Orden y Álgebra para números racionales e irracionales.

I.E.D. RAFAEL URIBE URIBE

GRADO UNDÉCIMO

ACTIVIDADES DE DESARROLLO, TERCERA PARTE

ORDEN Y ÁLGEBRA PARA NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

1. En la actividad anterior aprendimos a hallar “cajones” tan pequeños como se desee y que encierren cada vez con mayor precisión un número expresado por un decimal finito o infinito así como por una fracción continua. Vamos a mostrar la utilidad de dichos conceptos a la hora de *ordenar* y *operar* números racionales e irracionales.

Cuando decimos que los números racionales e irracionales están **totalmente ordenados** queremos decir que, al tomar dos cualesquiera de ellos, podemos afirmar cual es el menor de los dos, es decir, pueden compararse y esto puede llevarse a cabo con ayuda de la recta numérica o con la expresión decimal y en forma de fracción continua de los números. Antes de entrar en detalles acerca de la forma de realizar esta comparación, es conveniente describir primero ciertas propiedades relativas a dicho ordenamiento.

Los números racionales e irracionales pueden clasificarse en tres categorías, dependiendo de su posición en la resta numérica relativa al cero (0), a saber:

- Números positivos: Aquellos que se encuentran ubicados **a la derecha** del cero. En términos de su expresión decimal podemos decir que los números positivos tienen, al menos, una de sus cifras decimales distinta de cero además de no estar precedidos de signo alguno, por ejemplo: $5,44\overline{3}$ ó $0,00048$.
- Números negativos: Constan de todos los números que se ubican **a la izquierda** del cero. Su expresión decimal tiene, al menos, un dígito distinto de cero además de estar precedidos de un signo negativo, por ejemplo: $-8,12345\cdots$ ó $-0,0000032164$.
- Cero: 0.

Esta clasificación permite introducir las nociones de *menor que* y *mayor que* atendiendo o bien a la representación decimal de un número o también a la ubicación de aquel en la recta. Decimos entonces que un número a , racional o irracional, es *mayor que cero* ($a > 0$) si y solo si se ubica a la derecha de éste último; de manera similar un número b es *menor que cero* ($b < 0$) si y solo si se ubica a la izquierda de éste. Estas definiciones hacen necesarios los siguientes comentarios:

- Es consecuencia directa de ellas que un número es positivo si y solo si es mayor que cero y negativo si y solo si es menor que cero, esto es:
 - Números positivos: Racionales e irracionales mayores que cero.
 - Números negativos: Racionales e irracionales menores que cero.

- Cuando decimos, en términos físicos, que un objeto x se encuentra a la izquierda de un objeto y , estamos tomando a este último como referencia para ubicar a x . Los papeles de x e y pueden intercambiarse de modo que se ubique y con referencia al objeto x diciendo, de manera equivalente, que y se encuentra a la derecha de x . En conexión con lo expuesto inicialmente:

La afirmación $x < y$ es totalmente equivalente a $y > x$, esto es, si x es menor que y entonces y es mayor a x y recíprocamente.

- Si se desea afirmar que un número (racional o irracional) es *no positivo*, la clasificación introducida inicialmente implica que tal número puede ser negativo o cero sin especificar cuál de las dos se cumple. De manera similar, si un número es *no negativo* implica que tal número puede ser cero o positivo y, finalmente, cuando un número es *no nulo* entonces puede ser positivo o negativo. De manera simbólica:
 - a no es positivo: $a = 0$ ó $a < 0$, de manera condensada $a \leq 0$.
 - a no es negativo: $a = 0$ ó $a > 0$, de manera condensada $a \geq 0$.
 - a no es cero: $a > 0$ ó $a < 0$.

Habiendo analizado la conexión existente entre los conceptos *mayor que* y *menor que* así como su relación con los números positivos, negativos y el cero se mostrará ahora el método para comparar dos números racionales o irracionales tanto en sus expresiones en forma decimal, en forma de fracción continua y en forma de fracción, cuando sea posible.

Independientemente de la forma de representación empleada para comparar dos números, las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- El cero (0) es menor que cualquier número positivo.
- El cero (0) es mayor que cualquier número negativo.
- Si dos números tienen signos opuestos, aquel que es negativo es menor que el otro.

La comparación de dos números positivos de acuerdo a su representación se lleva a cabo de la siguiente manera:

- Si se tienen dos fracciones positivas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, fórmense los productos “cruzados” $a \cdot d$ y $b \cdot c$ y compárense con las reglas usuales para números naturales. Si el primer producto es el menor, entonces la primera fracción es la menor de las dos y recíprocamente. Por ejemplo:
 - Al comparar $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{9}$ se tiene que $2 \cdot 9 = 18$ es menor que $5 \cdot 4 = 20$, luego $\frac{2}{5}$ es el número menor y se escribe $\frac{2}{5} < \frac{4}{9}$.

- Con las fracciones $\frac{73}{24}$ y $\frac{5}{2}$ resulta que $73 \cdot 2 = 146$ es mayor que $24 \cdot 5 = 120$, por tanto $\frac{5}{2}$ es el número menor y se escribe $\frac{5}{2} < \frac{73}{24}$.

- Si ambos números están representados en forma decimal, las expansiones polinómicas de cada uno de ellos permiten distinguir, entre las cifras que ocupan **idéntica posición**, cual es el mayor de los dos números; esto es debido a que la adición de ese valor hace necesariamente mayor al número que lo contiene. Por ejemplo:

- Para los números 1,3582 y 1,3564, las expresiones polinómicas son las siguientes:

$$1 + \frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{2}{10^4} = 1,3582$$

$$1 + \frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{4}{10^4} = 1,3564$$

La comparación término a término entre los dígitos de igual valor posicional permite observar que el sumando en la primera expresión (señalado de color rojo) es mayor que en la segunda (señalado de color azul) y los términos posteriores a este último siempre serán menores a $\frac{10}{10^4} = \frac{1}{10^3}$, luego $1,3564 < 1,3582$

- Comparando los números 0,62111 y $0,62\hat{1} = 0,621111\dots$, las expansiones polinómicas son:

$$0 + \frac{6}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{0}{10^6} = 0,621110$$

$$0 + \frac{6}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^6} = 0,621111$$

Donde, al añadir ceros a la primera expresión decimal, se aprecia que la sexta cifra del primer número es menor, por tanto $0,62111 < 0,62\hat{1}$.

Debido a la extensión de las expansiones polinómicas involucradas, el ordenamiento se hace de manera más sencilla si se busca, de izquierda a derecha, la primera cifra en la que difieran las expresiones decimales. El número cuya representación decimal tiene la **menor** cifra en dicha posición es el menor de los dos. De ser necesario, pueden añadirse ceros con el propósito de igual la cantidad de cifras decimales

- Dadas dos fracciones continuas se busca (de izquierda a derecha) el primer cociente parcial en el que las expresiones difieran. Si este cociente ocupa una posición **impar**, la fracción continua que contenga el menor cociente será la menor de las dos mientras que si tal cociente ocupa una posición **par** la fracción continua que posea el menor cociente será mayor. Por ejemplo:

- Las fracciones continuas $[1; 2, 2, 4]$ y $[1; 2, 3, 5]$ difieren en el tercer cociente parcial, siendo menor en la primera fracción. Puesto que el lugar que ocupa dicho cociente es impar, la primera fracción es la menor de las dos de manera que $[1; 2, 2, 4] < [1; 2, 3, 5]$.
- En las fracciones $[4; 7, 8, 9, 10]$ y $[4; 7, 8, 10, 11]$ se observa que difieren en el cuarto cociente parcial, siendo menor en la primera fracción. Dado que el lugar que ocupa este cociente es par, la primera fracción continua es mayor a la primera y se escribe $[4; 7, 8, 9, 10] > [4; 7, 8, 10, 11]$.

Cuando se comparan dos números negativos, se aplican las mismas reglas sobre los números que resultan de suprimir los signos, es decir, con números positivos. La comparación pedida se obtiene **invirtiendo** el sentido del símbolo de orden ($<$, $>$) en el resultado final. Esto como consecuencia del hecho que los números negativos pueden obtenerse, desde un punto de vista geométrico, *reflejando* los números positivos respecto al cero, obteniendo entonces una inversión derecha-izquierda (similar a la de un espejo) con el consiguiente cambio en el sentido de los símbolos de orden. Por ejemplo:

- Para comparar $-\frac{13}{9}$ y $-\frac{23}{16}$, se comparan primero los números positivos $\frac{13}{9}$ y $\frac{23}{16}$ lo que resulta en $13 \cdot 16 = 208 > 207 = 9 \cdot 23$, así $\frac{13}{9} > \frac{23}{16}$. La comparación entre los números negativos iniciales resulta finalmente en $-\frac{13}{9} < -\frac{23}{16}$.
- Para comparar los números $-44,372215$ y $-43,372216$, se comparan primero los números $44,372215$ y $43,372216$ lo que resulta en $44,372215 > 43,372216$ dado que la cifra decimal en la que difieren es mayor en el primer decimal. De este modo, para los números decimales iniciales, se tiene $-44,372215 < -43,372216$.

Un comentario final. Si se desean comparar dos números con representaciones distintas, por ejemplo: Un decimal y una fracción continua, una fracción y un decimal o una fracción y una fracción continua pueden emplearse las estrategias descritas en las actividades de desarrollo 1 y 2 con el fin de convertir una de tales representaciones en la otra de modo que exista homogeneidad en las mismas y así aplicar las estrategias expuestas a lo largo de esta actividad.

EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

- a. Compare cada una de las siguientes parejas de números mediante las estrategias descritas en esta actividad.

i. $-0,45\hat{6}; -0,456\hat{5}$

vi. $0; -2,718$

ii. $\pi; -\sqrt{3}$

vii. $12,\hat{4}; -12,\hat{4}$

iii. $-\frac{14}{11}; \sqrt{27}$

viii. $[0; 2, 3, 4]; [0; 2, 2, 4]$

iv. $-3,14159; -\frac{355}{113}$

ix. $\frac{13}{8}; [1; 2, 3, 4]$

v. $0; \frac{123}{97}$

x. $\frac{22}{7}; \frac{355}{113}$

2. Recordemos la conclusión a la que se llegó en la Actividad de Desarrollo 2, esto es, si tenemos una secuencia de cajones de tamaño decreciente y cada uno contenido en el anterior, estos terminarán por contraerse en un número (racional o irracional) único. Que esto es intuitivamente evidente puede verse al construir dichos cajones, por ejemplo, para el número $\sqrt{2}$ y empleando aumentos sucesivos para efectos de representación en la recta (recuérdese el ejemplo del carpintero). A partir de ahora, a los cajones los denominaremos **intervalos**, a su tamaño lo llamaremos **longitud**, el inicio y el final del cajón serán llamados **aproximaciones por defecto y por exceso**, respectivamente, y el proceso de encajonamiento tendrá por nombre **anidamiento**. De este modo, se tiene para $\sqrt{2}$:

Intervalo	Aprox. Defecto	Aprox. Exceso	Longitud
1	1	2	1
2	1,4	1,5	0,1
3	1,41	1,42	0,01
4	1,414	1,415	0,001
5	1,4142	1,4143	0,0001

Si comparamos las aproximaciones por defecto, vemos que ellas nunca disminuyen mientras que las aproximaciones por exceso nunca aumentan; geoméricamente esto implica que los extremos de los intervalos se acercan entre sí, lo que reduce su longitud y explicando de este modo el comportamiento de la última columna.

Es importante, para los propósitos que se persiguen, saber anidar un número dado y representar dicho proceso en una tabla similar a la anterior y para ello es de utilidad la calculadora científica o la hoja de cálculo; ilustraremos este punto anidando el número $\sqrt[3]{30}$ en cinco intervalos decimales. Puesto que $\sqrt[3]{30}$ es el número cuyo cubo es igual a 30, la idea es encontrar aproximaciones por defecto y por exceso empleando esta definición. Puesto que $3^3 = 27 < 30$ y $30 < 64 = 4^3$, el primer intervalo del proceso de anidamiento es $[3; 4]$, de longitud igual a $4 - 3 = 1$.

Ahora, dividiendo el intervalo $[3; 4]$ en diez partes iguales, dadas por $3,0; 3,1; 3,2; \dots; 3,9; 4,0$, se buscan entre estas expresiones decimales aquellas cuyo cubo se aproxime lo más cerca posible a 30 tanto por defecto como por exceso, así:

$3,0^3 = 27$	(Menor)
$3,1^3 = 29,791$	(Menor aunque más cercano)
$3,2^3 = 32,768$	(Mayor aunque más cercano)
$3,3^3 = 35,937$	(Mayor)

De este modo, el segundo intervalo es $[3,1; 3,2]$ cuya longitud es igual a $3,2 - 3,1 = 0,1$.

Subdividiendo, de nuevo, el anterior intervalo en diez partes iguales $3,10; 3,11; \dots; 3,19; 3,20$ y seleccionado de entre estas subdivisiones aquellas cuyo cubo sea lo más cercano posible a 30, se genera el tercer intervalo $[3,10; 3,11]$ de longitud igual a $3,11 - 3,10 = 0,01$. Un procedimiento similar genera los intervalos $[3,107; 3,108]$ y $[3,1072; 3,1073]$, de longitudes 0,001 y 0,0001, respectivamente. Los resultados del anidamiento se resumen en la siguiente tabla:

Intervalo	Aprox. Defecto	Aprox. Exceso	Longitud
1	3	4	1
2	3,1	3,2	0,1
3	3,10	3,11	0,01
4	3,107	3,108	0,001
5	3,1072	3,1073	0,0001

Es importante resaltar que este anidamiento fue realizado a partir de la definición de raíz cúbica. Dependiendo del número que se desea anidar, es necesario recurrir a distintas definiciones:

- Para cualquier raíz $\sqrt[n]{a}$, con n natural y a positivo, el proceso de anidamiento puede hacerse hallando los valores de x^n que se aproximan por defecto y por exceso al valor de a , por ejemplo: x^5 para $\sqrt[5]{16}$, x^{10} para $\sqrt[10]{2000}$, etc.
- Los intervalos anidados para $\log_n a$, con a y n positivos, requieren determinar los valores de x para los que n^x se aproxima, por defecto y por exceso, al valor de a , por ejemplo: 2^x para $\log_2 9$, 5^x para $\log_5 123$, etc.
- Pueden construirse intervalos anidados para el número π , el número e de Euler y otras constantes matemáticas recurriendo a su representación en forma de fracción continua, recordando lo aprendido en la Actividad de Desarrollo 2.

EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

- Construya (con ayuda de la calculadora) cinco intervalos anidados indicando las aproximaciones por defecto y por exceso así como la longitud de cada intervalo en una tabla similar a las mostradas en esta sección, para los siguientes números:
 - $\log_2 9$: Emplee la definición de logaritmo y halle los valores de x que aproximan 2^x , por defecto y por exceso, a 9.

- ii. $\sqrt[7]{500}$: Determine los valores de x que aproximan x^7 , por defecto y por exceso, a 500.
- iii. π : Emplee las ocho primeras convergentes de la fracción continua infinita $[3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \dots]$.
- iv. e : Emplee las ocho primeras convergentes de la fracción continua infinita $[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, \dots]$.
- v. $\frac{7}{6}$: Determine la expresión decimal de esta fracción para construir los intervalos.
3. Vamos ahora a emplear los intervalos que se construyeron en la sección anterior para operar números, sean estos racionales o irracionales. Supongamos, por un momento, que disponemos de las expresiones decimales *completas* para $\sqrt{2}$ y π .

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,414213 \dots \\ \pi &= 3,141592 \dots\end{aligned}$$

Ahora, deseamos obtener el valor de $\sqrt{2} + \pi$. ¿Podríamos proceder de la forma aprendida en nuestra enseñanza básica?

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1,414213 \dots \\ \pi &= 3,141592 \dots \\ \hline &-----\end{aligned}$$

Comienzan a surgir ciertos interrogantes relacionados con el proceso de adición: ¿Dónde comenzar?, ¿Es necesario truncar los sumandos?, ¿Hasta dónde?, ¿Cometo errores importantes al hacerlo?, ¿Pueden ser cuantificados? Estas preguntas también son comunes a cualquier operación de sustracción, multiplicación o división.

Existen diversas “soluciones” al problema de definir exactamente lo que se entiende por $\sqrt{2} + \pi$. Unas de ellas, de carácter algebraico, es considerar la expresión anterior como puramente *simbólica*, es decir, como el nombre (propriadamente dicho) para un número cuyo valor exacto desconocemos pero lo sabemos concreto, más que como una instrucción para realizar una operación. En otro ámbito, más físico que el anterior, se opta por tomar la calculadora científica, digitar $\sqrt{2} + \pi$ y reportar un valor sin prestar atención al error cometido debido a la finitud de cifras que emplea la calculadora y, en ocasiones, truncando el resultado sin atender a alguna regla clara sobre ello. El propósito de esta sección es definir dichas operaciones fundamentales entre números racionales y/o irracionales y estimar el error cometido en ellas mediante el uso de los intervalos de anidamiento.

Es cierto que en algunos casos es posible operar directamente los números sin recurrir a aproximaciones. Si se operan racionales, bien sea en su forma común, o como decimales finitos o infinitos periódicos o bien como fracciones continuas finitas, pueden emplearse reglas básicas aprendidas en años anteriores de formación. El punto crucial de este comentario es mostrar la posibilidad de definir un procedimiento mucho más general que abarque expresiones racionales e irracionales, el cual se apoya en la conclusión final de la Actividad de Desarrollo 2, que asumimos como geoméricamente cierta.

Consideremos entonces, a manera de ilustración, los primeros cinco intervalos de anidamiento para $\sqrt{2}$ y π , contruidos a partir de su representación decimal e indicando para cada uno de ellos su longitud.

$\sqrt{2}$			
Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud
1	1	2	1
2	1,4	1,5	0,1
3	1,41	1,42	0,01
4	1,414	1,415	0,001
5	1,4142	1,4143	0,0001

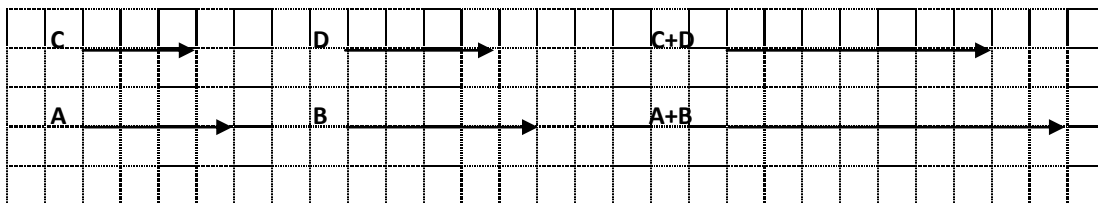
π			
Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud
1	3	4	1
2	3,1	3,2	0,1
3	3,14	3,15	0,01
4	3,141	3,142	0,001
5	3,1415	3,1416	0,0001

Tomemos, por ejemplo, el segundo intervalo para cada uno de los números $\sqrt{2}$ y π :

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$3,1 < \pi < 3,2$$

Desde las aproximaciones por defecto podemos afirmar que, aunque no conozcamos con precisión **todas** las cifras decimales de ambos sumandos, si sabemos que su suma **siempre será mayor** a $1,4 + 3,1$. Geométricamente, esto implica que si dos segmentos A y B son mayores en longitud a otros dos segmentos C y D , respectivamente, el segmento resultante de unir A con B será siempre mayor a aquel resultante de unir C con D .



De manera similar, desde las aproximaciones por exceso, podemos afirmar que el valor de $\sqrt{2} + \pi$ **siempre será menor** a $1,5 + 3,2$. ¿Qué hemos conseguido con esto? Hemos podido, y es aquí donde está el corazón y la esencia de esta sección, encontrar cotas inferior y superior para el valor de $\sqrt{2} + \pi$ que dependen **exclusivamente** de aquellas para los sumandos. Esto trae las siguientes interesantes y útiles consecuencias:

- Las operaciones se realizan exclusivamente con expresiones racionales (decimales finitos).

- Aunque fue empleado el segundo intervalo, las observaciones realizadas son válidas para cualquiera de los intervalos de anidación.
- Este análisis es independiente de la forma en que se construyan los intervalos, que pueden ser a partir de unas expresiones decimales o con las convergentes de una fracción continua.

De esta manera, pueden operarse los intervalos restantes en la forma descrita y así obtener una anidación para el número $\sqrt{2} + \pi$, como se aprecia en la siguiente tabla:

$\sqrt{2} + \pi$			
Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud
1	4	6	2
2	4,5	4,7	0,2
3	4,55	4,57	0,02
4	4,555	4,557	0,002
5	4,5557	4,5559	0,0002

Este procedimiento constituye una anidación del número $\sqrt{2} + \pi$ por las siguientes razones:

- Los resultados de las operaciones necesarias para obtener las aproximaciones por defecto no disminuyen así como aquellas por exceso no aumentan. Esto se comprueba observando que, a medida que las aproximaciones por defecto para cada sumando se hacen mayores, sus correspondientes sumas se hacen también mayores. Un comentario similar aplica para las aproximaciones por exceso.
- La longitud de un intervalo es una medida de la incertidumbre en el valor exacto del número luego es intuitivamente claro que a medida que reducimos la incertidumbre de los sumandos también se reduce la incertidumbre del resultado de la operación. Siendo un poco más precisos, puesto que la longitud de un intervalo se define como la diferencia entre las aproximaciones por exceso y por defecto (para ese intervalo) y dado que las primeras decrecen mientras que las segundas aumentan, el efecto neto de la sustracción es reducir el valor de la longitud y, por tanto, de la incertidumbre.

Con estas aclaraciones, podemos decir que la suma $\sqrt{2} + \pi$, realizada desde los intervalos de anidamiento para cada sumando, **define** un número concreto de la misma manera en que dichos intervalos definen a $\sqrt{2}$ y π . Es precisamente aquí donde empleamos la conclusión final de la Actividad de Desarrollo 2 en la siguiente forma: ¿Qué es $\sqrt{2} + \pi$? Es el número común a todos los intervalos anidados que se obtienen a partir de la adición de aquellos para $\sqrt{2}$ y π .

La discusión anterior es completamente válida en el caso del producto y se muestran a continuación los primeros cinco intervalos para $\sqrt{2} \cdot \pi$ obtenidos a partir del producto de los intervalos para cada factor, respetando la cantidad de cifras decimales obtenidas en cada uno de los productos:

$\sqrt{2} \cdot \pi$			
Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud
1	3	8	5
2	4,34	4,80	0,46
3	4,4274	4,4730	0,0456
4	4,441374	4,445930	0,004556
5	4,44270930	4,44316488	0,00045558

Para efectos de sustracción y división emplearemos una ruta algebraica. Puesto que estamos operando con expresiones racionales, la sustracción $a - b$ se define a partir de la *suma* de a y $(-b)$, siendo este último el *opuesto* de b ; de manera similar el cociente $\frac{a}{b}$ (con $b \neq 0$) se define a partir del *producto* entre a y $\frac{1}{b}$, donde este último es el *recíproco* de b . Sin entrar en demasiados detalles, el opuesto de un número b es el obtenido al cambiar su signo (y por ende, su ubicación relativa al cero en la recta numérica), esto trae consigo, necesariamente, una inversión entre las aproximaciones por defecto y por exceso que hemos estado trabajando tal y como lo esquematizan las siguientes tablas para $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$:

$\sqrt{2}$			
Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud
1	1	2	1
2	1,4	1,5	0,1
3	1,41	1,42	0,01
4	1,414	1,415	0,001
5	1,4142	1,4143	0,0001

$-\sqrt{2}$			
Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud
1	-2	-1	1
2	-1,5	-1,4	0,1
3	-1,42	-1,41	0,01
4	-1,415	-1,414	0,001
5	-1,4143	-1,4142	0,0001

De este modo, para la sustracción $\pi - \sqrt{2}$, los intervalos de anidamiento y sus respectivas longitudes son los siguientes:

$\pi - \sqrt{2}$			
Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud
1	1	3	2
2	1,6	1,8	0,2
3	1,72	1,74	0,02
4	1,726	1,728	0,002
5	1,7272	1,7274	0,0002

El opuesto de un número, así definido, permite construir los intervalos de anidamiento para operaciones del tipo $(-a) \cdot b$, $a \cdot (-b)$ ó $(-a) \cdot (-b)$, simplemente determinando los opuestos de los factores que se requieran y operando en la forma ya descrita.

Para la división, surgen ciertos problemas en el momento de hallar el recíproco de b a partir de sus intervalos de anidamiento, especialmente cuando dicho número es cercano a cero. En principio, puesto que las aproximaciones por defecto y por exceso del número b son racionales (decimales finitos), pueden determinarse los recíprocos (de la forma usual con racionales) de cada una de ellas y generar un anidamiento para $\frac{1}{b}$ invirtiendo dichas aproximaciones en forma análoga a como se hizo con el opuesto $(-b)$. Sin embargo, este procedimiento **no** es aplicable cuando al menos una de las aproximaciones por defecto o por exceso es igual a cero.

Ahora, con el ánimo de completar esta exposición acerca de las operaciones entre números racionales y/ó racionales definidos a partir de los intervalos de anidamiento, dejaremos de lado estos casos especiales y nos centraremos en el cálculo de recíprocos para intervalos de anidación que carecen de aproximaciones por defecto o por exceso iguales a cero. Tal y como se mencionó en el párrafo anterior, el anidamiento requerido para $\frac{1}{b}$ exige calcular las expresiones *fraccionarias* de las aproximaciones, hallar su respectivo recíproco¹¹ e invertir las de forma similar a como se hizo con el opuesto $(-b)$. Por ejemplo, a partir del anidamiento mostrado para π , las expresiones fraccionarias son las siguientes:

π			
Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud
1	3/1	4/1	1
2	31/10	32/10	0,1
3	314/100	315/100	0,01
4	3141/1000	3142/1000	0,001
5	31415/10000	31416/10000	0,0001

De este modo, los intervalos de anidamiento para el número $\frac{1}{\pi}$ son los siguientes:

$1/\pi$			
Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud
1	1/4	1/3	1/(3 · 4)
2	10/32	10/31	10/(31 · 32)
3	100/315	100/314	100/(314 · 315)
4	1000/3142	1000/3141	1000/(3141 · 3142)
5	10000/31416	10000/31415	10000/(31415 · 31416)

¹¹ El recíproco de una fracción $\frac{a}{b}$, con $a \neq 0$, es la fracción $\frac{b}{a}$.

Y es posible ahora calcular los intervalos de anidamiento para el número $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ efectuando el producto entre aquellos para $\sqrt{2}$ y $\frac{1}{\pi}$ análogamente a como se calcularon para $\sqrt{2} \cdot \pi$. Debido a la extensión los cálculos necesarios para obtener anidamientos para la suma, el producto, la sustracción y la división de dos números, es de gran utilidad la hoja de cálculo. La siguiente figura muestra todos los resultados obtenidos en esta sección, en donde se indican (en rojo) las longitudes de los intervalos así como el anidamiento para los opuestos y recíprocos (color azul).

$\sqrt{2}$				π				$-\sqrt{2}$			
Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud	Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud	Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud
1	1	2	1	1	3	4	1	1	-2	-1	1
2	1,4	1,5	0,1	2	3,1	3,2	0,1	2	-1,5	-1,4	0,1
3	1,41	1,42	0,01	3	3,14	3,15	0,01	3	-1,42	-1,41	0,01
4	1,414	1,415	0,001	4	3,141	3,142	0,001	4	-1,415	-1,414	0,001
5	1,4142	1,4143	0,0001	5	3,1415	3,1416	0,0001	5	-1,4143	-1,4142	0,0001

$\sqrt{2} + \pi$				$\sqrt{2} \cdot \pi$				$1/\pi$			
Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud	Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud	Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud
1	4	6	2	1	3	8	5	1	0,25	0,3333333	0,0833333
2	4,5	4,7	0,2	2	4,34	4,80	0,46	2	0,3125	0,3225806	0,010806
3	4,55	4,57	0,02	3	4,4274	4,4730	0,0456	3	0,3174603	0,3184713	0,001011
4	4,555	4,557	0,002	4	4,441374	4,445930	0,004556	4	0,3182686	0,3183699	0,0001013
5	4,5557	4,5559	0,0002	5	4,44270930	4,44316488	0,00045558	5	0,3183091	0,3183193	0,00001013

$\pi - \sqrt{2}$				$\sqrt{2}/\pi$			
Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud	Intervalo	Defecto	Exceso	Longitud
1	1	3	2	1	0,25	0,6666667	0,4166667
2	1,6	1,8	0,2	2	0,4375	0,483871	0,046371
3	1,72	1,74	0,02	3	0,447619	0,4522293	0,0046103
4	1,726	1,728	0,002	4	0,4500318	0,4504935	0,0004616
5	1,7272	1,7274	0,0002	5	0,4501528	0,4501989	0,00004616

Decíamos que la longitud de cada intervalo es una medida de la incertidumbre acerca del valor real del número que se está anidando y esta interpretación es útil en el momento de *cuantificar* el error cometido al operar con aproximaciones por defecto y por exceso. Si a y b designan tales aproximaciones al número x , nuestra definición de anidamiento nos permite establecer lo siguiente:

$$a < x < b$$

Es decir, x se encuentra entre a y b . Por ejemplo, en el segundo intervalo de anidación obtenido para $\sqrt{2} + \pi$, tenemos:

$$4,5 < \sqrt{2} + \pi < 4,7$$

Con longitud igual a 0,2. Puesto que $\sqrt{2} + \pi$ se encuentra entre 4,5 y 4,7, podemos asegurar que al emplear las aproximaciones:

$$\sqrt{2} + \pi \sim 4,5$$

$$\sqrt{2} + \pi \sim 4,7$$

El error que estamos cometiendo *no puede ser mayor* a 0,2 ya que, en el primer caso, $\sqrt{2} + \pi$ tendría que estar más alejado de 4,5 que el propio 4,7 y esto solo sería posible si $\sqrt{2} + \pi$ fuera menor a 4,5 o mayor a 4,7 lo cual es absurdo ya que el intervalo fue construido de manera que $\sqrt{2} + \pi$ se ubicara precisamente entre esos valores; un análisis similar se aplica en el caso en que $\sqrt{2} + \pi$ estuviera más alejado de 4,7 que el propio 4,5. Se concluye entonces que la longitud de un intervalo de anidamiento nos brinda una medida del *máximo* error cometido al aproximar un número dado con uno de los extremos del intervalo.

Puesto que las longitudes de los intervalos decrecen a medida que avanza el proceso de anidamiento, es consecuencia de lo anterior que el uso de las aproximaciones por defecto y por exceso de un número dado se va haciendo más precisa y esto nos permite decidir de antemano con que grado de error queremos expresar tal número. Por ejemplo, si deseamos aproximar el número $\sqrt{2} \cdot \pi$ con un error menor a una centésima (0,01), podemos emplear el cuarto intervalo de anidación ya que su longitud (0,004556) es menor al error máximo permitido, de esta manera:

$$\sqrt{2} \cdot \pi \sim 4,441374$$

$$\sqrt{2} \cdot \pi \sim 4,445930$$

Ahora bien, observando los dígitos decimales posteriores a la centésima, podemos garantizar que el valor de $\sqrt{2} \cdot \pi$ es igual a 4,44 con error menor a una centésima.

Otro ejemplo, si deseamos expresar $\sqrt[3]{30}$ con error menor a una milésima observamos, a partir de la tabla de anidación construida con anterioridad, que la longitud del quinto intervalo es menor al error permitido, por tanto:

$$\sqrt[3]{30} \sim 3,1072$$

$$\sqrt[3]{30} \sim 3,1073$$

Las cifras decimales posteriores a la milésima permiten afirmar que $\sqrt[3]{30} = 3,107$, con error menor a una milésima.

EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

- c. A partir de los intervalos de anidamiento construidos en el literal b. de esta Actividad, determine los intervalos de anidamiento que expresan el número resultante de las operaciones descritas a continuación. Puede apoyarse en la hoja de cálculo con el fin de reducir el volumen de cálculos.

- | | | | |
|------|----------------------------|-------|--------------------------|
| i. | $\log_2 9 + \sqrt[7]{500}$ | v. | $\pi \cdot \frac{7}{6}$ |
| ii. | $\sqrt[7]{500} - e$ | vi. | $\pi \div \sqrt[7]{500}$ |
| iii. | $\log_2 9 \cdot \pi$ | vii. | $e + \frac{7}{6}$ |
| iv. | $\frac{7}{6} \div e$ | viii. | $\pi - \log_2 9$ |

4. En esta sección discutiremos ciertas propiedades relacionadas con la “estructura” o forma de los números racionales e irracionales y que no son tan evidentes. Para ello, haremos uso de las representaciones en forma de fracción común y en forma decimal, así como de ciertos argumentos geométricos para justificar algunos pasos.

Cuando aprendimos fracciones y con ellas su suma en nuestros cursos iniciales de Matemática, se nos advertía que no podíamos añadir numeradores y denominadores entre sí. A manera de ejemplo, un procedimiento *incorrecto* para sumar las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ es el siguiente:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{4}{6}$$

¿Por qué dicho procedimiento es incorrecto? En el caso anterior, la adición de números positivos debe producir un resultado mayor que cualquiera de los sumandos; si comparamos la fracción $\frac{4}{6}$ con $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ obtenemos:

- $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{6}$: Aplicando los métodos vistos en la sección 1 de esta actividad, se tiene:

$$1 \cdot 6 = 6 < 8 = 2 \cdot 4$$

De este modo $\frac{1}{2} < \frac{4}{6}$

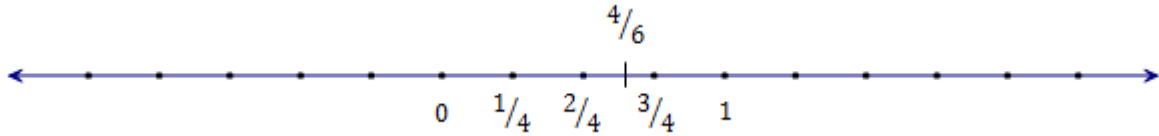
- $\frac{4}{6}$ y $\frac{3}{4}$: De manera análoga a lo anterior, se tiene:

$$4 \cdot 4 = 16 < 18 = 6 \cdot 3$$

De este modo $\frac{4}{6} < \frac{3}{4}$, y junto con la desigualdad anterior llegamos a $\frac{1}{2} < \frac{4}{6} < \frac{3}{4}$.

Así que $\frac{4}{6}$ no es mayor tanto a $\frac{1}{2}$ como a $\frac{3}{4}$ sino que se ubica **entre ambos**. A primera vista, el hecho que $\frac{4}{6}$ se ubique entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ no tiene nada de especial sin embargo, y es esta precisamente una de las propiedades a las que queremos llegar, se ha podido **construir** un número racional entre otros dos racionales dados inicialmente; esto significa (geoméricamente y con ayuda de la recta numérica)

que se ha encontrado un punto *racional* en ella y ubicado entre otros dos conocidos inicialmente.



Surgen naturalmente varias interrogantes al respecto:

- ¿Es éste el único racional entre los dos dados?
- ¿Cuándo o dónde finaliza este proceso de “intercalación”?
- ¿Es válido también para los números irracionales?

Para responder la primera y segunda preguntas, representemos en una tabla la situación planteada inicialmente:

$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{4}$
---------------	---------------	---------------

Si repetimos el proceso anterior de intercalación entre la primera y segunda fracciones así como entre la segunda y la tercera, tenemos (las comparaciones se realizan de manera inmediata):

$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{4}$
---------------	---------------	---------------	----------------	---------------

Y si continuamos empleando cada dos fracciones consecutivas a lo largo del esquema anterior, se tiene:

$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{10}{14}$	$\frac{3}{4}$
---------------	----------------	---------------	----------------	---------------	-----------------	----------------	-----------------	---------------

Así vemos que a partir de las dos fracciones dadas inicialmente podemos construir otras entre ellas indefinidamente, generando tantas como queramos.

Antes de responder la tercera pregunta, vamos con otro ejemplo en un ámbito más cotidiano. Supongamos que a un niño se le envía a comprar la carne para preparar el almuerzo. La mamá le advierte que como son pocas personas no pida una libra o más pero tampoco tres cuartos o menos, ya que en tal caso no alcanzaría. ¿Cuánta carne debe comprar el niño? Lo expuesto anteriormente permite razonar de la siguiente manera:

- Si el niño sabe de fracciones (cosa que se da por supuesta) entonces representa las cantidades de carne como $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{4}$. Mediante el procedimiento mostrado, deduce entonces que debe pedir $\frac{3+4}{4+4} = \frac{7}{8}$ de libra de carne.
- Si el niño recuerda que todo número entero a puede representarse como una fracción de la forma $\frac{a}{1}$, entonces las cantidades de carne son $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{1}$, con lo que puede pedir $\frac{3+1}{4+1} = \frac{4}{5}$ de libra de carne.

Esta propiedad de intercalación se conoce con el nombre de **DENSIDAD** y lo que acabamos de mostrar mediante ejemplos es el hecho que los racionales son densos en sí mismos, es decir, que entre dos racionales cualquiera podemos hallar otro y el proceso de construcción, tal y como fue mostrado, puede realizarse indefinidamente. En términos más formales, si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son racionales, con $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, la fracción $\frac{a+b}{b+d}$ está entre ellas dos.

Esta no es la única manera de encontrar un racional entre otros dos dados. Si recurrimos a las expresiones decimales en vez de la notación fraccionaria, podemos “jugar” con las cifras decimales y hallar un racional entre los dos recordando que aquellos tienen expresiones decimales finitas o infinitas periódicas. Por ejemplo, con los racionales $0,6\overline{56} = 0,6565656\dots$ y $0,\widehat{6} = 0,6666666\dots$ observamos que difieren en la segunda cifra decimal, 5 en el primer caso y 6 en el segundo. Puesto que no hay un entero comprendido entre 5 y 6, tomamos ahora dos cifras decimales (56 en el primer caso y 66 en el segundo) y escogemos un entero entre estas dos, por ejemplo 60, de este modo construimos el número 0,660, el cual es racional (decimal finito) menor a $0,6666666\dots$ y mayor a $0,6565656\dots$.

Otro ejemplo adicional: Con los racionales $147,98\overline{73} = 147,987373\dots$ y $\frac{14651}{99}$ podemos transformar la expresión decimal a un racional equivalente (e intercalar de la forma mostrada al inicio de esta sección) o viceversa; siguiendo este último camino, vemos que $\frac{14651}{99} = 147,\widehat{98} = 147,989898\dots$ difiere del primer racional en la tercera cifra decimal, 7 en el primer caso y 9 en el segundo, así que el entero 8 (ubicado entre 7 y 9) permite construir el número 147,988, que es un racional comprendido entre ambos.

Por último, ¿Qué sucede si se desea intercalar un número racional entre $0,\widehat{9} = 0,9999\dots$ y 1? Dado que la adición de cifras decimales iguales a cero no altera el valor del número expresado por tal decimal, intentemos entonces encontrar un racional entre $0,9999\dots$ y $1,0000\dots$. Vemos que difieren en el primer dígito de su expresión decimal (0 en el primer caso y 1 en el segundo) y dado que no existe un entero comprendido entre ellos, tomemos otro dígito decimal para ambos números, esto es, 09 para el primero y 10 para el segundo; inmediatamente observamos que resulta imposible encontrar un entero comprendido entre ellos y al vernos obligados a tomar más decimales encontramos la siguiente situación:

- Con 3 cifras decimales: No hay un entero comprendido entre 0,99 y 1,00.
- Con 4 cifras decimales: No hay un entero comprendido entre 0,999 y 1,000.
- Con 5 cifras decimales: No hay un entero comprendido entre 0,9999 y 1,0000.

A medida que aumentamos el número de cifras decimales, observamos que en cada paso resultan insuficientes para intercalar un entero entre ellas. ¿Qué hacemos entonces? Esta imposibilidad de intercalar un racional entre $0,9\hat{9}$ y 1 nos obliga a concluir que ambos son **el mismo número** ya que, en caso contrario, su distinta ubicación en la recta numérica haría posible la intercalación de un racional, así sea de un modo gráfico. Este curioso comportamiento es típico de todos los racionales cuya expresión decimal tenga a 9 como bloque periódico, por ejemplo:

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| • $0,0\hat{9}$ | • $-31,1\hat{9}$ | • $-0,80\hat{9}$ |
| • $15,75\hat{9}$ | • $7459,\hat{9}$ | • $-8,76\hat{9}$ |

Lo dicho en el párrafo anterior nos permite afirmar entonces que estos decimales son respectivamente iguales a:

- | | | |
|---------|---------|---------|
| • 0,1 | • -31,2 | • -0,81 |
| • 15,76 | • 7460 | • -8,77 |

La tercera interrogante es algo más compleja ya que pueden darse tres interpretaciones distintas de aquella, a saber:

- Dados dos **racionales** ¿Es posible hallar un **irracional** entre ellos?
- Dados dos **irracionales** ¿Es posible hallar un **racional** entre ellos?
- Dados dos **irracionales** ¿Es posible hallar un **irracional** entre ellos?

Estas tres preguntas pueden responderse afirmativamente si se recuerda lo que se mencionó en la sección 1 de la Actividad de Desarrollo 2, que se enuncia nuevamente:

*Un número **no** es racional si y solo si su expresión decimal es infinita no periódica o su expresión en forma de fracción continua es infinita.*

Así, podemos de nuevo “jugar” con las expresiones decimales y encontrar tantos racionales o irracionales como queramos entre dos números dados, sean estos racionales o irracionales. Por ejemplo:

- Para hallar un número irracional entre los racionales $0,6\overline{56} = 0,65656\dots$ y $0,\hat{6} = 0,66666\dots$ podemos intercalar una secuencia numérica **no repetitiva** comprendida entre las cifras decimales donde difieren los racionales dados (56 y 66). Por ejemplo, empleando la secuencia de números naturales 1, 2, 3, 4, \dots construimos el número $0,661234\dots$ el cual es mayor a $0,6\overline{56}$ (para la segunda cifra decimal: $5 < 6$) y menor a $0,\hat{6}$ (para la tercera cifra decimal: $1 < 6$).

Otro irracional se obtendría empleando la secuencia de números primos 2,3,5,7,... obteniendo el irracional 0,662357...

- Ahora se ubicará un número racional (dado por un decimal finito o infinito periódico) entre los irracionales $\sqrt{10} = 3,162277\dots$ y $\pi = 3,141592\dots$. Dado que difieren en la segunda cifra decimal (4 para π y 6 para $\sqrt{10}$), el racional dado por la expresión 3,15 (cuya segunda cifra decimal se ubica entre 4 y 6) está ubicado entre los dos números dados. También el racional $3,1\bar{5} = 3,15555\dots$ sirve para tal propósito.
- Con los irracionales 2,36912..., en donde los decimales siguen la secuencia de los múltiplos positivos de 3, y el número e de Euler 2,71828..., la diferencia en la primera cifra decimal (3 en el primer número y 7 en el segundo) permite construir el irracional 2,481216... en el que las cifras decimales siguen la secuencia de los múltiplos positivos de 4. El irracional 2,431415..., en donde las cifras decimales constan de un 4 seguido de la expresión decimal de π (que se sabe **no** periódica) también sirve para tal propósito.

Estos ejemplos muestran claramente que no solo los racionales son densos en sí mismos sino que también los irracionales son densos en los racionales (primer ejemplo), los racionales son densos en los irracionales (segundo ejemplo) y los irracionales son densos en sí mismos (tercer ejemplo anterior). Una demostración rigurosa de estos hechos está más allá del alcance de esta Actividad por lo que resumiremos a continuación y sin demostración las cuatro densidades obtenidas hasta el momento:

- Entre dos racionales cualquiera, **siempre** existe otro racional (Densidad de los racionales en los racionales).
- Entre dos racionales cualquiera, **siempre** existe otro irracional (Densidad de los irracionales en los racionales).
- Entre dos irracionales cualquiera, **siempre** existe otro racional (Densidad de los racionales en los irracionales).
- Entre dos irracionales cualquiera, **siempre** existe otro irracional (Densidad de los irracionales en los irracionales).

Es importante dejar en claro lo siguiente: A pesar que la construcción de un número (racional o irracional) entre otros dos dados (racionales o irracionales) se hizo mediante una manipulación ingeniosa de las cifras decimales, las cuatro densidades mostradas anteriormente son más que un simple juego de números, revelan una característica muy profunda de los números racionales e irracionales, a saber:

Cualquier segmento de la recta numérica, de extremos racionales o irracionales, contiene infinidad de números de las dos clases.

EJERCICIOS DE AFIANZAMIENTO

d. Para cada una de las parejas de números enunciadas a continuación, encuentre dos números racionales y dos irracionales entre ellos. Recuerde las secuencias sugeridas en la Actividad de Desarrollo 2 para la construcción de irracionales.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| i. $\pi ; \frac{22}{7}$ | vii. $\frac{27}{10} ; e$ |
| ii. $\frac{41}{29} ; \sqrt{2}$ | viii. $\phi ; \pi$ |
| iii. $1 ; 2$ | ix. $\sqrt{3} ; \sqrt{5}$ |
| iv. $0 ; 0,001$ | x. $1000 ; 1001$ |
| v. $4 ; 5$ | xi. $0, \hat{9} ; \frac{100}{99}$ |
| vi. $\frac{8}{5} ; \frac{13}{8}$ | xii. $3,5\hat{9} ; \sqrt{13}$ |

e. En Matemática existe un conjunto de fracciones denominadas *Fracciones de Farey*, de importancia en estudios avanzados. Dicho conjunto se obtiene intercalando, sucesivamente y de la forma mostrada al inicio de esta sección, fracciones entre $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$. Por ejemplo:

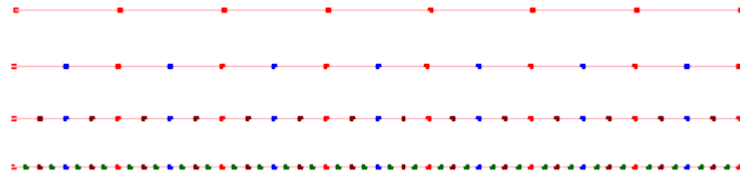
$\frac{0}{1}$						$\frac{1}{1}$		
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{1}$		
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{1}$		
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$		
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

Encuentre las fracciones de la séptima y novena filas.

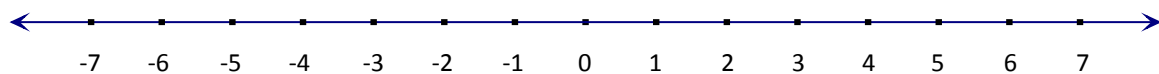
Para ilustrar la última de las propiedades que caracterizan a los números racionales e irracionales, hagamos el siguiente experimento mental en conexión con el proceso de intercalación de fracciones que se expuso en la sección anterior. Suponga que disponemos de una “recta numérica” en la que sólo están marcados los números enteros $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Si ahora se representan dichos enteros en su forma fraccionaria (con denominador unidad) y se generan fracciones entre ellos mediante el proceso de intercalación descrito, se obtiene la siguiente secuencia:

$$\frac{-3}{1}, \frac{-5}{2}, \frac{-2}{1}, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{3}{1}, \dots$$

Así, se ha “rellenado”, por así decirlo, parte del espacio comprendido entre los enteros con los que iniciamos. Si se continúa el proceso de intercalación con las fracciones resultantes, se irán “rellenando” con puntos los espacios vacíos entre ellas como se ilustra a continuación:



Dado que dicho proceso es indefinido, puede pensarse que se genera una “recta” con puntos estrechamente empaquetados unos con otros como consecuencia del hecho que siempre pueda intercalarse un punto entre otros dos dados inicialmente. Además, dicha “recta numérica” consta exclusivamente de números racionales en virtud a la forma en que fue construida.



Si recordamos el problema del carpintero de la Actividad de Desarrollo 2 así como el hecho que la longitud de madera requerida es un número irracional (recordemos que la raíz **no** es exacta) nos preguntamos: ¿Cuál punto de la recta anterior puede ser asignado a dicha longitud? Si nos apoyamos exclusivamente en la conclusión final de la Actividad de Desarrollo 2, esperaríamos que la secuencia de intervalos de anidamiento (o cajones, como los llamábamos) tuvieran un punto en común, sin embargo, este no es el caso dado que la recta anterior consta **únicamente** de puntos racionales. Así, los cajones están claramente definidos sobre dicha recta dado que sus extremos son racionales (decimales finitos o fracciones convergentes) pero el punto común a todos ellos **no** lo está.

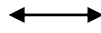
Se podría pensar en “rellenar” aún más la recta anterior empleando los puntos racionales sobre ella y el método de intercalación descrito en esta actividad pero esto **nunca** sería suficiente ya que, sin importar el número de pasos de intercalación que se realicen, **siempre** se obtendrán puntos racionales, lo que a todas luces es insuficiente e ilógico si lo que se desea es obtener un número irracional.

Son varias las conclusiones que podemos extraer de esta discusión:

- Si se dispone de una recta numérica compuesta *exclusivamente* de puntos racionales, resulta insuficiente o *incompleta* para poder ubicar cantidades numéricas irracionales. Esta conclusión es válida en el caso irracional, esto es, una recta numérica compuesta solamente de números irracionales es *incompleta* si se desean ubicar en ella números racionales.
- Nuestra conclusión final de la Actividad de Desarrollo 2 es *inválida* si se dispone inicialmente de una recta compuesta exclusivamente de puntos racionales o puntos irracionales. **No** es posible hablar de un punto común a todos los intervalos de anidamiento si estos se ubican sobre una recta *incompleta*.

Así, se puede pensar en una propiedad **adicional** de la recta numérica que hasta el momento se había supuesto de manera tácita y es, en cierto modo, equivalente a la conclusión de la Actividad de Desarrollo 2, a saber:

La recta numérica contiene suficientes puntos para poder ubicar en ella tanto números racionales como irracionales, es decir, es **COMPLETA** (Interpretación geométrica).



TODO conjunto de intervalos de anidamiento para un número dado contiene un número común a todos ellos (Interpretación numérica)

Esta propiedad es, históricamente y sin lugar a dudas, la más importante del sistema de números racionales e irracionales y se conoce con el nombre de propiedad de **COMPLETITUD**. Esta completitud puede ser entendida también desde la otra perspectiva, esto es, que *todo* punto de una recta numérica completa debe *corresponder a algún número*, sea este racional o irracional.

RESUMEN

En esta actividad se mostraron procedimientos que permiten, de manera precisa, definir el *orden* y *álgebra* para números racionales e irracionales aceptando la validez de la conclusión final de la Actividad de Desarrollo 2 y sus consecuencias. Así mismo, se analizaron (desde un punto de vista geométrico y numérico) dos propiedades fundamentales del sistema de números racionales e irracionales, a saber: *Densidad* y *Completitud* así como de la necesidad de los mismos si se emplean expresiones fraccionarias o decimales en la representación de números racionales y/o irracionales.