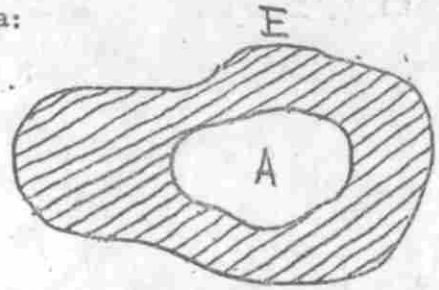
SECCION 6

COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO CON RESPECTO A OTRO.

6.1 Definición.

Sean A y E conjuntos tales que $A \subset E$. Sea la relación $x \notin A$. El conjunto $\{x \in E / x \notin A\}$ es llamado "el complemento de A con respecto a E" y se denota por $\complement_E A$, ó más simplemente $\complement A$, ó también A'.
Con esto: $\complement_E A = \{x / x \in E \wedge x \notin A\}$.

Gráficamente sería:



En otras palabras: Si se considera al conjunto E como referencia y A es una parte de E, se llama "complemento" al conjunto formado por todos los elementos de E que no están en A.

Preguntamos ahora: ¿Qué garantiza la existencia del conjunto $\complement_E A$?

Veamos algunos ejemplos:

1. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los naturales. Sea P el conjunto de los números pares. ¿Qué es $\complement_{\mathbb{N}} P$?

2. Sea L el conjunto de puntos del plano. Sea L_1 el conjunto de puntos que pertenecen a la recta $y = ax + b$. ¿Qué conjunto es $\complement_L L_1$? Gráficamente son todos los puntos del plano que no están en la recta.

3. Sea E un conjunto. ¿Qué conjunto es $\complement_E E$?
Por definición de complemento son todos los elementos que pertenecen a E y no están en E. ¿Existe algún elemento que cumpla dicha condición? No, puesto que si lo hubiera obtendríamos una contradicción: $x \in E \wedge x \notin E$. Luego, no existe ninguno y por tanto $\complement_E E = \emptyset$.

EJERCICIOS. Demuestre:

1) $\complement_E(\complement_E A) = A$

2) $\complement_E \emptyset = E$

3) $\complement_E A \cap A = \emptyset$

4) $\complement_E A \cup A = E$

5) $A \subset B$ sí y solo si $\complement_E B \subset \complement_E A$

6) $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$

7) $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$

Demostraremos aquí a manera de ilustración la propiedad 6)

$$\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$$

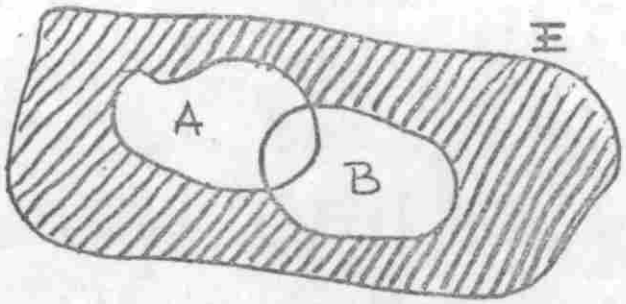
i) Demostremos que $\complement_E(A \cup B) \subset \complement_E A \cap \complement_E B$.
Sea $x \in \complement_E(A \cup B)$, entonces por la definición de complemento $x \in E \wedge x \notin A \cup B$, ó lo que es lo mismo $x \in E \wedge$ no$(x \in A$ ó $x \in B)$
Interpretemos ahora la relación "no$(x \in A$ o $x \in B)$". Esta dice que es falso que $(x \in A$ ó $x \in B)$, luego x no está en ninguno de los dos, conjuntos, es decir $x \notin A \wedge x \notin B$. Por lo tanto la relación: $x \in E \wedge x \notin (A \cup B)$ se puede escribir así: $x \in E \wedge x \notin A \wedge x \notin B$, organizable también así: $(x \in E \wedge x \notin A) \wedge (x \in E \wedge x \notin B)$, entonces $x \in \complement_E A \wedge x \in \complement_E B$ ó finalmente: $x \in \complement_E A \cap \complement_E B$.

Luego: $\complement_E(A \cup B) \subset \complement_E A \cap \complement_E B$

ii) Demostremos ahora que $\complement_E A \cap \complement_E B \subset \complement_E(A \cup B)$.
Sea $x \in \complement_E A \cap \complement_E B$, entonces:
$(x \in E \wedge x \notin A) \wedge (x \in E \wedge x \notin B)$ ó lo que es equivalente: $x \in E \wedge x \notin A \wedge x \notin B$. Ahora bien, si $x \notin A \wedge x \notin B$ se cumple necesariamente que $x \notin A \cup B$.. Tenemos entonces que $x \in E \wedge x \notin A \cup B$ es decir que $x \in \complement_E(A \cup B)$ y por tanto $\complement_E A \cap \complement_E B \subset \complement_E(A \cup B)$.

Hemos demostrado así que: $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.

Gráficamente, la proposición demostrada se presenta así:



Observaciones:

1) Note que la segunda parte de la demostración es exactamente la primera pero de atrás hacia adelante. Esto significa que las diferentes relaciones que incluye la demostración no solamente "se implican" en un sentido, sino también en el sentido inverso. Es decir, se trata de equivalencias. Es claro que tal hecho no sucede en todas las proposiciones a demostrar: Ejemplo de esto lo constituye la relación atrás demostrada: $A \subset A \cup B$. Si las proposiciones que incluye esta demostración se implicaran en ambos sentidos A sería igual a $A \cup B$, lo cual es falso.

2) Lo anterior da pie a presentar la demostración arriba hecha con utilización de símbolos lógicos en una forma bastante simplificada, así:

Veamos que $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$

$$x \in \complement_E A \cup B \Longleftrightarrow x \in E \wedge x \notin A \cup B \Longleftrightarrow x \in E \wedge \text{no}(x \in A \text{ ó } x \in B)$$

$$\Longleftrightarrow x \in E \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \Longleftrightarrow (x \in E \wedge x \notin A) \wedge (x \in E \wedge x \notin B)$$

$$\Longleftrightarrow x \in \complement_E A \wedge x \in \complement_E B \Longleftrightarrow x \in \complement_E A \cap \complement_E B$$

Luego: $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.

3) La demostración sugiere dos resultados de la lógica siempre válidos:

i) Si R, S son relaciones cualesquiera, la relación "no (R ó S)" es equivalente a "no R $\wedge$ no S".

Este hecho sugiere la relación existente entre la disyunción y la conjunción.

Además se anota que la relación "no $(R \wedge S)$" es equivalente a no R ó no S.

ii) Si se tiene $R \wedge S$ cierto, entonces $R \wedge R \wedge S$ es también cierto. El fundamento de tal hecho es que si $R \wedge S$ es cierto entonces tanto R como S son ciertos separadamente, lo cual garantiza que se conserva la verdad de $R \wedge R \wedge S$.