



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

John Freddy Moreno Trujillo

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Económicas

Economía

Bogotá, Colombia

2024

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

John Freddy Moreno Trujillo

Tesis presentada como requisito para optar por el título de:

Doctor (Ph.D.) en Ciencias Económicas

Director(a):

Ph.D. Nancy Milena Hoyos Gómez

Línea de investigación:

Finanzas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Económicas

Economía

2024

Declaración

Me permito afirmar que he realizado ésta tesis de manera autónoma y con la única ayuda de los medios permitidos y no diferentes a los mencionados en el presente texto. Todos los pasajes que se han tomado de manera textual o figurativa de textos publicados y no publicados, los he reconocido en el presente trabajo.

John Freddy Moreno Trujillo

Agradecimientos

Agradezco a mi esposa Mabel Moreno por su comprensión y amor incondicional. A mis hijos Ángel Moreno y Tomas Moreno, que me dan la fuerza para siempre seguir adelante. A mi madre Lucy Trujillo, que es ejemplo de vida, a mi padre Esteban Moreno, que me inspiró en el camino de la academia, y a mi hermano Eduard Moreno que siempre es un apoyo.

Resumen

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

En esta investigación se proponen y desarrollan cuatro modelos de mercados financieros ilíquidos, en los cuales se caracteriza la dinámica del precio de los activos riesgosos y la relación emergente entre dicha dinámica y las estrategias de negociación de los agentes. Además, se deducen las correspondientes ecuaciones diferenciales parciales para la valoración de activos contingentes. Específicamente, se presentan: 1. Un modelo de mercado con un factor de iliquidez proporcional al precio del activo; 2. Un modelo en el que la iliquidez es función del precio del activo; 3. Un modelo que incluye iliquidez proporcional, con la presencia de agentes ruidosos (*noise traders*); 4. Un modelo en el cual la iliquidez es estocástica y está descrita mediante un proceso de reversión a la media de tipo raíz cuadrada. Las ecuaciones de valoración obtenidas son extensiones no lineales de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, donde la no linealidad resulta del efecto de retroalimentación asociado a la iliquidez del mercado. También se propone, como alternativa para la aproximación a la solución de estas ecuaciones, la aplicación de la extensión del teorema de representación de Feynman-Kac a los casos semi-lineales y completamente no lineales, lo que da lugar a una representación discreta de la solución que puede implementarse de manera eficiente mediante el uso de redes neuronales artificiales.

Palabras clave: Mercado ilíquido, valoración de derivados, ecuaciones diferenciales parciales no lineales, representación de Feynman-Kac, redes neuronales artificiales.

Abstract

Nonlinear valuation of financial derivatives through extensions of the Feynman-Kac theorem and machine learning algorithms

In this research, four models of illiquid financial markets are proposed and developed, characterizing the dynamics of risky asset prices and the emerging relationship between this dynamics and the trading strategies of agents. Additionally, the corresponding partial differential equations for the valuation of contingent assets are deduced. Specifically, the following models are presented: 1. A market model with a liquidity factor proportional to the asset price; 2. A model in which liquidity is a function of the asset price; 3. A model that includes proportional liquidity, with the presence of noise traders; 4. A model in which liquidity is stochastic and described by a mean-reverting square-root process. The resulting valuation equations are nonlinear extensions of the Black-Scholes partial differential equation, where the nonlinearity arises from the feedback effect associated with market illiquidity. As an alternative approach to solving these equations, the application of the extension of the Feynman-Kac representation theorem to semi-linear and fully nonlinear cases is proposed, leading to a discrete representation of the solution that can be efficiently implemented using artificial neural networks.

Keywords: Illiquid market, derivative valuation, nonlinear partial differential equations, Feynman-Kac representation, artificial neural networks.

Contenido

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Contenido	VII
Lista de figuras	IX
Lista de tablas	X
1. Introducción	1
1.1. Problema de investigación	4
1.2. Objetivos de la investigación	5
1.2.1. Objetivo general	5
1.2.2. Objetivos específicos	5
2. Modelo de mercado financiero ilíquido	8
2.1. Modelo de mercado	9
2.1.1. Agentes participantes del mercado	11
2.1.2. Precio de activos riesgosos	13
2.1.3. Proceso estocástico del precio	15
2.2. Estrategias de negociación dinámica	16
2.3. Valoración de derivados en mercados ilíquidos	20
2.4. Conclusiones del capítulo	22

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

3. Mercado con iliquidez simple	24
3.1. Modelo de mercado con liquidez perfecta	24
3.2. Modelo de mercado con iliquidez simple en función del precio	28
3.2.1. Iliquidez proporcional al precio del activo	29
3.2.2. Estrategias de negociación de los agentes	31
3.2.3. Valoración de derivados	36
3.3. La iliquidez como función del precio del activo	38
3.4. Iliquidez proporcional al precio y agentes ruidosos	39
3.5. Conclusiones del capítulo	45
4. Mercado con iliquidez estocástica	47
4.1. Precio de activos riesgosos	49
4.2. Valoración de derivados	59
4.3. Conclusiones del capítulo	65
5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales	67
5.1. El teorema de Feynman-Kac y EDP lineales	70
5.1.1. Aproximación mediante redes neuronales	72
5.2. El teorema de Feynman-Kac y EDP semi-lineales	78
5.2.1. Aproximación mediante redes neuronales	79
5.2.2. Estructura de la red neuronal	81
5.3. El teorema de Feynman-Kac y EDP completamente no lineales	83
5.3.1. Discretización del sistema EDP-2BSDE	85
5.3.2. Aproximación mediante redes neuronales	88
5.3.3. Estructura de la red neuronal	89
5.4. Conclusiones del capítulo	92

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración	93
6.1. Modelo 1	93
6.2. Modelo 2	97
6.3. Modelo 3	99
6.4. Modelo 4	101
6.5. Aplicación para opciones de compra sobre el S&P 500	105
6.6. Conclusiones del capítulo	108
7. Conclusiones	109
Referencias Bibliográficas	112

Lista de figuras

3-1. Simulación precios de activos en mercado con liquidez perfecta	25
3-2. Estrategias de negociación basadas en optimización	33
3-3. Simulación precios de activos con iliquidez proporcional ($\lambda = 0,5$)	35
3-4. Simulación precios de activos con iliquidez proporcional ($\lambda = 1$)	35
3-5. Simulación estrategia y precios para $\lambda = 0$	42
3-6. Simulación estrategia y precios para $\lambda = 0,5$	43
3-7. Simulación estrategia y precios para $\lambda = 1$	44
4-1. Cociente de iliquidez de Amihud para el S&P 500	48
4-2. Estrategias de negociación positiva y contaría en función del precio y la iliquidez.	56
4-3. Simulación proceso de iliquidez y precio con retroalimentación positiva	58
4-4. Simulación proceso de iliquidez y precio con retroalimentación negativa	58
5-1. Estructura del perceptrón	73
5-2. Estructura estándar para una red neuronal secuencial	74
5-3. Estructura de la red <i>deep BSDE solver</i>	82
5-4. Estructura de la red para 2BSDE	90
6-1. (Izquierda) Comportamiento de la media de u_θ en función del número de iteraciones. (Derecha) Comportamiento de la media de la función de costo en función del número de iteraciones. Elaboración propia.	96
6-2. (Izquierda) Comportamiento de la media de u_θ en función del número de iteraciones. (Derecha) Comportamiento de la media de la función de costo en función del número de iteraciones. Elaboración propia.	99

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

6-3. (Izquierda) Comportamiento de la media de u_θ en función del número de iteraciones. (Derecha) Comportamiento de la media de la función de costo en función del número de iteraciones. Elaboración propia.	101
6-4. (Izquierda) Comportamiento de la media de u_θ en función del número de iteraciones. (Derecha) Comportamiento de la media de la función de costo en función del número de iteraciones. Elaboración propia.	104
6-5. Precios de cierre del S&P 500 para un periodo de 5 años	105
6-6. Cociente de iliquidez de Amihud para el S&P 500	106

Lista de tablas

6-1. Resultados numéricos para el cálculo de la prima de opciones de compra y venta europeas	95
6-2. Resultados numéricos para el cálculo de la prima de opciones de compra y venta europeas	98
6-3. Resultados numéricos para el cálculo de la prima de opciones de compra y venta europeas	100
6-4. Resultados numéricos para el cálculo de la prima de opciones de compra y venta europeas	103
6-5. Valores estimados de los parámetros para el proceso de iliquidez del S&P 500	107
6-6. Resultados numéricos para el cálculo de la prima de opciones de compra europeas sobre el S&P 500	108

1. Introducción

En años recientes la liquidez del mercado ha jugado un papel central en la gestión del riesgo. Su importancia es innegable si se considera la mayor frecuencia con la que administradores de riesgos enfrentan situaciones en las cuales, modelos financieros basados en asumir que las actividades de negociación de los agentes no tienen efecto directo sobre los precios (mercados perfectamente líquidos), fallan estrepitosamente en circunstancias en donde la liquidez del mercado presenta problemas. Claros ejemplos de esto se pueden encontrar al revisar las crisis financieras recientes, especialmente la del 2008-2009, en donde la situación de iliquidez del mercado norteamericano se globalizó rápidamente, mostrando la debilidad que pueden llegar a tener diversos modelos basados en suponer liquidez perfecta.

Desde la perspectiva de un gestor de riesgos, el *riesgo de modelo* puede verse como aquel asociado a una situación en la cual una institución financiera incurre en pérdidas porque algunos de los supuestos clave que subyacen a sus modelos de gestión de riesgos no se cumplen en la práctica. Las pérdidas debido a la desaparición de la liquidez del mercado son entonces un ejemplo fundamental de riesgo de modelo. Así, el análisis de los modelos utilizados con fines de cobertura y gestión de riesgos, respecto al supuesto de mercados perfectamente líquidos, es un tema importante en el análisis del riesgo en general. En este trabajo se estudian los efectos de eliminar el supuesto de liquidez perfecta en un modelo financiero de valoración de activos contingentes (derivados financieros). Específicamente, se estudian algunos modelos de mercados ilíquidos y se analizan los efectos de la iliquidez sobre los precios de los activos riesgosos, las estrategias de negociación de los agentes y las ecuaciones de valoración de derivados.

Aunque el estudio de los efectos del riesgo de liquidez en el precio de los derivados ha

1. Introducción

comenzado a ganar relevancia en años recientes, la investigación pertinente todavía está en su etapa inicial y el problema se ha estudiado desde diferentes ópticas. Una corriente de autores considera que el riesgo de liquidez en los derivados surge principalmente del efecto sobre el precio del subyacente de las negociaciones de los agentes. Por ejemplo, Liu and Yong (2005) obtienen una ecuación diferencial parcial de valoración que generaliza la de Black-Scholes bajo esta hipótesis, y en el trabajo de Loeper (2018) se presenta una ecuación de valoración no lineal similar al considerar un mecanismo de retroalimentación entre la cobertura delta de la opción y la dinámica de precios, partiendo del modelo de Black-Scholes con volatilidad local. Otro enfoque para medir el efecto de la liquidez es utilizar el diferencial entre la oferta y la demanda (*bid-ask spread*), donde se consideran como activos ilíquidos aquellos con un alto diferencial, como en el trabajo Leippold and Schärer (2017), quienes en el marco de las finanzas cónicas desarrollan un modelo de liquidez estocástica que implementan utilizando árboles binomiales multidimensionales.

Algunos autores consideran que la falta de liquidez de los activos es la incapacidad de negociarlos en absoluto, como en Ludkovski and Shen (2013) quienes considerando un entorno de cambio de régimen markoviano, modelan la iliquidez como la incapacidad de operar, mientras que otros tienen una visión diferente, en la que los posibles choques de iliquidez son descontados en los precios de negociación de los activos, como en los trabajos de Subramanian and Jarrow (2001) o Longstaff et al. (2005). Un ejemplo típico de este enfoque es el presentado en Ku and Zhang (2018), quienes, siguiendo el método de valoración de opciones por indiferencia de utilidad, incorporan un factor de descuento que es función de la velocidad de negociación de los agentes, esto siguiendo la aproximación propuesta inicialmente por Cetin et al. (2010).

Recientemente, múltiples estudios empíricos han mostrado que la liquidez de todo el mercado influye en los rendimientos de los activos. Por ejemplo, bajo el supuesto de que el mercado desempeña el papel de contraparte central y negocia con los inversionistas, Madan and Cherny (2010) introducen un parámetro único de estrés del mercado para describir su falta de liquidez, y desarrollan un marco teórico para la fijación de precios de derivados. Este

1. Introducción

marco fue ampliado por Corcuera et al. (2012) y Albrecher et al. (2013), quienes calibraron el parámetro de estrés del mercado con opciones suscritas sobre el índice S&P 500, encontrando que dicho parámetro exhibe estructura temporal y muestra un comportamiento de reversión a la media.

Motivados por la importancia de los efectos de este riesgo, varios autores han adoptado un factor de descuento basado en la liquidez de todo el mercado, y lo utilizan para investigar el impacto del riesgo de liquidez sobre los precios de los derivados, siendo el factor de descuento una cantidad que debe multiplicarse por el precio del activo líquido para obtener su precio ajustado por liquidez. Esta aproximación tiene origen en el trabajo de Mandelbrot (1997) y Fama (1965), siguiendo la idea de que la volatilidad de un activo cambia con el tiempo y experimenta saltos en un mercado sin liquidez. Una generalización de esta aproximación fue propuesta por Brunetti and Caldarera (2004), donde el riesgo de liquidez es modelado a través de un factor de descuento que se incorpora en la función de demanda del activo, y fue ampliado aún más por Feng et al. (2014), que introducen una liquidez estocástica en todo el mercado. En otras palabras, su modelo es similar a uno de volatilidad estocástica en el que cual se asume que la naturaleza aleatoria de la volatilidad está impulsada por la liquidez de todo el mercado. Este marco también fue adoptado por Li et al. (2018b) y Li et al. (2018a) para la fijación de precios de opciones asiáticas geométricas y *quanto*, respectivamente. Recientemente, el precio de varios tipos de derivados, incluidas opciones americanas, fue considerado bajo el mismo marco por Zhang et al. (2019).

También en la línea de entender los efectos de los problemas de liquidez sobre diferentes aspectos del sistema financiero se destaca el trabajo de Glover et al. (2010), que analiza los efectos de la liquidez limitada en el contexto del modelo financiero de Black-Scholes-Merton para la valoración de opciones considerando dos enfoques. En el primero, denominado por los autores como de retroalimentación de primer orden, se llega a una ecuación diferencial parcial lineal de valoración que muestra diferencias sutiles respecto al modelo clásico cuando se considera el impacto en el precio cerca del vencimiento de la opción. En el segundo, denominado de retroalimentación completa, se incorpora totalmente el impacto en el precio

1. Introducción

y se estudian las dificultades que surgen para la resolución de la correspondiente ecuación no lineal de valoración mediante técnicas numéricas estándar, mostrando problemas como valores negativos de las opciones y singularidades en la ecuación de valoración.

Estos autores muestran que varios modelos en la literatura que incluyen un impacto permanente de la iliquidez, presentan fallos importantes si se adoptan procedimientos numéricos estándar para el tratamiento de la ecuación de valoración resultante, lo que motiva la consideración de estrategias de solución que superen este tipo de dificultades. En este sentido, el presente trabajo busca aportar considerando una aproximación de la solución de las ecuaciones de valoración basada en algoritmos de aprendizaje automático y extensiones del teorema de Feynman-Kac.

De acuerdo con la literatura revisada, y dada la importancia teórica y práctica de considerar los efectos de la iliquidez en el funcionamiento de los mercados, se propone el siguiente problema de investigación.

1.1 Problema de investigación

Aunque no se tiene un consenso sobre como definir la liquidez, existe una gran cantidad de investigación centrada en estudiar los efectos del riesgo de liquidez sobre los precios de los activos (ver por ejemplo Acharya and Pedersen (2005) o Liu (2006)), pero el desarrollo de un modelo completo que capture adecuadamente el impacto de la iliquidez en la determinación de los precios de los derivados, la dinámica del precio de los activos riesgosos subyacentes y las estrategias de cobertura de los agentes, aún está por proponer. Es precisamente en este aspecto en el que este trabajo busca aportar a literatura, por lo cual se plantean los siguientes objetivos de investigación.

1.2 Objetivos de la investigación

1.2.1 Objetivo general

Desarrollar un conjunto de modelos de mercados financieros que incorporen el riesgo de iliquidez, caracterizando para cada uno: i. La dinámica de los precios de los activos riesgosos en relación con el modelo de iliquidez y con las estrategias adoptadas por los agentes del mercado; ii. La ecuación diferencial parcial de valoración de activos contingentes correspondiente. iii. Para las ecuaciones de valoración encontradas, aproximar su solución mediante la aplicación de una extensión del teorema de representación de Feynman-Kac combinada con el uso de redes neuronales artificiales.

1.2.2 Objetivos específicos

- Proponer un conjunto de modelos de mercado que incorporen un factor de iliquidez en diferentes niveles de complejidad.
- Modelar la dinámica de los precios de los activos riesgosos para cada uno de los modelos de mercado propuestos.
- Modelar y analizar las estrategias de cobertura utilizadas por los agentes para cada modelo propuesto y establecer su relación con la dinámica de precios.
- Desarrollar y establecer las ecuaciones diferenciales parciales de valoración de derivados para cada modelo propuesto.
- Adaptar y aplicar la extensión del teorema de representación de Feynman-Kac para aproximar la solución de las ecuaciones diferenciales parciales de valoración encontradas.
- Implementar mediante modelos de redes neuronales artificiales la aproximación a la so-

1. Introducción

lución de las ecuaciones diferenciales parciales de valoración que surgen de la extensión del teorema de representación de Feynman-Kac.

En otras palabras, el objetivo de esta investigación es aportar en la comprensión y aproximación efectiva a la valoración de derivados en entornos con riesgo de iliquidez, mediante una combinación innovadora de enfoques económicos, matemáticos y computacionales. Se busca contribuir al entendimiento sobre cómo la iliquidez impacta la dinámica de los precios de activos riesgosos, su relación con las estrategias de negociación de los agentes y la valoración de derivados financieros.

El trabajo se desarrolla por capítulos, siendo el primero esta introducción. En el segundo capítulo se presenta un marco económico general para la modelación de un mercado ilíquido a partir de la función de exceso de demanda de los agentes por el activo riesgoso. En el capítulo tres se proponen modelos de mercado donde la iliquidez depende de manera simple del precio del activo y se analiza su efecto sobre la dinámica de los precios en relación con la estrategia de negociación de los agentes. Específicamente se consideran tres casos: i. Un mercado en el cual la iliquidez es directamente proporcional al precio del activo. ii. Un mercado en el cual la iliquidez es función del precio del activo. iii. Un mercado con iliquidez directamente proporcional al precio del activo pero con la presencia de un agente ruidoso (*Noise trader*). En todos los casos se caracteriza la dinámica del precio del activo riesgoso y se establece la ecuación diferencial parcial de valoración de derivados correspondiente.

En el cuarto capítulo se propone un modelo de mercado en el cual la iliquidez es estocástica, descrita mediante un proceso de reversión a la media de tipo raíz cuadrada (CIR), se modela la dinámica del precio del activo riesgoso y se establece la ecuación de valoración. En el capítulo cinco se describe el teorema de Feynman-Kac para el caso de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden lineales junto con su extensión al caso no lineal. A partir de este resultado, se considera una representación discreta de la solución de estas ecuaciones y se propone un algoritmo para su implementación mediante redes neuronales artificiales. En el capítulo seis se implementa este método para las diferentes ecuaciones de valoración

1. Introducción

encontradas y se contrastan los resultados con el caso de liquidez perfecta. Finalmente, en el séptimo capítulo se presentan las conclusiones generales y posibles líneas de investigación futuras.

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

En este capítulo se presenta un modelo de mercado financiero ilíquido a partir del cual se analizará la relación entre la dinámica de los precios de activos riesgosos, las estrategias de negociación de los agentes y la ecuación de valoración de derivados. Se consideran estrategias de negociación dinámicas, es decir, aquellas en las que el número de unidades que un agente posee de un activo riesgoso es función del precio del activo S_t y del tiempo t . Esta cantidad en adelante se denotará por $N(S_t, t)$. Este tipo de estrategias de negociación son las más comúnmente utilizadas en los mercados financieros y son un elemento central en la teoría de valoración de derivados.

Como se describirá en detalle más adelante, el modelo de mercado considerado está compuesto por un activo libre de riesgo, un activo riesgoso y un derivado. Los derivados son un tipo de activo financiero cuyo valor depende del precio de otro activo, denominado subyacente, y tienen como objetivo principal servir como instrumento de cobertura ante las variaciones del precio del subyacente, aunque también se pueden utilizar para especulación o arbitraje. Los tipos básicos de derivados son los futuros, los *forwards*, los *swaps* y las opciones. En particular, las opciones son un tipo de contrato que otorga a su poseedor el derecho, más no la obligación, de negociar una determinada cantidad del activo subyacente en, o antes de, una fecha futura específica (T) y por un valor determinado (K). Las opciones se pueden clasificar por el tipo de derecho que otorgan a su poseedor en: opciones que dan el derecho a comprar (*call*) y opciones que dan el derecho a vender (*put*). También se pueden clasificar por el momento en el cual pueden ser ejercidas en: opciones europeas, que solo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento T , u opciones americanas que pueden ser ejercidas en cualquier momento desde que son pactadas y hasta la fecha de vencimiento.

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

En un mercado financiero perfectamente líquido es posible encontrar estrategias de negociación dinámicas que reproducen los flujos futuros de un derivado, mediante la negociación del activo subyacente y del activo sin riesgo, es decir, en teoría, en un mercado completo y perfectamente líquido un derivado puede ser replicado siguiendo la estrategia de negociación apropiada. Este tipo de estrategias tienen una innegable popularidad desde 1973, año en el cual Fysher Black y Myron Scholes (Black and Scholes (1973a)) junto con Robert Merton (Merton (1973)) publican sus seminales trabajos sobre valoración de opciones financieras, en los que desarrollan e implementan la idea de cobertura dinámica, un tipo de estrategia que permite a cualquier agente crear sintéticamente productos que cubran sus necesidades.

Dada una estrategia de negociación en la cual se tiene una cantidad $N(S_t, t)$ del activo riesgoso, un cambio en el precio del activo en dS_t implica que la estrategia debe ser ajustada por dN , entonces dN unidades del activo son negociadas en el mercado. Pero, al iniciar la negociación de estas unidades del activo, la orden en si misma puede influenciar el precio S_t si el mercado del activo es poco líquido, lo que causa un cambio dS'_t en el precio, y este cambio dispara nuevamente la negociación dinámica. Este efecto de retroalimentación o *feedback* es el que se estudiará en este trabajo, específicamente, se proponen múltiples formas de modelarlo, se analiza su influencia sobre la dinámica de los precios de activos riesgosos, las estrategias de negociación de los agentes y la ecuación de valoración de derivados en el contexto de mercados ilíquidos. Esta presentación inicial del contexto general del mercado sigue el trabajo de Wilmott and Schönbucher (2000), pero lo extiende en varias direcciones en los capítulos siguientes al considerar diferentes modelos para la iliquidez y para las estrategias de negociación de los agentes.

2.1 Modelo de mercado

Se considera un mercado financiero en tiempo continuo sobre el intervalo $[0, T]$, en el cual hay tres tipos de activos disponibles para negociar. Un activo libre de riesgo con valor en $t \in [0, T]$ denotado por B_t , un activo riesgoso con valor en t denotado por S_t , y un derivado

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

pactado sobre el activo riesgoso y cuyo valor en t se denotará por $H_t \equiv H(S_t, t)$. Se asumirá que el mercado del activo libre de riesgo es perfectamente líquido, mientras que el mercado del activo riesgoso es ilíquido, entendiendo la iliquidez como la imposibilidad de negociar de forma inmediata cualquier cantidad de este activo sin alterar su precio.

En la teoría financiera clásica el proceso estocástico que caracteriza el precio del activo riesgoso, así como el que describe la dinámica del precio del activo libre de riesgo, son directamente especificados, y es a partir de esta especificación que se establecen las expresiones para la valoración de derivados y las estrategias de negociación. En contraste con esta aproximación, buscamos derivar un modelo estocástico para la dinámica de los precios de los activos riesgosos considerando las funciones de oferta y demanda de este activo, así como las estrategias de negociación de los agentes. Esto para poder incorporar los efectos de la iliquidez sobre la dinámica de los precios, lo que dará los fundamentos para los modelos presentados en los capítulos siguientes.

Inicialmente se asume que los cambios en el precio del activo riesgoso pueden ser descritos como un proceso de difusión de la forma:

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t , \quad (2.1)$$

donde dW_t denota el diferencial de un movimiento Browniano estándar, y condiciones sobre la forma de las funciones $\mu(S_t, t)$ y $\sigma(S_t, t)$, conocidas como coeficiente de tendencia y difusión respectivamente, se derivarán más adelante. Se asume que este proceso, al igual que todos los procesos considerados en lo que sigue, están definidos sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$, donde la σ -álgebra \mathcal{F} es la generada por W_t .

El activo libre de riesgo representa el valor del dinero en el mercado y podemos considerarlo como un bono emitido por un banco central (u otro emisor que no represente riesgo de contraparte). Como el mercado de bonos es usualmente mucho más líquido que el del activo

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

riesgoso, no consideramos el efecto de las actividades de negociación sobre su precio, el cual se especifica de forma directa asumiendo que satisface:

$$dB_t = rB_t dt \quad , \text{ o de forma equivalente, } \quad B_t = B_0 e^{rt} \quad , \quad (2.2)$$

donde r es una tasa de interés sin riesgo constante y conocida y B_0 es el valor de este activo en el instante $t = 0$.

2.1.1 Agentes participantes del mercado

Se consideran dos tipos de agentes en el mercado: un *gran agente* cuyo tamaño relativo al del mercado es lo suficientemente grande como para que sus estrategias de negociación afecten los precios, y una población numerosa de *agentes pequeños* que conforman el resto del mercado. Se asume que todos los agentes pueden negociar continuamente sin costos de transacción, y que nueva información llega continuamente al mercado en la forma de un movimiento Browniano W_t .

- **Los agentes pequeños.** Para este conjunto de agentes no buscamos modelar de forma explícita su problema de inversión pero si caracterizar los efectos de estas inversiones, es decir, la reacción del mercado y de la dinámica de los precios a sus órdenes de compra y venta, esto sin considerar la presencia del gran agente, por lo cual tratamos su comportamiento agregado en el mercado. Dado el precio del activo S_t y un valor W_t del movimiento Browniano estándar, los agentes pequeños quieren poseer, en el agregado:

$$\mathcal{D}(S_t, W_t, t) \quad (2.3)$$

unidades del activo riesgoso en sus portafolios. Esta es la función de *demanda agregada* por el activo riesgoso. De forma similar podemos expresar la función de *oferta agregada* por este activo como:

$$\mathcal{S}(S_t, W_t, t) \quad (2.4)$$

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

A partir de estas funciones se define la *función exceso de demanda* por el activo riesgoso como:

$$\mathcal{X}(S_t, W_t, t) = \mathcal{D}(S_t, W_t, t) - \mathcal{S}(S_t, W_t, t) . \quad (2.5)$$

Se consideran los siguientes supuestos:

- No existen otros factores que afecten las decisiones de negociación de los agentes pequeños, es decir, todas las influencias estocásticas posibles están contenidas en W_t . Además, estos agentes no son consientes de la presencia del gran agente o de su estrategia de negociación.
- La función exceso de demanda depende solamente de S_t , W_t y t .
- $\mathcal{X}(S_t, W_t, t)$ es por lo menos dos veces continuamente diferenciable en S_t y W_t , y por lo menos una vez continuamente diferenciable en t , lo cual se denotará por, $\mathcal{X}(S_t, W_t, t) \in C^{2,2,1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, T], \mathbb{R})$.
- La función exceso de demanda $\mathcal{X}(S_t, W_t, t)$ tiene pendiente negativa respecto al precio del activo:

$$\frac{\partial}{\partial S_t} \mathcal{X}(S_t, W_t, t) < 0 \quad (2.6)$$

para todo S_t, W_t, t . Este supuesto significa que, manteniendo todo lo demás igual, los agentes pequeños quieren más unidades del activo riesgoso en sus portafolios si este está más barato, y menos si el activo es más costoso.

- Para cada W_t y t , existe un precio S_t tal que:

$$\mathcal{X}(S_t, W_t, t) = 0 , \quad (2.7)$$

y este precio es llamado *precio de equilibrio*.

- **El gran agente.** Este puede ser un único agente cuyo tamaño relativo al del mercado es lo suficientemente grande como para que sus estrategias de negociación tengan impacto sobre los precios de los activos, o puede ser un conjunto grande de agentes pequeños siguiendo la misma estrategia de negociación. Este agente sigue una estrategia $N(S_t, t)$, que puede ser cualquier estrategia de negociación dinámica sobre

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

la cual se asume que cumple condiciones suficientes de diferenciabilidad, es decir, $N(S_t, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times [0, T], \mathbb{R})$.

La demanda generada por esta estrategia de negociación es $N(S_t, t)$, la cual se adiciona a la demanda de los agentes pequeños para tener la *demanda de total*. Desde luego, para que esto sea posible, los agentes pequeños no deben estar conscientes de la presencia del gran agente en el mercado, de lo contrario sería de esperar que $\mathcal{X}(S_t, W_t, t)$ estuviera condicionada a la estrategia $N(S_t, t)$.

2.1.2 Precio de activos riesgosos

En ausencia del gran agente, el *precio de equilibrio* esta definido como el precio S_t para el cual se tiene que:

$$\mathcal{X}(S_t, W_t, t) = 0 , \tag{2.8}$$

mientras que con el gran agente, la condición de equilibrio que define el precio del activo es:

$$\mathcal{X}(S_t, W_t, t) + N(S_t, t) = 0 . \tag{2.9}$$

En esta aproximación de oferta y demanda, el precio de equilibrio S_t es aquel en el cual la demanda iguala a la oferta. Si el precio S'_t en el mercado es menor que S_t , entonces se tendrá un exceso de demanda generado por los agentes que quieren comprar pero no pueden, y estos empujarán el precio al alza hasta llegar al equilibrio. De forma similar, si el precio S''_t en el mercado es mayor que S_t , entonces se tendrá un exceso de oferta generado por los agentes que quieren vender pero no pueden, y estos empujaran el precio a la baja hasta llegar al equilibrio. Al precio S_t no hay demanda u oferta insatisfecha y por lo tanto la dinámica del equilibrio de mercado es estable.

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

Desde luego el desequilibrio es posible, pero la velocidad del flujo de información en los mercados, así como el alto número de profesionales que negocian, hacen del equilibrio completo una buena aproximación a las dinámicas de los mercados modernos. Esto no significa que el mercado sea estático, en este modelo tanto la demanda como la oferta pueden cambiar en el tiempo debido al parámetro estocástico W_t , es decir, cambian a medida que llega nueva información.

La intuición tras las definiciones de precio de equilibrio (2.8) y (2.9), indican que el mecanismo para la conformación de estos precios esta dado por la siguiente secuencia de eventos:

- Llega una nueva señal (información) dW_t .
- Los agentes pequeños envían al mercado sus órdenes de negociación en reacción a esta nueva información,

$$d\mathcal{X}(S_t, W_t, t) = \mathcal{X}(S_t, W_t, t) - \mathcal{X}(S_{t-}, W_{t-}, t-),$$

donde $t- := t - dt$ con dt infinitesimal.

- Simultáneamente el gran agente envía su orden de negociación,

$$dN(S_t, t) = N(S_t, t) - N(S_{t-}, t-).$$

- El precio de equilibrio es determinado. Este es el precio S_t para el cual las órdenes de compra y venta se balancean, es decir,

$$d\mathcal{X}(S_t, W_t, t) + dN(S_t, t) = 0.$$

- A este precio (S_t) las negociaciones tienen lugar.

Si el mercado se encontraba en equilibrio en $t-$, es decir, $\mathcal{X}(S_{t-}, W_{t-}, t-) + N(S_{t-}, t-) = 0$, también estará en equilibrio en t , $\mathcal{X}(S_t, W_t, t) + N(S_t, t) = 0$. Entonces, un equilibrio en la dinámica de las funciones ($d\mathcal{X}$ y dN) sustenta un equilibrio en las funciones \mathcal{X} y N .

2.1.3 Proceso estocástico del precio

Considerando las condiciones de equilibrio (2.8) y (2.9), junto con (2.1), podemos encontrar la ecuación diferencial estocástica que caracteriza el precio del activo riesgoso. Aplicando la fórmula de Itô se tiene que¹:

$$\begin{aligned}
 0 &= d\mathcal{X}(S_t, W_t, t) + dN(S_t, t) \\
 &= \left[\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t} dW_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial W_t^2} (dW_t)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S_t \partial W_t} (dS_t)(dW_t) \right) \right] \\
 &\quad + \left[\frac{\partial N}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial N}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \right] \\
 &= \left[\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial W_t^2} + \frac{1}{2} \sigma^2(S_t, t) \left(\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S_t^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial S_t^2} \right) + \sigma(S_t, t) \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S_t \partial W_t} + \mu(S_t, t) \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} + \frac{\partial N}{\partial S_t} \right) \right] dt \\
 &\quad + \left[\sigma(S_t, t) \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} + \frac{\partial N}{\partial S_t} \right) + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t} \right] dW_t. \tag{2.10}
 \end{aligned}$$

Para que esta igualdad sea válida, los coeficientes de tendencia y difusión en (2.10) deben ser iguales a cero. De igualar a cero el coeficiente de difusión se tiene que:

$$\sigma(S_t, t) = - \frac{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t}}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} + \frac{\partial N}{\partial S_t}}, \tag{2.11}$$

y de igualar a cero el coeficiente de tendencia:

$$\mu(S_t, t) = - \frac{1}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} + \frac{\partial N}{\partial S_t}} \left[\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial W_t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t}}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} + \frac{\partial N}{\partial S_t}} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S_t^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial S_t^2} \right) - \left(\frac{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t}}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} + \frac{\partial N}{\partial S_t}} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S_t \partial W_t} \right]. \tag{2.12}$$

Las expresiones (2.11) y (2.12) establecen condiciones sobre la forma de los coeficientes de

¹Para simplificar la notación se tomará $\mathcal{X} \equiv \mathcal{X}(S_t, W_t, t)$ y $N \equiv N(S_t, t)$.

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

tendencia y difusión en la ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica del precio del activo riesgoso. Dos observaciones importantes sobre estos resultados son:

- En ausencia de la estrategia de negociación del gran agente, se tiene que las expresiones (2.11) y (2.12) se reducen a:

$$\sigma(S_t, t) = -\frac{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t}}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t}} \quad (2.13)$$

y

$$\mu(S_t, t) = -\frac{1}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t}} \left[\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial W_t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t}}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t}} \right)^2 \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S_t^2} - \left(\frac{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t}}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t}} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S_t \partial W_t} \right] \quad (2.14)$$

que son las expresiones que determinan la dinámica de los precios para los agentes pequeños.

- Para que las expresiones (2.11) a (2.14) tengan sentido es necesario que $\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} \neq 0$, es decir, se necesita que la función exceso de demanda reaccione a los cambios en el precio del activo, de lo contrario no es posible encontrar un equilibrio y el mercado sería completamente ilíquido.

2.2 Estrategias de negociación dinámica

En la sección anterior se estableció el modelo de mercado y se describió como los precios se relacionan con la estrategia de negociación de los agentes. Ahora se estudian con mayor detalle las estrategias de negociación y las particularidades introducidas por la iliquidez del mercado, para lo cual se deben generalizar los conceptos de *proceso de valor y estrategia de negociación autofinanciada* al caso de mercados ilíquidos. Estos conceptos serán necesarios para analizar los resultados sobre las estrategias negociación utilizadas para la replicación de opciones.

Para el análisis de las estrategias de negociación consideramos la siguiente notación:

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

- $N_t \equiv N(S_t, t)$: es el proceso que representa el número de unidades del activo riesgoso que posee el agente en el instante t .
- ϕ_t : es el proceso que representa el número de unidades del activo libre de riesgo que posee el agente en el instante t .
- Y_t : es el proceso de valor en libros de la estrategia (N_t, ϕ_t) .
- Y'_t : es el proceso de valor real de la estrategia (N_t, ϕ_t) .

Una estrategia de negociación dinámica (portafolio) esta definida por la especificación de los procesos N y ϕ como funciones de la información disponible. Se asume que la negociación es no anticipante y que los procesos N y ϕ son adaptados.

Proceso de valor en libros: En cualquier instante t , el proceso de valor en libros de un portafolio es:

$$Y_t = \phi_t B_t + N_t S_t \quad (2.15)$$

que corresponde a la suma del valor de las posiciones en activo riesgoso y activo libre de riesgo valorados a precios de mercado. Esta definición solo se tiene si el mercado es perfectamente líquido. Si el mercado del activo riesgoso es ilíquido, S_t no es el precio por el cual se podrían vender las N_t unidades de este activo en el portafolio, luego Y_t solo representa el valor en libros de la riqueza.

Estrategias autofinanciadas: Una estrategia de negociación autofinanciada es aquella que no requiere de la entrada o salida de capital después de que ha sido configurada, es decir, la compra o venta de unidades del activo riesgoso es financiada con la venta o compra de activo libre de riesgo en el mismo portafolio. Esta definición implica, considerando una cadena de eventos que ocurren entre los instantes $t-$ y t , que:

- En $t-$ el portafolio contiene N_{t-} unidades del activo riesgoso y ϕ_{t-} de bonos, de forma que su valor es $Y_{t-} = \phi_{t-} B_{t-} + N_{t-} S_{t-}$.

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

- Entre $t-$ y t los precios de los activos cambian a los nuevos precios: $S_t = S_{t-} + dS_t$ y $B_t = B_{t-} + dB_t$.
- El cambio en los precios causa un cambio en el valor del portafolio por $N_{t-}dS_t$ en activo riesgoso y $\phi_{t-}dB_t$ en bonos.
- Las negociaciones se llevan a cabo, pero lo hacen a lo nuevos precios S_t y B_t , de forma que, el número de unidades del activo riesgoso negociadas (dN_t) tienen un valor $S_t dN_t$, y el de los bonos negociados ($d\phi_t$) tienen un valor $B_t d\phi_t$.
- Después de realizadas las negociaciones el nuevo valor del portafolio es $Y_t = \phi_t B_t + N_t S_t$. Esto puede ser expresado como:

$$\begin{aligned}
 dY_t &= Y_t - Y_{t-} \\
 &= (\phi_t B_t + N_t S_t) - (\phi_{t-} B_{t-} + N_{t-} S_{t-}) \\
 &= \phi_t B_t - \phi_{t-} B_{t-} + N_t S_t - N_{t-} S_{t-} \\
 &= \phi_t B_t - \phi_{t-} B_t + \phi_{t-} B_t - \phi_{t-} B_{t-} + N_t S_t - N_{t-} S_t + N_{t-} S_t - N_{t-} S_{t-} \\
 &= B_t(\phi_t - \phi_{t-}) + \phi_{t-}(B_t - B_{t-}) + S_t(N_t - N_{t-}) + N_{t-}(S_t - S_{t-}) \\
 &= B_t d\phi_t + \phi_{t-} dB_t + S_t dN_t + N_{t-} dS_t
 \end{aligned}$$

Como una estrategia autofinanciada satisface que $B_t d\phi_t + S_t dN_t = 0$, es decir, el flujo generado por la compra o venta de un activo financia exactamente la venta o compra del otro, entonces, el proceso de valor de este tipo de estrategia satisface:

$$dY_t = \phi_{t-} dB_t + N_{t-} dS_t, \quad (2.16)$$

luego el cambio en el valor de una estrategia autofinanciada esta determinado solamente por los cambios en los precios de los activos que la conforman. Además, para cualquier estrategia de negociación en activo riesgoso (N_t) es posible encontrar la correspondiente estrategia en bonos (ϕ_t) que hace a la estrategia conjunta autofinanciada.

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

Proceso de valor real: En un mercado ilíquido se debe hacer una distinción entre el proceso de valor (en libros) y el proceso de valor real de un portafolio. En cualquier instante de tiempo t , el proceso de valor real del portafolio es el valor de la posición en activo libre de riesgo ($\phi_t B_t$), más el valor de liquidación de las N_t unidades del activo riesgoso utilizando una estrategia de liquidación óptima. Esta estrategia de liquidación óptima puede ser caracterizada si se considera que, por la condición de equilibrio (2.9), en $t-$ se tiene que:

$$\mathcal{X}(S_{t-}, W_{t-}, t-) + N_{t-} = 0 . \quad (2.17)$$

Si el gran agente decide liquidar en t su posición en activo riesgoso, es decir, coloca una orden de $dN_t = N_t - N_{t-} = -N_{t-}$, entonces el nuevo precio esta determinado por:

$$\mathcal{X}(S_t, W_t, t) = 0 , \quad (2.18)$$

y es a este nuevo precio que la operación es ejecutada, generando una ganancia de $S_t N_{t-}$ para el gran agente. Pero, dado que $\frac{\partial}{\partial S_t} \mathcal{X}(S_t, W_t, t) < 0$, el nuevo precio S_t es menor que S_{t-} , y la venta del gran agente disminuye el precio del activo en el mercado a $S_t < S_{t-}$. Como esto siempre ocurre, el valor real del portafolio debe ser menor que su valor en libros.

El gran agente puede seleccionar una mejor estrategia que minimice las pérdidas asociadas con el efecto adverso sobre el precios de su orden de liquidación, por ejemplo, él puede negociar la mitad de su posición en activo por un precio S' determinado por:

$$\mathcal{X}(S', W_t, t) + \frac{1}{2} N_t = 0 \quad (2.19)$$

y la segunda mitad a un precio S_t determinado por (2.18). De nuevo, como $\frac{\partial}{\partial S_t} \mathcal{X}(S_t, W_t, t) < 0$, se tiene que $S_t < S' < S_{t-}$, luego la primera mitad del activo será vendida a un precio mayor que S_t . Este procedimiento puede ser repetido, mostrando que la mejor estrategia para la liquidación del portafolio es vender la posición en activo mediante una rápida secuencia de pequeñas órdenes.

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

Si denotamos con \bar{S}_t al precio promedio de liquidación siguiendo una estrategia óptima, el proceso de valor real del portafolio esta dado por:

$$Y'_t = \bar{S}_t N_t + \phi_t B_t , \quad (2.20)$$

que es menor que el proceso de valor en libros Y_t .

Aunque la definición del proceso de valor de un portafolio se modifica por la de proceso de valor real en el caso de mercados ilíquidos, el concepto de estrategia autofinanciada no cambia, esto se debe a que indistintamente de la iliquidez se mantiene la idea central de la ausencia de entradas o salidas externas de capital.

2.3 Valoración de derivados en mercados ilíquidos

Consideramos el modelo de mercado ilíquido descrito, que es influenciado por un gran agente que sigue una estrategia (N_t, ϕ_t) , el cual busca cubrir su exposición en un derivado con pago final $H(S_T, T)$, considerando el efecto de su estrategia de negociación sobre el precio del subyacente. Asumimos que este gran agente no busca quedarse con el derivado o manipular su valor al vencimiento (esto porque los derivados se negocian mayoritariamente en mercados OTC, o porque el gran agente es realmente un grupo de agentes pequeños que siguen una misma estrategia de negociación pero que no están coordinados para manipular).

Considerando que la dinámica del precio esta caracterizada por un proceso de difusión de la forma:

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t , \quad (2.21)$$

donde el coeficiente de difusión es de la forma:

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

$$\sigma(S_t, t) = -\frac{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t}}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} + \frac{\partial N}{\partial S_t}} \quad (2.22)$$

y el coeficiente de tendencia es:

$$\mu(S_t, t) = -\frac{\left[\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial W_t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t}}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} + \frac{\partial N}{\partial S_t}} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S_t^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial S_t^2} \right) - \left(\frac{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t}}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} + \frac{\partial N}{\partial S_t}} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial S_t \partial W_t} \right]}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} + \frac{\partial N}{\partial S_t}}, \quad (2.23)$$

asumimos que existe una estrategia de negociación (N_t, ϕ_t) que replica los pagos del derivado al vencimiento $H(S_T, T)$, es decir, una estrategia cuyo proceso de valor Y en el instante T coincide con el valor del derivado casi seguramente. Para evitar oportunidades de arbitraje², el proceso de valor de esta estrategia $Y(S_t, t) = N_t S_t + \phi_t B_t$ debe ser igual al precio de mercado del derivado $H(S_t, t)$ para todo $t \in [0, T]$.

Como las estrategias de negociación consideradas son autofinanciadas se tiene que:

$$dY(S_t, t) = N_t dS_t + \phi_t dB_t = N_t dS_t + r \phi_t B_t dt \quad (2.24)$$

y como $\phi_t B_t = Y(S_t, t) - N_t S_t$, entonces:

$$dY(S_t, t) = N_t dS_t + r[Y(S_t, t) - N_t S_t] dt, \quad (2.25)$$

donde

$$dY(S_t, t) - rY(S_t, t) dt = N_t dS_t - rN_t S_t dt. \quad (2.26)$$

Por la condición de no arbitraje ($Y(S_t, t) = H(S_t, t)$), la expresión (2.26) es equivalente a:

$$dH(S_t, t) - rH(S_t, t) dt = N_t dS_t - rN_t S_t dt. \quad (2.27)$$

Aplicando el lema de Itô a $H(S_t, t)$ se tiene que:

²Una estrategia de negociación se dice de arbitraje si cumple:

1. $Y_0 = 0$. No requiere inversión inicial.
2. $P[Y_t \geq 0] = 1$ para todo t . No tiene riesgo.
3. $P[Y_t > 0] > 0$ para todo t . Genera ganancia con probabilidad estrictamente positiva.

$$\begin{aligned} dH(S_t, t) &= \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \\ &= \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \mu(S_t, t) \frac{\partial H}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} \sigma^2(S_t, t) \right) dt + \sigma(S_t, t) \frac{\partial H}{\partial S_t} dW_t , \end{aligned}$$

luego la expresión (2.27) es:

$$\begin{aligned} dH(S_t, t) - rH(S_t, t)dt &= N_t dS_t - rN_t S_t dt \\ \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \mu(S_t, t) \frac{\partial H}{\partial S_t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} \sigma^2(S_t, t) \right) dt + \sigma(S_t, t) \frac{\partial H}{\partial S_t} dW_t - rH(S_t, t)dt &= N_t(\mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t) - rN_t S_t dt . \end{aligned}$$

Si el tamaño de la posición en activo riesgoso en el portafolio se toma como la derivada parcial del valor del derivado respecto a S_t :

$$N_t \equiv N(S_t, t) = \frac{\partial H(S_t, t)}{\partial S_t} \quad (2.28)$$

el riesgo de la estrategia desaparece, es decir, se garantiza que la estrategia es suficiente para cubrir el componente estocástico del precio de la opción. Este tipo de estrategia se conoce como *cobertura delta*, y al seguirla se tiene que:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2(S_t, t) \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} - rH(S_t, t) = 0 , \quad (2.29)$$

y por la expresión (2.22):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial W_t}}{\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial S_t} + \frac{\partial N}{\partial S_t}} \right)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} - rH(S_t, t) = 0 , \quad (2.30)$$

donde la función $H(S_t, t)$ debe satisfacer la condición de frontera en T y las condiciones de frontera apropiadas si $S = 0$ o $S \rightarrow \infty$. La ecuación (2.30) es una extensión no lineal de la ampliamente conocida ecuación diferencial parcial de Black-Scholes, en donde la no linealidad es introducida por el efecto de retroalimentación o *feedback* entre el proceso de precio del activo subyacente y la estrategia del agente en un mercado ilíquido.

2.4 Conclusiones del capítulo

La visión económica general del mercado ilíquido basada en la función exceso de demanda por el activo riesgoso, arroja luces sobre los elementos claves a tener en cuenta, y que serán

2. Modelo de mercado financiero ilíquido

desarrollados en los modelos considerados en los capítulos siguientes. Específicamente: la relación de los coeficientes que determinan la dinámica del precio del activo riesgoso con las estrategias de negociación de los agentes, la consistencia del concepto de estrategia autofinanciada en mercados con iliquidez, y la potencial no linealidad de las ecuaciones diferenciales parciales de valoración de derivados.

En esta investigación se proponen y analizan modelos de mercados financieros bajo diferentes supuestos sobre la iliquidez de los activos riesgosos. Específicamente, se proponen los siguientes modelos a desarrollar en el resto del documento. 1. La iliquidez del mercado es proporcional al precio del activo y los agentes siguen estrategias dinámicas convencionales; 2. La iliquidez del mercado es función del precio del activo y los agentes siguen estrategias de negociación estocásticas (*noise traders*); 3. La iliquidez del mercado es estocástica, descrita por un proceso de reversión a la media, y los agentes siguen estrategias dinámicas convencionales. Para cada modelo se analiza la dinámica de los precios y sus propiedades, se caracterizan las estrategias para la replicación de derivados y se establecen las ecuaciones diferenciales parciales de valoración correspondientes.

3. Mercado con iliquidez simple

Antes de iniciar con la presentación y análisis de los modelos de mercado con iliquidez propuestos, se describe un modelo de mercado perfectamente líquido, siguiendo lo desarrollado por Black and Scholes (1973a). Este servirá como punto inicial de referencia para la caracterización de los precios de los diferentes activos, establecer la estrategia que se sigue para la valoración de derivados, y analizar los efectos de la iliquidez.

Posteriormente se presentan modelos de mercado con iliquidez partiendo de una dinámica para el precio del activo riesgoso como la considerada en los trabajos de Wilmott and Schönbucher (2000) y Glover et al. (2010), pero aportando al análisis al considerar modelos específicos para la estrategia de negociación de los agentes, incluyendo agentes ruidos (*noise trader*).

3.1 Modelo de mercado con liquidez perfecta

Consideramos un modelo de mercado definido sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_t)$ en el intervalo finito $[0, T]$. El mercado se asume libre de arbitraje y *sin fricciones*, es decir, no se consideran costos de transacción o tasas impositivas, los agentes negocian a los precios observados (precio aceptantes), y los mercados de todos los activos se asumen perfectamente líquidos.

El mercado esta compuesto por tres tipos de activos. Un activo libre de riesgo, con valor en t denotado por B_t para $t \in [0, T]$, el cual satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$dB_t = rB_t dt , \tag{3.1}$$

3. Mercado con iliquidez simple

donde r es la tasa de interés libre de riesgo del mercado, la cual se asume constante y conocida. La solución de (3.1) es:

$$B_t = B_0 e^{rt} . \quad (3.2)$$

El segundo es un activo riesgoso, con valor en t denotado por S_t para $t \in [0, T]$, y sobre el cual se asume que satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t , \quad (3.3)$$

donde α y $\sigma > 0$ son constantes que representan la tasa de rentabilidad instantánea y volatilidad del activo respectivamente. W_t es un movimiento Browniano estándar definido sobre el espacio de probabilidad considerado y representa los choques aleatorios asociados a los cambios en los precios. La solución de (3.3) es:

$$S_t = S_0 e^{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t} . \quad (3.4)$$

La figura (3-1) muestra la simulación de 100 posibles trayectorias del precio del activo riesgoso bajo este modelo.

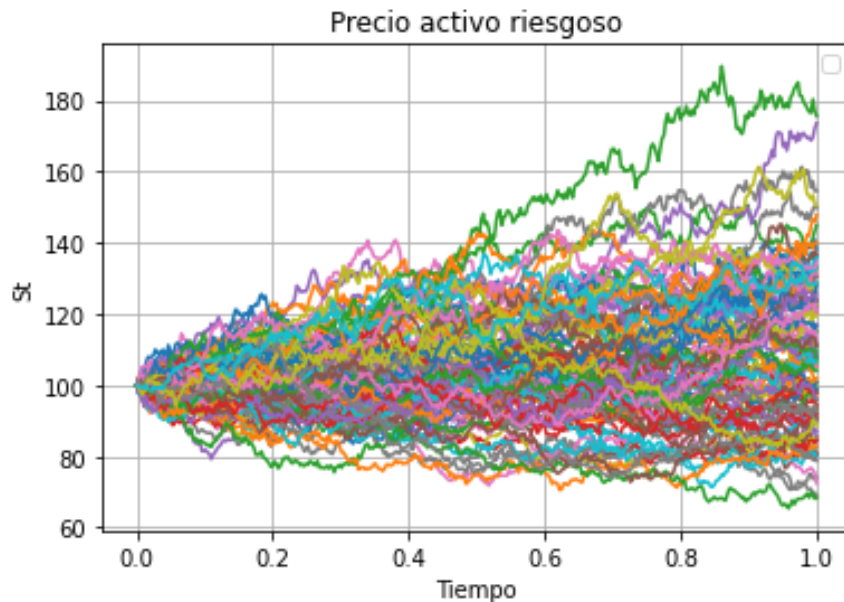


Figura 3-1: Simulación de Monte Carlo de 100 posibles trayectorias del precio del activo riesgoso para: $S_0 = 100$, $\alpha = 0,1$, $\sigma = 0,2$, $T = 1$, $dt = 1/365$.

3. Mercado con iliquidez simple

El tercer tipo de activo es un derivado financiero pactado sobre el activo riesgoso, con valor en t denotado por $H(S_t, t)$ y vencimiento en T , de forma que, $H(S_T, T) = \Phi(S_T)$. Se asume que $H(S_t, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times [0, T], \mathbb{R})$, y aplicando el lema del Itô:

$$\begin{aligned}
 dH(S_t, t) &= \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \\
 &= \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial S_t} (\alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt \\
 &= \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \alpha S_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial H}{\partial S_t} dW_t .
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Se busca determinar el valor del derivado en cualquier instante de tiempo t , para lo cual un agente sigue una estrategia (portafolio) autofinanciada que replique perfectamente los posibles pagos del derivado al vencimiento $H(S_T, T)$. Como el mercado es libre de arbitraje, el valor de este portafolio de replicación en cualquier instante $t \leq T$ debe ser igual al valor del derivado.

Este portafolio estará compuesto por N_t unidades del activo riesgoso y ϕ_t unidades del activo libre de riesgo, con $(N_t, \phi_t) \in \mathbb{R}^2$, de forma que, el valor de la estrategia del agente en t es:

$$Y_t = N_t S_t + \phi_t B_t , \tag{3.6}$$

lo que implica:

$$\phi_t = \frac{Y_t - N_t S_t}{B_t} . \tag{3.7}$$

De (3.6) y la condición de autofinanciamiento se sigue que los cambios en el valor de la estrategia son:

$$\begin{aligned}
 dY_t &= N_t dS_t + \phi_t dB_t \\
 &= N_t (\alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \phi_t (r B_t dt)
 \end{aligned}$$

3. Mercado con iliquidez simple

y por (3.7),

$$\begin{aligned}
 dY_t &= \alpha S_t N_t dt + \sigma S_t N_t dW_t + \frac{Y_t - N_t S_t}{B_t} (r B_t dt) \\
 &= \alpha S_t N_t dt + \sigma S_t N_t dW_t + Y_t r dt - N_t r S_t dt \\
 &= [(\alpha - r) S_t N_t + r Y_t] dt + \sigma S_t N_t dW_t .
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como la estrategia debe ser tal que $Y_T = H(S_T, T)$, la ausencia de arbitraje implica que $dY_t = dH(S_t, t)$, es decir, las expresiones (3.5) y (3.8) deben ser iguales. Comparando los coeficientes de difusión de las dos expresiones se tiene que:

$$\sigma S_t N_t = \sigma S_t \frac{\partial H}{\partial S_t} ,$$

luego

$$N_t = \frac{\partial H}{\partial S_t} , \tag{3.9}$$

lo que indica que la cantidad del activo riesgoso en el portafolio de replicación esta determinada por la derivada parcial del valor del derivado respecto al precio del activo, lo que se conoce como *estrategia delta*.

Comparando los coeficientes de tendencia en (3.5) y (3.8) se tiene que:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \alpha S_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} = (\alpha - r) S_t N_t + r Y_t ,$$

y como $Y_t = H(S_t, t)$ y $N_t = \frac{\partial H}{\partial S_t}$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial t} + \alpha S_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} &= (\alpha - r) S_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + r H \\
 \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} &= -r S_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + r H ,
 \end{aligned}$$

de donde se llega a la clásica ecuación diferencial parcial de Black-Scholes:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} + r S_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} - r H = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T)} \tag{3.10}$$

donde $\Phi(S_T)$ es la función que describe los posibles pagos del derivado al vencimiento. Esta es una ecuación diferencial parcial de segundo orden parabólica, cuya solución se puede

3. Mercado con iliquidez simple

expresar en la forma:

$$H(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E[\Phi(S_T)] , \quad (3.11)$$

donde S_t satisface:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t . \quad (3.12)$$

Es importante destacar que esta estrategia para la valoración del derivado implica que los agentes puedan negociar cualquier cantidad $N_t = \frac{\partial H}{\partial S_t}$ del activo riesgoso sin alterar su precio, es decir, implica que el mercado de este activo es perfectamente líquido, y es precisamente la falla de este supuesto la que es considerada en esta investigación. En las siguientes secciones se proponen diferentes modelos de mercados financieros en los cuales no se tiene liquidez perfecta en el activo riesgoso.

3.2 Modelo de mercado con iliquidez simple en función del precio

Consideramos ahora un modelo de mercado en el cual la dinámica del precio del activo riesgoso incorpora un factor de iliquidez¹ determinístico como en Frey (2000) y Glover et al. (2010), pero acá el coeficiente del término de tendencia del proceso de precio no se asumirá igual a cero, esto para poder estudiar los efectos sobre este coeficiente y sobre las estrategias de negociación de la iliquidez. Consideramos entonces que la ecuación diferencial estocástica que satisface el proceso de precio del activo riesgoso es:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t + \lambda(S_t, t) dN(S_t, t) , \quad (3.13)$$

donde α es la tasa de rentabilidad esperada y $\sigma > 0$ es la volatilidad del activo, las cuales se asumen constantes. W_t representa un movimiento Browniano estándar definido sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ y la σ -álgebra \mathcal{F} es la generada por W_t . El término $\lambda(S_t, t) \geq 0$ denota el factor de iliquidez del mercado y $N(S_t, t)$ el número de unidades del activo riesgoso que posee un gran agente como parte de su estrategia de negociación. El término $\lambda(S_t, t) dN(S_t, t)$ describe el impacto sobre el precio del activo de un

¹En Frey (2000) este se denomina factor de liquidez, pero realmente representa el grado de iliquidez del mercado, razón por la cual en este trabajo es denominado de esta forma.

3. Mercado con iliquidez simple

cambio en el número de unidades que posee el agente ponderado por el factor de iliquidez, de forma que este factor modula la presión a la baja en el precio del activo cuando el agente vende unidades ($dN(S_t, t) < 0$) o la presión al alza cuando compra ($dN(S_t, t) > 0$).

Se considera también un activo libre de riesgo que representa el valor del dinero en el mercado y puede considerarse como un bono emitido por un banco central. El mercado de este activo se considera perfectamente líquido y su precio satisface:

$$dB_t = rB_t dt \quad , \text{ o de forma equivalente, } \quad B_t = B_0 e^{rt} \quad (3.14)$$

donde r es una tasa de interés sin riesgo constante y conocida y B_0 es el valor de este activo en el instante $t = 0$.

3.2.1 Iliquidez proporcional al precio del activo

Como un primer caso particular del modelo con iliquidez simple, detallando los resultados presentados en Duffie (2010) y Glover et al. (2010), consideramos que $\lambda(S_t, t) = \lambda S_t$, con $\lambda > 0$ constante, es decir:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t + \lambda S_t dN(S_t, t). \quad (3.15)$$

Manteniendo sin cambios los demás términos de la expresión (3.15), si $dN(S_t, t) > 0$ el precio tiende a subir, mientras que si $dN(S_t, t) < 0$ el precio tiende a bajar. Desde luego, una estrategia de comprar y mantener la posición hasta el final, $dN(S_t, t) = 0$, no afecta la dinámica de los precios.

Para describir el efecto del factor de iliquidez (λ) y la estrategia de negociación del agente ($N(S_t, t)$) sobre los coeficientes del proceso de precios, se asumirá que las estrategias de negociación seguidas por los agentes satisfacen que $N(S_t, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times [0, T], \mathbb{R})$. Aplicando el lema de Itô sobre $N_t \equiv N(S_t, t)$, se tiene:

3. Mercado con iliquidez simple

$$dN_t = \frac{\partial N_t}{\partial t} dt + \frac{\partial N_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2, \quad (3.16)$$

que al ser reemplazado en (3.15) lleva a:

$$\begin{aligned} dS_t &= \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t + \lambda S_t dN_t \\ dS_t &= \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t + \lambda S_t \left(\frac{\partial N_t}{\partial t} dt + \frac{\partial N_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \right) \\ dS_t \left(1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t} \right) &= \left(\alpha S_t + \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial t} \right) dt + \frac{\lambda S_t}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \sigma S_t dW_t. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Elevando al cuadrado esta última expresión, y dado que $dt^2 = 0$ y $(dW_t)^2 = dt$, se tiene:

$$(dS_t)^2 \left(1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t} \right)^2 = \left(\frac{\lambda S_t}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \right)^2 + \sigma^2 S_t^2 dt. \quad (3.18)$$

Como se esta considerando la dinámica de estas variables en intervalos infinitesimales de longitud dt , es decir, $dt \rightarrow 0$, el primer término en lado derecho de (3.18) tiende a cero por las reglas de multiplicación de diferenciales estocásticos, con lo cual,

$$(dS_t)^2 = \frac{\sigma^2 S_t^2 dt}{\left(1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t} \right)^2}, \quad (3.19)$$

y de la expresión (3.17) se sigue que:

$$\begin{aligned} dS_t \left(1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t} \right) &= \left(\alpha S_t + \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial t} \right) dt + \frac{\lambda S_t}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \sigma S_t dW_t \\ dS_t \left(1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t} \right) &= \left[\alpha S_t + \lambda S_t \left(\frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma S_t}{1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \right)^2 \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} \right) \right] dt + \sigma S_t dW_t \\ dS_t &= \frac{S_t \left[\alpha + \lambda \left(\frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma S_t}{1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \right)^2 \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} \right) \right]}{\left(1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t} \right)} dt + \frac{\sigma S_t}{1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} dW_t. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Denotando por:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \quad (3.21)$$

3. Mercado con iliquidez simple

y

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\left(1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}\right)} \left[\alpha + \lambda \left(\frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 S_t^2 \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} \right) \right], \quad (3.22)$$

se tiene que la dinámica de los precios en este modelo es:

$$dS_t = \hat{\alpha} S_t dt + \hat{\sigma} S_t dW_t, \quad (3.23)$$

asumiendo que $1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t} \neq 0$. Se puede ver que si $\lambda = 0$ se tiene la dinámica de precios clásica del modelo Black-Scholes (3.3).

De las expresiones (3.21) y (3.22) se puede observar que:

- Si λ toma valores cada vez más grandes, es decir, si el mercado es cada vez más ilíquido, la volatilidad del precio del activo ($\hat{\sigma}$) tiende a disminuir lo cual es consistente con el hecho de no observar mayores variaciones en el precio del activo si este no esta siendo negociado en el mercado por la falta de liquidez.
- Si λ toma valores cada vez más grandes, su efecto sobre la tendencia en el precio ($\hat{\alpha}$) estará determinado por las decisiones de inversión (estrategia) del agente.

3.2.2 Estrategias de negociación de los agentes

En los mercados financieros actuales es posible encontrar diversas estrategias de negociación dinámica. Algunos ejemplos son:

- *Comprar y mantener*: esta estrategia simple consiste en comprar una unidad del activo y mantenerla, $N(S_t, t) = 1$.
- *Órdenes límites*: en el caso de una orden de venta con precio de ejercicio \bar{S} , la estrategia es vender una unidad del activo si el precio alcanza o supera el nivel \bar{S} y luego no hacer nada, es decir, antes de vender la estrategia es:

3. Mercado con iliquidez simple

$$N(S_t, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar{S} - S_t \leq 0 \\ 1 & \text{si } \bar{S} - S_t > 0 \end{cases}, \quad (3.24)$$

y después de la venta es $N(S_t, t) = 0$. En el caso de una orden de compra con precio de ejercicio \bar{S} la estrategia es comprar una unidad del activo si el precio alcanza o supera \bar{S} y luego no hacer nada, es decir, antes de la compra la estrategia es:

$$N(S_t, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_t - \bar{S} < 0 \\ 1 & \text{si } S_t - \bar{S} \geq 0 \end{cases}, \quad (3.25)$$

y después de la compra es $N(S_t, t) = 1$.

- *Negociación a través de una barrera:* en este caso $N(S_t, t)$ consiste en tener una unidad del activo cuando $S_t > \bar{S}$, y cuando $S_t < \bar{S}$ no tener unidades del activo. En este caso, cuando el precio del activo supera el precio \bar{S} desde valores inferiores se compra una unidad y si los cruza desde valores superiores se vende.

Para las anteriores estrategias se tiene que $\frac{\partial N_t}{\partial S_t} = 0$ y $\frac{\partial N_t}{\partial t} = 0$. Se sigue de (3.21) y (3.22) que $\hat{\alpha} = \alpha S_t$ y $\hat{\sigma} = \sigma S_t$, es decir, el proceso de precio del activo riesgoso es el clásico movimiento Browniano geométrico del modelo Black-Scholes.

- *Estrategias basadas en optimización:* surgen como solución a problemas de control óptimo relacionados con la selección de políticas de inversión y consumo óptimas por parte de un agente con preferencias modeladas vía su función de utilidad. Un ejemplo clásico de este tipo de estrategias se encuentra en el trabajo de Merton and Samuelson (1992), donde se analizan reglas de inversión óptimas para agentes cuya función de utilidad presenta aversión absoluta al riesgo constante, en el contexto de un mercado con precios lognormales.

En general, las estrategias de inversión óptima encontradas en este caso son de la forma:

3. Mercado con iliquidez simple

$$N(S_t, t) = \theta_0 e^{-\theta_1 t} S_t^{-\theta_2}, \quad (3.26)$$

donde $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ son constantes que dependen de las características del modelo. Estrategias más complejas pueden ser derivadas al considerar otras especificaciones de la función de utilidad de los agentes y/o del conjunto de oportunidades de inversión, planteando el problema de optimización y resolviendo la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman correspondiente.

En la Figura 3-2 se representa la estrategia (3.26) para distintos valores del S_t a lo largo del tiempo. En la figura de la izquierda ($\theta_0 = 10; \theta_1 = \theta_2 = 0,5$) se tiene una estrategia en la cual el agente adquiere más unidades del activo si el precio está bajo. En la figura de la derecha ($\theta_0 = -10; \theta_1 = \theta_2 = 0,5$) la estrategia indica que el agente vende más unidades del activo si el precio está bajo.

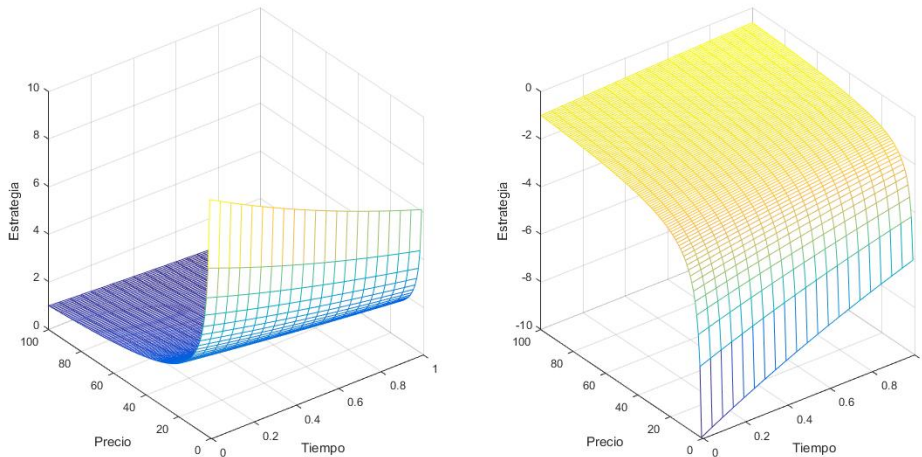


Figura 3-2: Estrategias de negociación basadas en optimización

Para estrategias de inversión como las descritas en (3.26) se tiene que:

$$\frac{\partial N_t}{\partial t} = -\theta_1 N(S_t, t) \quad ; \quad \frac{\partial N_t}{\partial S_t} = -\theta_2 N(S_t, t) S_t^{-1} \quad ; \quad \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} = \theta_2(\theta_2 + 1) N(S_t, t) S_t^{-2} \quad (3.27)$$

3. Mercado con iliquidez simple

y la dinámica del precio del activo riesgoso es:

$$dS_t = \hat{\alpha}S_t dt + \hat{\sigma}S_t dW_t, \quad (3.28)$$

con:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{1 + \lambda\theta_2 N(S_t, t)}, \quad (3.29)$$

y

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{1 + \lambda\theta_2 N(S_t, t)} \right) \left[\alpha + \lambda \left(-\theta_1 N(S_t, t) + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \theta_2 (\theta_2 + 1) N(S_t, t) \right) \right]. \quad (3.30)$$

Las expresiones (3.28) a (3.30) describen el efecto de retroalimentación (*feedback*) que se tiene entre la estrategia de negociación del agente y los precios de los activos. En general, las estrategias de negociación se clasifican como de retroalimentación positiva si el agente compra unidades del activo cuando su precio sube y vende cuando el precio baja, mientras que son de retroalimentación contraria o negativa cuando vende el activo si el precio sube y compra cuando baja.

Considerando nuevamente una estrategia de negociación como la representada por (3.26), en la figura **3-3** se puede ver la simulación de Monte Carlo de una posible trayectoria del precio del activo bajo una estrategia en la que el agente compra unidades del activo si el precio sube -retroalimentación positiva- (azul), y la trayectoria resultante cuando el agente compra unidades del activo si el precio baja -retroalimentación contraria- (rojo), generadas a partir de las expresiones (3.28) a (3.30), para un factor de iliquidez $\lambda = 0,5$.

3. Mercado con iliquidez simple



Figura 3-3: Simulación del precio del activo bajo estrategia positiva y contraria para: $S_0 = 100$, $T = 1$, $dt = 1/365$, $\theta_0 = 10$ (azul), $\theta_0 = -10$ (rojo), $\theta_1 = \theta_2 = 0,5$, $\alpha = 0,25$, $\sigma = 0,3$ para $\lambda = 0,5$.

En la figura 3-4 se presenta la simulación de Monte Carlo de una posible trayectoria del precio del activo bajo estrategia positiva (azul) y negativa (roja), generadas a partir de las expresiones (3.28) a (3.30) para un factor de iliquidez $\lambda = 1$.



Figura 3-4: Simulación del precio del activo bajo estrategia positiva y contraria para: $S_0 = 100$, $T = 1$, $dt = 1/365$, $\theta_0 = 10$ (azul), $\theta_0 = -10$ (rojo), $\theta_1 = \theta_2 = 0,5$, $\alpha = 0,25$, $\sigma = 0,3$ para $\lambda = 1$.

3. Mercado con iliquidez simple

En las simulaciones se consideran dos posibles valores del factor de iliquidez, $\lambda = 0,5$ y $\lambda = 1$, que se contrastan con la situación de liquidez perfecta $\lambda = 0$ (en color negro en la figuras). Se observa de forma consistente que a mayor valor del factor λ (mayor iliquidez del mercado), mayor es el impacto de la estrategia sobre el precio del activo. En el caso de la estrategia positiva se observa el efecto de la presión al alza en los precios, mientras que en la estrategia contraria la presión es a la baja con un efecto menor que en la estrategia positiva a mayor valor del factor de iliquidez.

3.2.3 Valoración de derivados

Se considera ahora el problema de valorar un derivado financiero $H_t \equiv H(S_t, t)$ con vencimiento en $T > 0$ y $H(S_T, T) = \Phi(S_T)$, donde $\Phi(S_T)$ describe sus posibles pagos al vencimiento. El derivado esta pactado sobre un activo riesgoso cuyo precio satisface la ecuación diferencial estocástica (3.23). Se asume que $H(S_t, t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}_+ \times [0, T], \mathbb{R}_+)$. Para determinar el valor en $t \leq T$ del derivado, consideramos un agente que conforma un portafolio autofinanciado (estrategia) compuesto por $N_t \equiv N(S_t, t)$ unidades del activo riesgoso y ϕ_t unidades del activo libre de riesgo, siguiendo los trabajos de Wilmott and Schönbucher (2000) y Glover et al. (2010) para el caso en el cual se tiene retroalimentación completa, de forma que el valor en t de su estrategia es:

$$Y_t = N_t S_t + \phi_t B_t . \quad (3.31)$$

Por la condición de autofinanciamiento y dado que $\phi_t = \frac{Y_t - N_t S_t}{B_t}$, se sigue que:

$$\begin{aligned} dY_t &= N_t dS_t + \phi_t dB_t \\ &= N_t (\hat{\alpha} S_t dt + \hat{\sigma} S_t dW_t) + \left(\frac{Y_t - N_t S_t}{B_t} \right) r B_t dt \\ &= (\hat{\alpha} N_t S_t + r Y_t - r N_t S_t) dt + \hat{\sigma} N_t S_t dW_t , \end{aligned} \quad (3.32)$$

3. Mercado con iliquidez simple

y aplicando el lema de Itô al derivado $H_t \equiv H(S_t, t)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 dH_t &= \frac{\partial H_t}{\partial t} dt + \frac{\partial H_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \\
 &= \frac{\partial H_t}{\partial t} dt + \frac{\partial H_t}{\partial S_t} (\hat{\alpha} S_t dt + \hat{\sigma} S_t dW_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} \hat{\sigma}^2 S_t^2 dt \\
 &= \left(\frac{\partial H_t}{\partial t} + \hat{\alpha} S_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} \right) dt + \hat{\sigma} S_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} dW_t .
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

La estrategia del agente busca replicar el valor del derivado al vencimiento, $Y_T = H(S_T, T)$, lo que implica, por no arbitraje, que $dY_t = dH_t$. Igualando los coeficientes de difusión de las expresiones (3.32) y (3.33) se encuentra:

$$\hat{\sigma} N_t S_t = \hat{\sigma} S_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} \implies N_t = \frac{\partial H_t}{\partial S_t} , \tag{3.34}$$

es decir, la cantidad de unidades del activo riesgoso que el agente debe tener es su portafolio esta dada por la derivada parcial del valor del derivado respecto al precio del activo subyacente (cobertura delta). Igualando los coeficientes de tendencia en (3.32) y (3.33), dado que $Y_t = H_t$ y $N_t = \frac{\partial H_t}{\partial S_t}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha} \frac{\partial H_t}{\partial S_t} S_t + r H_t - r \frac{\partial H_t}{\partial S_t} S_t &= \frac{\partial H_t}{\partial t} + \hat{\alpha} S_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} \\
 \frac{\partial H_t}{\partial t} + r S_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} - r H_t &= 0
 \end{aligned}$$

y como $\hat{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}}$, entonces:

$$\boxed{ \frac{\partial H_t}{\partial t} + r S_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \right)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} - r H_t = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T) } , \tag{3.35}$$

que es la ecuación diferencial parcial que determina el valor del derivado en este caso. La ecuación (3.35) es una extensión no lineal de la ecuación de Black-Scholes (3.10), en donde

3. Mercado con iliquidez simple

la no linealidad se debe a la presencia del factor de iliquidez del mercado y al efecto de retroalimentación que este crea en relación con la estrategia de negociación del agente. Desde luego esta ecuación se reduce a la de Black-Scholes si el mercado es perfectamente líquido ($\lambda = 0$).

3.3 La iliquidez como función del precio del activo

Como una extensión del modelo anterior y siguiendo a Duffie (2010) y Glover et al. (2010), consideramos ahora el caso en el cual el factor de iliquidez del mercado es una función determinística $g(\cdot)$ del precio del activo riesgoso, es decir, $\lambda(S_t, t) = g(S_t)$. En este caso tenemos que:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t + g(S_t) dN(S_t, t) \quad (3.36)$$

Bajo las mismas condiciones y argumentos de no arbitraje presentados en la sección anterior, y denotando con:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - g(S_t) \frac{\partial N_t}{\partial S_t}}, \quad (3.37)$$

y

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{\left(1 - g(S_t) \frac{\partial N_t}{\partial S_t}\right)} \left[\alpha + \frac{g(S_t)}{S_t} \frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{g(S_t)}{2} \tilde{\sigma}^2 S_t^2 \frac{\partial^2 N}{\partial S_t^2} \right], \quad (3.38)$$

se tiene que la dinámica de los precios satisface:

$$dS_t = \tilde{\alpha} S_t dt + \tilde{\sigma} S_t dW_t, \quad (3.39)$$

asumiendo que $1 - g(S_t) \frac{\partial N_t}{\partial S_t} \neq 0$. Siguiendo los mismos argumentos de la sección anterior, se tiene que la ecuación diferencial parcial no lineal que determina el valor del derivado es, en este caso:

$$\boxed{\frac{\partial H_t}{\partial t} + r S_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{1 - g(S_t) \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \right)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} - r H_t = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T)} \quad (3.40)$$

3. Mercado con iliquidez simple

En los trabajos de Liu and Yong (2005), Kyle (1985), Back (1993), Vayanos (2001) y Bertsimas and Lo (1998), se propone la siguiente forma funcional para el factor de iliquidez del mercado:

$$\lambda(S_t, t) = g(S_t) = \frac{\xi}{S_t} [1 - e^{-\beta(T-t)}] \quad (3.41)$$

donde la constante $\xi > 0$ es el coeficiente que mide el impacto en el precio del activo por unidad negociada y el parámetro $\beta > 0$ caracteriza la intensidad del factor de iliquidez y su decaimiento en el tiempo. Esta forma funcional asume que cuando el agente compra el precio del activo sube, cuando vende el precio baja y la magnitud del impacto es proporcional al número de unidades negociadas. Adicionalmente, esta forma implica que a medida que pasa el tiempo la información privada sobre el valor del activo se va revelando, de modo que el impacto del precio disminuye gradualmente hasta llegar a cero en T , lo que evita cualquier manipulación del precio al vencimiento.

Siguiendo este modelo para el factor de iliquidez, la ecuación diferencial parcial de valoración es:

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{1 - \frac{\xi}{S_t} [1 - e^{-\beta(T-t)}] \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \right)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} - rH_t = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T) \quad (3.42)$$

3.4 Iliquidez proporcional al precio y agentes ruidosos

Consideramos nuevamente un modelo de mercado en el cual la iliquidez del activo riesgoso es proporcional a su precio, pero, en este caso, el agente es un agente ruidoso o *noise trader*. En el medio financiero se asume que este tipo de agentes toman sus decisiones de compra y venta basados no solamente en la observación del precio del activo, si no en otros factores que consideran como útiles, pero que en realidad no generan mejores resultados que una elección aleatoria. Los agentes ruidosos contribuyen sustancialmente a los días con alto volumen de negociación porque se cree que toman decisiones irracionales en respuesta a la información que reciben.

3. Mercado con iliquidez simple

La definición de agente ruidoso es poco clara en la literatura, puesto que la definición sobre qué constituye exactamente una inversión racional tampoco es una definición estándar, sin embargo, dado el aporte de este tipo de agentes a un alto volumen de negociaciones, y por lo tanto a afectar la liquidez o iliquidez del mercado, se propone un modelo para analizar la dinámica de precios y el problema de valoración de derivados en un mercado ilíquido y con presencia de este tipo de agentes.

Nuevamente consideramos que el mercado esta conformado por un activo libre de riesgo (B_t), un activo riesgoso (S_t), y un derivado pactado sobre el activo riesgoso ($H_t \equiv H(S_t, t)$) con vencimiento en T y pago final $H(S_T, T) = \Phi(S_T)$. Sobre el activo libre de riesgo se asume que satisface $dB_t = rB_t dt$, mientras que la dinámica del precio del activo riesgoso esta determinada por:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t + \lambda S_t dN_t , \quad (3.43)$$

donde $\lambda > 0$ constante es el factor de iliquidez del mercado y N_t es el proceso que describe la cantidad de unidades del activo riesgoso que posee el agente ruidoso en el instante t . En este modelo se asume que el cambio en la cantidad de unidades que posee el agente es descrito por un proceso de la forma:

$$dN_t = \eta(\theta - N_t)dt + \gamma dW_t , \quad (3.44)$$

es decir, su estrategia de negociación en el activo riesgoso sigue un proceso de reversión a la media donde η es una constante que representa la velocidad de reversión, θ es una constante que representa el número de unidades del activo que el agente posee en el largo plazo, $\gamma > 0$ es una constante que representa la volatilidad instantánea asociada al cambio en el número de unidades y W_t es el mismo movimiento Browniano estándar (fuente de aleatoriedad) asociado al precio del activo.

La selección de un proceso de reversión a la media para describir la estrategia de negociación de los agentes es novedosa en la literatura y no solo permite describir el contexto de un agente ruidoso, también incorpora elementos considerados de forma separada en otros trabajos, como, por ejemplo, el impacto permanente de la velocidad de negociación del agente en la

3. Mercado con iliquidez simple

dinámica de los precios (ver Berkman and Koch (2008)).

El valor de la estrategia completa de negociación del agente esta dado por:

$$Y_t = \phi_t B_t + N_t S_t, \quad (3.45)$$

donde ϕ_t representa el tamaño de la posición en activo libre de riesgo y N_t el número de unidades del activo riesgoso la cual es autofinanciada. Considerando los elementos del modelo de mercado, la relación entre el factor de iliquidez, la estrategia de negociación del agente y la dinámica de los precios de los activos esta dada por:

- **Precio del activo riesgoso:** la dinámica del precio de este activo satisface,

$$\begin{aligned} dS_t &= \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t + \lambda S_t dN_t \\ &= \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t + \lambda S_t [\eta(\theta - N_t) dt + \gamma dW_t] \\ &= S_t [\alpha + \lambda \eta(\theta - N_t)] dt + S_t (\sigma + \lambda \gamma) dW_t. \end{aligned} \quad (3.46)$$

El coeficiente de tendencia en la ecuación (3.46) muestra el efecto permanente de la estrategia de negociación del agente sobre los precios, así como el de su velocidad de negociación, ponderado por el factor de iliquidez del mercado. En el coeficiente de difusión también se captura el efecto de la volatilidad de la estrategia de negociación ponderado por el factor de iliquidez.

La figura **3-5** muestra la simulación de 20 posibles trayectorias de la estrategia de negociación del agente y del precio del activo (en gris), junto con el valor promedio de estas trayectorias (rojo), cuando este busca tener en el largo plazo una unidad más del activo partiendo de 100 unidades en $t = 0$ y tomando $\lambda = 0$, es decir, en un mercado con liquidez perfecta.

3. Mercado con iliquidez simple

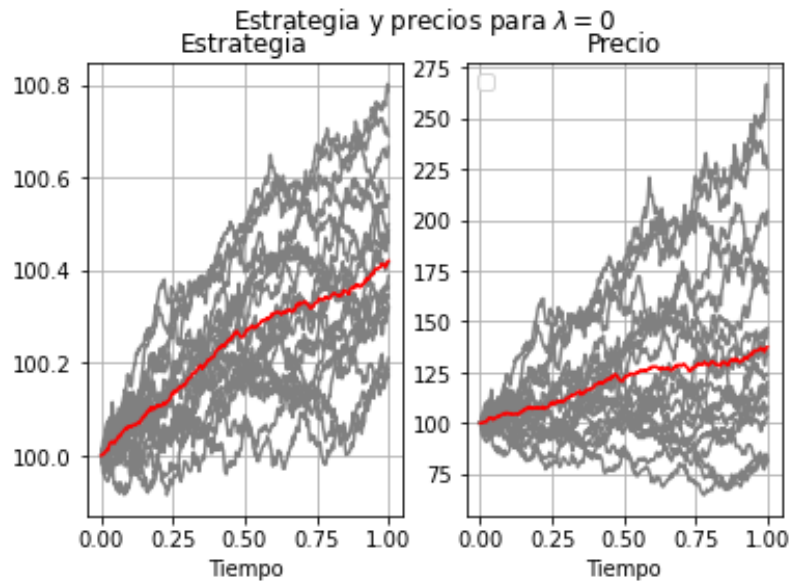


Figura 3-5: (Izquierda) Simulación Monte Carlo de 20 posibles trayectorias de la estrategia de negociación (gris), junto con su valor promedio (rojo), para: $N_0 = 100$, $\eta = 0,5$, $\theta = 101$ y $\gamma = 0,2$. (Derecha) Simulación Monte Carlo de 20 posibles trayectorias del precio del activo (gris), junto con su valor promedio (rojo), para: $S_0 = 100$, $\alpha = 0,25$, $\sigma = 0,3$, $T = 1$, $dt = 1/365$ y $\lambda = 0$.

La figura **3-6** muestra la simulación de 20 posibles trayectorias de la estrategia de negociación del agente y del precio del activo (en gris), junto con el valor promedio de estas trayectorias (rojo), cuando este busca tener en el largo plazo una unidad más del activo partiendo de 100 unidades en $t = 0$ y tomando $\lambda = 0,5$.

3. Mercado con iliquidez simple

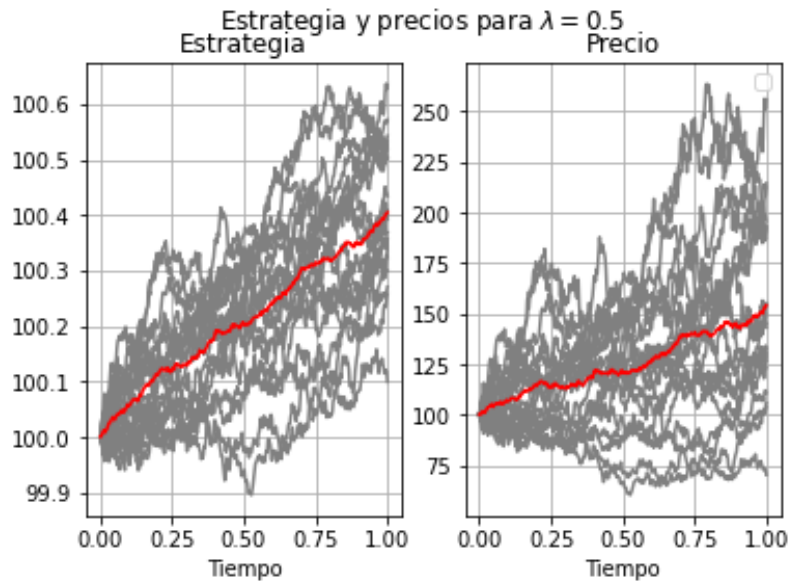


Figura 3-6: (Izquierda) Simulación Monte Carlo de 20 posibles trayectorias de la estrategia de negociación (gris), junto con su valor promedio (rojo), para: $N_0 = 100$, $\eta = 0,5$, $\theta = 101$ y $\gamma = 0,2$. (Derecha) Simulación Monte Carlo de 20 posibles trayectorias del precio del activo (gris), junto con su valor promedio (rojo), para: $S_0 = 100$, $\alpha = 0,25$, $\sigma = 0,3$, $T = 1$, $dt = 1/365$ y $\lambda = 0,5$.

La figura **3-7** muestra la simulación de 20 posibles trayectorias de la estrategia de negociación del agente y del precio del activo (en gris), junto con el valor promedio de estas trayectorias (rojo), cuando este busca tener en el largo plazo una unidad más del activo partiendo de 100 unidades en $t = 0$ y tomando $\lambda = 1$.

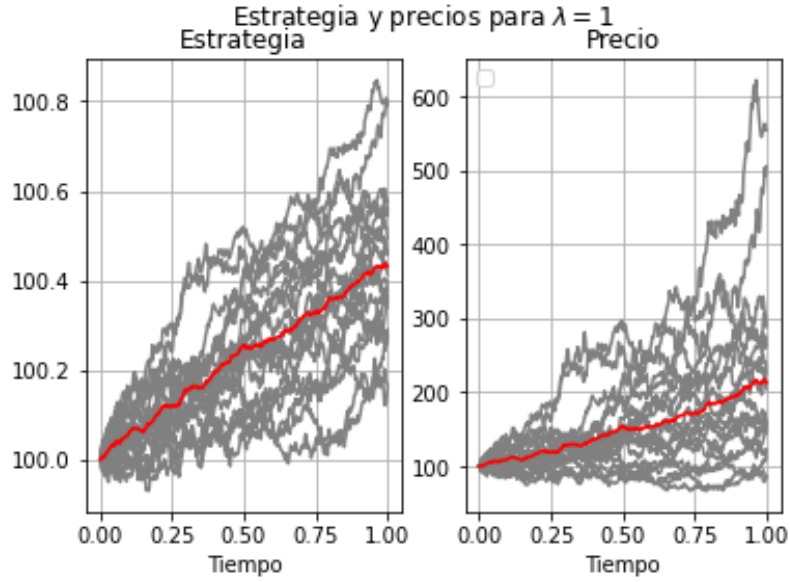


Figura 3-7: (Izquierda) Simulación Monte Carlo de 20 posibles trayectorias de la estrategia de negociación (gris), junto con su valor promedio (rojo), para: $N_0 = 100$, $\eta = 0,5$, $\theta = 101$ y $\gamma = 0,2$. (Derecha) Simulación Monte Carlo de 20 posibles trayectorias del precio del activo (gris), junto con su valor promedio (rojo), para: $S_0 = 100$, $\alpha = 0,25$, $\sigma = 0,3$, $T = 1$, $dt = 1/365$ y $\lambda = 1$.

Podemos observar que si la estrategia del agente en el largo plazo es incrementar el número de unidades que posee del activo, el efecto sobre la tendencia al alza del precio es mayor a mayor nivel de iliquidez del mercado.

- **Riqueza del agente:** la dinámica de la riqueza del agente satisface,

$$\begin{aligned}
 dY_t &= \phi_t dB_t + N_t dS_t \\
 &= \left(\frac{Y_t - S_t N_t}{B_t} \right) r B_t dt + N_t \{ S_t [\alpha + \lambda \eta (\theta - N_t)] dt + S_t (\sigma + \lambda \gamma) dW_t \} \\
 &= \{ Y_t r - S_t N_t r + N_t S_t [\alpha + \lambda \eta (\theta - N_t)] \} dt + N_t S_t (\sigma + \lambda \gamma) dW_t . \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

- **Precio del derivado:** Aplicando el lema de Itô se tiene:

$$\begin{aligned}
 dH_t &= \frac{\partial H_t}{\partial t} dt + \frac{\partial H_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \\
 &= \frac{\partial H_t}{\partial t} dt + \frac{\partial H_t}{\partial S_t} \{S_t[\alpha + \lambda\eta(\theta - N_t)]dt + S_t(\sigma + \lambda\gamma)dW_t\} + \frac{1}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} [\sigma + \lambda\gamma]^2 dt \\
 &= \left\{ \frac{\partial H_t}{\partial t} + S_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} [\alpha + \lambda\eta(\theta - N_t)] + \frac{1}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} [\sigma + \lambda\gamma]^2 \right\} dt + S_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} (\sigma + \lambda\gamma) dW_t .
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

El agente busca replicar de forma dinámica al derivado mediante su estrategia de negociación, es decir, $dY_t = dH(S_t, t)$. Igualando los coeficientes de difusión en las ecuaciones (3.47) y (3.48) se tiene que:

$$N_t S_t (\sigma + \lambda\gamma) = S_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} (\sigma + \lambda\gamma) ,$$

de donde se sigue que $N_t = \frac{\partial H_t}{\partial S_t}$, lo que indica que el agente estaría siguiendo una estrategia de cobertura delta. Al igualar los coeficientes de tendencia en (3.47) y (3.48), considerando que $Y_t = H(S_t, t)$ y $N_t = \frac{\partial H_t}{\partial S_t}$, se tiene:

$$rH - S_t \frac{\partial H}{\partial S_t} r + \frac{\partial H}{\partial S_t} S_t \left[\alpha + \lambda\eta \left(\theta - \frac{\partial H}{\partial S_t} \right) \right] = \frac{\partial H}{\partial t} + S_t \frac{\partial H}{\partial S_t} \left[\alpha + \lambda\eta \left(\theta - \frac{\partial H}{\partial S_t} \right) \right] + \frac{1}{2} S_t^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} [\sigma + \lambda\gamma]^2 ,$$

que lleva a la ecuación de valoración:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \frac{1}{2} S_t^2 [\sigma + \lambda\gamma]^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} - rH = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T)} , \tag{3.49}$$

que es la ecuación diferencial parcial que debe satisfacer el derivado en el marco de este modelo de mercado. Notemos que si $\lambda = 0$ la ecuación (3.49) se reduce a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

3.5 Conclusiones del capítulo

Para los modelos de mercado ilíquido considerados en este capítulo, encontramos que las expresiones resultantes para la dinámica del precio del activo riesgoso incorporan el factor

3. Mercado con iliquidez simple

de iliquidez del mercado en los coeficientes de tendencia y difusión, de forma que, si el agente anticipa esta relación, es decir, anticipa el factor de iliquidez y la reacción del precio a su estrategia, puede llegar a manipular el precio, pero en la práctica esta relación no es anticipada por los agentes, lo que motiva la consideración de un modelo en el cual el factor de iliquidez del mercado sea de carácter estocástico. Esto se desarrolla en el siguiente capítulo como un aporte en el área.

Adicionalmente, se encuentra que las ecuaciones diferenciales parciales de valoración asociadas son extensiones no lineales de la ecuación de Black-Scholes, en donde la no linealidad se debe a la iliquidez del mercado. Esta no linealidad plantea un desafío importante al momento de su resolución, particularmente por la singularidad presente en el coeficiente del término de difusión que impone restricciones sobre el modelo considerado para describir el factor de iliquidez, y limitaciones al uso de métodos numéricos tradicionales como se detalla en el trabajo de Glover et al. (2010), por lo cual, se propone una aproximación a su solución mediante la combinación de la versión extendida al caso no lineal del teorema de representación de Feynman-Kac y redes neuronales artificiales, la cual se desarrolla en el capítulo cinco de esta investigación.

4. Mercado con iliquidez estocástica

Consideramos ahora un modelo de mercado definido sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_t)$, en el cual el proceso de precio del activo riesgoso S_t , satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t^S + \lambda_t S_t dN_t, \quad (4.1)$$

donde α y $\sigma > 0$ son constantes que representan la tasa de rentabilidad y volatilidad instantáneas del activo respectivamente, λ_t es el factor de iliquidez del mercado, el cual se asume estocástico y mayor a cero casi seguramente para todo t , W_t^S es un movimiento Browniano estándar y $N_t \equiv N(t, S_t, \lambda_t)$ denota el número de unidades del activo riesgoso que posee un gran agente como parte de su estrategia de negociación. El término $\lambda_t dN_t$ describe el impacto sobre el precio del activo de un cambio en el número de unidades que posee el agente ponderado por el factor de iliquidez del mercado.

Este modelo permite considerar el efecto de las estrategias de negociación del agente sobre los precios y viceversa, y también captura situaciones en las cuales la iliquidez del mercado se puede ver afectada por choques aleatorios como cambios inesperados de regulación, en las tendencias macroeconómicas, en la disponibilidad de recursos, cierres forzados de la actividad económica (como en el caso de las medidas de cuarentena tomadas para controlar enfermedades), entre otros.

Asumiremos que el factor de iliquidez del mercado sigue un proceso de reversión a la media del tipo Cox-Ingersoll-Ross (CIR). La selección de este tipo de proceso se fundamenta en

4. Mercado con iliquidez estocástica

considerar la dinámica que presentan diversas medidas de iliquidez, particularmente se considera el cociente de iliquidez propuesto por Amihud (2002), denotado por $illi_t$, el cual también fue adoptado en los trabajos de Brunetti and Caldara (2004), Feng et al. (2014) y revisado en el trabajo de Amihud (2019). Esta medida de iliquidez considera el valor absoluto del retorno de un índice de mercado dividido por su volumen en unidades monetarias ¹,

$$illi_t := \frac{|R_t|}{P_t \cdot V_t} \quad (4.2)$$

donde R_t es el retorno diario, P_t es el precio de cierre y V_t es el volumen diario negociado. Como ejemplo, en la figura 4-1 se representa el cociente de iliquidez de Amihud calculado para el S&P 500 entre el 26 de mayo del 2016 y el 25 de mayo del 2021.

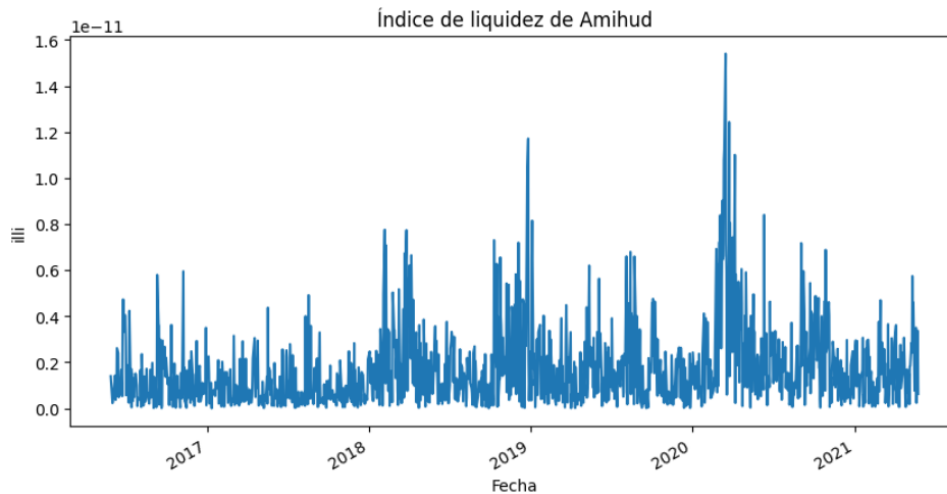


Figura 4-1: Cociente de iliquidez de Amihud para el S&P 500. Elaboración propia.

Se puede ver que la iliquidez del mercado tiende a fluctuar alrededor de una media y toma solo valores positivos. Dadas estas características, se asume que el factor de iliquidez puede modelarse como un proceso Cox-Ingersoll-Ross (CIR), de forma que:

$$d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t)dt + \gamma\sqrt{\lambda_t}dW_t^\lambda, \quad (4.3)$$

¹Teóricamente la medida de la iliquidez del mercado debería definirse como un promedio de las medidas de iliquidez de todos los activos disponibles, pero para facilitar la implementación se utiliza un índice como *proxy* para la iliquidez del mercado

4. Mercado con iliquidez estocástica

con $dW_t^S dW_t^\lambda = \rho dt$, donde ρ es una constante que mide la correlación entre los movimientos Brownianos estándar W_t^S y W_t^λ . En este caso: θ es un nivel de iliquidez constante de largo plazo, κ es la velocidad de reversión al nivel θ , y $\gamma > 0$ es la volatilidad de la iliquidez. Este tipo de proceso implica que $\lambda_t > 0$ para todos los valores positivos de κ y θ , y se garantiza que λ_t no será igual a cero si se tiene que $2\kappa\theta \geq \gamma^2$.

4.1 Precio de activos riesgosos

La siguiente proposición resume los resultados centrales acerca del efecto del proceso estocástico de iliquidez y la estrategia de negociación del agente sobre los coeficientes del proceso de precio de activos riesgosos.

Proposición 1 Sean W_t^1 y W_t^2 dos movimientos Brownianos estándar independientes definidos sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_t)$ y $N_t \equiv N(t, S_t, \lambda_t)$ la estrategia de negociación de un gran agente, talque, $N(t, S_t, \lambda_t) \in C^{1,2,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. En un mercado con iliquidez estocástica descrita por un proceso CIR de la forma:

$$d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t)dt + \gamma\sqrt{\lambda_t}\rho dW_t^1 + \gamma\sqrt{\lambda_t}\sqrt{1 - \rho^2}dW_t^2 . \quad (4.4)$$

y denotando por:

$$\nu_1 := \frac{\sigma + \gamma\rho\lambda_t^{3/2}\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t}}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \quad (4.5)$$

$$\nu_2 := \frac{\gamma\lambda_t^{3/2}\sqrt{1 - \rho^2}\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t}}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \quad (4.6)$$

$$b(t, S_t, \lambda_t) := \frac{1}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \left[\alpha + \lambda_t \left(\frac{\partial N_t}{\partial t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial \lambda_t^2} \right) + \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t \partial \lambda_t} S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} \left(\nu_1 \rho + \nu_2 \sqrt{1 - \rho^2} \right) + \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} \frac{S_t^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \right] \quad (4.7)$$

se tiene que la ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica de los precios de los activos riesgosos es:

$$dS_t = b(t, S_t, \lambda_t) S_t dt + \nu_1 S_t dW_t^1 + \nu_2 S_t dW_t^2 \quad (4.8)$$

Demostración 1 Sean W_t^1 y W_t^2 dos movimientos Brownianos estándar independientes. De la descomposición de Cholesky de la matriz de correlación entre W_t^S y W_t^λ se tiene que si:

$$W_t^S = W_t^1 \quad ; \quad W_t^\lambda = \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2 \quad (4.9)$$

entonces, $\text{Corr}(W_t^S, W_t^\lambda) = \rho$, luego las ecuaciones (4.1) y (4.3) pueden plantearse como:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t^1 + \lambda_t S_t dN_t \quad , \quad (4.10)$$

$$d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t) dt + \gamma \sqrt{\lambda_t} \rho dW_t^1 + \gamma \sqrt{\lambda_t} \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \quad . \quad (4.11)$$

Asumiendo que $N_t \equiv N(t, S_t, \lambda_t) \in C^{1,2,2}([0, T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, por la aplicación del lema de Itô se tiene:

4. Mercado con iliquidez estocástica

$$dN_t = \frac{\partial N_t}{\partial t} dt + \frac{\partial N_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} d\lambda_t + \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t \partial \lambda_t} (dS_t)(d\lambda_t) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial^2 N_t}{\partial \lambda_t^2} (d\lambda_t)^2 \right]. \quad (4.12)$$

De la expresión (4.11) se sigue que :

$$(d\lambda_t)^2 = \gamma^2 \lambda_t dt \quad (4.13)$$

luego la expresión (4.12) es:

$$\begin{aligned} dN_t = & \left(\frac{\partial N_t}{\partial t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} + \frac{1}{2} \gamma^2 \lambda_t \frac{\partial^2 N_t}{\partial \lambda_t^2} \right) dt + \frac{\partial N_t}{\partial S_t} dS_t \\ & + \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} \left(\gamma \sqrt{\lambda_t} \rho dW_t^1 + \gamma \sqrt{\lambda_t} \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \right) + \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t \partial \lambda_t} (dS_t)(d\lambda_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Reemplazando el resultado anterior en la ecuación (4.10) se tiene:

$$\begin{aligned} dS_t = & \left(\alpha S_t + \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial t} + \lambda_t S_t \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} + \lambda_t S_t \frac{1}{2} \gamma^2 \lambda_t \frac{\partial^2 N_t}{\partial \lambda_t^2} \right) dt \\ & + \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t} dS_t + \lambda_t S_t \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t \partial \lambda_t} (dS_t)(d\lambda_t) + \frac{1}{2} \lambda_t S_t \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \\ & + \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} \gamma \sqrt{\lambda_t} \rho dW_t^1 + \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} \gamma \sqrt{\lambda_t} \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 + \sigma S_t dW_t^1, \end{aligned}$$

de donde,

$$\begin{aligned}
 dS_t = & \frac{1}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \left\{ S_t \left[\alpha + \lambda_t \left(\frac{\partial N_t}{\partial t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial \lambda_t^2} \right) \right] dt \right. \\
 & \left. + \lambda_t S_t \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t \partial \lambda_t} (dS_t)(d\lambda_t) + \frac{\lambda_t S_t}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \right\} \\
 & + S_t \left(\frac{\sigma + \gamma \rho \lambda_t^{3/2} \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t}}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \right) dW_t^1 + S_t \left(\frac{\gamma \lambda_t^{3/2} \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t}}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \right) dW_t^2 . \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Denotando por:

$$\nu_1 \equiv \nu_1(t, S_t, \lambda_t) := \left(\frac{\sigma + \gamma \rho \lambda_t^{3/2} \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t}}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \right) \tag{4.16}$$

y

$$\nu_2 \equiv \nu_2(t, S_t, \lambda_t) := \left(\frac{\gamma \lambda_t^{3/2} \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t}}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \right) \tag{4.17}$$

la expresión (4.15) se reescribe como:

$$\begin{aligned}
 dS_t = & \frac{1}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \left\{ S_t \left[\alpha + \lambda_t \left(\frac{\partial N_t}{\partial t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial \lambda_t^2} \right) \right] dt \right. \\
 & \left. + \lambda_t S_t \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t \partial \lambda_t} (dS_t)(d\lambda_t) + \frac{\lambda_t S_t}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 \right\} + \nu_1 S_t dW_t^1 + \nu_2 S_t dW_t^2 \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

De (4.18), por la regla de multiplicación estocástica se tiene que:

$$(dS_t)^2 = S_t^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2) dt = S_t^2 \left(\frac{\sigma^2 + 2\sigma\gamma\rho\lambda_t^{3/2} \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} + \gamma^2 \lambda_t^3 \left(\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} \right)^2}{\left(1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t} \right)^2} \right) \tag{4.19}$$

y por (4.11), se tiene que:

4. Mercado con iliquidez estocástica

$$dS_t d\lambda_t = S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} \left(\nu_1 \rho + \nu_2 \sqrt{1 - \rho^2} \right) dt = S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} \left(\frac{\sigma \rho + \gamma \lambda_t^{3/2} \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t}}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \right) dt \quad (4.20)$$

entonces:

$$\begin{aligned} dS_t = & S_t \frac{1}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \left\{ \alpha + \lambda_t \left(\frac{\partial N_t}{\partial t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial \lambda_t^2} \right) \right. \\ & \left. + \lambda_t \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t \partial \lambda_t} S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) + \frac{\lambda_t}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} S_t^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2) \right\} dt \\ & + \nu_1 S_t dW_t^1 + \nu_2 S_t dW_t^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

y denotando con:

$$\begin{aligned} b(t, S_t, \lambda_t) := & \frac{1}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \left[\alpha + \lambda_t \left(\frac{\partial N_t}{\partial t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 N_t}{\partial \lambda_t^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t \partial \lambda_t} S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) + \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} \frac{S_t^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

tenemos,

$$dS_t = S_t b(t, S_t, \lambda_t) dt + S_t \nu_1 dW_t^1 + S_t \nu_2 dW_t^2 \quad (4.23)$$

con lo cual se demuestra la proposición.

En relación con los resultados presentados en la proposición 1 se tiene que:

- Para garantizar precios positivos y evitar singularidades en los coeficientes de difusión asumimos que $\lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t} < 1$.
- La ecuación diferencial estocástica del precio del activo riesgoso (4.8) incorpora dos fuentes de aleatoriedad cuyos coeficientes son estocásticos y están asociados vía el factor de correlación ρ , lo que clasifica al modelo como un modelo de volatilidad estocástica.

4. Mercado con iliquidez estocástica

- Si $\lambda_t = 0$ o si N_t es constante el modelo se reduce al de Black-Scholes con tendencia α y volatilidad σ .
- En el caso especial en el cual la iliquidez no tiene impacto sobre la estrategia del agente, es decir $\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} = 0$, se tiene que:

$$\nu_1 = \frac{\sigma}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \quad ; \quad \nu_2 = 0$$

y

$$b(t, S_t, \lambda_t) = \frac{1}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \left[\alpha + \lambda_t \left(\frac{\partial N_t}{\partial t} + \frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} \frac{S_t^2 \nu_1^2}{2} \right) \right],$$

que son los coeficientes que se encontraron en el modelo de iliquidez constante proporcional al precio del activo en el capítulo tres de esta investigación.

- La volatilidad instantánea total del precio del activo esta dada por:

$$v_{total} = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \gamma^2 \lambda_t^{3/2} \left(\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} \right)^2 + 2\sigma\gamma\rho\lambda_t^{3/2} \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t}}}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}}. \quad (4.24)$$

Si la correlación entre W_t^S y W_t^λ es cero, es decir, $\rho = 0$, se tiene que:

$$v_{total} = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \gamma^2 \lambda_t^{3/2} \left(\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} \right)^2}}{1 - \lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}},$$

que es la volatilidad del modelo con iliquidez constante adicionando el término $\gamma^2 \lambda_t^{3/2} \left(\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} \right)^2$, que incorpora el efecto *feedback* de la iliquidez siempre y cuando $\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} \neq 0$, es decir, para $\rho = 0$ la volatilidad total del modelo con iliquidez estocástica es mayor que la del modelo con iliquidez constante siempre que la estrategia del agente reaccione a cambios en la liquidez.

- La correlación entre los cambios en el precio del activo y los cambios en la iliquidez del mercado esta dada por:

$$Corr(dS_t, d\lambda_t) = \frac{\sigma\rho + \gamma\lambda_t^{3/2} \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t}}{\sqrt{\sigma^2 + \gamma^2 \lambda_t^3 \left(\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} \right)^2 + 2\sigma\gamma\rho\lambda_t^{3/2} \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t}}}, \quad (4.25)$$

4. Mercado con iliquidez estocástica

Destaca que $\rho = 0$ no implica que no se tenga correlación entre dS_t y $d\lambda_t$, en este caso:

$$\text{Corr}(dS_t, d\lambda_t) = \frac{\gamma \lambda_t^{3/2} \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t}}{\sqrt{\sigma^2 + \gamma^2 \lambda_t^3 \left(\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} \right)^2}},$$

lo que muestra que la correlación entre estos cambios esta determinada por la reacción de la estrategia de negociación del agente a la iliquidez del mercado. El signo de la correlación lo determina en este caso $\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t}$, y por lo general se tiene que $\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} < 0$.

Si $\rho \neq 0$ y $\frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} = 0$ entonces $\text{Corr}(dS_t, d\lambda_t) = \rho$, que es la correlación instantánea entre los Brownianos W_t^S y W_t^λ , lo que muestra que la diferencia entre $\text{Corr}(dS_t, d\lambda_t)$ y ρ es el resultado del efecto *feedback* de la iliquidez.

Como ejemplo de este modelo de mercado, consideramos el caso particular en el cual la estrategia de negociación del agente es de la forma:

$$N_t \equiv N(t, S_t, \lambda_t) = \theta_0 e^{-\theta_1 t} S_t^{-\theta_2} \lambda_t^{-\theta_3}, \quad (4.26)$$

la cual permite representar estrategias con retroalimentación positiva o contraría en función del valor de los parámetros θ_0 , θ_1 , θ_2 y θ_3 . Es importante anotar que, dada la restricción para garantizar precios positivos y evitar la singularidad en los coeficientes de difusión, $\lambda_t S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t} < 1$, se debe tener que: $N_t > -\frac{1}{\theta_2 \lambda_t}$. Considerando la no negatividad de los procesos S_t y λ_t , esta restricción se cumple si $\theta_2 > 0$.

La figura (4-2) representa la estrategia (4.26) para distintos valores del precio y la iliquidez en $t = 1$. En la figura de la izquierda ($\theta_0 = -10$; $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,1$) se tiene una estrategia en la cual el agente busca adquirir más unidades del activo si el precio sube y la iliquidez del mercado aumenta. En la figura de la derecha ($\theta_0 = 10$; $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,1$) se tiene una estrategia en la cual el agente busca adquirir más unidades del activo si el precio baja y la iliquidez del mercado disminuye.

4. Mercado con iliquidez estocástica

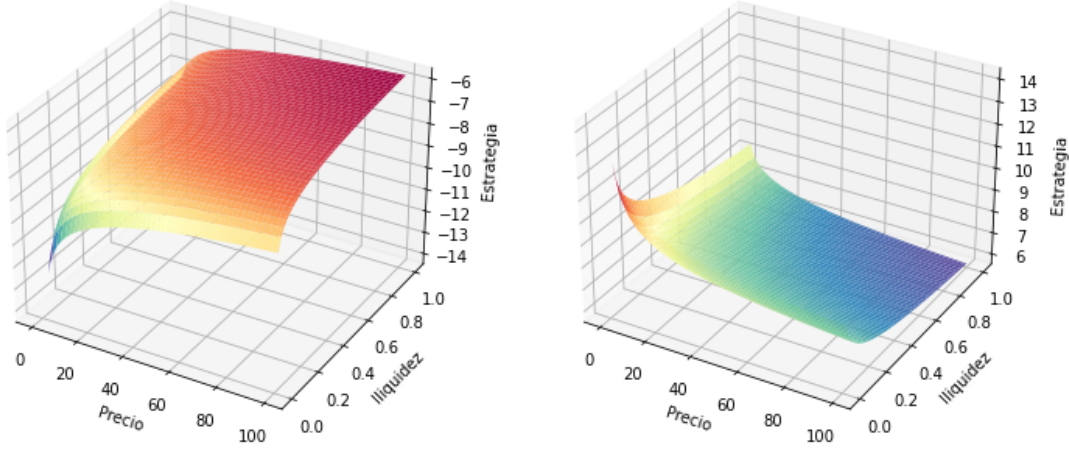


Figura 4-2: Estrategias de negociación positiva y contraria en función del precio y la iliquidez.

Para la estrategia de negociación (4.26) se tiene que:

$$\frac{\partial N_t}{\partial t} = -\theta_1 N(t, S_t, \lambda_t) \quad ; \quad \frac{\partial N_t}{\partial S_t} = -\theta_2 S_t^{-1} N(t, S_t, \lambda_t) , \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial^2 N_t}{\partial S_t^2} = \theta_2(\theta_2 + 1) S_t^{-2} N(t, S_t, \lambda_t) \quad ; \quad \frac{\partial N_t}{\partial \lambda_t} = -\theta_3 \lambda_t^{-1} N(t, S_t, \lambda_t) , \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial^2 N_t}{\partial \lambda_t^2} = \theta_3(\theta_3 + 1) \lambda_t^{-2} N(t, S_t, \lambda_t) \quad ; \quad \frac{\partial^2 N_t}{\partial \lambda_t \partial S_t} = \theta_3 \theta_2 \lambda_t^{-1} S_t^{-1} N(t, S_t, \lambda_t) , \quad (4.29)$$

que junto con las expresiones para los coeficientes del proceso de precio (4.5) a (4.7), implican que :

$$\nu_1 = \frac{\sigma - \gamma \rho \theta_3 \lambda_t^{1/2} N_t}{1 + \lambda_t \theta_2 N_t} \quad (4.30)$$

$$\nu_2 = \frac{-\gamma\sqrt{1-\rho^2}\theta_3\lambda_t^{1/2}N_t}{1+\lambda_t\theta_2N_t} \quad (4.31)$$

$$b = \frac{1}{1+\lambda_t\theta_2N_t} \left\{ \alpha - \theta_1\lambda_tN_t - \theta_3N_t\kappa(\theta - \lambda_t) + \frac{\gamma^2}{2}\theta_3(\theta_3+1)N_t \right. \\ \left. + \theta_3\theta_2\lambda_t^{1/2}\gamma(\rho\nu_1 + \sqrt{a-\rho^2}\nu_2) + \lambda_t\theta_2(\theta_2+1)\frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2}N_t \right\} \quad (4.32)$$

De las expresiones anteriores podemos ver que si $\lambda_t = 0$, es decir, el mercado es perfectamente líquido y la estrategia del agente es negociar una determinada cantidad del activo y mantenerla, entonces: $\nu_1 = \sigma$, $\nu_2 = 0$ y $b = \alpha$, es decir, el modelo de liquidez perfecta de Black-Scholes se tiene como un caso particular del modelo con iliquidez estocástica siguiendo esta estrategia.

La figura (4-3) muestra la simulación de Monte Carlo de 50 posibles trayectorias (en gris) de los procesos de iliquidez y precio del activo, junto con la trayectoria promedio (en azul), cuando el agente sigue una estrategia de retroalimentación positiva ($\theta_0 < 0$) y $\rho = 0$. La figura (4-4) muestra la simulación de Monte Carlo de 50 posibles trayectorias (en gris) de los procesos de iliquidez y precio del activo, junto con la trayectoria promedio (en azul), cuando el agente sigue una estrategia de retroalimentación negativa o contraria ($\theta_0 > 0$) y $\rho = 0$.

4. Mercado con iliquidez estocástica

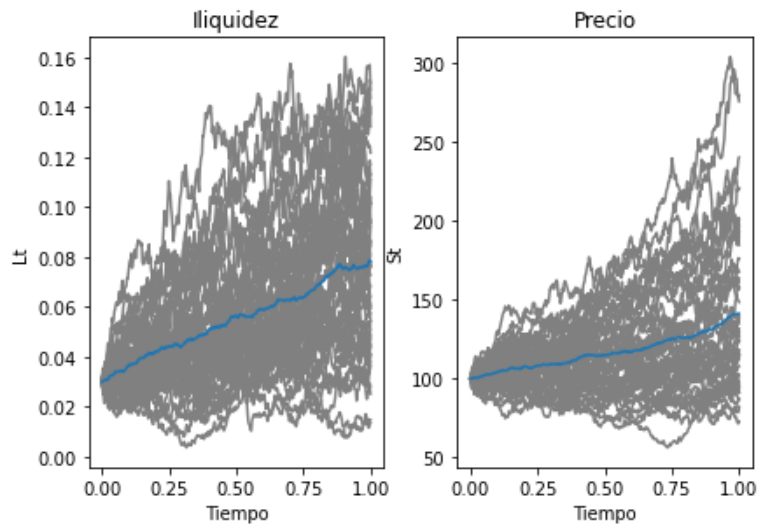


Figura 4-3: 50 trayectorias simuladas de la iliquidez y el precio del activo con: $\lambda_0 = 0,03$, $\kappa = 1$, $\theta = 0,1$, $\gamma = 0,2$, $S_0 = 100$, $\alpha = 0,25$, $\sigma = 0,3$, $\rho = 0$, $T = 1$, $dt = 1/365$ y estrategia con $\theta_0 = -10$, $\theta_1 = 0,1$, $\theta_2 = 0,1$ y $\theta_3 = 0,1$.

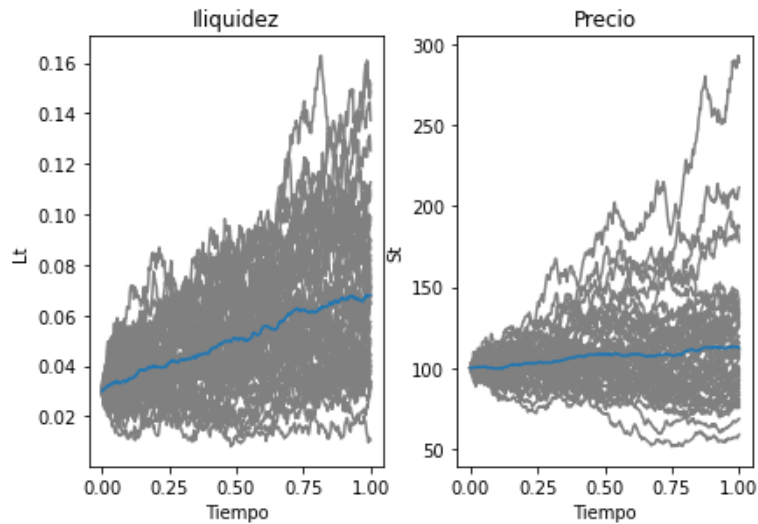


Figura 4-4: 50 trayectorias simuladas de la iliquidez y el precio del activo con: $\lambda_0 = 0,03$, $\kappa = 1$, $\theta = 0,1$, $\gamma = 0,2$, $S_0 = 100$, $\alpha = 0,25$, $\sigma = 0,3$, $\rho = 0$, $T = 1$, $dt = 1/365$ y estrategia con $\theta_0 = 10$, $\theta_1 = 0,1$, $\theta_2 = 0,1$ y $\theta_3 = 0,1$.

La comparación de las trayectorias promedio en las figuras anteriores muestra que: el efecto

4. Mercado con iliquidez estocástica

al alza de la estrategia con retroalimentación positiva (figura **4-3**) es mayor a mayor nivel de iliquidez del mercado, y menor en la estrategia con retroalimentación negativa (figura **4-4**). Esto incluso si $\rho = 0$ porque, como se concluyo de (4.25), la correlación entre estos cambios también esta determinada por la reacción de la estrategia del agente a los cambios de iliquidez.

4.2 Valoración de derivados

Continuando con el modelo de iliquidez estocástica, tenemos un mercado conformado por:

- Un activo libre de riesgo con valor en t denotado por B_t , el cual satisface:

$$dB_t = rB_t dt . \quad (4.33)$$

- Un activo riesgoso con valor en t denotado por S_t , el cual satisface:

$$dS_t = bS_t dt + \nu_1 S_t dW_t^1 + \nu_2 S_t dW_t^2 . \quad (4.34)$$

- Un factor de iliquidez con valor en t denotado por λ_t , el cual satisface:

$$d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t)dt + \gamma\sqrt{\lambda_t}\rho dW_t^1 + \gamma\sqrt{\lambda_t}\sqrt{1 - \rho^2}dW_t^2 , \quad (4.35)$$

y se cumple que:

-

$$(dS_t)^2 = S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)dt \quad (4.36)$$

-

$$dS_t d\lambda_t = S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) dt \quad (4.37)$$

-

$$(d\lambda_t)^2 = \gamma^2 \lambda_t dt . \quad (4.38)$$

4. Mercado con iliquidez estocástica

Si consideramos un agente que busca cubrir su posición en el activo riesgoso utilizando derivados, deberá hacerlo tomando posición en dos derivados pactados sobre este activo, con dos fechas de maduración distintas (T_1, T_2) , dado que ahora tiene dos fuentes de incertidumbre.

El valor en t de estos derivados se denotará por:

■

$$H_1 \equiv H_1(t, S_t, \lambda_t; T_1) \quad ; \quad \text{Derivado 1.} \quad (4.39)$$

■

$$H_2 \equiv H_2(t, S_t, \lambda_t; T_2) \quad ; \quad \text{Derivado 2.} \quad (4.40)$$

y se asume que $H_i \in C^{1,2,2}(\mathbb{R}_+ \times [0, T] \times [0, T], \mathbb{R})$, para $i = 1, 2$.

Aplicando el lema de Itô, el diferencial estocástico de H_i es:

$$\begin{aligned} dH_i &= \frac{\partial H_i}{\partial t} dt + \frac{\partial H_i}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_t} d\lambda_t + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 H_i}{\partial S_t^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial^2 H_i}{\partial \lambda_t^2} (d\lambda_t)^2 + 2 \frac{\partial^2 H_i}{\partial S_t \partial \lambda_t} (dS_t)(d\lambda_t) \right\} \\ &= \frac{\partial H_i}{\partial t} dt + \frac{\partial H_i}{\partial S_t} (bS_t dt + \nu_1 S_t dW_t^1 + \nu_2 S_t dW_t^2) \\ &\quad + \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_t} \left(\kappa(\theta - \lambda_t) dt + \gamma \sqrt{\lambda_t} \rho dW_t^1 + \gamma \sqrt{\lambda_t} \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 H_i}{\partial S_t^2} S_t^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2) dt + \frac{\partial^2 H_i}{\partial \lambda_t^2} (\gamma^2 \lambda_t dt) \right\} + \frac{\partial^2 H_i}{\partial S_t \partial \lambda_t} S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) dt \\ &= \left\{ \frac{\partial H_i}{\partial t} + bS_t \frac{\partial H_i}{\partial S_t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_t} + \frac{S_t^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_i}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_i}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) \frac{\partial^2 H_i}{\partial S_t \partial \lambda_t} \right\} dt \\ &\quad + \left\{ \nu_1 S_t \frac{\partial H_i}{\partial S_t} + \gamma \sqrt{\lambda_t} \rho \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_t} \right\} dW_t^1 + \left\{ \nu_2 S_t \frac{\partial H_i}{\partial S_t} + \gamma \sqrt{\lambda_t} \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_t} \right\} dW_t^2 . \end{aligned} \quad (4.41)$$

Si consideramos un portafolio autofinanciado conformado por N unidades del activo riesgoso, Δ unidades del derivado 1 (H_1) y Σ unidades del derivado 2 (H_2), el valor en t del portafolio es:

$$\Pi_t = NS_t + \Delta H_1 + \Sigma H_2 , \quad (4.42)$$

4. Mercado con iliquidez estocástica

y por la condición de autofinanciamiento:

$$\begin{aligned}
d\Pi_t &= NdS_t + \Delta dH_1 + \Sigma dH_2 \\
&= N (bS_t dt + \nu_1 S_t dW_t^1 + \nu_2 S_t dW_t^2) \\
&+ \Delta \left[\left\{ \frac{\partial H_1}{\partial t} + bS_t \frac{\partial H_1}{\partial S_t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial H_1}{\partial \lambda_t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) \frac{\partial^2 H_1}{\partial S_t \partial \lambda_t} \right\} dt \right. \\
&+ \left. \left\{ \nu_1 S_t \frac{\partial H_1}{\partial S_t} + \gamma \sqrt{\lambda_t} \rho \frac{\partial H_1}{\partial \lambda_t} \right\} dW_t^1 + \left\{ \nu_2 S_t \frac{\partial H_1}{\partial S_t} + \gamma \sqrt{\lambda_t} \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial H_1}{\partial \lambda_t} \right\} dW_t^2 \right] \\
&+ \Sigma \left[\left\{ \frac{\partial H_2}{\partial t} + bS_t \frac{\partial H_2}{\partial S_t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial H_2}{\partial \lambda_t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) \frac{\partial^2 H_2}{\partial S_t \partial \lambda_t} \right\} dt \right. \\
&+ \left. \left\{ \nu_1 S_t \frac{\partial H_2}{\partial S_t} + \gamma \sqrt{\lambda_t} \rho \frac{\partial H_2}{\partial \lambda_t} \right\} dW_t^1 + \left\{ \nu_2 S_t \frac{\partial H_2}{\partial S_t} + \gamma \sqrt{\lambda_t} \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial H_2}{\partial \lambda_t} \right\} dW_t^2 \right],
\end{aligned}$$

luego,

$$d\Pi_t = bS_t \left(N + \Delta \frac{\partial H_1}{\partial S_t} + \Sigma \frac{\partial H_2}{\partial S_t} \right) dt \quad (4.43)$$

$$+ \nu_1 S_t \left(N + \Delta \frac{\partial H_1}{\partial S_t} + \Sigma \frac{\partial H_2}{\partial S_t} \right) dW_t^1 \quad (4.44)$$

$$+ \nu_2 S_t \left(N + \Delta \frac{\partial H_1}{\partial S_t} + \Sigma \frac{\partial H_2}{\partial S_t} \right) dW_t^2 \quad (4.45)$$

$$+ \kappa(\theta - \lambda_t) \left(\Delta \frac{\partial H_1}{\partial \lambda_t} + \Sigma \frac{\partial H_2}{\partial \lambda_t} \right) dt \quad (4.46)$$

$$+ \gamma \sqrt{\lambda_t} \rho \left(\Delta \frac{\partial H_1}{\partial \lambda_t} + \Sigma \frac{\partial H_2}{\partial \lambda_t} \right) dW_t^1 \quad (4.47)$$

$$+ \gamma \sqrt{\lambda_t} \sqrt{1 - \rho^2} \left(\Delta \frac{\partial H_1}{\partial \lambda_t} + \Sigma \frac{\partial H_2}{\partial \lambda_t} \right) dW_t^2 \quad (4.48)$$

$$+ \Delta \left[\frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) \frac{\partial^2 H_1}{\partial S_t \partial \lambda_t} \right] dt \quad (4.49)$$

$$+ \Sigma \left[\frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) \frac{\partial^2 H_2}{\partial S_t \partial \lambda_t} \right] dt \quad (4.50)$$

Si se considera una estrategia que busca neutralizar el riesgo de la posición en el activo riesgoso, una posibilidad para el agente es tomar:

$$\Sigma = 1 \quad ; \quad \Delta = - \frac{\partial H_2 / \partial \lambda_t}{\partial H_1 / \partial \lambda_t}, \quad (4.51)$$

es decir, tomar posición larga en una unidad del segundo derivado y corta en Δ unidades del primer derivado, de esta forma los coeficientes de dW_t^1 y dW_t^2 en (4.47) y (4.48) son

4. Mercado con iliquidez estocástica

iguales a cero. Si además se busca anular los coeficientes de dW_t^1 y dW_t^2 en (4.44) y (4.45), se debe tomar:

$$N = \left(\frac{\partial H_2 / \partial \lambda_t}{\partial H_1 / \partial \lambda_t} \right) \left(\frac{\partial H_1}{\partial S_t} \right) - \frac{\partial H_2}{\partial S_t}. \quad (4.52)$$

Con el portafolio conformado de esta manera, se tiene que:

$$\begin{aligned} d\Pi_t = & \left(-\frac{\partial H_2 / \partial \lambda_t}{\partial H_1 / \partial \lambda_t} \right) \left[\frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{S_t^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} \left(\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2 \right) \frac{\partial^2 H_1}{\partial S_t \partial \lambda_t} \right] dt \\ & + \left[\frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{S_t^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} \left(\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2 \right) \frac{\partial^2 H_2}{\partial S_t \partial \lambda_t} \right] dt. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Consideramos ahora una inversión alternativa en la cual el valor del portafolio en t (Π_t) se deposita a la tasa libre de riesgo r , es decir, el monto:

$$\Pi_t = N S_t + \Delta H_1 + \Sigma H_2 = \left[\left(\frac{\partial H_2 / \partial \lambda_t}{\partial H_1 / \partial \lambda_t} \right) \left(\frac{\partial H_1}{\partial S_t} \right) - \frac{\partial H_2}{\partial S_t} \right] S_t - \left(\frac{\partial H_2 / \partial \lambda_t}{\partial H_1 / \partial \lambda_t} \right) H_1 + H_2 \quad (4.54)$$

es depositado a la tasa r . Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= r \Pi_t dt \\ &= r S_t \left[\left(\frac{\partial H_2 / \partial \lambda_t}{\partial H_1 / \partial \lambda_t} \right) \left(\frac{\partial H_1}{\partial S_t} \right) - \frac{\partial H_2}{\partial S_t} \right] dt - r H_1 \left(\frac{\partial H_2 / \partial \lambda_t}{\partial H_1 / \partial \lambda_t} \right) dt + r H_2 dt \\ &= \left(-\frac{\partial H_2}{\partial S_t} S_t + H_2 \right) r dt - \left(\frac{\partial H_2 / \partial \lambda_t}{\partial H_1 / \partial \lambda_t} \right) \left(-\frac{\partial H_1}{\partial S_t} S_t + H_1 \right) r dt \end{aligned} \quad (4.55)$$

Si el mercado esta en equilibrio (no hay arbitraje) estas dos formas de invertir deben generar el mismo rendimiento, es decir, (4.53) debe ser igual a (4.55), luego:

4. Mercado con iliquidez estocástica

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\partial H_2/\partial \lambda_t}{\partial H_1/\partial \lambda_t} \right) \left[\frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} \left(\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2 \right) \frac{\partial^2 H_1}{\partial S_t \partial \lambda_t} \right] dt \\
& + \left[\frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} \left(\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2 \right) \frac{\partial^2 H_2}{\partial S_t \partial \lambda_t} \right] dt \\
& = \left(-\frac{\partial H_2}{\partial S_t} S_t + H_2 \right) r dt - \left(\frac{\partial H_2/\partial \lambda_t}{\partial H_1/\partial \lambda_t} \right) \left(-\frac{\partial H_1}{\partial S_t} S_t + H_1 \right) r dt ,
\end{aligned}$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{\partial H_1}{\partial S_t} r S_t + \frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} \left(\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2 \right) \frac{\partial^2 H_1}{\partial S_t \partial \lambda_t} + r H_1}{\partial H_1/\partial \lambda_t} \\
& = \frac{\frac{\partial H_2}{\partial S_t} r S_t + \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_2}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} \left(\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2 \right) \frac{\partial^2 H_2}{\partial S_t \partial \lambda_t} + r H_2}{\partial H_2/\partial \lambda_t} .
\end{aligned} \tag{4.56}$$

La igualdad (4.56) indica que este cociente no depende del tiempo (plazo al vencimiento T_1 o T_2), pero si de los parámetros, entonces, definimos la función $g(t, S_t, \lambda_t)$ como:

$$g(t, S_t, \lambda_t) := \frac{\frac{\partial H}{\partial S_t} r S_t + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} \left(\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2 \right) \frac{\partial^2 H}{\partial S_t \partial \lambda_t} + r H}{\partial H/\partial \lambda_t} . \tag{4.57}$$

Ahora, de la expresión (4.41) tenemos que:

$$\begin{aligned}
dH_i = & \left\{ \frac{\partial H_i}{\partial t} + b S_t \frac{\partial H_i}{\partial S_t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_i}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_i}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} \left(\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2 \right) \frac{\partial^2 H_i}{\partial S_t \partial \lambda_t} \right\} dt \\
& + \left\{ \nu_1 S_t \frac{\partial H_i}{\partial S_t} + \gamma \sqrt{\lambda_t} \rho \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_t} \right\} dW_t^1 + \left\{ \nu_2 S_t \frac{\partial H_i}{\partial S_t} + \gamma \sqrt{\lambda_t} \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_t} \right\} dW_t^2 ,
\end{aligned}$$

y si denotamos con:

$$\mu_{H_i} \equiv \mu_i = \frac{\frac{\partial H_i}{\partial t} + b S_t \frac{\partial H_i}{\partial S_t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H_i}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H_i}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} \left(\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2 \right) \frac{\partial^2 H_i}{\partial S_t \partial \lambda_t}}{H_i} , \tag{4.58}$$

4. Mercado con iliquidez estocástica

$$\sigma_{H_i} \equiv \sigma_i = \frac{\nu_1 S_t \frac{\partial H_i}{\partial S_t} + \gamma \sqrt{\lambda_t} \rho \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_t}}{H_i}, \quad (4.59)$$

$$\xi_{H_i} \equiv \xi_i = \frac{\nu_2 S_t \frac{\partial H_i}{\partial S_t} + \gamma \sqrt{\lambda_t} \sqrt{1 - \rho^2} \frac{\partial H_i}{\partial \lambda_t}}{H_i}, \quad (4.60)$$

tenemos que:

$$dH_i = \mu_i H_i dt + \sigma_i H_i dW_t^1 + \xi_i H_i dW_t^2. \quad (4.61)$$

Si consideramos un portafolio autofinanciado (Π_t) compuesto por θ_0 unidades del activo riesgoso, θ_1 unidades del derivado 1 y θ_2 unidades del derivado 2, es decir, $\Pi_t = \theta_0 S_t + \theta_1 H_1 + \theta_2 H_2$, entonces:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= \theta_0 dS_t + \theta_1 dH_1 + \theta_2 dH_2 \\ &= \theta_0 (bS_t dt + \nu_1 S_t dW_t^1 + \nu_2 S_t dW_t^2) + \theta_1 (\mu_1 H_1 dt + \sigma_1 H_1 dW_t^1 + \xi_1 H_1 dW_t^2) + \theta_2 (\mu_2 H_2 dt + \sigma_2 H_2 dW_t^1 + \xi_2 H_2 dW_t^2) \\ &= (\theta_0 bS_t + \theta_1 \mu_1 H_1 + \theta_2 \mu_2 H_2) dt + (\theta_0 \nu_1 S_t + \theta_1 \sigma_1 H_1 + \theta_2 \sigma_2 H_2) dW_t^1 + (\theta_0 \nu_2 S_t + \theta_1 \xi_1 H_1 + \theta_2 \xi_2 H_2) dW_t^2, \end{aligned}$$

tomando $\theta_2 = 1$, los coeficientes de W_t^1 y W_t^2 son: $\theta_0 \nu_1 S_t + \theta_1 \sigma_1 H_1 + \sigma_2 H_2$ y $\theta_0 \nu_2 S_t + \theta_1 \xi_1 H_1 + \xi_2 H_2$, y si se busca anularlos para neutralizar el riesgo de la posición en el activo riesgoso, se tiene que:

$$\begin{cases} \theta_0 \nu_1 S_t + \theta_1 \sigma_1 H_1 + \sigma_2 H_2 = 0 \\ \theta_0 \nu_2 S_t + \theta_1 \xi_1 H_1 + \xi_2 H_2 = 0 \end{cases},$$

de donde:

$$\theta_1 = \frac{\sigma_2 H_2 \nu_2 - \xi_2 H_2 \nu_1}{\xi_1 H_1 \nu_1 - \sigma_1 H_1 \nu_2} \quad (4.62)$$

$$\theta_0 = \frac{\xi_2 H_2 \sigma_1 - \sigma_2 H_2 \xi_1}{S_t (\xi_1 \nu_1 - \sigma_1 \nu_2)}. \quad (4.63)$$

Se tiene entonces que $d\Pi_t$ es :

$$d\Pi_t = \left[\left(\frac{\xi_2 H_2 \sigma_1 - \sigma_2 H_2 \xi_1}{\xi_1 \nu_1 - \sigma_1 \nu_2} \right) b + \left(\frac{\sigma_2 H_2 \nu_2 - \xi_2 H_2 \nu_1}{\xi_1 \nu_1 - \sigma_1 \nu_2} \right) \mu_1 + \mu_2 H_2 \right] dt. \quad (4.64)$$

Ahora, si el valor en t de este portafolio es invertido a la tasa libre de riesgo r , se tiene que:

$$d\Pi_t = \left[\left(\frac{\xi_2 H_2 \sigma_1 - \sigma_2 H_2 \xi_1}{\xi_1 \nu_1 - \sigma_1 \nu_2} \right) r + \left(\frac{\sigma_2 H_2 \nu_2 - \xi_2 H_2 \nu_1}{\xi_1 \nu_1 - \sigma_1 \nu_2} \right) r + r H_2 \right] dt. \quad (4.65)$$

4. Mercado con iliquidez estocástica

Por no arbitraje las expresiones (4.64) y (4.65) deben ser iguales, lo que lleva a $b = r$, $\mu_1 = r$ y $\mu_2 = r$, es decir:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial H}{\partial \lambda_t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) \frac{\partial^2 H}{\partial S_t \partial \lambda_t} = rH ,$$

de donde:

$$\frac{rS_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) \frac{\partial^2 H}{\partial S_t \partial \lambda_t} - rH}{\partial H / \partial \lambda_t} = -\kappa(\theta - \lambda_t) , \quad (4.66)$$

lo que implica que $g(t, S_t, \lambda_t) = -\kappa(\theta - \lambda_t)$, de donde se llega la ecuación diferencial parcial de valoración:

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial H}{\partial \lambda_t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) \frac{\partial^2 H}{\partial S_t \partial \lambda_t} - rH = 0} \quad (4.67)$$

En este caso la ecuación de valoración incorpora el precio del riesgo de iliquidez en el termino $\kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial H}{\partial \lambda_t}$, y se verifica que si $\lambda_t = 0$ esta se reduce a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

4.3 Conclusiones del capítulo

Para el mercado con iliquidez estocástica propuesto se encuentra que este puede ser clasificado como un modelo de volatilidad estocástica, donde los coeficientes están asociados vía el factor de correlación entre la fuente de aleatoriedad del precio y la de la iliquidez, pero destaca que la volatilidad instantánea total del activo, además de este coeficiente de correlación. incorpora un factor adicional que captura el efecto de retroalimentación o *feedback*.

Dada la característica de tener dos fuentes de aleatoriedad asociadas a la dinámica del precio del activo riesgoso subyacente, la estrategia de cobertura del agente implica tomar posición en dos derivados, para poder anular el efecto de las dos fuentes de aleatoriedad, lo que lleva a una ecuación diferencial parcial de valoración completamente no lineal. Dada la dificultad de resolver analíticamente este tipo de ecuaciones, en el siguiente capítulo se desarrolla

4. Mercado con iliquidez estocástica

un algoritmo de aproximación que considera extensiones del teorema de representación de Feynman-Kac y redes neuronales artificiales para aproximar la solución.

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

En la literatura se pueden encontrar diversos métodos numéricos para la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales parciales parabólicas no lineales. Estos métodos se pueden clasificar en determinísticos y aleatorios. Los métodos determinísticos emplean técnicas de aproximación tradicionales, mientras que los métodos aleatorios se fundamentan en representaciones probabilísticas de las soluciones de la ecuación. Entre estos últimos, se destacan las representaciones probabilísticas basadas en ecuaciones diferenciales estocásticas hacia atrás (BSDE), como se detalla en los trabajos de Bismut (1973), Bouchard (2015), Geiss and Ylinen (2021), Pardoux and Peng (1990) y Pardoux and Tang (1999). También se encuentran representaciones basadas en ecuaciones diferenciales estocásticas hacia atrás de segundo orden (2BSDEs) (ver Cheridito et al. (2007)), y representaciones que utilizan difusiones ramificadas (ver Henry-Labordere (2012), Henry-Labordere et al. (2014), McKean (1975), Skorokhod (1964) y Watanabe (1965)). Adicionalmente, las representaciones probabilísticas basadas en extensiones de la fórmula clásica de Feynman-Kac también han sido ampliamente exploradas (ver Weinan et al. (2017), Karatzas and Shreve (1998) y Oksendal (2013)).

Considerando los desarrollos recientes en el área de aprendizaje automático, particularmente en el uso de redes neuronales artificiales profundas y procesos acelerados de optimización de funciones de costo mediante diferenciación automática, se ha consolidado una importante investigación sobre el desarrollo de algoritmos para resolver ecuaciones diferenciales parcia-

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales
les (EDP) completamente no lineales y ecuaciones diferenciales estocásticas hacia atrás de segundo orden (2BSDE). En términos generales, estos algoritmos explotan la conexión entre EDP y 2BSDE (véase, por ejemplo, Cheridito et al. (2007)) para obtener una formulación combinada de la PDE y la 2BSDE, cuya solución se aproxima mediante una discretización temporal junto con un procedimiento de aprendizaje profundo basado en redes neuronales.

Algunas referencias importantes en esta área son los trabajos de Beck et al. (2019) y Pham et al. (2021) en los que se explota la relación entre EDP y 2BSDE para aproximar la solución de EDP parabólicas completamente no lineales de alta dimensión mediante el uso de redes neuronales profundas. En los trabajos de Raissi (2024), Warin (2018) y Huré et al. (2020), a partir de la relación entre BSDE y EDP se proponen algoritmos que estiman simultáneamente la solución y su gradiente mediante redes neuronales profundas. Estas aproximaciones se realizan considerando la minimización de funciones de pérdida definidas recursivamente mediante inducción hacia atrás. Adicionalmente, estos autores extienden su aplicación al caso de desigualdades variacionales que surgen en problemas de parada óptima.

Fundamentados en esta literatura, en este capítulo se propone la implementación de un algoritmo para aproximar la solución de las ecuaciones diferenciales parciales de valoración resultantes de los modelos de mercados ilíquidos estudiados. Este algoritmo explota la relación entre EDP no lineales y 2BSDE, que se fundamenta en la extensión al caso no lineal del teorema de representación estocástica de Feynman-Kac (ver Cheridito et al. (2007)). Considerando una discretización de dicha representación, que puede ser implementada mediante redes neuronales artificiales (ver Beck et al. (2019); Beck et al. (2020)) se conforma un algoritmo de aproximación, cuyo entrenamiento se realiza a partir de la generación por Monte Carlo de trayectorias aleatorias del movimiento Browniano.

Es importante anotar que el uso de este tipo de algoritmos, basados en aprendizaje automático, permite superar las limitaciones de métodos numéricos tradicionales (ver Glover et al. (2010)), y aprovechar los recientes y constantes desarrollos en este campo.

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

En resumen, las ecuaciones de valoración encontradas para cada modelo de mercado con iliquidez son:

1. **Modelo 1: Mercado con iliquidez proporcional al precio del activo:**

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{1 - \lambda S_t \frac{\partial N}{\partial S_t}} \right)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} - rH_t = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T) . \quad (5.1)$$

2. **Modelo 2: Mercado con iliquidez como función del precio del activo:**

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{1 - g(S_t) \frac{\partial N}{\partial S_t}} \right)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} - rH_t = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T) . \quad (5.2)$$

En el caso particular en el cual se asume que la forma funcional del factor de iliquidez del mercado es:

$$\lambda(S_t, t) = g(S_t) = \frac{\xi}{S_t} [1 - e^{-\beta(T-t)}] , \quad (5.3)$$

se tiene que:

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{1 - \frac{\xi}{S_t} [1 - e^{-\beta(T-t)}] \frac{\partial N}{\partial S_t}} \right)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} - rH_t = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T) . \quad (5.4)$$

3. **Modelo 3: Mercado con iliquidez proporcional al precio y agentes ruidosos:**

$$\frac{\partial H}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \frac{1}{2} S_t^2 [\sigma + \lambda \gamma]^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} - rH = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T) \quad (5.5)$$

4. **Modelo 4: Mercado con iliquidez estocástica:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial H}{\partial \lambda_t} + \frac{S_t^2 (\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda_t^2} \\ + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2)} \frac{\partial^2 H}{\partial S_t \partial \lambda_t} - rH = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T) . \end{aligned} \quad (5.6)$$

En el caso del modelo 3, la EDP resultante es lineal y puede resolverse por métodos clásicos para este tipo de ecuaciones, pero para los modelos 1, 2 y 4 las EDP de valoración resultantes son extensiones no lineales de la ecuación de Black-Scholes, en donde la no linealidad se tiene por el efecto *feedback* que genera la iliquidez del mercado, lo que dificulta

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales su resolución analítica. Partiendo del trabajo de Beck et al. (2021), se propone la aplicación de extensiones del teorema de representación de Feynman-Kac para los casos de EDP semi-lineales y completamente no lineales, junto con el uso de redes neuronales para implementar la representación discreta que surge de este resultado, como mecanismo para aproximar las soluciones de estas ecuaciones.

El teorema de representación de Feynman-Kac o fórmula de Feynman-Kac, describe cómo la solución de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales parciales se puede expresar como la esperanza de una función de una variable aleatoria, que a su vez está relacionada con la evolución de un proceso estocástico. En las siguientes secciones se presentan los resultados relevantes acerca de la solución de EDP lineales mediante el teorema de representación de Feynman-Kac, así como la extensión de este resultado al caso de ecuaciones semi-lineales y completamente no lineales. Se detalla la implementación de estos resultados mediante redes neuronales artificiales y se desarrolla la aproximación de la solución de las EDP de valoración encontradas.

5.1 El teorema de Feynman-Kac y EDP lineales

Consideremos inicialmente la siguiente ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden parabólica (ecuación hacia atrás de Kolmogorov):

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} \sigma(t, x) \sigma^T(t, x) : \nabla^2 u(t, x) + \mu(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = 0 & ; \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \\ u(T, x) = g(x) & ; \quad x \in \mathbb{R}^d \end{cases}, \quad (5.7)$$

donde $d \in \mathbb{N}$ es la dimensión espacial, $\nabla u(t, x)$ y $\nabla^2 u(t, x)$ denotan el gradiente y el Hessiano de la función $u(t, x)$ respectivamente. La notación $(:)$ representa el producto interno Frobenius de matrices $d \times d$, que es, $A : B = \sum_{i,j=1}^d a_{ij} b_{ij}$, mientras que (\cdot) representa el producto interno Euclideo en \mathbb{R}^d . Se asume que las funciones $\mu : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ son globalmente continuas en sentido Lipschitz. Para este tipo de ecuaciones diferenciales, es posible aproximar la solución para un instante de tiempo fijo y

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales
 algún dominio acotado $D \subset \mathbb{R}^d$ utilizando la fórmula de Feynman-Kac.

El teorema de Feynman-Kac establece que, para cada par $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, la solución $u(t, x)$ de la ecuación (5.7) puede expresarse como el valor esperado condicional de un proceso estocástico $\{X_s\}_{s \in [t, T]}$ con $X_t = x$, es decir:

$$u(t, x) = E[g(X_T) | X_t = x] , \quad (5.8)$$

donde $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por la condición de frontera en (5.7). Una consecuencia inmediata es que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene que:

$$u(T, x) = E[g(X_T) | X_T = x] = g(x) . \quad (5.9)$$

Otra implicación, que se tiene por la ley del valor esperado condicional iterado, es que para todo $s \in [t, T]$

$$u(t, x) = E[u(s, X_s) | X_T = x] . \quad (5.10)$$

Considerando un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$, con la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ generada por un movimiento Browniano d -dimensional $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$, el proceso estocástico $\{X_s\}_{s \in [t, T]}$ puede caracterizarse como la solución de la ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$X_s = x + \int_t^s \mu(\tau, X_\tau) d\tau + \int_t^s \sigma(\tau, X_\tau) dW_\tau , \quad (5.11)$$

y como los coeficientes μ y σ son continuos en sentido Lipschitz, existe una solución única para (5.11). Dado el proceso solución $\{X_s\}_{s \in [t, T]}$, y una función $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, aplicando el lema de Itô se tiene que para todo $s \in [t, T]$:

$$v(s, X_s) = v(t, x) + \int_t^s \partial_t v(\tau, X_\tau) d\tau + \int_t^s \nabla v(\tau, X_\tau) \cdot dX_\tau + \frac{1}{2} \int_t^s \nabla^2 v(\tau, X_\tau) : \sigma(\tau, X_\tau) \sigma^T(\tau, X_\tau) d\tau ,$$

que al sustituir dX_τ por su definición (5.11), es:

$$v(s, X_s) = v(t, x) + \int_t^s \left(\partial_t v + \frac{1}{2} \nabla^2 v : \sigma \sigma^T + \nabla v \cdot \mu \right) (\tau, X_\tau) d\tau + \int_t^s \nabla v \cdot \sigma(\tau, X_\tau) dW_\tau .$$

Como esto es válido para todo $s \in [t, T)$, se tiene en particular para $s = t + h$ con $h > 0$, es decir:

$$v(t+h, X_{t+h}) = v(t, x) + \int_t^{t+h} \left(\partial_t v + \frac{1}{2} \nabla^2 v : \sigma \sigma^T + \nabla v \cdot \mu \right) (\tau, X_\tau) d\tau + \int_t^{t+h} \nabla v \cdot \sigma(\tau, X_\tau) dW_\tau .$$

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

Haciendo $v = u$, con u dada por (5.10), para $s = t + h$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= E \left[\int_t^{t+h} \left(\partial_t u + \frac{1}{2} \nabla^2 u : \sigma \sigma^T + \nabla u \cdot \mu \right) (\tau, X_\tau) d\tau + \int_t^{t+h} \nabla u \cdot \sigma(\tau, X_\tau) dW_\tau | X_t = x \right] \\ &= E \left[\int_t^{t+h} \left(\partial_t u + \frac{1}{2} \nabla^2 u : \sigma \sigma^T + \nabla u \cdot \mu \right) (\tau, X_\tau) d\tau | X_t = x \right] . \end{aligned}$$

Dividiendo por $h > 0$ y tomando límite cuando h tiende a cero, por el teorema del valor medio:

$$\partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} \sigma(t, x) \sigma^T(t, x) : \nabla^2 u(t, x) + \mu(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = 0 \quad ; \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d ,$$

lo que demuestra que la función dada por la fórmula de Feynman-Kac (5.10) resuelve la EDP (5.7).

En el trabajo de Beck et al. (2021) se adiciona la representación mediante redes neuronales de la solución de la EDP. La red es entrenada por muestreo Monte Carlo y produce una aproximación de la solución $u = u(t, \cdot) : D \rightarrow \mathbb{R}$ del problema (5.7), restringido a un dominio acotado de interés $D \subset \mathbb{R}^d$ y en un tiempo específico $t \in [0, T]$. El detalle de esta aproximación para $t = 0$ es presentado en la siguiente sección.

5.1.1 Aproximación mediante redes neuronales

A continuación se presenta una breve descripción de la teoría básica de redes neuronales basada en el texto de Gurney (2018), lo que permitirá tener la intuición necesaria acerca del funcionamiento interno de una red neuronal, y sobre como la fórmula de Feynman-Kac puede implementarse mediante este tipo de algoritmo.

El perceptrón es la arquitectura más básica de una red neuronal. Consta de una sola neurona y una función de activación. La figura (5-1) muestra el esquema básico.

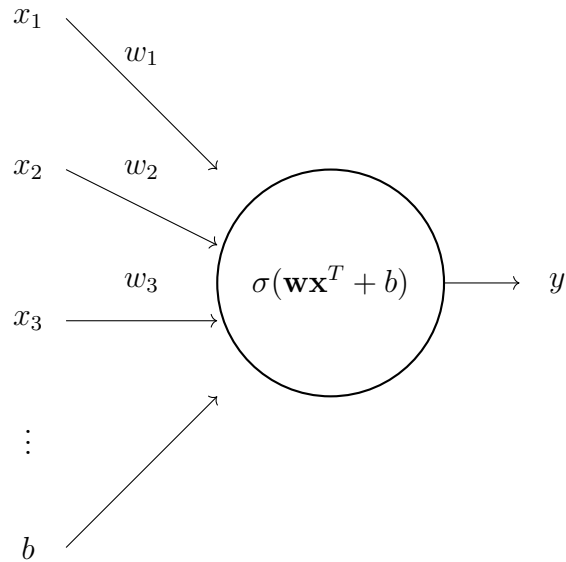


Figura 5-1: La estructura del perceptrón. Se calcula el producto escalar entre las entradas (x_i) y sus correspondientes pesos (w_i), se agrega el sesgo (b) y luego se aplica la función de activación ($\sigma(\cdot)$) a la salida para proporcionar la predicción final (y).

Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ las entradas al perceptrón, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ los pesos correspondientes, b el sesgo y $\sigma(\cdot)$ la función de activación. El perceptrón recibe la entrada \mathbf{x} , calcula la suma ponderada $\mathbf{w}\mathbf{x}^T$ y adiciona el sesgo. La salida del perceptrón es $y = \sigma(\mathbf{w}\mathbf{x}^T + b)$.

El esquema de una red neuronal *feed-forward* o perceptrón multicapa se muestra en la figura **5-2**.

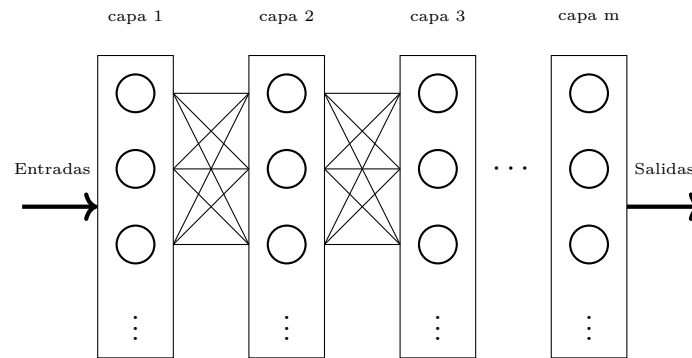


Figura 5-2: Estructura estándar para una red neuronal secuencial. Las entradas se proporcionan a la primera capa (colección de perceptrones) y cada perceptrón procesa las entradas individualmente. Después de que todos los perceptrones en la primera capa han procesado las entradas se tiene un vector de salida que será la entrada para la segunda capa. Este proceso se repite hasta la capa de salida.

Una capa en una red neuronal artificial se define como una colección de neuronas que procesan las entradas y proporcionan una salida individual. En consecuencia, la salida de una capa es un vector cuya dimensión es igual al número de neuronas en esa capa. Comúnmente se trabaja con redes neuronales profundas, es decir, con redes que tienen un número grande de capas entre la de entrada y la de salida, denominadas capas ocultas.

Otro elemento importante al trabajar con redes neuronales artificiales es el proceso mediante el cual son entrenadas, es decir, el procedimiento para llegar al conjunto óptimo de pesos y sesgos para resolver el problema. Para entrenar una red neuronal es necesario proporcionarle un conjunto de datos de entrenamiento y una función de pérdida o función de costo. El conjunto de datos de entrenamiento se compone de entradas (x_1, x_2, \dots, x_n) y posiblemente de los valores objetivo correspondientes para cada entrada (y_1, y_2, \dots, y_n) . Si un conjunto de entrenamiento incluye valores objetivo para sus entradas, el proceso de entrenamiento se conoce como *aprendizaje supervisado*, de lo contrario se denomina *aprendizaje no supervisado*.

El proceso para optimizar los parámetros (pesos y sesgos) en una red neuronal requiere

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales
 dos pasos: un recorrido hacia adelante y uno hacia atrás. En el recorrido hacia adelante las entradas son proporcionadas a la red neuronal y propagadas a través de esta, lo que lleva a una predicción final. Después de hacer la predicción se mide el error con respecto al valor real (objetivo) utilizando la función de costo designada. Posteriormente se calcula el gradiente de la función de costo respecto a cada parámetro y estos se ajustan según la dirección dictada por el gradiente (recorrido hacia atrás). A medida que se repite este proceso, los parámetros se actualizan continuamente de forma que se espera llegar finalmente a una colección de pesos y sesgos que minimice suficientemente la función de costo.

Generación de los datos de entrenamiento

Para el caso específico de la red considerada para resolver la EDP (5.7), el entrenamiento se basa en una gran cantidad de datos generados por muestreo Monte Carlo del proceso estocástico (5.11) relacionado con la EDP. Para ser más precisos, consideramos los datos de entrenamiento $\{(x^i, y^i)\}_{i=1}^n$, donde la variable de entrada o independiente x se muestrea aleatoriamente de una distribución uniforme, $X \sim U(D)$, lo que garantiza que se cubre de forma suficiente el dominio de interés D . La salida aleatoria (variable objetivo) y se define como una función de x mediante $Y := g(X_T)$, donde X_T es el valor final del proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ que inicia en $X_0 = x$ y evoluciona según la EDE:

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s . \quad (5.12)$$

y $g(\cdot)$ es la función que describe la condición de frontera de la EDP. Si la distribución explícita de X_T se conoce, los pares (x, y) pueden ser muestreados directamente desde esta distribución. Si la distribución no es conocida, se puede utilizar el esquema de Euler-Maruyama de (5.12), es decir:

$$\tilde{X}_{n+1} := \tilde{X}_n + \mu(t_n, \tilde{X}_n)(t_{n+1} - t_n) + \sigma(t_n, \tilde{X}_n)(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}) \quad ; \quad \tilde{X}_0 := x \quad (5.13)$$

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

donde $\tilde{X}_n \approx X_{t_n}$ es un proceso estocástico discreto que aproxima a X_t en los puntos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ y x es una realización de $X \sim U(D)$. Finalmente $Y := g(\tilde{X}_N)$, es decir, el valor de la función que determina la condición de frontera en la EDP, evaluada en \tilde{X}_N . La convergencia para el esquema de Euler-Maruyama esta garantizada si $N \rightarrow \infty$ y $\sup_n |t_n - t_{n-1}| \rightarrow 0$.

La aproximación mediante redes neuronales de la solución de la EDP (5.7) en $t = 0$ es una función $u_\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$, donde θ recoge todos los parámetros desconocidos de la red. Dado un conjunto de datos de entrenamiento $\{(x^i, y^i)\}_{i=1}^n$, el objetivo es minimizar la suma de errores al cuadrado:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y^i - u_\theta(x^i)]^2 \quad (5.14)$$

que corresponde, desde la perspectiva del proceso estocástico subyacente, a la minimización de:

$$E \left\{ [g(X_T) - u_\theta(x^i)]^2 \right\}$$

donde X_T es la solución de (5.12) iniciando en $X_0 = x$.

Arquitectura de la red

La red propuesta por Beck et al. (2021) tiene la siguiente estructura:

Entrada \mapsto *CN* \mapsto (*Densa* \mapsto *CN* \mapsto *TanH*) \mapsto (*Densa* \mapsto *CN* \mapsto *TanH*) \mapsto *Densa* \mapsto *CN* \mapsto *Salida*

donde:

- *CN*: paso de normalización¹.
- *Densa*: indica una capa de neuronas completamente conectadas sin término de sesgo, es decir, un producto entre vectores y matrices de pesos.

¹La normalización durante el entrenamiento de una red neuronal es un proceso que busca estandarizar o normalizar las entradas que se proporcionan a la red. Esto se hace para ayudar al modelo a aprender de manera más efectiva y a converger más rápido durante el entrenamiento.

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

- *Tanh*: indica la aplicación de la función tangente hiperbólica como función de activación.

Caso lineal general

La fórmula de Feynman-Kac y la aproximación mediante redes neuronales puede extenderse a la clase completa de ecuaciones diferenciales parciales lineales parabólicas. Específicamente, las EDP consideradas se pueden extender al tipo:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} \sigma(t, x) \sigma^T(t, x) : \nabla^2 u(t, x) + \mu(t, x) \cdot \nabla u(t, x) - r(t, x) u(t, x) + f(t, x) = 0 \\ u(T, x) = g(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (5.15)$$

donde $r : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ y $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Bajo condiciones suficientes de suavidad, la solución de (5.15) admite la representación de Feynman-Kac:

$$u(t, x) = E \left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau r(v, X_v) dv} f(\tau, X_\tau) + e^{-\int_t^T r(v, X_v) dv} g(X_T) | X_t = x \right] \quad ; \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \quad (5.16)$$

Algorítmicamente esto puede considerarse dentro del mismo marco discutido en la sección anterior, en particular, no se modifica la generación de muestras del proceso estocástico $\{X_s\}_{s \in [0, T]}$. En el caso de la aproximación discreta $\{\tilde{X}_n\}_{n=0}^N$ generada por el esquema de Euler-Maruyama (5.13), se puede proporcionar una aproximación simple de la variable de salida correspondiente Y mediante:

$$Y = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}_n f(t_n, \tilde{X}_n) (t_{n+1} - t_n) + \tilde{R}_N g(\tilde{X}_N) , \quad (5.17)$$

con,

$$\tilde{R}_n := \exp \left(- \sum_{j=0}^{n-1} r(t_j, \tilde{X}_j) (t_{j+1} - t_j) \right) = \tilde{R}_{n-1} \exp(-r(t_{n-1}, \tilde{X}_{n-1}) (t_n - t_{n-1})) \quad ; \quad \tilde{R}_0 := 1 . \quad (5.18)$$

En este caso \tilde{R}_n es una aproximación discreta del término $e^{-\int_0^{t_n} r(v, X_v) dv}$. La aproximación discreta (5.17) puede ser utilizada para generar muestras de entrenamiento $\{(x^i, y^i)\}_{i=1}^n$ de una red neuronal $u_\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$ que aproxima la solución de la EDP (5.15) en un dominio de interés D en el instante $t = 0$.

5.2 El teorema de Feynman-Kac y EDP semi-lineales

En esta sección se extiende la metodología descrita anteriormente para considerar la resolución de EDP semi-lineales obtenidas al permitir que los términos de menor orden en (5.15) dependan no linealmente de la solución y su gradiente. Esto resulta en el problema de valor final

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + \frac{1}{2} \sigma(t, x) \sigma^T(t, x) : \nabla^2 u(t, x) + \mu(t, x) \cdot \nabla u(t, x) + f(t, x, u(t, x), \sigma^T(t, x) \nabla u(t, x)) = 0 \\ u(T, x) = g(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (5.19)$$

para $t \in [0, T]$ y $x \in \mathbb{R}^d$. La función $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ que contiene los términos de menor orden, puede depender de manera general de las variables independientes t, x , así como de la solución $u(t, x)$ y su gradiente transformado $(\sigma^T \nabla)u(t, x)$. La forma no divergente del término de orden principal, así como la dependencia específica en $\sigma^T \nabla u$, permiten considerar nuevamente la conexión entre las EDP y los procesos estocásticos. La presencia de estas dependencias requiere extender el método de solución numérica para incluir procesos estocásticos adicionales que permitan aproximar ∇u .

Al igual que en la sección anterior, consideramos el proceso $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ en el espacio de estados \mathbb{R}^d determinado por la EDE hacia delante (*forward*):

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad (5.20)$$

con $x \in \mathbb{R}^d$, y con espacio de probabilidad subyacente $(\Omega, \mathcal{F}, P(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ donde la filtración es la generada por un movimiento Browniano d -dimensional $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$. Dada una función suficientemente suave $v : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, y por la aplicación de la fórmula de Itô, la dinámica del proceso de valor $Y_t := v(t, X_t)$ está gobernada por la EDE (escrita en notación diferencial):

$$dY_t = \left(\partial_t v + \frac{1}{2} \sigma \sigma^T : \nabla^2 v + \nabla v \cdot \mu \right) (t, X_t) dt + (\sigma^T \nabla v)(t, X_t) \cdot dW_t, \quad (5.21)$$

Asumiendo que existe una solución suficientemente suave u de (5.19), hacemos $v = u$ en

(5.21) e introducimos un tercer proceso estocástico $Z_t := (\sigma^T \nabla)u(t, X_t)$ para obtener:

$$dY_t = -f(t, X_t, Y_t, Z_t)dt - Z_t \cdot dW_t \quad ; \quad Y_T = g(X_T) . \quad (5.22)$$

Esta EDE con condición final $Y_T = g(X_T)$ se conoce como la ecuación diferencial estocástica hacia atrás (BSDE - *backward stochastic differential equation*) asociada con (5.19) y se expresa, en notación integral, como:

$$Y_t = g(X_T) - \int_t^T f(s, X_s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s \cdot dW_s . \quad (5.23)$$

Bajo condiciones suficientes de regularidad sobre las funciones μ , σ , f y g , las EDE (5.20) y (5.22) poseen solución única (X_t, Y_t, Z_t) y el enlace con la EDP no lineal se tiene mediante una generalización de la fórmula de Feynman-Kac, la cual establece que para todo $t \in [0, T]$ se cumple casi seguramente que:

$$Y_t = u(t, X_t) \quad \text{y} \quad Z_t = (\sigma^T \nabla u)(t, X_t) . \quad (5.24)$$

Estas expresiones se denominan *representación no lineal de Feynman-Kac*, y el sistema de EDE conformado por (5.20) y (5.22) se llama *ecuación diferencial estocástica forward-backward* o FBSDE. Un desarrollo detallado de estos resultados se puede encontrar en El Karoui and Mazliak (1997) y Ma et al. (1999).

Se puede ver que la EDE (5.20) no depende de Y_t o Z_t , por lo que puede resolverse de manera independiente. Como resultado de esto, el valor buscado de la solución $u(0, x)$, puede encontrarse resolviendo la FBSDE y evaluando Y_0 en (5.24). La diferencia con el procedimiento descrito en la sección anterior es que la solución del proceso de valor $\{Y_s\}_{s \in [0, T]}$ es más compleja, debido al término no lineal f y su dependencia de $u(t, x)$ y $(\sigma^T \nabla)u(t, x)$.

5.2.1 Aproximación mediante redes neuronales

El algoritmo propuesto en Han et al. (2018), denominado *deep BSDE solver*, construye una aproximación de la solución $u(0, x)$ de la EDP (5.19) mediante la resolución de la FBSDE asociada (5.20) y (5.22), retornando $u(0, x) = Y_0$, como se describió en la sección anterior.

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

Para su implementación mediante redes neuronales, se considera una discretización del dominio temporal $[0, T]$ en N subintervalos equidistantes con pasos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ y tamaño de paso $\Delta t = T/N$. Se generan simulaciones de las trayectorias del proceso continuo $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ utilizando el esquema de Euler-Maruyama para la EDE hacia adelante (5.20), lo que lleva al proceso discreto:

$$\tilde{X}_{n+1} = \tilde{X}_n + \mu(t_n, \tilde{X}_n)(t_{n+1} - t_n) + \sigma(t_n, \tilde{X}_n)(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}) \quad ; \quad \tilde{X}_0 = x . \quad (5.25)$$

De la misma forma se generan simulaciones de las trayectorias para la EDE hacia atrás (5.23) como:

$$\tilde{Y}_{n+1} = \tilde{Y}_n + f(t_n, \tilde{X}_n, \tilde{Y}_n, \tilde{Z}_n)(t_{n+1} - t_n) + \tilde{Z}_n(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}) \quad ; \quad \tilde{Y}_N = g(\tilde{X}_N) . \quad (5.26)$$

Es importante anotar que los cambios del movimiento Browniano $(W_{t_{n+1}} - W_{t_n})$ son iguales en (5.25) y (5.26).

El algoritmo puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Simular trayectorias del proceso discreto $\{\tilde{X}_n\}_{n=0}^N$ junto con los correspondientes incrementos del movimiento Browniano $\{W_{t_{n+1}} - W_{t_n}\}_{n=0}^{N-1}$ de acuerdo con (5.25).
2. Simular trayectorias del proceso discreto $\{\tilde{Y}_n\}_{n=0}^N$ de acuerdo (5.26). Una inspección más detallada muestra que (5.26) contiene cantidades desconocidas necesarias para poder llevar a cabo el paso temporal. Estas cantidades son: \tilde{Y}_0 que es una aproximación de $u(0, x)$, así como \tilde{Z}_n para $n = 0, \dots, N - 1$, que son aproximaciones de $(\sigma^T \nabla u)(t_n, \tilde{X}_n)$. Estas cantidades se obtienen mediante el entrenamiento de una red neuronal.

Las cantidades $\tilde{Y}_0 \approx u(0, x)$ y $\tilde{Z}_0 \approx (\sigma^T \nabla u)(0, \tilde{X}_0)$ se tratan como parámetros individuales, ambos necesarios solo en el punto $(0, x)$, y se aprenden durante el entrenamiento. Las cantidades restantes $\tilde{Z}_n, n = 1, \dots, N - 1$ se aproximan mediante redes neuronales que realizan la transformación $x \rightarrow (\sigma^T \nabla u)(t_n, x)$ para $n = 1, \dots, N - 1$. Todos los parámetros de la red neuronal a ser aprendidos se recopilan en

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

$\theta = (\theta_{u_0}, \theta_{\nabla u_0}, \theta_{\nabla u_1}, \dots, \theta_{\nabla u_{N-1}})$, donde $\theta_{u_0} \in \mathbb{R}$, $\theta_{\nabla u_0} \in \mathbb{R}^d$ y $\theta_{\nabla u_n} \in \mathbb{R}^{\rho_n}$, siendo ρ_n el número de parámetros desconocidos en la red neuronal que realiza la transformación $x \rightarrow (\sigma^T \nabla u)(t_n, x)$ para $n = 1, \dots, N - 1$.

3. Dado que \tilde{Y}_N aproxima $u(T, \tilde{X}_N) = g(\tilde{X}_N)$ según (5.26), la red se entrena para minimizar el error cuadrático medio entre \tilde{Y}_N y $g(\tilde{X}_N)$. Para un conjunto de m pares simulados $(\tilde{X}_N, \tilde{Y}_N)$ esto resulta en la función de pérdida:

$$\phi_\theta(\tilde{X}_N, \tilde{Y}_N) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [\tilde{Y}_N^i - g(\tilde{X}_N^i)]^2 \quad (5.27)$$

donde \tilde{Y}_N^i es la salida de la red neuronal. Se emplea diferenciación automática sobre ϕ_θ respecto a los parámetros desconocidos θ para obtener el gradiente $\nabla_\theta \phi_\theta$, el cual se utiliza en la rutina de optimización, que puede ser, por ejemplo, alguna variante del método de gradiente estocástico descendente.

5.2.2 Estructura de la red neuronal

La figura **5-3** muestra la estructura completa de la red.

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

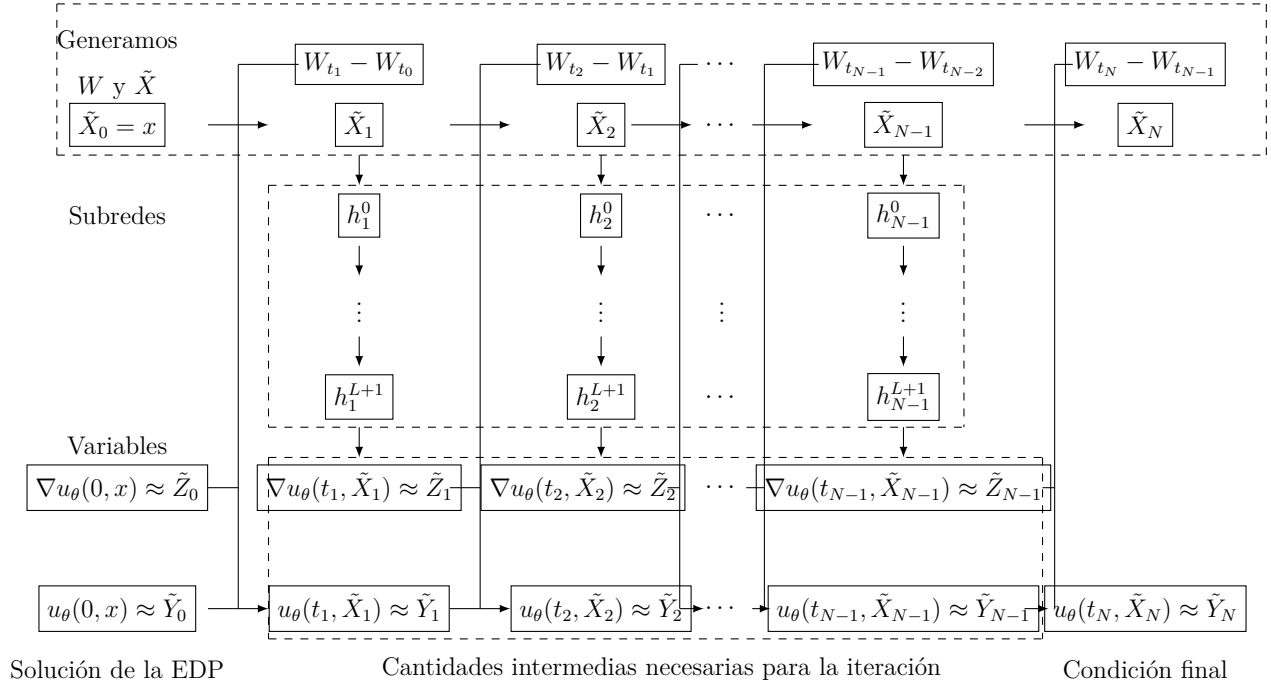


Figura 5-3: Las dos primeras filas expresan la evolución del proceso hacia adelante $\{\tilde{X}_n\}_{n=0}^N$ iniciando con $\tilde{X}_0 = 0$. Los parámetros desconocidos para $u_\theta(0, x)$ y $\nabla u_\theta(0, x)$, así como los parámetros en la red neuronal de aproximación \tilde{Z}_n , $n = 1, \dots, N - 1$, son aprendidos mediante entrenamiento. Los valores intermedios \tilde{Y}_n y \tilde{Z}_n , $n = 1, \dots, N - 1$ son necesarios para establecer la relación entre el valor buscado de la solución de la EDP $u(0, x) \approx \tilde{Y}_0$ con el valor final $\tilde{Y}_N = g(\tilde{X}_N)$.

La arquitectura de las subredes que realizan la transformación $x \rightarrow (\sigma^T \nabla u)(t_n, x)$ utilizadas se toman al igual que en (Han et al. (2018)), y están dadas por:

Entrada \mapsto *CN* \mapsto (*Densa* \mapsto *CN* \mapsto *ReLU*) \mapsto (*Densa* \mapsto *CN* \mapsto *ReLU*) \mapsto *Densa* \mapsto *CN* \mapsto *Salida*

donde:

- *CN*: paso de normalización.
- *Densa*: indica una capa de neuronas completamente conectadas sin término de sesgo.

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

- *ReLU*: indica la aplicación de un rectificador lineal como función de activación. Específicamente, $ReLU(x) = \max\{x, 0\}$.

En términos de las capas en la figura (5-3), se tiene entonces que: primero, las entradas $\tilde{X}_n \in \mathbb{R}^d$ son escaladas y desplazadas por cada componente mediante normalización, lo que resulta en $h_n^0 = CN_n^0(\tilde{X}_n)$; segundo, las salidas de la primera capa son procesadas por el bloque subsecuente $h_n^1 = ReLU(CN_n^1(W_n^1 h_n^0))$, seguido por el bloque $h_n^2 = ReLU(CN_n^2(W_n^2 h_n^1))$; finalmente, la salida es multiplicada por otra matriz de pesos W_n^3 y normalizada nuevamente, resultando en $h_n^3 = CN_n^3(W_n^3 h_n^2) \approx \tilde{Z}_n$.

5.3 El teorema de Feynman-Kac y EDP completamente no lineales

En el trabajo de Cheridito et al. (2007) se desarrolla una representación estocástica para la solución de EDP completamente no lineales, es decir, EDP en donde los términos de menor orden dependen no linealmente de la solución, su gradiente y su Hessiano. Para esto introducen una nueva clase de ecuaciones diferenciales estocásticas hacia atrás, llamadas BSDE de segundo orden o 2BSDE. Concretamente, sean $d \in \mathbb{N}$ y $T \in (0, \infty)$, y sean $u = (u(t, x))_{t \in [0, T] \times x \in \mathbb{R}^d} \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ funciones que satisfacen para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ que $u(T, x) = g(x)$ y

$$\partial_t u(t, x) = f(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x), \nabla^2 u(t, x)). \quad (5.28)$$

Se asume que $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas que satisfacen las siguientes condiciones Lipschitz y de crecimiento:

- Para todo $N \geq 1$ existe una constante F_N tal que:

$$|f(t, x, y, z, \gamma) - f(t, x, \tilde{y}, z, \tilde{\gamma})| \leq F_N |y - \tilde{y}|$$

para todo $(t, x, y, \tilde{y}, z, \gamma) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times d}$, con $\max\{|x|, |y|, |\tilde{y}|, |z|, |\gamma|\} \leq N$.

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

- Existen constantes F y $q \geq 0$ tales que:

$$|f(t, x, y, z, \gamma)| \leq F(1 + |x|^q + |y| + |z|^q + |\gamma|^q)$$

para todo $(t, x, y, \tilde{y}, z, \gamma) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times d}$.

- Existen constantes G y r tales que:

$$|g(x)| \leq G(1 + |x|^r)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Considerando un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ donde la filtración es la generada por un movimiento Browniano estándar d -dimensional $W = (W^{(1)}, W^{(2)}, \dots, W^{(d)})$, y siendo $X = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(d)}) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un proceso estocástico adaptado a esta filtración, con trayectorias continuas y que satisface para todo $t \in [0, T]$:

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad (5.29)$$

y para $\varphi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ sea $\mathcal{A}\varphi : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ que:

$$\mathcal{A}\varphi(t, x) = \partial_t \varphi(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(t, x) \sigma^T(t, x) \nabla^2 \varphi, (t, x)) \quad (5.30)$$

y sean $Y : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $Z = (Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(d)}) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\Gamma = (\Gamma^{(i,j)})_{(i,j) \in \{1, \dots, d\}^2} : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, y $A = (A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(d)}) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ procesos estocásticos que satisfacen para todo $t \in [0, T]$, $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ que:

$$Y_t = u(t, X_t) \quad ; \quad Z_t = \nabla u(t, X_t) \quad ; \quad \Gamma_t = \nabla^2 u(t, X_t) \quad ; \quad A_t^{(i)} = \mathcal{A} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) (t, X_t) \quad (5.31)$$

entonces, se tiene que Y , Z , Γ y A son procesos adaptados y con trayectorias continuas que satisfacen para todo $t \in [0, T]$ casi seguramente que:

$$Y_t = g(X_T) - \int_t^T \left(f(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s) + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(s, X_s) \sigma^T(s, X_s) \Gamma_s) \right) ds - \int_t^T Z_s dX_s \quad (5.32)$$

y

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t A_s ds + \int_0^t \Gamma_s dX_s. \quad (5.33)$$

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

La demostración de este resultado se pueden encontrar en Cheridito et al. (2007). A continuación se describe la formulación discreta emergente de este resultado.

5.3.1 Discretización del sistema EDP-2BSDE

Para discretizar el sistema EDP-2BSDE se emplean las siguientes hipótesis en adición a los supuestos anteriores. Sean $\mu : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ funciones continuas y sea $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ un espacio de probabilidad filtrado donde la filtración considera es la generada por un movimiento Browniano estándar W . Sea x una función \mathcal{F}_0 -medible y sea $X = (X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(d)}) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un proceso estocástico adaptado con trayectorias continuas que satisface para todo $t \in [0, T]$ casi seguramente:

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s . \quad (5.34)$$

Sean $e_1^{(d)} = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2^{(d)} = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_d^{(d)} = (0, 0, \dots, 1)$ en \mathbb{R}^d los vectores básicos estándar de \mathbb{R}^d , para toda $\varphi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ sea $\mathcal{A}\varphi : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ la función que satisface para todo $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ que:

$$\mathcal{A}\varphi(t, x) = \partial_t \varphi(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \nabla^2 \varphi(t, x) \left(\sigma(t, x) e_i^{(d)}, \sigma(t, x) e_i^{(d)} \right) , \quad (5.35)$$

y sean $Y : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $Z : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\Gamma : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ y $A : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ proceso estocásticos que satisfacen para todo $t \in [0, T]$ que:

$$Y_t = u(t, X_t) \quad ; \quad Z_t = \nabla u(t, X_t) \quad ; \quad \Gamma_t = \nabla^2 u(t, X_t) \quad ; \quad A_t = \mathcal{A}(\nabla u(t, X_t)) . \quad (5.36)$$

Por los resultados de la sección anterior, para $\tau_1, \tau_2 \in [0, T]$ con $\tau_1 \leq \tau_2$ se cumple casi seguramente que:

$$X_{\tau_2} = X_{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s, X_s) ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sigma(s, X_s) dW_s , \quad (5.37)$$

$$Y_{\tau_2} = Y_{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(f(s, X_s, Y_s, Z_s, \Gamma_s) + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(s, X_s) \sigma^T(s, X_s) \Gamma_s) \right) ds - \int_{\tau_1}^{\tau_2} Z_s dX_s , \quad (5.38)$$

y

$$Z_{\tau_2} = Z_{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} A_s ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Gamma_s dX_s \quad (5.39)$$

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

es decir,

$$Y_{\tau_2} = Y_{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(f(s, X_s, Y_s, Z_s, \nabla^2 u(s, X_s)) + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(s, X_s) \sigma^T(s, X_s) \nabla^2 u(s, X_s)) \right) ds - \int_{\tau_1}^{\tau_2} Z_s dX_s \quad (5.40)$$

y

$$Z_{\tau_2} = Z_{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{A}(\nabla u(s, X_s)) ds + \int_{\tau_2}^{\tau_2} \nabla^2 u(s, X_s) dX_s . \quad (5.41)$$

Al considerar una partición de $[0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ tal que el $\sup_{0 \leq k \leq N} (t_{k+1} - t_k)$ es suficientemente pequeño, se tiene que, para todo $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$:

$$X_{t_0} = X_0 = x \quad ; \quad Y_{t_0} = X_0 = u(0, x) \quad ; \quad Z_{t_0} = Z_0 = \nabla u(0, x) , \quad (5.42)$$

$$X_{t_{n+1}} \approx X_{t_n} + \mu(t_n, X_{t_n})(t_{n+1} - t_n) + \sigma(t_n, X_{t_n})(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}) , \quad (5.43)$$

$$Y_{t_{n+1}} = Y_{t_n} + \left[f(t_n, X_{t_n}, Y_{t_n}, Z_{t_n}, \nabla^2 u(t_n, X_{t_n})) + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(t_n, X_{t_n}) \sigma^T(t_n, X_{t_n}) \nabla^2 u(t_n, X_{t_n})) \right] (t_{n+1} - t_n) - Z_{t_n} (X_{t_{n+1}} - X_{t_n}) , \quad (5.44)$$

y

$$Z_{t_{n+1}} = Z_{t_n} + \mathcal{A}(\nabla u(t_n, X_{t_n}))(t_{n+1} - t_n) + \nabla^2 u(t_n, X_{t_n})(X_{t_{n+1}} - X_{t_n}) \quad (5.45)$$

al considerar la aproximación de Euler-Maruyama de las integrales. Como en el caso semilineal, la dificultad para la implementación de la aproximación descrita por (5.44) y (5.45) radica en la estimación del gradiente y Hessiano de la función u . En años recientes se ha tratado este problema considerando para todo $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ aproximaciones adecuadas para las funciones:

$$x \in \mathbb{R}^d \mapsto \nabla^2 u(t_n, x) \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (5.46)$$

y

$$x \in \mathbb{R}^d \mapsto (\mathcal{A}) u(t_n, x) \in \mathbb{R}^d \quad (5.47)$$

De manera precisa, sean $\mathbb{G}_n^\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ y $\mathbb{A}_n^\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ funciones continuas, y para todo $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_v) \in \mathbb{R}^v$, con $v \in \mathbb{N} \cap [d+1, \infty)$, sean $\mathcal{Y}^\theta : \{0, 1, \dots, N\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

$\mathcal{Z}^\theta : \{0, 1, \dots, N\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ procesos estocásticos tales que $\mathcal{Y}_0^\theta = \theta_1$ y $\mathcal{Z}_0^\theta = (\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{d+1})$ y para todo $n \in \{0, 1, \dots, N\}$:

$$\mathcal{Y}_{n+1}^\theta \approx \mathcal{Y}_n^\theta + \mathcal{Z}_n^\theta(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}) + \left(f(t_n, X_{t_n}, \mathcal{Y}_n^\theta, \mathcal{Z}_n^\theta, \mathbb{G}_n^\theta(X_{t_n})) + \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbb{G}_n^\theta(X_{t_n})) \right) (t_{n+1} - t_n) \quad (5.48)$$

y

$$\mathcal{Z}_{n+1}^\theta \approx \mathcal{Z}_n^\theta + \mathbb{A}_n^\theta(X_{t_n}) + \mathbb{G}_n^\theta(X_{t_n})(W_{t_{n+1}} - W_{t_n}) \quad (5.49)$$

Entonces, para toda selección adecuada de $\theta \in \mathbb{R}^v$ y todo $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ se tiene que $\mathcal{Y}_n^\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una aproximación de $Y_{t_n} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\mathcal{Y}_n^\theta \approx Y_{t_n} \quad (5.50)$$

Para toda selección adecuada de $\theta \in \mathbb{R}^v$ y todo $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ se tiene que $\mathcal{Z}_n^\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una aproximación de $Z_{t_n} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$.

$$\mathcal{Z}_n^\theta \approx Z_{t_n} \quad (5.51)$$

Para toda selección adecuada de $\theta \in \mathbb{R}^v$ y todo $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ se tiene que $\mathbb{G}_n^\theta \in \mathbb{R}^{d \times d}$ es una aproximación del Hessiano $\nabla^2 u(t_n, x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

$$\mathbb{G}_n^\theta \approx \nabla^2 u(t_n, x) \quad (5.52)$$

Para toda selección adecuada de $\theta \in \mathbb{R}^v$ y todo $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ se tiene que $\mathbb{A}_n^\theta \in \mathbb{R}^d$ es una aproximación de $(\partial_t + \mathcal{A})u(t_n, x) \in \mathbb{R}^d$.

$$\mathbb{A}_n^\theta \approx \mathcal{A}u(t_n, x) \quad (5.53)$$

En particular, se considera que θ_1 es una aproximación adecuada de $u(0, x) \in \mathbb{R}^d$.

$$\theta_1 \approx u(0, x) \quad (5.54)$$

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

Siguiendo los trabajos de Beck et al. (2019), Bachouch et al. (2021), Beck et al. (2020) y Germain et al. (2021), se propone que para todo $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ que las funciones \mathbb{G}_n^θ y \mathbb{A}_n^θ se tomen como una red neuronal, lo que facilita la implementación de la aproximación discreta de la 2BSDE relacionada con al EDP no lineal de valoración.

5.3.2 Aproximación mediante redes neuronales

Como se indico al final de la sección anterior, las funciones de aproximación \mathbb{G}_n^θ en (5.52) y \mathbb{A}_n^θ en (5.53), se modelarán como una red neuronal. Consideramos entonces que, para todo $k \in \mathbb{N}$ sea $\varphi_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ una función (ReLU) que satisface para todo $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ que:

$$\varphi_k(x) = (\max\{x_1, 0\}, \dots, \max\{x_k, 0\}) \quad (5.55)$$

y para todo $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_v) \in \mathbb{R}^v$, $v \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k, l \in \mathbb{N}$ con $v + k(l + 1) \leq \nu$, sea $P_{k,l}^{\theta,v} : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k$ una función lineal afín que satisface para toda $x = (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l$ que

$$P_{k,l}^{\theta,v}(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_{v+1} & \theta_{v+2} & \dots & \theta_{v+l} \\ \theta_{v+l+1} & \theta_{v+l+2} & \dots & \theta_{v+2l} \\ \theta_{v+2l+1} & \theta_{v+2l+2} & \dots & \theta_{v+3l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \theta_{v+(k-1)l+1} & \theta_{v+(k-1)l+2} & \dots & \theta_{v+kl} \end{pmatrix}}_{\text{matriz de pesos}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \theta_{v+kl+1} \\ \theta_{v+kl+2} \\ \theta_{v+kl+3} \\ \vdots \\ \theta_{v+kl+k} \end{pmatrix}}_{\text{vector de sesgo}} \quad (5.56)$$

asumiendo que $v \geq (5Nd + Nd^2 + 1)(d + 1)$, que para todo $\theta \in \mathbb{R}^v$, $n \in \{m \in \mathbb{N} : m < N\}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, y que:

$$\mathbb{A}_n^\theta = P_{d,d}^{\theta,[(2N+n)d+1](d+1)} \circ \phi_d \circ P_{d,d}^{\theta,[(N+n)d+1](d+1)} \circ \phi_d \circ P_{d,d}^{\theta,[nd+1](d+1)} \quad (5.57)$$

y

$$\mathbb{G}_n^\theta = P_{d^2,d}^{\theta,(5Nd+nd^2+1)(d+1)} \circ \phi_d \circ P_{d,d}^{\theta,[(4N+n)d+1](d+1)} \circ \phi_d \circ P_{d,d}^{\theta,[(3N+n)d+1](d+1)} \quad (5.58)$$

Las funciones en (5.57) representan (como ejemplo) una red neuronal artificial con 4 capas

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales
 (1 capa de entrada con d neuronas, 2 capas ocultas con d neuronas cada una, y una capa de salida con d neuronas) y funciones rectificadoras (ReLU) como funciones de activación. Las funciones en (5.58) también representan una red neuronal artificial con 4 capas (1 capa de entrada con d neuronas, 2 capas ocultas con d neuronas cada una, y una capa de salida con d^2 neuronas) y funciones rectificadoras (ReLU) como funciones de activación.

Para establecer los parámetros adecuados $\theta \in \mathbb{R}^v$ en las ecuaciones que describen las redes neuronales se aplica el algoritmo de minimización del gradiente estocástico descendente a la función de costo:

$$\theta \in \mathbb{R}^v \rightarrow E[|\mathcal{Y}_n^\theta - g(X_{t_N})^2|] \in \mathbb{R} \quad (5.59)$$

Aplicando el algoritmo de minimización se tienen, bajo ciertos supuestos, aproximaciones aleatorias

$$\Theta_m = (\Theta_m^{(1)}, \Theta_m^{(2)}, \dots, \Theta_m^{(v)}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^v \quad (5.60)$$

para $m \in \mathbb{N}_0$, de un punto mínimo local de la función en (5.51). Para valores suficientemente grandes de N , v , $m \in \mathbb{N}$ se utiliza la variable aleatoria $\Theta_m^{(1)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como una aproximación apropiada de $u(0, x) \in \mathbb{R}$.

$$\Theta_m^{(1)} \approx u(0, x) \quad (5.61)$$

5.3.3 Estructura de la red neuronal

La figura 5-4 representa la estructura de la red que implementa el método.

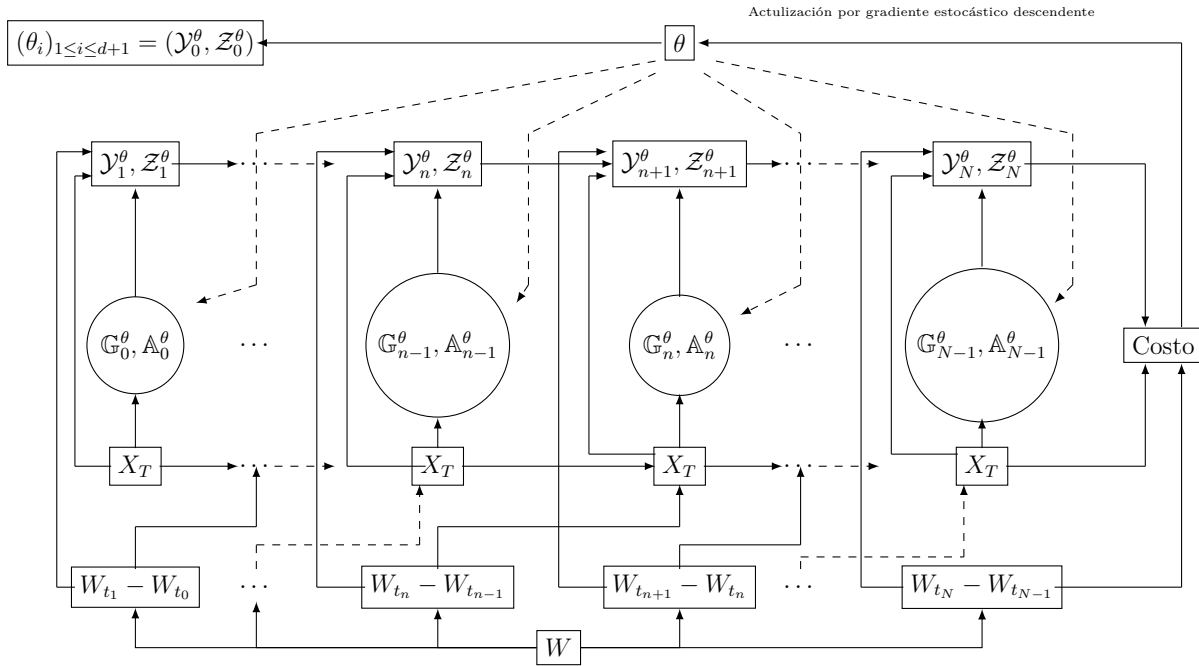


Figura 5-4: Representación del funcionamiento del método basado en la relación entre 2BSDE y EDP. En cada paso los valores de los parámetros se actualizan por gradiente estocástico descendente; El algoritmo es provisto con un muestra aleatoriamente generada de incrementos del movimiento Browniano $\{W_t\}$ como entrenamiento. Junto con el valor de θ el algoritmo (que opera de izquierda a derecha en la figura) calcula recursivamente \mathcal{Y}_n^θ , $n \in \{1, 2, \dots, N\}$, y \mathcal{Z}_n^θ , $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ siguiendo las expresiones (5.50) y (5.51). Finalmente el valor de θ se actualiza desde el gradiente de la función de costo.

Es importante anotar que la implementación del algoritmo 2BSDE-EDP, implica el cumplimiento de las condiciones necesarias para aplicar el teorema de Feynman-Kac. En el caso de las ecuaciones diferenciales parciales de valoración asociadas a los modelos de mercado con iliquidez, estas condiciones se cumplen si los términos S_t y t no introducen discontinuidades o singularidades en la función $f(t, S_t, \nabla H, \nabla^2 H)$ (siguiendo la notación de la sección 5.3). Cumplir con esta condición implica considerar restricciones sobre las estrategias de los agentes similares a las propuestas en el capítulo 4 de este documento.

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales

En relación con la tasa de convergencia del algoritmo 2BSDE-EDP, esta se debe analizar considerando varios elementos, como:

- La arquitectura de la Red Neuronal: la complejidad y la capacidad de la red neuronal (número de capas y neuronas) afectan la tasa de convergencia. Redes neuronales más profundas y con más neuronas tienen el potencial de aproximar funciones más complejas, pero también pueden necesitar más datos y tiempo de entrenamiento.
- Función de costo y el proceso de optimización: la tasa de convergencia está influenciada por la función de costo utilizada y el algoritmo de optimización considerado.
- Número de Datos: a medida que se aumenta el número de muestras utilizadas para entrenar la red neuronal, la tasa de convergencia suele mejorar, aunque esto también incrementa el costo computacional.

Estos elementos hacen que la comparación, en términos de tasa de convergencia, de este algoritmo con métodos numéricos tradicionales como el de diferencias finitas (implementado para la resolución de las ecuaciones de valoración en mercados ilíquidos en trabajos como los de Company et al. (2010b) o Guo and Wang (2015)) no sea del todo posible, aunque en términos generales, el teorema de aproximación universal de las redes neuronales artificiales² (ver Cybenko (1989)) garantizan la convergencia de estos algoritmos.

Finalmente, es importante considerar que trabajos como los de Company et al. (2010b), Company et al. (2010a) y Guo and Wang (2015), que abordan el análisis numérico de modelos no lineales de valoración de opciones, han hecho una contribución significativa al tratamiento de estos problemas al utilizar esquemas de diferencias finitas monótonos y consistentes que aseguran soluciones numéricas no negativas y estables. En contraste, la

²El Teorema de Aproximación Universal, en términos generales, establece que una red neuronal artificial de una sola capa oculta con una función de activación adecuada puede aproximar cualquier función continua en un dominio compacto con una precisión arbitraria, dado un número suficientemente grande de neuronas en la capa oculta.

5. Ecuaciones de valoración, extensiones del teorema de Feynman-Kac y redes neuronales
consideración de un modelo de mercado con liquidez estocástica, como el propuesto en este trabajo, justifica el uso de métodos de aproximación más robustos y eficientes, como el 2BSDE-EDP.

5.4 Conclusiones del capítulo

La extensión del teorema de representación de Feynman-Kac al caso de EDP semi-lineales y completamente no lineales genera la posibilidad de discretizar la representación resultante, lo que abre la puerta a una aproximación de la solución de las EDP mediante métodos de Monte Carlo, pero con la dificultad de la estimación de gradiente y Hessiano de la función de aproximación. Es precisamente en este punto donde la capacidad de las redes neuronales para aproximar cualquier función no lineal, junto con los avances en diferenciación automática, marcan la diferencia, y convierten a la combinación de estas dos técnicas en una poderosa herramienta de resolución.

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

A continuación se muestran los resultados de aplicar la aproximación de la solución para las EDP no lineales de valoración que se encontraron en el contexto de los mercados ilíquidos propuestos. En todos los casos el tipo de derivado a valorar son opciones de compra y venta de tipo europeo.

Los valores de los parámetros considerados en cada caso pueden ser ajustados de acuerdo con las características del activo considerado en particular y no afectan el proceso de aplicación del método propuesto.

6.1 Modelo 1

Para el modelo de mercado con ilíquidez proporcional al precio del activo, la EDP de valoración es:

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{1 - \lambda S_t \frac{\partial N_t}{\partial S_t}} \right)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} - rH_t = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T) \quad (6.1)$$

donde $H_t \equiv H(S_t, t)$ es la función que determina el valor del derivado, con $H(S_T, T) = (S_T - K)^+$ para la opción de compra, $H(S_T, T) = (K - S_T)^+$ para la opción de venta, y K una constante positiva que denota el precio de negociación del subyacente en la fecha de vencimiento. $N_t \equiv N(S_t, t)$ es la función que describe la estrategia del agente, que para la implementación asumiremos es la estrategia basada en optimización que se describió en la sección 3.1, es decir, $N(S_t, t) = \theta_0 e^{-\theta_1 t} S_t^{-\theta_2}$, donde $\theta_0, \theta_1 > 0$ y $\theta_2 > 0$ son constantes.

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

En este caso se tiene que $\frac{\partial N_t}{\partial S_t} = -\theta_2 N(S_t, t) S_t^{-1} = -\theta_2 \theta_0 e^{-\theta_1 t} S_t^{-\theta_2 - 1}$, luego la EDP de valoración es:

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} + r S_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{1 + \lambda \theta_0 \theta_2 e^{-\theta_1 t} S_t^{-\theta_2}} \right)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} - r H_t = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = (S_T - K)^+ \quad (6.2)$$

De acuerdo con la notación utilizada en la sección 5.3, en este caso la función f asociada con la EDP de valoración es:

$$f(t, S_t, \nabla H, \nabla^2 H) = r S_t \nabla H + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{1 + \lambda \theta_0 \theta_2 e^{-\theta_1 t} S_t^{-\theta_2}} \right)^2 S_t^2 \nabla^2 H - r H \quad (6.3)$$

Aplicando el método propuesto para la valoración de opciones de compra y venta europeas, con $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,05$, $T = 1$, $\sigma = 0,2$, $\theta_0 = 0,1$, $\theta_1 = \theta_2 = 0,01$, $\lambda = 0,01$, $d = 1$ y $N = 365$ se tienen los resultados mostrados en el cuadro **6-1** con un nivel de error asociado a la función de costo $\varepsilon = 10^{-4}$ y diferente número de iteraciones.

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

Número de iteraciones	Media de u_θ para la opción de compra	Media de u_θ para la opción de venta	Media de la función de costo para la opción de compra	Media de la función de costo para la opción de venta
10	13,2775	1,7085	0,0053	0,0027
100	11,1822	5,6301	0,0176	0,0016
200	9,8244	6,0933	0,0152	0,0023
300	9,9619	5,6207	0,0147	0,0005
400	10,9303	4,6590	0,0148	0,0005
500	10,8114	5,3639	0,0164	0,0016
1000	10,0762	5,8012	0,0162	0,0017
3000	10,6374	5,6108	0,0150	0,0017
5000	10,3020	5,7134	0,0149	0,0015

Tabla 6-1: Resultados numéricos para el cálculo de la prima de opciones de compra y venta europeas por la implementación del método propuesto considerando $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,05$, $T = 1$, $\sigma = 0,2$, $\theta_0 = 0,1$, $\theta_1 = \theta_2 = 0,01$, $\lambda = 0,01$, $d = 1$ y $N = 365$. Elaboración propia.

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

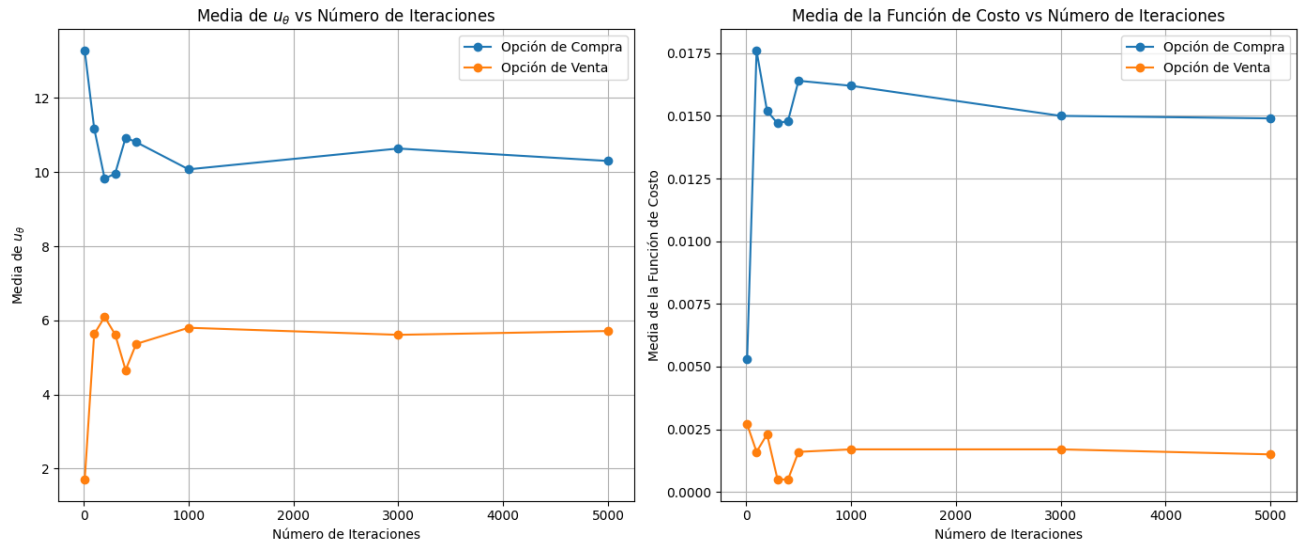


Figura 6-1: (Izquierda) Comportamiento de la media de u_θ en función del número de iteraciones. (Derecha) Comportamiento de la media de la función de costo en función del número de iteraciones. Elaboración propia.

Los resultados anteriores muestran que:

- El valor de la prima de la opción de compra (*call*) es cercano a 10,3020 unidades monetarias, con un valor medio de la función de costo que se reduce con el número de iteraciones ubicándose alrededor de 0,0149. Esto sugiere que el valor calculado para la opción de compra converge hacia un valor cercano a 10 con un número mayor de iteraciones, indicando una convergencia y estabilidad en los cálculos.
- El valor de la prima de la opción de venta (*put*) es cercano a 5,7134 unidades monetarias, con un valor medio de la función de costo que se reduce con el número de iteraciones ubicándose alrededor de 0,0015. También muestra un comportamiento de convergencia, aunque el valor es más variable comparado con la opción de compra.
- Si el mercado se asume perfectamente líquido ($\lambda = 0$) el valor de las primas está alrededor de 10,4505 para la opción de compra y 5,5735 para la opción de venta, los cuales coinciden con los que arroja el modelo de Black-Scholes.

6.2 Modelo 2

Para el modelo de mercado con ilíquidez como función del precio del activo, la EDP de valoración es:

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{1 - \frac{\xi}{S_t} [1 - e^{-\beta(T-t)}] \frac{\partial N}{\partial S_t}} \right)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} - rH_t = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T) \quad (6.4)$$

donde $H_t \equiv H(S_t, t)$ es la función que determina el valor del derivado, con $H(S_T, T) = (S_T - K)^+$ para la opción de compra, $H(S_T, T) = (K - S_T)^+$ para la opción de venta, y K constante positiva. $N \equiv N(S_t, t)$ es la función que describe la estrategia del agente, que para la implementación asumiremos es la estrategia basada en optimización que se describió en la sección 3.1, es decir, $N(S_t, t) = \theta_0 e^{-\theta_1 t} S_t^{-\theta_2}$, donde $\theta_0, \theta_1 > 0$ y $\theta_2 > 0$ son constantes.

En este caso se tiene que $\frac{\partial N}{\partial S_t} = -\theta_2 N(S_t, t) S_t^{-1} = -\theta_2 \theta_0 e^{-\theta_1 t} S_t^{-\theta_2-1}$, luego la EDP de valoración es:

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H_t}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{1 + \xi \theta_0 \theta_2 e^{-\theta_1 t} S_t^{-\theta_2-2} (1 - e^{-\beta(T-t)})} \right)^2 S_t^2 \frac{\partial^2 H_t}{\partial S_t^2} - rH_t = 0 \quad (6.5)$$

De acuerdo con la notación utilizada en la sección 5.3, en este caso la función f asociada con la EDP de valoración es:

$$f(t, S_t, \nabla H, \nabla^2 H) = rS_t \nabla H + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{1 + \xi \theta_0 \theta_2 e^{-\theta_1 t} S_t^{-\theta_2-2} (1 - e^{-\beta(T-t)})} \right)^2 S_t^2 \nabla^2 H - rH \quad (6.6)$$

Aplicando el método propuesto para la valoración de opciones de compra y venta europeas, con $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,05$, $T = 1$, $\sigma = 0,2$, $\theta_0 = 0,1$, $\theta_1 = \theta_2 = 0,01$, $\lambda = 0,01$, $d = 1$, $N = 365$, $\xi = 0,04$ y $\beta = 2$ se tienen los resultados mostrados en el cuadro **6-2** con un nivel de error asociado a la función de costo $\varepsilon = 10^{-4}$ y diferente número de iteraciones.

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

Número de iteraciones	Media de u_θ para la opción de compra	Media de u_θ para la opción de venta	Media de la función de costo para la opción de compra	Media de la función de costo para la opción de venta
10	2,6281	14,7086	0,0078	0,0091
100	10,9398	4,1840	0,0109	0,0014
200	8,7615	5,8405	0,0088	0,0003
300	11,2723	5,1839	0,0113	0,0004
400	10,5369	5,6993	0,0105	0,0001
500	9,8887	5,7286	0,0099	0,0002
1000	10,0791	5,7059	0,0101	0,0001
3000	10,4175	5,6361	0,0104	0,0001
5000	10,1246	5,4305	0,0101	0,0001

Tabla 6-2: Resultados numéricos para el cálculo de la prima de opciones de compra y venta europeas por la implementación del método propuesto considerando $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,05$, $T = 1$, $\sigma = 0,2$, $\theta_0 = 0,1$, $\theta_1 = \theta_2 = 0,01$, $\lambda = 0,01$, $d = 1$, $N = 365$, $\xi = 0,04$ y $\beta = 2$. Elaboración propia.

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

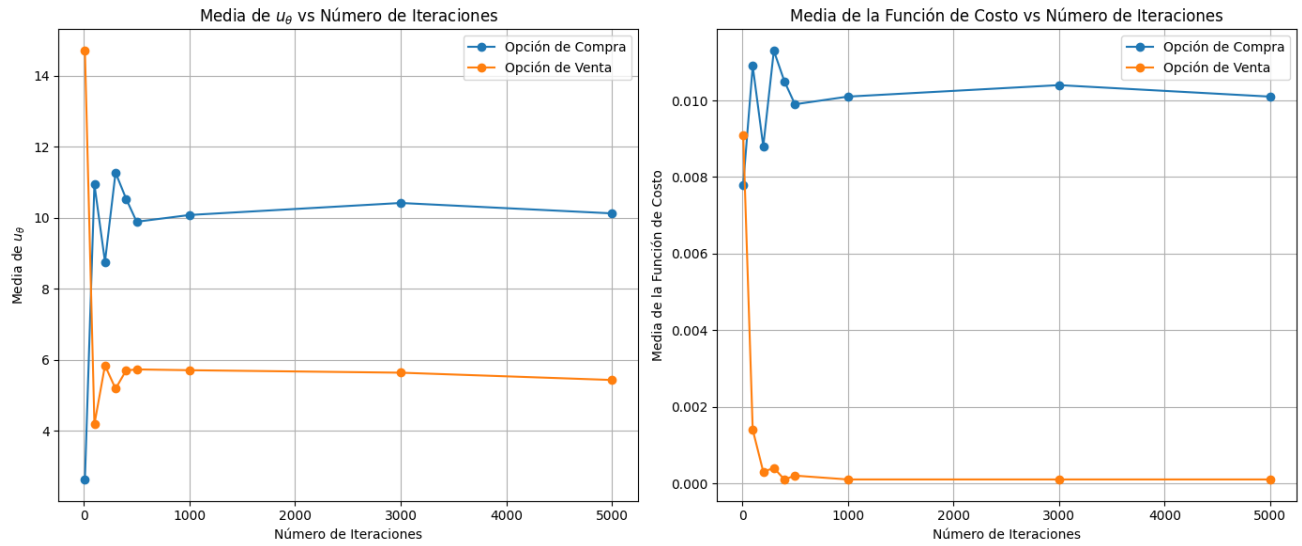


Figura 6-2: (Izquierda) Comportamiento de la media de u_θ en función del número de iteraciones. (Derecha) Comportamiento de la media de la función de costo en función del número de iteraciones. Elaboración propia.

6.3 Modelo 3

Para el modelo de mercado con ilíquidez constante y agentes ruidosos, la EDP de valoración es:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \frac{1}{2} S_t^2 [\sigma + \lambda\gamma]^2 \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} - rH = 0 \quad ; \quad H(S_T, T) = \Phi(S_T) \quad (6.7)$$

donde $H_t \equiv H(S_t, t)$ es la función que determina el valor del derivado, con $H(S_T, T) = (S_T - K)^+$ para la opción de compra, $H(S_T, T) = (K - S_T)^+$ para la opción de venta, y K constante positiva.

De acuerdo con la notación utilizada en la sección 5.3, en este caso la función f asociada con la EDP de valoración es:

$$f(t, S_t, \nabla H, \nabla^2 H) = rS_t \nabla H + \frac{1}{2} S_t^2 [\sigma + \lambda\gamma]^2 \nabla^2 H - rH \quad (6.8)$$

Aplicando el método propuesto para la valoración de opciones de compra y venta europeas,

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

con $S_0 = 100$, $N_0 = 50$, $K = 100$, $r = 0,05$, $T = 1$, $\sigma = 0,2$, $\lambda = 0,01$, $\gamma = 0,2$ $d = 1$ y $N = 365$ se tienen los resultados mostrados en el cuadro **6-3** con un nivel de error asociado a la función de costo $\varepsilon = 10^{-4}$ y diferente número de iteraciones.

Número de iteraciones	Media de u_θ para la opción de compra	Media de u_θ para la opción de venta	Media de la función de costo para la opción de compra	Media de la función de costo para la opción de venta
10	15,4978	1,5060	0,0050	0,0041
100	28,1196	1,2225	0,0281	0,0044
200	25,7241	1,3480	0,0257	0,0042
300	28,5123	1,1330	0,0285	0,0044
400	27,4416	1,1814	0,0274	0,0044
500	24,7586	1,2925	0,0248	0,0043
1000	27,0306	1,1456	0,0270	0,0044
3000	27,6995	1,0738	0,0277	0,0045
5000	26,4538	1,1840	0,0265	0,0044

Tabla 6-3: Resultados numéricos para el cálculo de la prima de opciones de compra y venta europeas por la implementación del método propuesto considerando $S_0 = 100$, $N_0 = 50$, $K = 100$, $r = 0,05$, $T = 1$, $\sigma = 0,2$, $\lambda = 0,01$, $\gamma = 0,2$ $d = 1$ y $N = 365$. Elaboración propia.

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

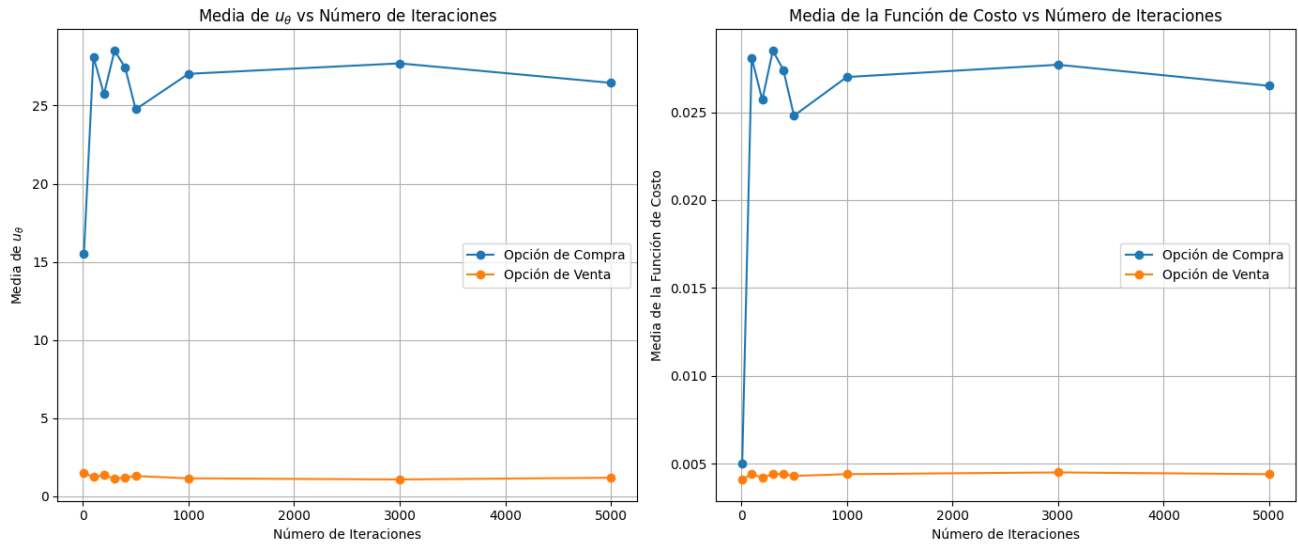


Figura 6-3: (Izquierda) Comportamiento de la media de u_θ en función del número de iteraciones. (Derecha) Comportamiento de la media de la función de costo en función del número de iteraciones. Elaboración propia.

6.4 Modelo 4

Para el modelo de mercado con ilíquidez estocástica, la EDP de valoración es:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + rS_t \frac{\partial H}{\partial S_t} + \kappa(\theta - \lambda_t) \frac{\partial H}{\partial \lambda_t} + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial S_t^2} + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda_t^2} + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) \frac{\partial^2 H}{\partial S_t \partial \lambda_t} - rH = 0 \quad (6.9)$$

donde $H_t \equiv H(S_t, t)$ es la función que determina el valor del derivado, con $H(S_T, T) = (S_T - K)^+$ para la opción de compra, $H(S_T, T) = (K - S_T)^+$ para la opción de venta, y K constante positiva.

De acuerdo con la notación utilizada en la sección 5.3, en este caso la función f asociada

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

con la EDP de valoración es:

$$\begin{aligned}
 & f(t, S_t, \lambda_t, \nabla_S H, \nabla_\lambda H, \nabla_S^2 H, \nabla_\lambda^2 H, \nabla_{\lambda S}^2 H) \\
 & = rS_t \nabla_S H + \kappa(\theta - \lambda_t) \nabla_\lambda H + \frac{S_t^2(\nu_1^2 + \nu_2^2)}{2} \nabla_S^2 H + \frac{\gamma^2 \lambda_t}{2} \nabla_\lambda^2 H + S_t \gamma \sqrt{\lambda_t} (\rho \nu_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \nu_2) \nabla_{\lambda S}^2 H - rH
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Aplicando el método propuesto para la valoración de opciones de compra y venta europeas, con $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,05$, $T = 1$, $\kappa = 0,1$, $\theta = 0,1$, $\rho = 0,8$, $\gamma = 0,2$, $d = 1$, $N = 365$ y considerando que $N(S_t, \lambda_t, t)$ es la función que describe la estrategia del agente, que para la implementación asumiremos es una modificación de la estrategia basada en optimización como la que se describió en la sección 3.1, es decir, $N(S_t, \lambda_t, t) = \theta_0 e^{-\theta_1 t} S_t^{-\theta_2} \lambda_t^{\theta_3}$, donde θ_0 , $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ y $\theta_3 > 0$ son constantes, con $\theta_0 = 0,1$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,01$, se tienen los resultados mostrados en el cuadro **6-4** con un nivel de error asociado a la función de costo $\varepsilon = 10^{-4}$ y diferente número de iteraciones.

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

Número de iteraciones	Media de u_θ para la opción de compra	Media de u_θ para la opción de venta	Media de la función de costo para la opción de compra	Media de la función de costo para la opción de venta
10	16,7680	4,2470	0,0053	0,0027
100	16,6091	3,9822	0,0176	0,0016
200	16,1834	3,6202	0,0152	0,0023
300	15,6862	4,0589	0,0147	0,0005
400	15,7957	4,0913	0,0148	0,0005
500	15,3746	3,9971	0,0164	0,0016
1000	15,1964	3,9834	0,0162	0,0017
3000	14,9901	3,8631	0,0150	0,0017
5000	14,9270	3,9269	0,0149	0,0015

Tabla 6-4: Resultados numéricos para el cálculo de la prima de opciones de compra y venta europeas por la implementación del método propuesto considerando $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,05$, $T = 1$, $\kappa = 0,1$, $\theta = 0,1$, $\rho = 0,8$, $\gamma = 0,2$, $d = 1$, $N = 365$, $\theta_0 = 0,1$, y $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,01$. Elaboración propia.

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

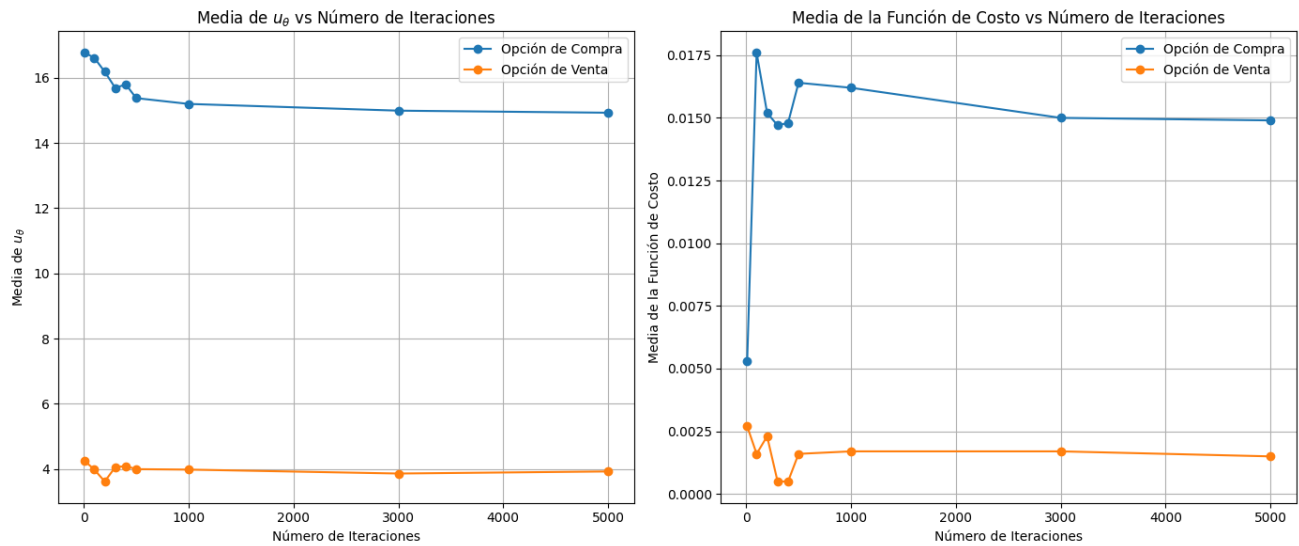


Figura 6-4: (Izquierda) Comportamiento de la media de u_θ en función del número de iteraciones. (Derecha) Comportamiento de la media de la función de costo en función del número de iteraciones. Elaboración propia.

Los resultados numéricos obtenidos muestran que la liquidez puede tener un impacto significativo en el valor de los derivados (en este análisis particular en el precio de las opciones), el cual puede explicarse a considerado diferentes factores como:

- **Aumento del Spread:** en un mercado menos líquido, los spreads entre el precio de oferta (bid) y el precio de demanda (ask) tienden a aumentar. Un mayor spread puede resultar en un precio de opción más caro para el comprador y menos favorable para el vendedor.
- **Riesgo de Ejecución:** en mercados ilíquidos puede haber un riesgo adicional asociado con la ejecución de órdenes. Grandes órdenes pueden tener un impacto significativo en el precio del activo subyacente, y los inversores pueden enfrentar problemas al intentar ejecutar transacciones al precio deseado. Esto puede hacer que las opciones sean más caras de negociar debido a los costos adicionales asociados con el desplazamiento del precio.

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

- Volatilidad Real: en un mercado menos líquido, la volatilidad real del activo subyacente puede ser mayor debido a la menor capacidad del mercado para absorber grandes órdenes sin afectar el precio.

6.5 Aplicación para opciones de compra sobre el S&P 500

Como un ejemplo de la aplicación de los modelos y teoría desarrollados en este trabajo, en esta sección se desarrolla la modelación y valoración de opciones de compra sobre el índice S&P 500. Específicamente se considera el modelo de mercado con iliquidez estocástica, y se implementan los pasos necesarios para modelar la iliquidez del índice, describir la dinámica de su precio y valorar las respectivas opciones de compra.

Los valores considerados para la estimación de los parámetros de los procesos de precio e iliquidez corresponden a 5 años de datos históricos diarios (2019-05-10 al 2024-05-10). La figura (6-5) muestra el precio del índice para este periodo.

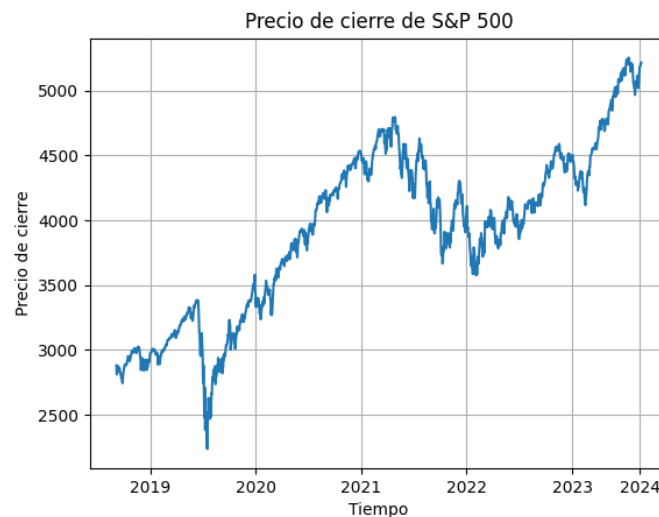


Figura 6-5: Precios de cierre del S&P 500 para un periodo de 5 años. Elaboración propia.

La figura (6-6) muestra el cociente de iliquidez de Amihud para el periodo considerado.

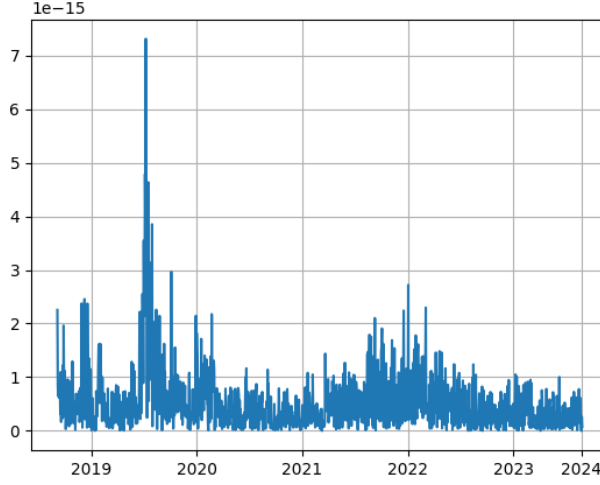


Figura 6-6: Cociente de iliquidez de Amihud para el S&P 500 en el periodo considerado. Elaboración propia.

Para estimar los parámetros del proceso de iliquidez utilizamos mínimos cuadrados ordinarios (MCO) sobre la versión discreta de la ecuación del proceso,

$$d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t)dt + \gamma\sqrt{\lambda_t}dW_t^\lambda, \quad (6.11)$$

es decir,

$$\lambda_{t+\Delta t} - \lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t)\Delta t + \gamma\sqrt{\lambda_t}\epsilon_t \quad (6.12)$$

donde ϵ_t es normalmente distribuido con media 0 y varianza Δt . Para implementar MCO se transforma la expresión (6.12) en:

$$\frac{\lambda_{t+\Delta t} - \lambda_t}{\sqrt{\lambda_t}} = \frac{\kappa\theta\Delta t}{\sqrt{\lambda_t}} - \kappa\sqrt{\lambda_t}\Delta t + \gamma\epsilon_t. \quad (6.13)$$

Los estimadores $\hat{\kappa}$ y $\hat{\theta}$ se encuentran como:

$$\arg \min_{\kappa, \theta} : \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\lambda_{t+\Delta t} - \lambda_t}{\sqrt{\lambda_t}} - \frac{\kappa\theta\Delta t}{\sqrt{\lambda_t}} + \kappa\sqrt{\lambda_t}\Delta t \right)^2 \quad (6.14)$$

que resuelta en:

$$\hat{\kappa} = \frac{n^2 - 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{t_{i+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{t_i}} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{t_i} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{t_i}} - (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_{t_{i+1}}}{\lambda_{t_i}}}{\left(n^2 - 2n + 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{t_i} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{t_i}} \right) \Delta t}, \quad (6.15)$$

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

$$\hat{\theta} = \frac{(n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{t_{i+1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_{t_{i+1}}}{\lambda_{t_i}} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{t_i}}{n^2 - 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{t_{i+1}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{t_i}} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{t_i} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{t_i}} - (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_{t_{i+1}}}{\lambda_{t_i}}}, \quad (6.16)$$

y el estimador del parámetro de difusión $\hat{\gamma}$, se encuentra como la desviación estándar de los residuales.

Para los datos considerados se encuentra que:

Estimador	Valor
$\hat{\kappa}$	5.48061e-30
$\hat{\theta}$	5.26008e-16
$\hat{\gamma}$	5.84393e-07

Tabla 6-5: Valores estimados de los parámetros para el proceso de iliquidez del S&P 500. Elaboración propia.

A partir de los retornos de los datos históricos del índice se estima que $\hat{\sigma} = 0,01354$ y considerando la correlación entre los retornos del índice y el cociente de iliquidez se encuentra que $\rho = -0,15304$.

Aplicando el método propuesto para la valoración de opciones de compra europeas con: $S_0 = 5215,7$, $K = 5280$, $\sigma = 0,01354$, $r = 0,045$, $T = 1$, $\kappa = 5,48061e-30$, $\theta = 5,26008e-16$, $\rho = -0,15304$, $\gamma = 5,84393e-07$, $d = 1$, $N = 365$ y considerando que $N(S_t, \lambda_t, t)$ es la función que describe la estrategia del agente implementada en la sección anterior, es decir, $N(S_t, \lambda_t, t) = \theta_0 e^{-\theta_1 t} S_t^{-\theta_2} \lambda_t^{\theta_3}$, donde $\theta_0, \theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ y $\theta_3 > 0$ son constantes, con $\theta_0 = 0,1$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,01$, se tienen los resultados mostrados en el cuadro **6-6** con un nivel de error asociado a la función de costo $\varepsilon = 10^{-4}$ y diferente número de iteraciones.

6. Aproximación a la solución de la EDP no lineales de valoración

Número de iteraciones	Media de u_θ para la opción de compra	Media de la función de costo para la opción de compra
500	166.24454	0.00369
1000	167.98123	0,00123
3000	167.34213	0,00142
5000	168.21198	0,00112

Tabla 6-6: Resultados numéricos para el cálculo de la prima de opciones de compra europeas sobre el S&P 500 por la implementación del método propuesto considerando: $S_0 = 5215,7$, $K = 5280$, $\sigma = 0,01354$, $r = 0,045$, $T = 1$, $\kappa = 5,48061e - 30$, $\theta = 5,26008e - 16$, $\rho = -0,15304$, $\gamma = 5,84393e - 07$, $d = 1$, $N = 365$, $\theta_0 = 0,1$, y $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0,01$. Elaboración propia.

6.6 Conclusiones del capítulo

En el caso específico de la adaptación e implementación del método para la resolución de las EDP de valoración en mercados ilíquidos, el algoritmo se ajusta de forma relativamente sencilla en cada caso, desde luego bajo supuestos concretos sobre algunos parámetros y estrategias, pero en general, si se cumplen las condiciones necesarias para su implementación, permite aproximar la solución de las ecuaciones de forma eficiente. Los resultados expresados en las tablas de la sección 6.4 dan cuenta de la aproximación al valor de la prima de las opciones de compra y venta europeas para los parámetros considerados, en el contexto de cada uno de los modelos de mercado propuestos. Desde luego, se presentan diferencias en el valor al que converge el algoritmo en cada caso, producto de la forma como se modela e incorpora el efecto de la ilíquidez en cada modelo.

7. Conclusiones

Esta investigación cumple completamente con el objetivo general planteado, al proponer y desarrollar un conjunto de modelos de mercado que incorporan el riesgo de iliquidez, describiendo para cada uno la dinámica del precio de los activo riesgosos y su relación con la estrategia de negociación de los agentes. De igual forma se establecieron las ecuaciones diferenciales parciales de valoración correspondientes, encontrando que estas son extensiones no lineales de la ecuación de Black-Scholes, lo que da garantía de la solides de estos resultados al poder reducirlas, bajo condiciones especiales, a esta ecuación seminal.

Sobre los modelos de mercados ilíquidos propuestos, todos parten de considerar que la iliquidez afecta los precios de los activos riesgosos a través del efecto que las estrategias de negociación de los agentes tienen sobre los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica que determina su dinámica. Para los modelos en los que la iliquidez es una función simple del precio del activo, tanto en el modelo proporcional como en el que la iliquidez es una función del precio, se encuentra que el factor de iliquidez y la estrategia del agente tiene efectos sobre los coeficientes de tendencia y difusión del precio del activo. En este punto, un aporte a destacar de esta investigación respecto a la literatura existente es la modelación del efecto de la iliquidez y estrategia del agente sobre el coeficiente de tendencia en la dinámica de los precios, el cual no es analizado en otros trabajos.

Continuando con los modelos de iliquidez simple, las ecuaciones diferenciales parciales de valoración encontradas son extensiones semi-lineales de la ecuación de Black-Scholes, donde la no linealidad se tiene por la dependencia de los coeficientes de la segunda derivada (o Hessiano en el caso multidimensional) de la estrategia del agente respecto al precio del activo, lo que dificulta su resolución analítica, a menos que se consideren estrategias de negociación

7. Conclusiones

dinámica simples, que cada vez son menos comunes en los mercados financieros globales.

Para el modelo en el cual se considera iliquidez proporcional al precio y la presencia de agentes ruidos, la dinámica del precio del activo riesgoso muestra dependencia de la estrategia del agente, ponderada por el factor de iliquidez del mercado, en los coeficientes de tendencia y difusión. En este caso, la ecuación diferencial parcial de valoración resulta ser lineal, pero con dependencia de la volatilidad de la estrategia del agente.

Para el modelo de mercado con iliquidez estocástica, la dinámica de los precios está asociada a dos fuentes de aleatoriedad con coeficientes que dependen del grado de correlación entre las fuentes de incertidumbre, de la estrategia de negociación del agente y de la dinámica del proceso de iliquidez. En el coeficiente de tendencia se encuentra dependencia de esto mismo factores y de la variación cruzada de la estrategia del agente a los precios y la iliquidez. Esto clasifica al modelo como uno de volatilidad estocástica, donde los coeficientes están asociados vía el factor de correlación entre la fuente de aleatoriedad del precio y la de la iliquidez, pero destaca que la volatilidad instantánea total del activo, además de este coeficiente de correlación, incorpora un factor adicional que captura el efecto de retroalimentación o *feedback*.

Para la deducción de la ecuación diferencial parcial de valoración se sigue un proceso similar al considerado en la valoración de derivados en modelos de volatilidad estocástica, encontrando en este caso una ecuación completamente no lineal en la cual los coeficientes dependen del gradiente y del Hessiano de la función que determina el valor del derivado, así como de las derivadas de la estrategia del agente.

Las ecuaciones de valoración resultantes al ser no lineales presentan un reto en términos de su resolución, pero es éste otro punto en el que esta investigación también busca realizar un aporte, al considerar la implementación de las extensiones no lineales del teorema de representación de Feynman-Kac para su resolución. En este caso, el teorema considera un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas *forward-backward* asociadas con la ecuación

7. Conclusiones

diferencial parcial semi-lineal, o ecuaciones diferenciales estocásticas hacia atrás de segundo orden para el caso de ecuaciones diferenciales parciales completamente no lineales. Estas representaciones estocásticas pueden ser discretizadas y utilizadas para aproximar al solución. La razón de utilizar redes neuronales para esta implementación es la necesidad de aproximar de forma eficiente el gradiente y Hessiano asociados a algunos de los procesos discretizados. Se considera entonces una red neuronal de aproximación con arquitectura de perceptrón multiplica y que es entrenada por muestro Monte Carlo, para completar la aproximación a la solución.

Si bien modelos de mercado y valoración de derivados como el de Black-Scholes son ampliamente utilizados dada la relativa simpleza de sus resultados, los supuestos sobre los cuales están contruidos generan un alto riesgo de modelo, que en situaciones de crisis han llevado a resultados desafortunados. Es por eso que en esta investigación se proponen modelos que eliminan uno de los supuestos clave, pero también uno de los más difíciles cumplir, el de liquidez perfecta. Desde luego las expresiones resultantes tanto para los precios como para la ecuaciones de valoración son más complejas, pero al mismo tiempo más cercanas a la realidad de los mercados, y dado el amplio desarrollo de herramientas matemáticas y computacionales con las que contamos actualmente, el tratamiento de estos modelos se simplifica, convirtiendolos en una posibilidad plausible para la gestión del riesgo en los mercados.

Referencias Bibliográficas

- Acharya, V. V. and Pedersen, L. H. (2005). Asset pricing with liquidity risk. *Journal of financial Economics*, 77(2):375–410.
- Albrecher, H., Guillaume, F., and Schoutens, W. (2013). Implied liquidity: model sensitivity. *Journal of Empirical Finance*, 23:48–67.
- Amihud, Y. (2002). Illiquidity and stock returns: Cross-section and time-series effects. *Journal of Financial Markets*, 5(1):31–56.
- Amihud, Y. (2019). Illiquidity and stock returns: A revisit. *Critical Finance Review*, (8):203–221.
- Amihud, Y. and Mendelson, H. (1986). Asset pricing and the bid-ask spread. *Journal of Financial Economics*, 17(2):223–249.
- Arenas, A. J., González-Parra, G., and Caraballo, B. M. (2013). A nonstandard finite difference scheme for a nonlinear black-scholes equation. *Mathematical and Computer Modelling*, 57(7-8):1663–1670.
- Avellaneda, M., Levy, A., and Parás, A. (1995). Pricing and hedging derivative securities in markets with uncertain volatilities. *Applied Mathematical Finance*, 2(2):73–88.
- Bachouch, A., Huré, C., Langrené, N., and Pham, H. (2021). Deep neural networks algorithms for stochastic control problems on finite horizon: numerical applications. *Methodology and Computing in Applied Probability*, pages 1–36.
- Back, K. (1993). Asymmetric information and options. *The Review of Financial Studies*, 6(3):435–472.

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

- Beck, C., Becker, S., Grohs, P., Jaafari, N., and Jentzen, A. (2021). Solving the kolmogorov pde by means of deep learning. *Journal of Scientific Computing*, 88:1–28.
- Beck, C., Hutzenthaler, M., Jentzen, A., and Kuckuck, B. (2020). An overview on deep learning-based approximation methods for partial differential equations. *arXiv preprint arXiv:2012.12348*.
- Beck, C., Weinan, E., and Jentzen, A. (2019). Machine learning approximation algorithms for high-dimensional fully nonlinear partial differential equations and second-order backward stochastic differential equations. *Journal of Nonlinear Science*, 29(4):1563–1619.
- Bergman, Y. Z. (1995). Option pricing with differential interest rates. *The Review of Financial Studies*, 8(2):475–500.
- Berkman, H. and Koch, P. D. (2008). Noise trading and the price formation process. *Journal of Empirical Finance*, 15(2):232–250.
- Bertsimas, D. and Lo, A. W. (1998). Optimal control of execution costs. *Journal of financial markets*, 1(1):1–50.
- Bismut, J.-M. (1973). Conjugate convex functions in optimal stochastic control. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 44(2):384–404.
- Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford university press.
- Black, F. and Scholes, M. (1973a). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political Economy*, 81(3):637–654.
- Black, F. and Scholes, M. (1973b). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654.
- Bouchard, B. (2015). *Lecture notes on BSDEs Main existence and stability results*. PhD thesis, CEREMADE-Centre de REcherches en MATHématiques de la DEcision.
- Brunetti, C. and Caldarera, A. (2004). Asset prices and asset correlations in illiquid markets. *Available at SSRN 625184*.

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

- Caldarera, A., Brunetti, C., et al. (2005). Asset prices and asset correlations in illiquid markets. In *2005 Meeting Papers*, number 288. Society for Economic Dynamics.
- Cetin, U., Jarrow, R., Protter, P., and Warachka, M. (2006). Pricing options in an extended black scholes economy with illiquidity: Theory and empirical evidence. *The Review of Financial Studies*, 19(2):493–529.
- Cetin, U., Jarrow, R. A., and Protter, P. (2010). *Liquidity risk and arbitrage pricing theory*. Springer.
- Cheridito, P., Soner, H. M., Touzi, N., and Victoir, N. (2007). Second-order backward stochastic differential equations and fully nonlinear parabolic pdes. *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 60(7):1081–1110.
- Chordia, T., Roll, R., and Subrahmanyam, A. (2000). Commonality in liquidity. *Journal of Financial Economics*, 56(1):3–28.
- Chordia, T., Roll, R., and Subrahmanyam, A. (2001). Market liquidity and trading activity. *The Journal of Finance*, 56(2):501–530.
- Company, R., Jódar, L., and Pintos, J.-R. (2010a). Numerical analysis and computing for option pricing models in illiquid markets. *Mathematical and computer modelling*, 52(7-8):1066–1073.
- Company, R., Jódar, L., Ponsoda, E., and Ballester, C. (2010b). Numerical analysis and simulation of option pricing problems modeling illiquid markets. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(8):2964–2975.
- Corcuera, J. M., Guillaume, F., Madan, D. B., and Schoutens, W. (2012). Implied liquidity: towards stochastic liquidity modelling and liquidity trading. *International Journal of Portfolio Analysis and Management*, 1(1):80–91.
- Cybenko, G. (1989). Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Mathematics of control, signals and systems*, 2(4):303–314.

- Duffie, D. (2010). *Dynamic asset pricing theory*. Princeton University Press.
- El Karoui, N. and Mazliak, L. (1997). *Backward stochastic differential equations*, volume 364. CRC Press.
- Esser, A. (2004). *Pricing in (in) complete markets: Structural analysis and applications*. Springer Science & Business Media.
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, 38(1):34–105.
- Feng, S.-P., Hung, M.-W., and Wang, Y.-H. (2014). Option pricing with stochastic liquidity risk: Theory and evidence. *Journal of Financial Markets*, 18:77–95.
- Forsyth, P. A. and Vetzal, K. R. (2012). Numerical methods for nonlinear pdes in finance. In *Handbook of Computational Finance*, pages 503–528. Springer.
- Frey, R. (1998). Perfect option hedging for a large trader. *Finance and Stochastics*, 2(2):115–141.
- Frey, R. (2000). Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging. *Model Risk*, pages 125–138.
- Frey, R. and Patie, P. (2002). Risk management for derivatives in illiquid markets: A simulation study. *Advances in finance and stochastics*, pages 137–159.
- Frey, R. and Stremme, A. (1997). Market volatility and feedback effects from dynamic hedging. *Mathematical finance*, 7(4):351–374.
- Geiss, S. and Ylinen, J. (2021). *Decoupling on the Wiener Space, related Besov Spaces, and applications to BSDEs*, volume 272. American Mathematical Society.
- Genotte, G. and Leland, H. (1990). Market liquidity, hedging, and crashes. *The American Economic Review*, pages 999–1021.
- Germain, M., Pham, H., and Warin, X. (2021). Neural networks-based algorithms for stochastic control and pdes in finance. *arXiv preprint arXiv:2101.08068*.

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

- Glover, K. J., Duck, P. W., and Newton, D. P. (2010). On nonlinear models of markets with finite liquidity: some cautionary notes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 70(8):3252–3271.
- Gökay, S., Roch, A. F., and Soner, H. M. (2011). *Liquidity models in continuous and discrete time*. Springer.
- Gregory, J. (2015). *The xVA Challenge: counterparty credit risk, funding, collateral and capital*. John Wiley & Sons.
- Guéant, O. (2016). *The Financial Mathematics of Market Liquidity: From optimal execution to market making*, volume 33. CRC Press.
- Guo, J. and Wang, W. (2015). On the numerical solution of nonlinear option pricing equation in illiquid markets. *Computers & Mathematics with Applications*, 69(2):117–133.
- Gurney, K. (2018). *An introduction to neural networks*. CRC press.
- Guyon, J. and Henry-Labordere, P. (2013). *Nonlinear option pricing*. CRC Press.
- Han, J., Jentzen, A., and E, W. (2018). Solving high-dimensional partial differential equations using deep learning. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(34):8505–8510.
- Heider, P. (2010). Numerical methods for non-linear black-scholes equations. *Applied Mathematical Finance*, 17(1):59–81.
- Henry-Labordere, P. (2012). Counterparty risk valuation: A marked branching diffusion approach. *arXiv preprint arXiv:1203.2369*.
- Henry-Labordere, P., Tan, X., and Touzi, N. (2014). A numerical algorithm for a class of bsdes via the branching process. *Stochastic Processes and their Applications*, 124(2):1112–1140.
- Hornik, K., Stinchcombe, M., and White, H. (1989). Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural networks*, 2(5):359–366.

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

- Hornik, K., Stinchcombe, M., and White, H. (1990). Universal approximation of an unknown mapping and its derivatives using multilayer feedforward networks. *Neural networks*, 3(5):551–560.
- Huberman, G. and Stanzl, W. (2004). Arbitrage-free price update and price-impact functions. *Econometrica*, 72(4):1247–1275.
- Huré, C., Pham, H., and Warin, X. (2020). Deep backward schemes for high-dimensional nonlinear pdes. *Mathematics of Computation*, 89(324):1547–1579.
- Jarrow, R. A. (1994). Derivative security markets, market manipulation, and option pricing theory. *Journal of financial and quantitative analysis*, 29(2):241–261.
- Karatzas, I. and Shreve, S. (2014). *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. springer.
- Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1998). *Methods of mathematical finance*, volume 39. Springer.
- Ku, H. and Zhang, H. (2018). Option pricing for a large trader with price impact and liquidity costs. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 459(1):32–52.
- Kyle, A. S. (1985). Continuous auctions and insider trading. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 1315–1335.
- Lagaris, I. E., Likas, A., and Fotiadis, D. I. (1998). Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE transactions on neural networks*, 9(5):987–1000.
- Leippold, M. and Schärer, S. (2017). Discrete-time option pricing with stochastic liquidity. *Journal of Banking & Finance*, 75:1–16.
- Leland, H. E. (1985). Option pricing and replication with transactions costs. *The journal of finance*, 40(5):1283–1301.
- Li, Z., Zhang, W.-G., and Liu, Y.-J. (2018a). Analytical valuation for geometric asian options in illiquid markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 507:175–191.

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

- Li, Z., Zhang, W.-G., and Liu, Y.-J. (2018b). European quanto option pricing in presence of liquidity risk. *The North American Journal of Economics and Finance*, 45:230–244.
- Liesenfeld, R. and Richard, J.-F. (2003). Univariate and multivariate stochastic volatility models: estimation and diagnostics. *Journal of empirical finance*, 10(4):505–531.
- Liu, H. and Yong, J. (2005). Option pricing with an illiquid underlying asset market. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 29(12):2125–2156.
- Liu, W. (2006). A liquidity-augmented capital asset pricing model. *Journal of financial Economics*, 82(3):631–671.
- Lo, A. W., Mamaysky, H., and Wang, J. (2004). Asset prices and trading volume under fixed transactions costs. *Journal of Political Economy*, 112(5):1054–1090.
- Loeper, G. (2018). Option pricing with linear market impact and nonlinear black–scholes equations. *The Annals of Applied Probability*, 28(5):2664–2726.
- Longstaff, F. A., Mithal, S., and Neis, E. (2005). Corporate yield spreads: Default risk or liquidity? new evidence from the credit default swap market. *The journal of finance*, 60(5):2213–2253.
- Ludkovski, M. and Shen, Q. (2013). European option pricing with liquidity shocks. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 16(07):1350043.
- Ma, J., Morel, J.-M., and Yong, J. (1999). *Forward-backward stochastic differential equations and their applications*. Number 1702. Springer Science & Business Media.
- Madan, C. and Cherny, A. (2010). Illiquid markets as a counterparty: An introduction to conic finance, robert h. *Smith School Research Paper No. RHS*, pages 06–115.
- Mandelbrot, B. B. (1997). *The variation of certain speculative prices*. Springer.
- McKean, H. P. (1975). Application of brownian motion to the equation of kolmogorov? petrovskii? piskunov. *Communications on pure and applied mathematics*, 28(3):323–331.

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, pages 141–183.
- Merton, R. C. and Samuelson, P. A. (1990). Continuous-time finance.
- Merton, R. C. and Samuelson, P. A. (1992). Continuous-time finance.
- Mönch, B. (2006). *Strategic trading in illiquid markets*, volume 553. Springer Science & Business Media.
- Nielsen, M. A. (2015). *Neural networks and deep learning*, volume 25. Determination press San Francisco, CA, USA:.
- Oksendal, B. (2013). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media.
- Pardoux, E. and Peng, S. (1990). Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems & control letters*, 14(1):55–61.
- Pardoux, E. and Tang, S. (1999). Forward-backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic pdes. *Probability theory and related fields*, 114:123–150.
- Pástor, L. and Stambaugh, R. F. (2003). Liquidity risk and expected stock returns. *Journal of Political Economy*, 111(3):642–685.
- Pham, H., Warin, X., and Germain, M. (2021). Neural networks-based backward scheme for fully nonlinear pdes. *SN Partial Differential Equations and Applications*, 2(1):16.
- Raissi, M. (2024). Forward–backward stochastic neural networks: deep learning of high-dimensional partial differential equations. In *Peter Carr Gedenkschrift: Research Advances in Mathematical Finance*, pages 637–655. World Scientific.
- Raissi, M. and Karniadakis, G. E. (2018). Hidden physics models: Machine learning of nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 357:125–141.

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

- Raissi, M., Perdikaris, P., and Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational physics*, 378:686–707.
- Ronnie Sircar, K. and Papanicolaou, G. (1998). General black-scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies. *Applied Mathematical Finance*, 5(1):45–82.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*, volume 11. Springer Science & Business Media.
- Skorokhod, A. V. (1964). Branching diffusion processes. *Theory of Probability & Its Applications*, 9(3):445–449.
- Subramanian, A. and Jarrow, R. A. (2001). The liquidity discount. *Mathematical Finance*, 11(4):447–474.
- Tadmor, E. (2012). A review of numerical methods for nonlinear partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 49(4):507–554.
- Taylor, S. J. (1994). Modeling stochastic volatility: A review and comparative study. *Mathematical finance*, 4(2):183–204.
- Tripathi, A., Dixit, A., et al. (2019). Liquidity of financial markets: a review. *Studies in Economics and Finance*.
- Trujillo, J. F. M. (2015). *Modelos estocásticos en finanzas*. U. Externado de Colombia.
- Vayanos, D. (2001). Strategic trading in a dynamic noisy market. *The Journal of Finance*, 56(1):131–171.
- Vayanos, D. (2004). Flight to quality, flight to liquidity, and the pricing of risk. Technical report, National bureau of economic research.
- Venegas-Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*, volume 1. Escuela Superior de Economía, Instituto Politécnico Nacional.

Valoración no lineal de derivados financieros mediante extensiones del teorema de Feynman-Kac y algoritmos de aprendizaje automático

- Warin, X. (2018). Nesting monte carlo for high-dimensional non-linear pdes. *Monte Carlo Methods and Applications*, 24(4):225–247.
- Watanabe, S. (1965). On the branching process for brownian particles with an absorbing boundary. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 4(2):385–398.
- Weinan, E., Hutzenthaler, M., Jentzen, A., and Kruse, T. (2017). Linear scaling algorithms for solving high-dimensional nonlinear parabolic differential equations. *SAM Research Report*, 2017.
- Wilmott, P., Hoggard, T., and Whalley, A. E. (1994). Hedging option portfolios in the presence of transaction costs. *Advances in Futures and Options Research*, 7.
- Wilmott, P. and Schönbucher, P. J. (2000). The feedback effect of hedging in illiquid markets. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 61(1):232–272.
- Zhang, Y., Ding, S., and Duygun, M. (2019). Derivatives pricing with liquidity risk. *Journal of Futures Markets*, 39(11):1471–1485.