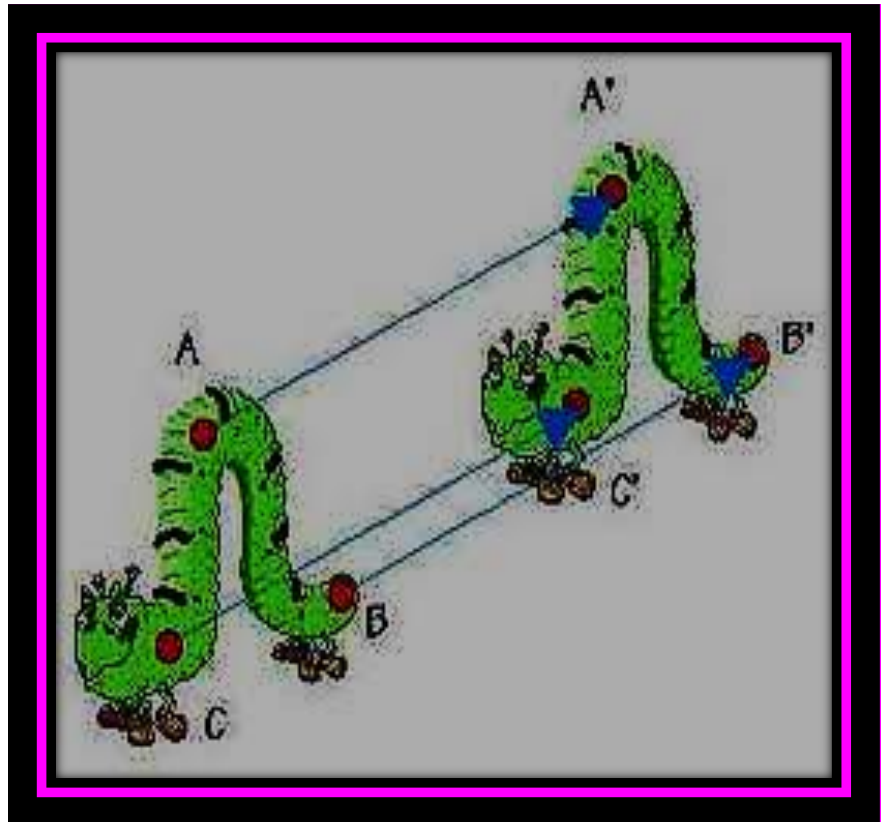


ENSEÑANZA DE LAS MATRICES A TRAVÉS DE DERIVE

MATRICES



ENSEÑANZA DE LAS MATRICES A TRAVÉS DE DERIVE.

La cartilla se compone de las siguientes actividades:

ACTIVIDAD	PÁGINA
1. JUGUEMOS!!!	2
2. CUADRADOS MÁGICOS	7
3. DESCUBRE LA DIAGONAL DE UNA MATRIZ	13
4. PRACTIQUEMOS LO APRENDIDO	20
5. ¿QUÉ ES UN VECTOR?	27
6. TRANSFORMACIONES Y MATRICES	36
7. MATRICES Y TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS	41
8. DIVIÉRTETE	48

1. ¡¡¡JUGUEMOS!!!

Objetivo: identificar los elementos de una matriz, utilizando el juego "Batalla Naval".

Materiales: Carpeta de cartón, dos hojas con formato (Figura 1), marcador o esfero.

Ejercicio 1:

Conforma un equipo de juego con uno de tus compañeros (quien será tu contrincante en el juego). Ahora ubíquense tal y como se muestra en la ilustración 1.



Ilustración 1

Una vez se ubiquen uno frente al otro, cada jugador debe tener su respectivo material, el cual consta de una carpeta de cartón, así como se indica.

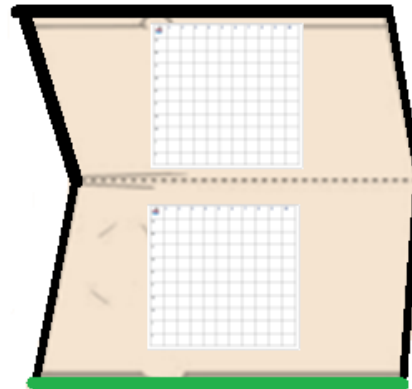



Ilustración 2

... en cuyas caras internas se encuentra el formato, que se muestra en la **Figura 1**.

Figura 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										
J										

Las reglas para jugar: Construye barcos con las siguientes características

4 barcos de un casillero



3 de 2



2 de 3



1 de 4



(Total diez barcos)

Matrices y Transformaciones

- 👤 Cada uno de los jugadores ubica sus barcos de manera horizontal o vertical únicamente.
- 👤 Si un jugador lo prefiere puede colocar los barcos de tal manera que ellos se toquen.
- 👤 Se sortea qué jugador inicia el juego. Para las siguientes jugadas los contendores se turnarán para efectuar los disparos.

Para indicar un disparo, primero debes seleccionar una casilla del tablero, diciendo la letra de la fila y el número de la columna de la casilla elegida. Por ejemplo yo digo A 7




	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A							✖			
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										
J										

Figura 2


... Observa la casilla que está coloreada: A 7 (Figura 2)

Ejercicio 2

La Figura 3, nos muestra el juego de Homero. El enemigo impactó en su flota de barcos, (los impactos son las X).

Ayuda a Homero a resolver las preguntas que se formulan a continuación, observa que Homero cambió la columna de las letras, por columna de números...




 Judo 3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1								X		X
2	X									
3					X	X			X	
4										
5					X					
6										
7										
8	X									
9							X			
10			X							X



- El barco más pequeño que dibujó Homero, se encuentra ubicado en la casilla_____.
- Para impacta el barco grande, hasta hundirlo completamente, se debe apuntar hacia las siguientes casillas:_____
- Si el contrincante lanza su ofensiva sobre la casilla que tiene como coordenadas, horizontal 10 y vertical 8. ¿Logra impactar el barco?
- Con una equis (✕), se muestran los impactos que uno de los barcos enemigos produjo.
- Identifique las casillas de los barcos hundidos completamente.

CUADRADOS MÁGICOS

Objetivo: Generar matrices utilizando el programa computacional DERIVE, siguiendo instrucciones, haciendo uso de la simbología propia para nombrar los elementos de una matriz.

Ejercicio 1: *Sólo Observa cómo hacerlo!...* En la siguiente imagen, se muestra cómo generar una matriz en el programa computacional Derive, en este caso se construye una matriz 4x4, dando click  en el icono, que se señala con la flecha, sobre la barra de órdenes.

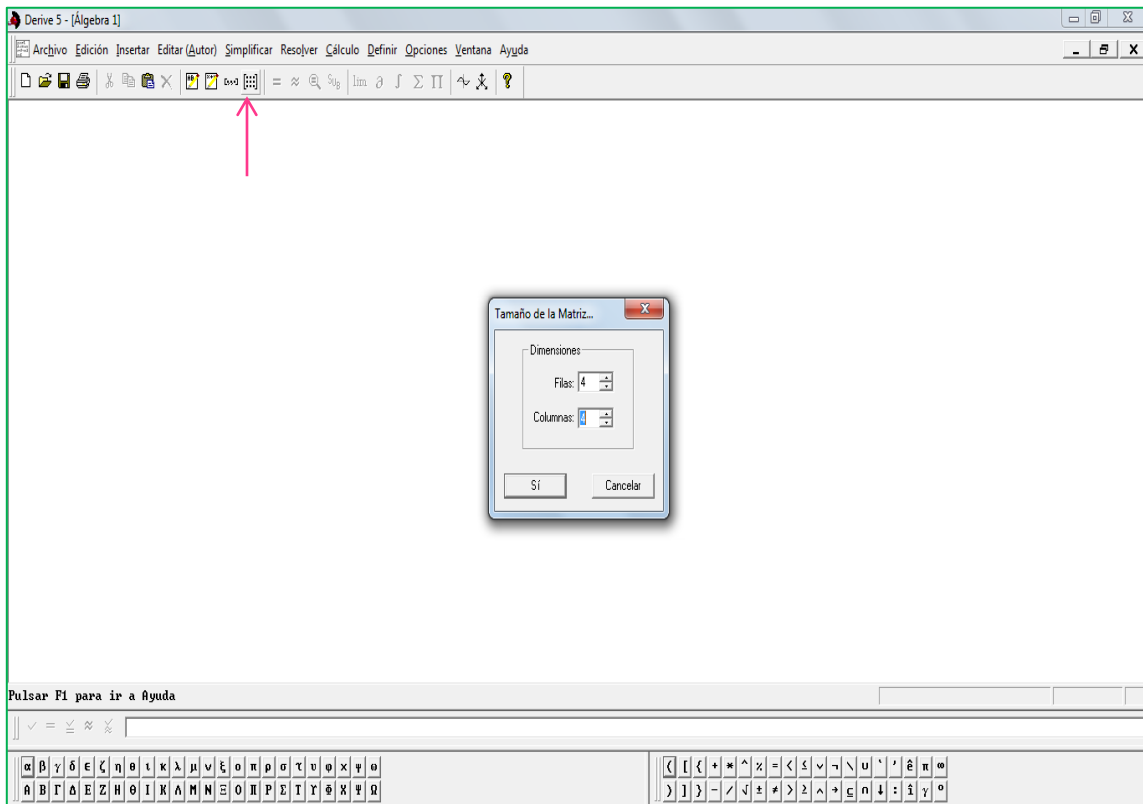


Figura 4

Las matrices que tienen igual número de columnas y filas, se denominan **MATRICES CUADRADAS**

1. Observa en la pantalla (Figura 4), que se genera un recuadro en el cual se debe indicar el número de filas y columnas para obtener el tamaño de la matriz.
2. En este caso, la matriz es de tamaño 4x4, es decir cuatro filas y cuatro columnas...
3. Ahora se da click en . Luego, sale en la pantalla otro recuadro, en el cual se escriben los valores de la matriz. Observe la Figura 5.

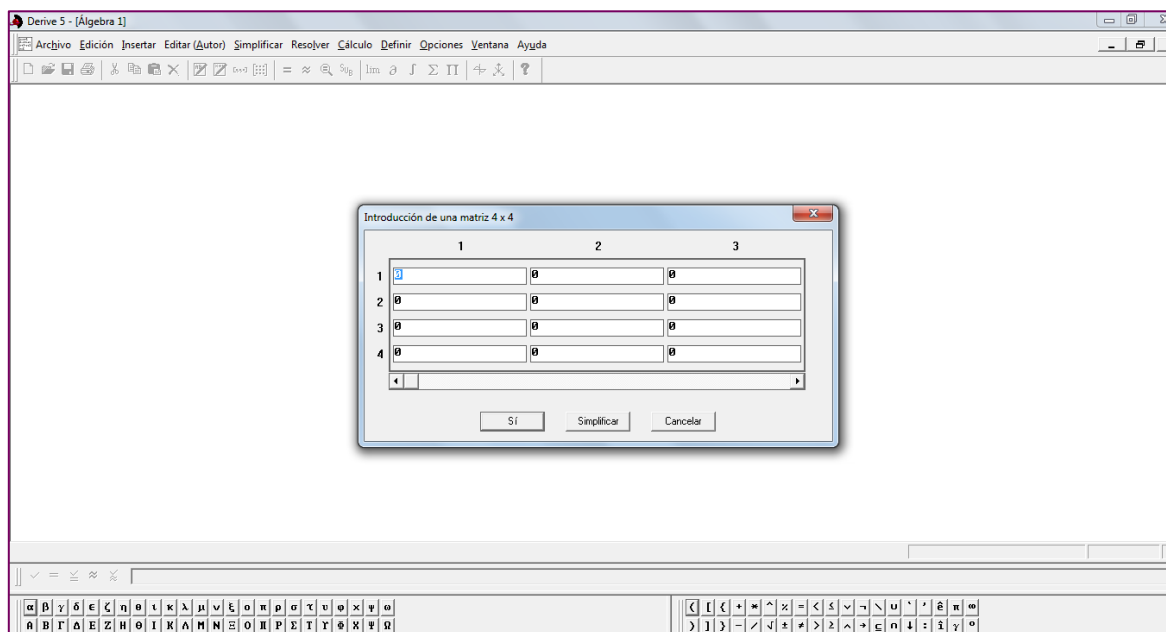


Figura 5

Ejercicio 2: Observa el cuadrado mágico, tiene seis números ubicados en algunas casillas:

16		2	
		11	8
			12
	15		

- El número 16 está en la casilla ubicada en la fila 1- columna 1; el contenido de esta casilla se nota por a_{11} , es decir $a_{11}= 16$
- El número 11 ubicado en la fila 2-columna 3; es decir $a_{23} = 11$
- El número 12 en la fila 3-columna 4; es decir $a_{34}=12$
- El número 15 en la fila 4-columna 2; es decir $a_{42}=15$

Figura 6

MANOS A LA OBRA!!

1. El ejercicio consiste en ubicar los siguientes números en el cuadrado, de tal manera que la suma de las filas, columnas y diagonales sea la misma. Determina si al seguir las instrucciones el cuadrado construido es **CUADRADO MÁGICO**.

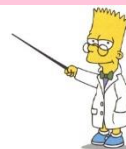
INSTRUCCIONES:

- El número 14 se encuentra en la posición (4,3)
- El número 1 se encuentra en la posición (4,4)
- El número 3 se encuentra en la posición (1,2)
- El número 13 se encuentra en la posición (1,4)
- El número 7 se encuentra en la posición (3,3)
- El número 4 se encuentra en la posición (4,1)
- El número 5 se encuentra en la posición (2,1)
- El número 9 se encuentra en la posición (3,1)
- El número 10 se encuentra en la posición (2,2)

Completa...

El número 8 es α _ _

El número 2 es α _ _



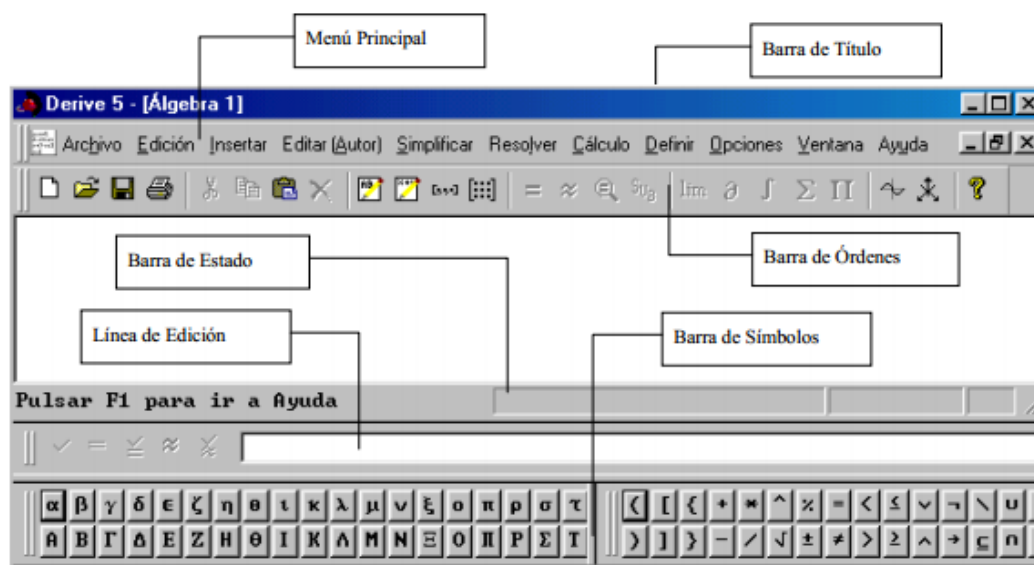
EJERCICIO 3. HAZLO EN DERIVE



GENERA EN EL PROGRAMA DERIVE EL CUADRADO ANTERIOR (FIGURA 6), SIGUIENDO LOS PASOS QUE SE INDICAN EN EL EJERCICIO 1.

DERIVE

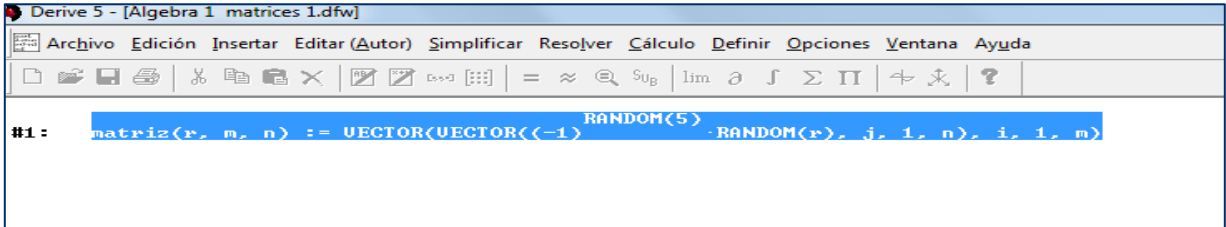
Te presentamos la pantalla del programa computacional Derive y partes fundamentales para su uso.



Con ayuda de tu profesor, en la línea de edición escribe el siguiente texto:

```
matriz(r, m, n) := VECTOR(VECTOR((-1)^RANDOM(5)·RANDOM(r), j, 1, n), i, 1, m)
```

- Das ENTER y luego te aparecerá en la pantalla:



```
matriz(4, 3, 5)
```

Sobre la línea de edición se escribe `matriz(4, 3, 5)`. De nuevo se hace click sobre la línea de edición y aparecerá en la pantalla

```
#2: matriz(4, 3, 5)
```

, luego se hace click en la barra de órdenes, en el icono `=`. Se obtendrá:

-2	-2	3	3	2
1	-2	0	2	0
0	-3	1	3	0

Matriz 1

CONTESTA:

- ¿Cuántas filas y columnas tiene la matriz?
- ¿Qué relación existe entre los números que se encuentran en el ejemplo `matriz(4, 3, 5)` con el número de filas y columnas de la matriz generada?
- ¿Qué números encuentras en la matriz?



SI HAS CONTESTADO QUE... Hay 3 filas y 5 columnas has acertado!!! Al

```
matriz(4, 3, 5)
```

observar el ejemplo encontramos esos números en

Además los números que encontramos en la matriz 0, 1 y-1, 2 y-2, 3 y-3. Los números enteros varían desde cero a 3, puesto que n=4 y **por definición random**

varía desde 0 hasta $n-1$, por lo tanto $4-1=3$, con los opuestos aditivos de los números.

0	1	2	3
0	-1	-2	-3

Concluimos que: `matriz(r, m, n)`, en este caso $r=4$, $m=3$ y $n=5$.

`matriz(4, 3, 5)`

$r=4$,

r es La función `RANDOM(n)` hace que `DERIVE` genere un número entero aleatorio entre 0 y $n-1$.

m es el número de filas de la matriz.

n es el número de columnas de la matriz.

Genera matrices... Resuelve en Derive.

```

Archivo Edición Insertar Editor (Autor) Simplificar Resolver Cálculo Definir Opciones Ventana Ayuda
[Icons]
#1: *****funcion*****
#2: matriz(r, m, n) := VECTOR(VECTOR((-1)^(RANDOM(5) - RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, m)
#3: *****EJERCICIOS: GENERA LAS MATRICES*****
#4: matriz(8, 12, 14)
#5: matriz(14, 3, 5)
#6: matriz(3, 1, 4)
#7: matriz(6, 5, ?)
#8: matriz(2, 3, 4)
    
```

3. DESCUBRE LA DIAGONAL DE UNA MATRIZ

Objetivo: Identificar características de la diagonal principal de una matriz, a partir de una situación dada.

CONCEPTUALICEMOS!!!... La diagonal principal de una matriz cuadrada contiene los elementos en las posiciones (1,1), (2,2),..., (n, n).

Es decir, está conformada por la elementos a_{11} , a_{22} ,..., a_{nn} .

Ejercicio 1



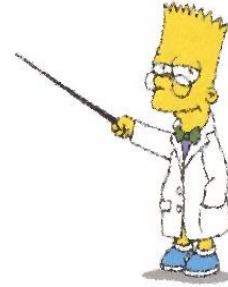
La matriz es de tamaño (5x5); es decir tiene 5 filas y 5 columnas. Es una matriz cuadrada.

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & -9 & 7 & -1 \\ 10 & -5 & 6 & 2 & -9 \\ 24 & 4 & 6 & -19 & 5 \\ -8 & -8 & 5 & 9 & -7 \\ 17 & -19 & -24 & 11 & -8 \end{pmatrix}$$

- Comprueba que has entendido qué es **LA DIAGONAL PRINCIPAL** de una matriz.
- Colorea la diagonal principal de la matriz que ves en la figura
- Indica los elementos que conforma la diagonal de la matriz. Por ejemplo: $a_{11} = 4$

Ejercicio:  HAZLO EN DERIVE

- Genera una matriz cuadrada de 6 x 6, de tal manera que sólo tenga valores en su diagonal principal. Las demás componentes de la matriz, por encima y por debajo de la diagonal principal deben ser igual a cero.
- Ahora da a conocer los números de la diagonal principal, indicando su notación (fila- columna).



DERIVE



Aprende otra forma de generar la diagonal principal de una matriz. A partir de funciones dadas...

1. Escribe en la línea de edición la función:

```
tri_inferior(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i < j, 0, (-1)^RANDOM(5)·RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
```

Enseguida se oprime enter. En la pantalla aparecerá:

```
#1: tri_inferior(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i < j, 0, (-1)RANDOM(5)·RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
```

2. Ahora la siguiente función sobre la línea de edición:

```
tri_superior(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i > j, 0, (-1)RANDOM(5)·RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
```

En la pantalla aparecerá:

```
#2: tri_superior(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i > j, 0, (-1)RANDOM(5)·RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
```

3. Por último sobre la línea de edición escribirás:


```
diagonal(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i < j ∨ i > j, 0, (-1)RANDOM(5)·RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
```

En la pantalla aparecerá:

```
#3: diagonal(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i < j ∨ i > j, 0, (-1)RANDOM(5)·RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
```

Ahora bien, ya se tiene las funciones completas para que puedas generar la diagonal principal de una matriz:

En la línea de edición coloca el siguiente ejemplo: `diagonal(4, 13)`, al oprimir

enter y el icono , se obtendrá la matriz, cuya diagonal principal es diferente de 0.

-1	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0
0	0	0	2	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	-1



Matriz 2

Analiza cada una de las funciones que hacen posible la generación de este tipo especial de matriz:

i. Inserta la función:

```
#1: tri_inferior(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i < j, 0, (-1)RANDOM(5) · RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
```

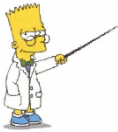
- ii. Luego el siguiente ejemplo: `tri_inferior(2, 4)`. Describe la matriz que se generó.

Te dice algo "triangular inferior". ¿Por qué?

- iii. Ahora haz lo mismo con la segunda función:

```
#2: tri_superior(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i > j, 0, (-1)RANDOM(5) · RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
```

- iv. Ahora escribe el ejemplo `tri_superior(3, 5)`. Describe la matriz que se generó. Te dice algo "Triangular superior"?



CON AYUDA DE TU PROFESOR LLEGARÁS A UNA CONCLUSIÓN.

Ahora bien, con las tres funciones podrás construir la diagonal de una matriz. Tal y como se muestra en la **Matriz 2**.

- ¿Qué indica el número 4 que se encuentra en el ejercicio?
- ¿Qué indica el número 13 que se encuentra en el ejercicio?
- De acuerdo a la función, ¿qué podrías afirmar con respecto al tamaño de la matriz?. ¿Es posible construir la diagonal de una matriz, cuando esta es rectangular? ¿Por qué?

Si has contestado que el número 4 indica la variación desde 0 hasta 3. Es $r=4$, dicha variación se muestra en la diagonal principal de la matriz. El número 13 es el tamaño de la matriz $n=13$. **ESTÁS EN LO CIERTO!!**



Genera la diagonal de una matriz

Realiza los ejercicios en Derive...

```

Derive 5 - [Álgebra 1 DIAGONAL 2.dfw]
Archivo Edición Insertar Editar (Autor) Simplificar Resolver Cálculo Definir Opciones Ventana Ayuda
[Icons] = ≈ ∅ ∫ lim ∂ ∫ ∑ ∏ [Icons] ?

#1: *****
#2: DIAGONAL PRINCIPAL DE UNA MATRIZ
#3: *****
#4: tri_inferior(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i < j, 0, (-1)^(RANDOM(5) * RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
#5: tri_superior(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i > j, 0, (-1)^(RANDOM(5) * RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
#6: diagonal(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i < j v i > j, 0, (-1)^(RANDOM(5) * RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
#7: *****
#8: EJERCICIOS
#9: *****
#10: diagonal(6, 13)
#11: diagonal(3, 5)
#12: diagonal(5, 2)
#13: diagonal(4, 10)
#14: diagonal(8, 4)
#15: diagonal(12, 12)
#16: *****
    
```

Describe cada una de las matrices obtenidas, de acuerdo a las características propias de la diagonal de una matriz.

Observa esta matriz... ¿qué tiene de particular?

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz 3

1. ¿Qué observas en las diagonales de la matriz?
2. En cuanto a los valores diferentes de 0, ¿Qué podrías concluir?

Genera matrices...

La función que debes insertar en la línea de edición es:

```
matriz_x(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i = j, 0, IF(i + j = n + 1, 0, (-1)^RANDOM(5) * (1 + RANDOM(r - 1)))), j, 1, n), i, 1, n)
```

Ahora ya puedes generar tus propias matrices. Realiza los ejercicios propuestos a continuación:

```

Derive 5 - [Álgebra 1]
Archivo Edición Insertar Editar (Autor) Simplificar Resolver Cálculo Definir Opciones Ventana Ayuda
[Icons] = ∞ @ S0 lim ∂ ∫ Σ Π ↺ ↻ ?

#1: *****
#2: Función matriz_x
#3: *****
#4: matriz_x(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i = j, 0, IF(i + j = n + 1, 0, (-1)RANDOM(5) · (1 + RANDOM(r - 1)))), j, 1, n), i, 1, n)
#5: *****
#6: EJERCICIOS
#7: *****
#8: matriz_x(6, 17)
#9: matriz_x(2, 5)
#10: matriz_x(8, 3)
#11: matriz_x(3, 9)
#12: matriz_x(14, 10)
#13: *****
    
```

En DERIVE, escribe la expresión para cada una de las siguientes matrices, dada la función

$$\text{matriz}_x(r, n) := \text{VECTOR}(\text{VECTOR}(\text{IF}(i = j, 0, \text{IF}(i + j = n + 1, 0, (-1)^{\text{RANDOM}(5)} \cdot (1 + \text{RANDOM}(r - 1)))), j, 1, n), i, 1, n)$$

- ✓ Una matriz cuadrada de tamaño 11, con $r = 2$
- ✓ Una matriz cuadrada de tamaño 9, con $r = 4$
- ✓ Una matriz cuadrada de tamaño 12, con $r = 8$
- ✓ Una matriz cuadrada de tamaño 5, con $r = 4$
- ✓ Una matriz cuadrada de tamaño 10, con $r = 10$

APRENDIENDO APRACTIQUEMOSLO

Objetivo: Reforzar conceptos aprendidos en los anteriores talleres e ir formalizando notación propia de las matrices.

Ejercicio 1

- a. De acuerdo a la información suministrada. Relaciona con una flecha la columna de la izquierda con la columna de la derecha, según corresponda. Observa el ejemplo:

Recuerda que...



Una matriz es un arreglo ordenado de números en forma rectangular. El orden de una matriz es el número de filas y columnas que forman la matriz.

Si una matriz tiene m filas y n columnas de $m \times n$. Observa el ejemplo que se muestra a continuación:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$


La matriz M tienen dos filas y tres columnas, por lo tanto es de orden (2×3) .

•	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 3 & 5 \\ 6 & 9 & 6 & 8 & 7 \\ 7 & 3 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix} = A$	• (4×3)
•	$(7 \ 3 \ 5) = D$	• (3×3)
•	$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = C$	• (3×4)
•	$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 45 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 9 \\ -6 & 1 & 46 \end{pmatrix} = F$	• (3×1)
•	$\begin{pmatrix} -9 & 2 & 6 \\ 12 & -5 & 11 \\ 8 & 10 & -4 \end{pmatrix}$	• (5×5)
•		• (1×3)

Figura 5

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Recuerda...



Una matriz cuadrada es aquella matriz cuyo número de filas y de columnas es igual.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \\ -2 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \text{cuadrada } (4 \times 4)$$

Figura 4

- b. En el programa computacional derive, representa las matrices.
- c. Determina cuál o cuáles de éstas son cuadradas.
- d. La matriz que se muestra en la Figura 4, es una matriz cuadrada, de orden (4x4). Menciona los elementos que conforman la diagonal principal de la matriz, dando a conocer simbólicamente su posición en la matriz. Por ejemplo el número 5 es a_{23} , es decir el número 5 está en la fila 2, columna 3. Continúa con el ejercicio.

Ejercicio 2

Observa la matriz que se muestra en la Figura 5 y de acuerdo a esta contesta:

- a. ¿ Es un cuadrado mágico?. Muestra que las suma de sus

columnas, filas y diagonales son iguales.

- b. ¿Qué pasa si se multiplica cada componente por 2? ¿Seguirá siendo cuadrado mágico?
- c. Da a conocer la posición de cada componente de la matriz.



Ejemplo: $a_{32} = 9$.



Hazlo en Derive.

Sigue las instrucciones que se muestran en el recuadro



1. Ingresa la matriz del numeral (4), como se indicó en taller #2 "Cuadrados Mágicos".
2. Oprime F3 para llamar la matriz.
3. Una vez la tienes en la barra del texto, oprime , esta tecla está en la parte inferior de la pantalla, la cual indica (producto).
4. Luego colocas el número 2.
5. Por último das ENTER, te sale en la pantalla la matriz multiplicada por el número dos, para que obtengas el resultado, ve a la barra superior de la pantalla y da click en . Así obtendrás la matriz final.
6. Compara la matriz final que obtuviste con la generada por el programa.

Ejercicio 3

Contesta las siguientes preguntas, una vez hayas seguido el procedimiento descrito en el recuadro.

- a. *¿La matriz obtenida es un cuadrado mágico?*
- b. *¿Si multiplicaras por otro número, la matriz resultante es también un cuadrado mágico? ¿Por qué?*
- c. *¿El tamaño de la matriz cambió o se mantuvo?*

DERIVIVE



Observa otra forma de multiplicar una matriz por un escalar...

1. Escribe en la línea de edición la función:

```
elemental(n, r, s) := VECTOR(VECTOR(IF(i = r ^ j = s, 1, 0), j, 1, n), i, 1, n)
```

2. La matriz identidad: está dada por la siguiente función:

```
identica(n) := VECTOR(VECTOR(IF(i = j, 1, 0), j, 1, n), i, 1, n)
```

La matriz identidad de tamaño n , se define como la matriz diagonal que tiene valor 1 en cada una de las entradas de la diagonal principal, y 0 en el resto.

Veamos un ejemplo:

```
identica(5)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este caso el tamaño de la matriz es 5, es una matriz cuadrada, cada uno de los valores de la diagonal principal es igual a 1.

- La siguiente función es:

3. `escalar_fila(n, α , i) := identica(n) + ($\alpha - 1$)·elemental(n, i, i)`

Con esta tercera función, observa lo que pasa. Tomamos como ejemplo:

The screenshot shows the Derive 5 software interface with the following content:

```
#1: elemental(n, r, s) := VECTOR(VECTOR(IF(i = r ^ j = s, 1, 0), j, 1, n), i, 1, n)
#2: identica(n) := VECTOR(VECTOR(IF(i = j, 1, 0), j, 1, n), i, 1, n)
#3: escalar_fila(n,  $\alpha$ , i) := identica(n) + ( $\alpha - 1$ )·elemental(n, i, i)
#4: escalar_fila(5,  $\pi$ , 3)
```

#5:

1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	π	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

Si se realiza la operación sobre la matriz identidad. ¿Qué crees que pasó?, ¿Todos los elementos de la diagonal principal son iguales?

- 🐜 ¿De qué tamaño es la matriz? _____
- 🐜 ¿Cuál es el número diferente a 1 sobre la diagonal? _____
- 🐜 ¿En qué fila se encuentra π ? _____

Si te diste cuenta, se multiplicó la matriz por π . Por lo tanto en:

`escalar_fila(5, π , 3)`, 5 hace referencia al tamaño de la matriz, π es el

escalar por el cual se realiza el producto con la matriz, y 3 es la fila por la cual se multiplica el escalar.

Multiplica por un escalar

```

#1: *****
#2:                                FUNCIÓN ESCALAR_FILA
#3: *****
#4: elemental(n, r, s) := VECTOR(VECTOR(IF(i = r ^ j = s, 1, 0), j, 1, n), i, 1, n)
#5: identica(n) := VECTOR(VECTOR(IF(i = j, 1, 0), j, 1, n), i, 1, n)
#6: escalar_fila(n, α, i) := identica(n) + (α - 1)·elemental(n, i, i)
#7: escalar_fila(5, π, 3)
#8: *****
#9:                                EJERCICIOS
#10: *****
#11: *****
#12: escalar_fila(4, π, 1)
#13: escalar_fila(8, π, 5)
#14: escalar_fila(4, √2, 2)
#15: escalar_fila(10, σ, 7)
#16: escalar_fila(7, Ω, 7)
#17: escalar_fila(15, β, 10)
    
```

3. Completa la tabla que se muestra a continuación.

EJERCICIO	TAMAÑO DE LA MATRIZ (n)	ESCALAR (α)	FILA MULTIPLICADA POR EL ESCALAR (i)
escalar_fila(4, π , 1)			
		β	
	7		
		σ	
	4		2
escalar_fila(8, π , 5)			

Adivina – adivinador!!

En el programa computacional Derive, inserta las siguientes funciones y observa el ejemplo que se muestra:

```

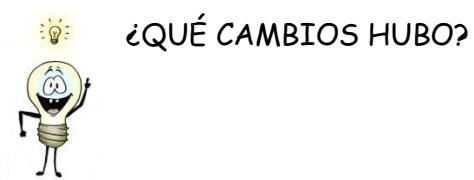
*****
                                PERMUTA FILA
*****
matriz(r, n, n) := VECTOR(VECTOR((-1)^(RANDOM(5) - RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
diagonal(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i < j v i) j, 0, (-1)^(RANDOM(5) - RANDOM(r))), j, 1, n), i, 1, n)
identica(n) := VECTOR(VECTOR(IF(i = j, 1, 0), j, 1, n), i, 1, n)
elemental(n, r, s) := VECTOR(VECTOR(IF(i = r ^ j = s, 1, 0), j, 1, n), i, 1, n)
permuta_fila(n, i, j) := identica(n) - elemental(n, i, i) - elemental(n, j, j) + elemental(n, i, j) + elemental(n, j, i)
*****
                                EJEMPLO
*****
permuta_fila(6, 2, 5)

                                [ 1 0 0 0 0 0 ]
                                [ 0 0 0 0 1 0 ]
                                [ 0 0 1 0 0 0 ]
                                [ 0 0 0 1 0 0 ]
                                [ 0 1 0 0 0 0 ]
                                [ 0 0 0 0 0 1 ]

```

Como ya has aprendido qué es la matriz identidad, puedes deducir qué pasó aquí!

Ten en cuenta que `permuta_fila(6, 2, 5)` indica, respectivamente: El tamaño de la matriz, fila y columna.



5. ¿QUÉ ES UN VECTOR?

Objetivos:

- Reconocer las características de un vector.
- Aprender a utilizar la notación que representa un vector.
- Aprender a multiplicar una matriz por un vector.



Un vector es un par ordenado de números reales. Un vector tiene magnitud, dirección y sentido.

los vectores se notan así:

$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, en donde x y y son números reales, x se denomina la primera componente y y la segunda.

La notación a manera de columna se utiliza para realizar el producto del vector por una matriz.

El ejemplo que se muestra en la Gráfica 1, corresponde a la gráfica del vector

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Gráfica 1

El punto (2,1), permite visualizar la

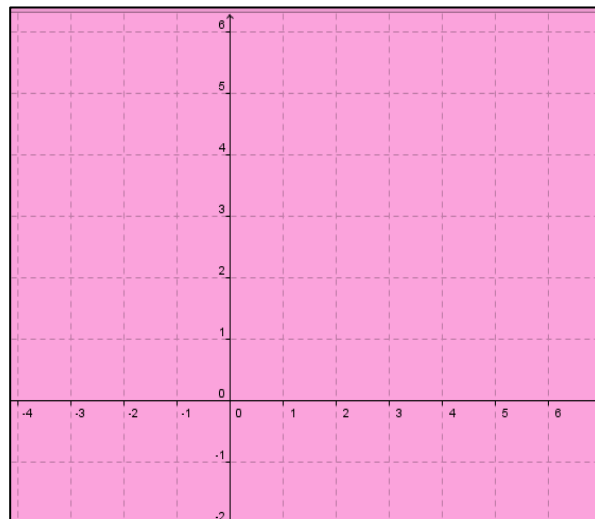
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

representación del vector. Gráficamente, el vector es la flecha que une el origen con el punto (2,1).



Ejercita tus conocimientos!!

- a. Grafica en el plano cada uno de los siguientes vectores. Utiliza un color distinto para distinguir unos vectores de otros:



Gráfica 2

- b. Nombra las componentes x y y de los vectores que se muestran en la gráfica de la figura 5.

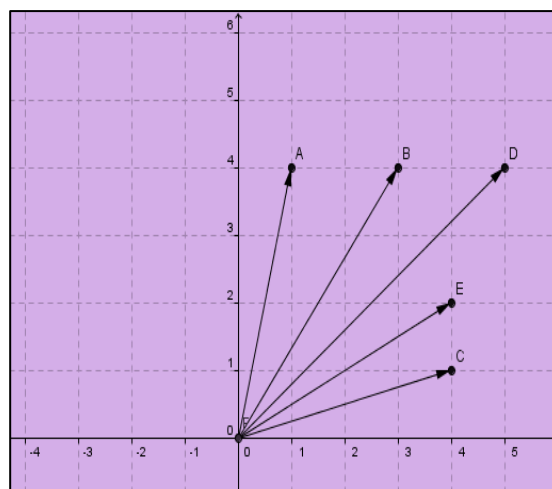


$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Figura 5

- c. Completa las coordenadas de acuerdo a la Figura 3:

A (,)
 B (,)
 C (,)
 D (,)
 E (,)



Gráfica 3

DERIVE

El programa computacional Derive, te permite realizar operaciones. Las siguientes son las funciones para generar matrices especiales a partir de otras.

Inserta una a una, las funciones que se muestran a continuación (sobre la línea de edición):



Escribe sobre la línea de edición:

```
matriz(r, m, n) := VECTOR(VECTOR((-1)^RANDOM(5)·RANDOM(r), j, 1, n), i, 1, m)
```

```
tri_inferior(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i < j, 0, (-1)^RANDOM(5)·RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
```

```
tri_superior(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i > j, 0, (-1)^RANDOM(5)·RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
```

```
diagonal(r, n) := VECTOR(VECTOR(IF(i < j ∨ i > j, 0, (-1)^RANDOM(5)·RANDOM(r)), j, 1, n), i, 1, n)
```

```
elemental(n, r, s) := VECTOR(VECTOR(IF(i = r ∧ j = s, 1, 0), j, 1, n), i, 1, n)
```

```
identica(n) := VECTOR(VECTOR(IF(i = j, 1, 0), j, 1, n), i, 1, n)
```

```
escalar_fila(n, α, i) := identica(n) + (α - 1)·elemental(n, i, i)
```

```
tercera_operacion(n, α, i, j) := identica(n) + α·elemental(n, i, j)
```

```
paso(A, j, i) := IF(i = j, - identica(DIMENSION(A)), ELEMENT(A, j, i))
```

```
ceros_columna(A, i) := II(tercera_operacion(DIMENSION(A), - paso(A, j, i), j, i), j, 1, DIMENSION(A))
```


A partir de una matriz cualquiera, en este caso, la matriz es cuadrada de 6×6 , con $r=4$.

```
matriz(4, 6, 6)
```

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora, utilizamos la función

```
escalar_fila(n,  $\alpha$ , i) := identica(n) + ( $\alpha$  - 1)·elemental(n, i, i)
```

Se reemplaza a $n=6$, que indica el tamaño de la matriz, $\alpha = \frac{1}{2}$ indica el escalar; $i=2$, es la fila en la cual se hace el producto del escalar en la fila 2. Veamos

En la línea de edición se escribe:

```
escalar_fila(6, 1/2, 2)·[-2, -2, 3, 3, 2, 1; -2, 0, 2, 0, 0, -3; 1, 3, 0, 2, 0, 1; 2, 3, 2, 2, -1, 1; -1, -1, -1, 0, 1, 1; 2, 0, 0, -2, 2, -2]
```

Se obtiene:

$$\text{escalar_fila}\left(6, \frac{1}{2}, 2\right) \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Se oprime la tecla . El resultado es la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Al comparar la matriz inicial con la obtenida después de

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

aplicar la función,

- Observa muy bien cada una de las columnas. ¿Hay alguna modificación?
- Observa cada una de las filas, ¿Hay algún cambio?

Los elementos de la fila dos han sido modificados. ¿Cómo ocurrió esto?. Pues bien, el elemento $\alpha = \frac{1}{2}$, ha sido multiplicado por cada una de las componentes de la fila de la matriz inicial, de esta manera se obtiene la otra matriz.



EJERCICIO 1

Resuelve los siguientes ejercicios en Derive:

1. Introduce las funciones que se muestran en la Ilustración 3.
2. Introduce los siguientes ejercicios:

```

*****
EJERCICIOS Genera la matriz
*****
matriz(3, 4, 4)
matriz(9, 8, 8)
matriz(5, 3, 3)
matriz(4, 2, 2)
matriz(11, 13, 13)
*****
Ejercicios: Multiplica la fila que se indique de la matriz por el escalar dado
*****
escalar_fila(n, α, i) * matriz(r, m, n)

```

- Genera cada una de las matrices que se muestran en la primera parte de los ejercicios.
- Una vez se obtengan las matrices, en la segunda parte vas a escribir la función `escalar_fila(n, α, i) * matriz(r, m, n)`, para cada una de las matrices del ejercicio anterior. Escoge α e i , arbitrariamente.

Para que tengas una idea de cómo realizar el ejercicio. Observa el siguiente ejemplo, con la primera matriz propuesta.

- Presiona la tecla igual para obtener la matriz que se indica:

```
matriz(3, 4, 4)
```

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se obtuvo una matriz 4x4 con random 3.

- Ahora escribe en la línea de edición:

```
escalar_fila(4, 3, 1)[-1, -1, 2, 2; 1, 1, -1, 0; 2, 0, 0, -2; 0, 2, 0, 1]
```

Observa: en el paréntesis **0** respectivamente aparece: el tamaño de la matriz, es decir 4; el escalar 3, fue escogido arbitrariamente; la fila 1. Podemos

escoger la fila que se desee multiplicar por 3. Enseguida se encuentra un corchete **[]**, el cual muestra la matriz obtenida en el anterior paso.

```
escalar_fila(4, 3, 1) ·  $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 
```

- En la pantalla aparecerá:
 ahora se oprime la tecla **[]**, y veremos que en la fila 1, se ha multiplicado cada uno de los elementos por 3.

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz 4.

Este ejemplo te permitirá generar las matrices, que te indican los ejercicios propuestos.



EJERCICIO 2

Una vez generes las matrices de la función , retómala para realizar los ejercicios correspondientes a la función :

```
ceros_columna(A, i) := II(tercera_operacion(DIMENSION(A), - paso(A, j, i), j, i), j, 1, DIMENSION(A))
```

Mira el siguiente ejemplo y hazlo con las demás mátrices. Retomamos la

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz 4.

Ahora, en la línea de edición se llamará la función `ceros_columna(A, i)`, utilizando F3. Particularmente se hace con la matriz:

```
ceros_columna([-3, -3, 6, 6; 1, 1, -1, 0; 2, 0, 0, -2; 0, 2, 0, 1], 4)
```

Se reemplaza de acuerdo a la matriz y columna a tratar.

Se escribe sobre la línea de edición `ceros_columna`, luego se abre paréntesis (,

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

enseguida se subraya la matriz y se oprime F3, así se copiará la matriz en la línea de edición, luego, se da una coma , y por último se coloca la columna que se desea sea diferente a 0, en este caso es la columna 4.

Se da enter y se obtiene:

$$\text{ceros_columna} \left(\begin{bmatrix} -3 & -3 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 4 \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe la matriz que resulta, la diagonal es igual a 1, excepto el elemento que se ubica en la columna 4, los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son igual a 0, excepto la columna 4.

Ahora una vez obtengas las matrices del ejercicio anterior, realiza en el programa computacional Derive el ejercicio 2, con la función indicada.

6. TRANSFORMACIONES Y MATRICES

Objetivo: Aplicar transformaciones en el plano, operando matrices entre sí, así como un vector y una matriz.



Las matrices se pueden considerar como transformaciones de los vectores. Al multiplicar por una matriz. Un vector se transforma en otro vector.

Primero debes aprender cómo se multiplica un vector por una

Al multiplicarla matriz $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ por el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, éste se transforma en el vector $\begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}$

El vector se multiplica por la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Se transforma en el vector $\begin{bmatrix} -9 \\ 9 \end{bmatrix}$

Para obtener la primera entrada se multiplica la primera fila de la matriz

(3, -6), por el vector: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \times 1) + ((-6) \times 2) \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \end{pmatrix}$$

Aquí se señala el procedimiento:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} (3 \times 1) + ((-6) \times 2) \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \end{pmatrix}$$

Para obtener la entrada en la segunda fila de , se multiplica la segunda fila (5,2) de la matriz, por la segunda fila del vector, o sea 2.

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \times 5) + (2 \times 2) \end{pmatrix}$$

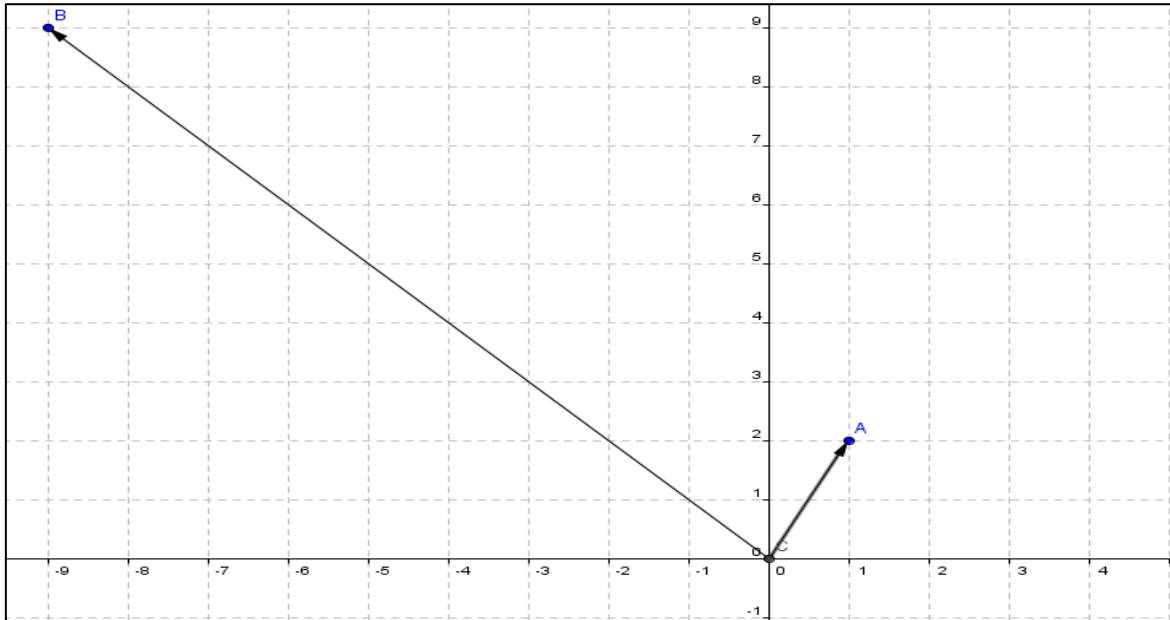
Realizando las operaciones indicadas, se obtiene la segunda componente del vector resultante:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} (1 \times 5) + (2 \times 2) \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 4 \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}$$

Se concluye que:

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Gráficamente, se puede observar la transformación:



Ejercita tus conocimientos!!

Ejercicio 1

Sea la $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y el vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Hallar el vector que resulta, calculando el producto

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$


(Realiza el procedimiento indicado en el ejemplo anterior).


Ejercicio 2

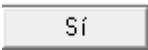


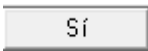
Hazlo en Derive

1. Genera la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ en Derive. El siguiente paso es generar el vector.

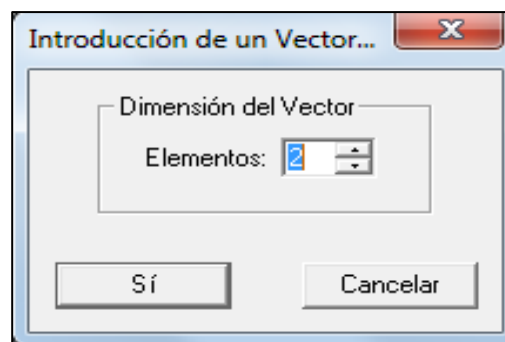
2. Oprime el icono , con el fin de genera el vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Aparecerá el recuadro mostrado en el **Cuadro 2**

3. Oprime el icono , con el fin de genera el vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Aparecerá el recuadro mostrado en el **Cuadro 2**

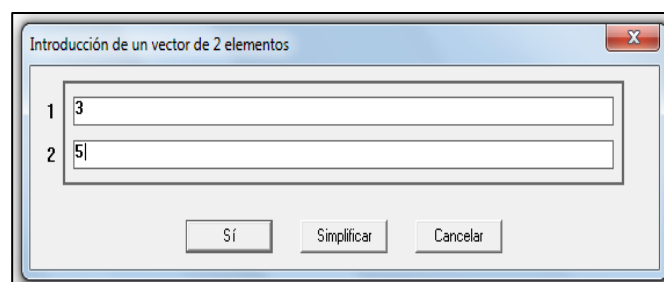
4. Selecciona "2", como número de elementos. Y luego oprime . A continuación aparecerá el recuadro. En el cual se colocan los elementos del vector. **Cuadro 3**

5. Se oprime  e inmediatamente aparece en la pantalla el vector $[3, 5]$, representado como un punto.

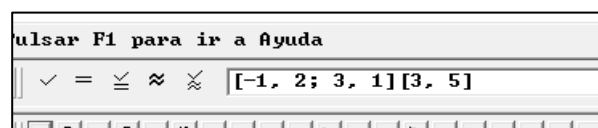
6. Una vez generada la matriz y el vector, se seleccionan y se oprime F3. En la barra se tendría: **Cuadro 4**.



Cuadro 1



Cuadro 2



Cuadro 3

7. Posteriormente vas a la barra superior, oprimes **=** , en la pantalla aparecerá el vector

que resulta de $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

8. Compara el resultado obtenido que obtuviste realizando los cálculos de manera manual y el resultado obtenido en Derive.

Ejercicio 3

Haz lo mismo con los siguientes productos que se muestran a continuación.



$$\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot [3, -1]$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot [2, 4]$$

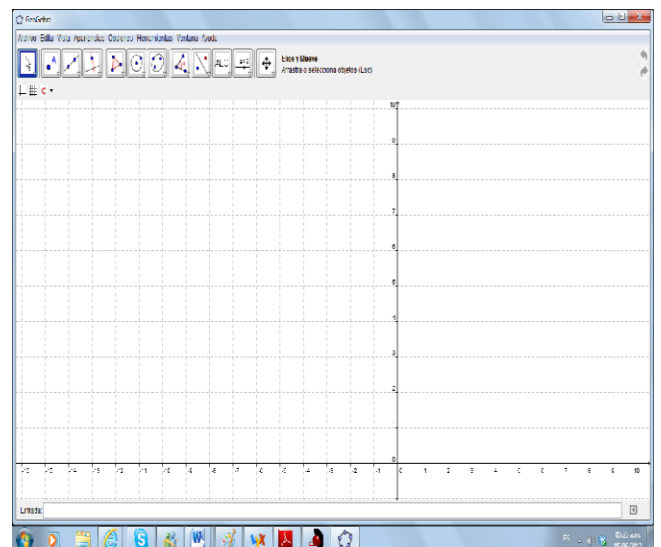
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot [-1, 2]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot [-1, 2]$$


Ejercicio 4 GRAFICA EN GEOGEBRA




Grafica el vector inicial y el vector resultante que obtuviste al utilizar Derive en el Ejercicio 2, Hazlo para cada uno de los ejercicios propuestos en el Ejercicio 3.



Presentación pantalla de GeoGebra 1

1. Debes dar clic en el icono , para ubicar el punto sobre el plano cartesiano que muestra la pantalla del programa.

2. oprime , para unir el origen $(0,0)$ con el punto (x, y) así obtendrás el vector.

3. Ubica el vector que se da inicialmente y también el vector que resultó de realizar el producto matricial.

7. MATRICES Y TRANSFORMACIONES

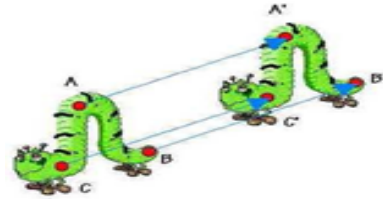
Objetivo: Realizar transformaciones sobre el plano, usando matrices.

Una transformación en el plano es una función que asocia a cada punto de coordenadas (x, y) del plano, un punto (x', y') .



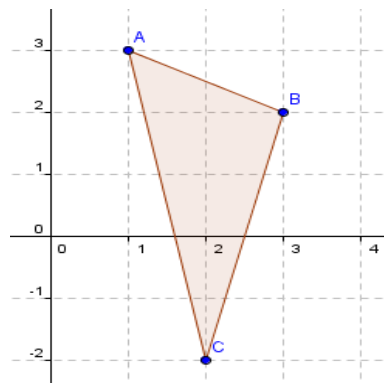
TRASLACIÓN

Geoméricamente, representa el desplazamiento de un punto o conjunto de puntos según un vector fijo v , no nulo.



Veamos el ejemplo:

Tenemos un triángulo que tiene como vértices, los puntos $A (1, 3)$; $B (3, 2)$ y $C (2, -2)$.



Gráfica 4

Tomamos el vector columna $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$,

Para aplicar una traslación, tomamos los puntos A , B y C como matrices, así

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ahora realizamos la suma de cada una de las matrices

columna con el vector $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Así:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

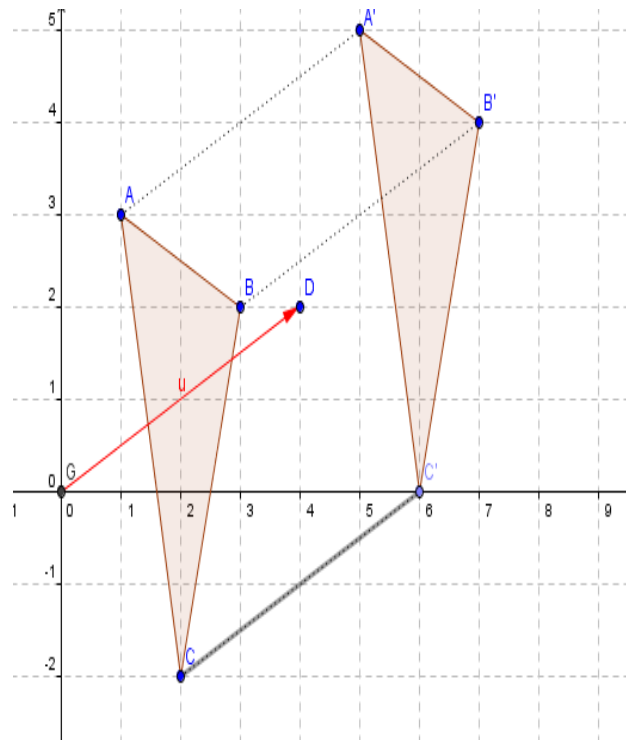
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mira que se suma componente a componente la matriz con el vector.

El resultado de las sumas, que se presentan como vectores, se ubican sobre el plano como puntos, así: $A'(5,5)$, $B'(7,4)$ y $C(6,0)$. De igual manera se puede observar el vector

$u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ver **Gráfica 5**.



Gráfica 5 . (Traslación del triángulo A, B, C. Se desplaza 4 unidades hacia la derecha y 2 unidades hacia arriba).



Ejercicio 1



HAZLO EN DERIVE:

Realiza la traslación del cuadrilátero que tiene por vértices los puntos $A(-3, -3)$, $B(-3, 2)$, $C(1, -2)$, $D(2, 4)$ y con la matriz asociada

al vector de traslación $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Para ello, genera las cuatro matrices que corresponden a los puntos A , B , C y D . Como lo aprendiste en la anterior actividad. Cada matriz la

sumas con el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

#1: $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$

#2: $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

#3: $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

#4:

$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Gráfica 6

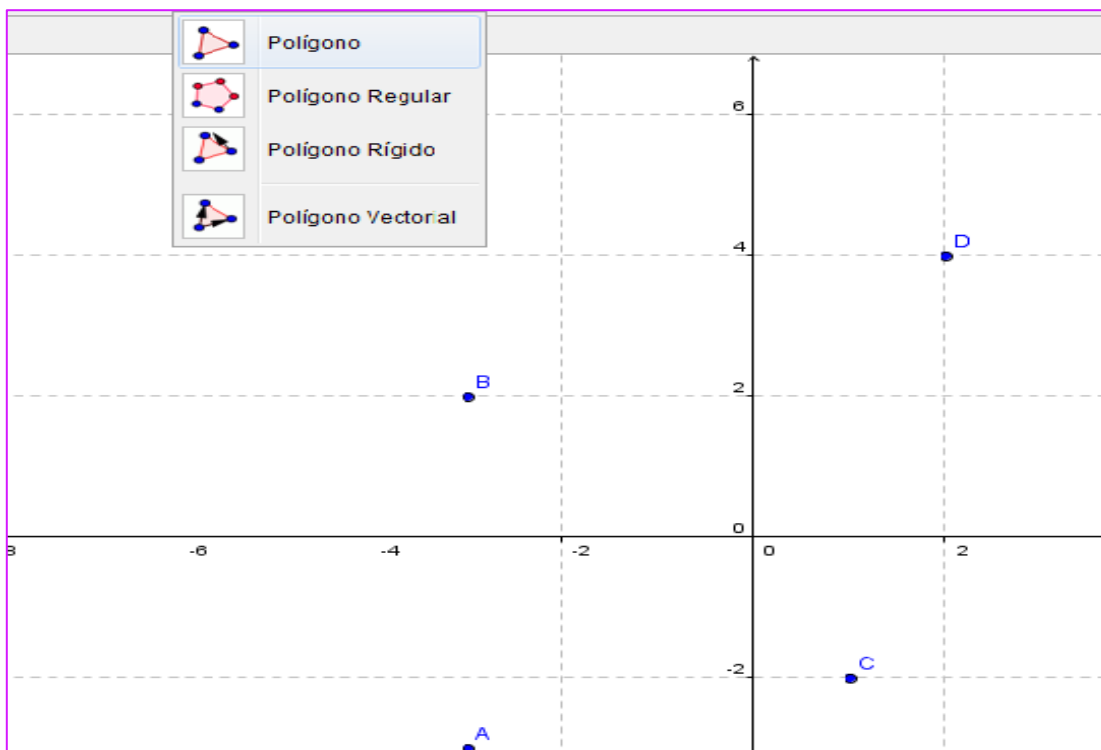
Te mostramos la suma de la primera matriz con el vector:

$[-3; -3] + [1; 3]$

En la pantalla (Ver Gráfica 3). Verás la matriz, el vector y la suma de la matriz con el vector, al extremo derecho el resultado de dicha suma.

Esto es tan sólo un adelanto. Haz la suma de las otras tres matrices con el vector traslación. El programa Derive soluciona cada suma.

Ejercicio 2




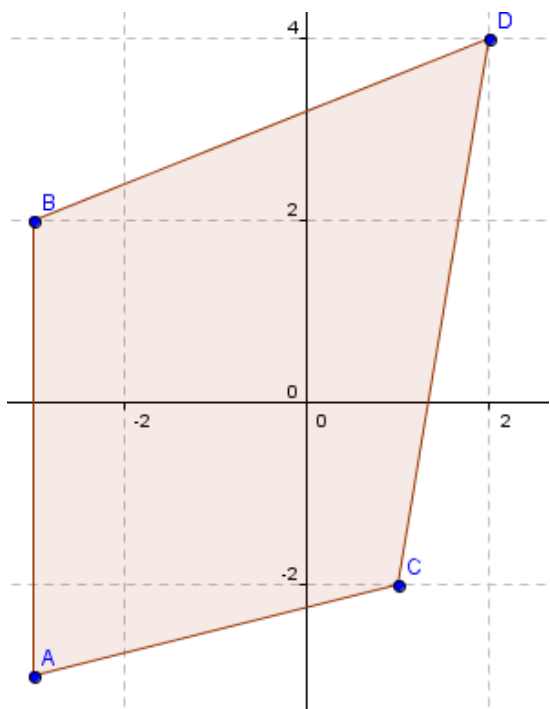
Gráfica 7

GEOGEBRA



Para que evidencias la traslación, grafica los puntos A, B, C y D del cuadrilátero. Observa la Gráfica 4. Se ubicaron los puntos. Se da click en el

icono , y sobre cualquiera de los puntos graficados sobre el plano, pasa por cada punto, trazando el cuadrilátero (Ver Gráfica 5).



Gráfica 8

Sobre la misma gráfica, realiza el trazo del cuadrilátero resultante entre cada matriz y el vector traslación.

Así comprobarás la traslación.

Ejercicio 3.

Utiliza el programa computacional Derive para realizar la traslación indicada:

Triángulos con vértices $M(-4, 5)$, $N(-1, -2)$, $O(0, 3)$. Vector

traslación $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4

Utiliza Geogebra para representar la gráfica de la traslación anterior.



SIMETRÍA AXIAL

En geometría la reflexión de una figura sobre el plano, se puede realizar respecto al eje x , al eje y o sobre una recta cualquiera. Para ello se debe aplicar la matriz de transformación adecuada, tal como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1

SIMETRÍA	MATRIZ ASOCIADA
Respecto al eje x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Respecto al eje y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Respecto a la recta $x=y$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo: Mostraremos una reflexión con respecto al eje y , de la figura cuyos vértices son $A(-5, 1)$, $B(-2, 2)$, $C(-3, 3)$.

Teniendo en cuenta la tabla 1, la matriz asociada a la simetría

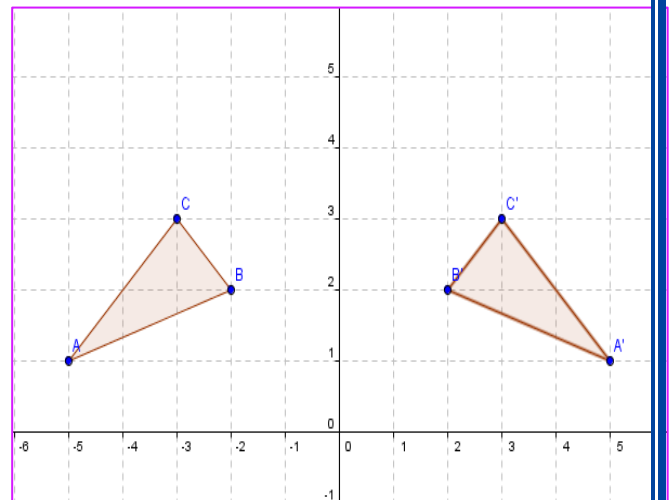
respecto al eje y es: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lo que se hace es tomar la matriz axial respecto al eje y y multiplicarla por la matriz columna de cada punto. Así:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Gráfica 9

Obteniéndose las matrices columna

$$A' = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$



HAZLO EN DERIVE

La Gráfica 6 muestra la traslación de A, B, C.

Ejercicio 5

Aplica la simetría axial con respecto al eje y, al cuadrilátero con vértices: A(-1,1), B(-1,4), C(-3,1) y D(-4,2).

Realiza el producto matricial entre la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, con cada uno de los siguientes vectores, así como se indica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6

Utiliza el programa GEOGEBRA



para graficar la reflexión.

Ejercicio 7

Ubica tres puntos sobre el primer cuadrante del plano cartesiano, únelos mediante segmentos, de tal manera que construyas un triángulo, ahora aplica la simetría axial con respecto al eje x. Grafica la figura inicial y la simetría propuesta.

Ejercicio 8

Ubica 4 puntos en el tercer cuadrante del plano cartesiano. De tal forma que al unirlos se forme un cuadrado. Aplica la simetría axial con respecto a la matriz asociada $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Grafica la figura inicial y la respectiva simetría.

CONVIÉRTETE

Objetivo:

- Mostrar una manera dinámica de identificar las filas, columnas y diagonales de una matriz, estas últimas a partir de la creación de matrices escalonadas.
- Construir las letras del abecedario tomando como base filas, columnas y diagonales, además del uso de conectores lógicos y signos de desigualdad, los cuales delimitan el trazo de cada una de las letras.

DERIVE

EJERCICIO 1

CONSTRUYE LA "M"

Sólo sigue las instrucciones:



1. En la línea de edición escribe:

```
eme(n) := VECTOR(VECTOR(IF(i + j = 2*n + 1 ^ i < n + 1, "*", IF(i = j ^ i < n + 1, "*", IF(j = 1, "*", IF(j = 2*n, "*", " ")))), j, 1, 2*n), i, 1, 2*n)
```

2. Luego, damos el tamaño a la matriz (n):

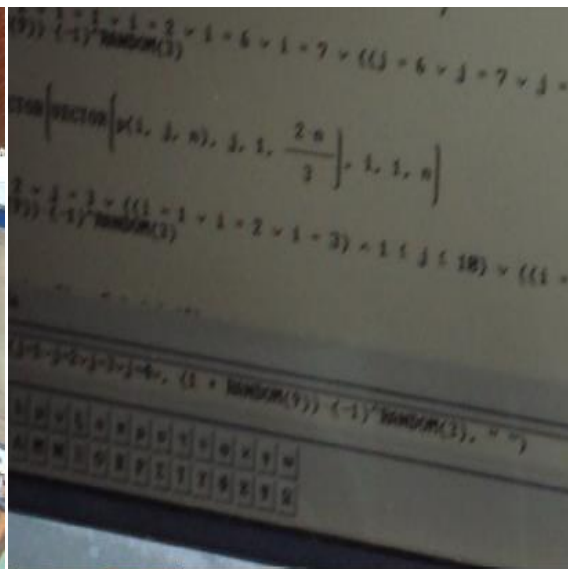
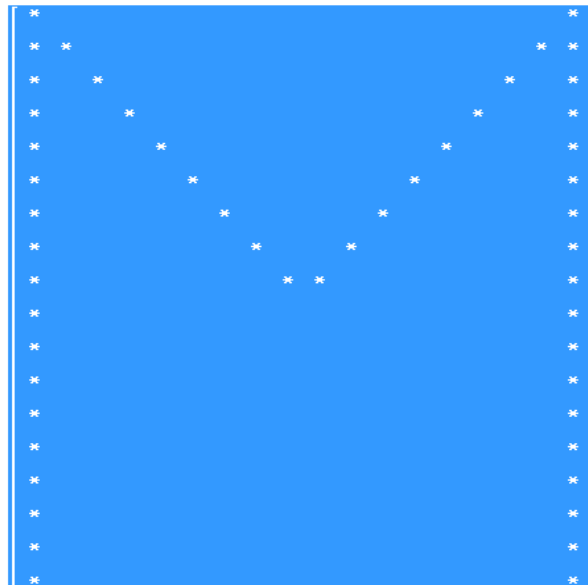
Ejemplo: `eme(9)`

y... observa qué pasa!....

Si haces bien el ejercicio obtendrás

```
#1: ene(n) := VECTOR(VECTOR(IF(i + j = 2·n + 1 ^ i < n + 1, *, IF(i = j ^ i < n + 1, *, IF(j = 1, *, IF(j = 2·n, *, )))))
#2: ene(9)
```

#3:



Estudiante trabajando en Derive

Inserta en la pantalla la función que se muestra a continuación y realiza los ejercicios propuestos:

The screenshot shows the Derive 5 software interface with the following content:

```

Derive 5 - [Álgebra 1]
Archivo Edición Insertar Editar (Autor) Simplificar Resolver Cálculo Definir Opciones Ventana Ayuda
[Icons for file operations and mathematical symbols]
#1: ene(n) := VECTOR(VECTOR(IF(i + j = 2·n + 1 ^ i < n + 1, *, IF(i = j ^ i < n + 1, *, IF(j = 1, *, IF(j = 2·n, *, )))), j, 1, 2·n), i, 1, 2·n)
#2: ene(9)
#3: ene(3)
#4: ene(7)
#5: ene(4)
#6: ene(2)
    
```

EJERCICIO 2.

Descubre las letras que se construyen a partir de las siguientes funciones, las cuales debes insertar en el programa Derive:

```

*****
CONSTRUCCION DE LETRAS, A PARTIR DE MATRICES ESPECIALES
*****
a(i, j) :=
VECTOR(VECTOR(a(i, j), j, 1, n), i, 1, n)
RANDOM(3)
RANDOM(9)·(-1)
    
```

Ahora inserta una a una las siguientes funciones:

```

A(i, j, n) :=
  If i + j = n - 7 ∨ i + j = n - 6 ∨ i + j = n - 5 ∨ i = j - 3 ∨ i = j - 4 ∨ i = j - 5 ∨ i = 6 ∨ i = 7 ∨ ((j = 1 ∨ j = 2 ∨ j = 8 ∨ j = 9) ∧ 4 ≤ i ≤ 12)
  (1 + RANDOM(9))·(-1)^RANDOM(3)

letra_a(n) := VECTOR(VECTOR(A(i, j, n), j, 1,  $\frac{3 \cdot n}{4}$ ), i, 1, n)

lab(i, j, n) :=
  If j = 9 ∨ j = 11 ∨ j = 10 ∨ i = 1 ∨ i = 2 ∨ i = 11 ∨ i = 10 ∨ (i = 10 ∧ 2 ≤ i ≤ 8) ∨ (2 ≤ j ≤ 5 ∧ 9 ≥ j) ∨ i = n/2 ∨ (i = 6 ∧ 6 ≤ j ≤ 8)
  (1 + RANDOM(9))·(-1)^RANDOM(3)

letra_lab(n) := VECTOR(VECTOR(lab(i, j, n), j, 1, n), i, 1, n)

s(i, j, n) :=
  If i = 1 ∨ i = 2 ∨ i = 3 ∨ j = n/2 - 1 ∨ j = n/2 ∨ j = n/2 + 1
  (1 + RANDOM(9))·(-1)^RANDOM(3)

c(i, j, n) :=
  If j = 1 ∨ j = 2 ∨ j = 3 ∨ i = 1 ∨ i = 2 ∨ i = 3 ∨ i = 12 ∨ i = 11 ∨ i = 10
  (1 + RANDOM(9))·(-1)^RANDOM(3)

letra_c(n) := VECTOR(VECTOR(c(i, j, n), j, 1,  $\frac{2 \cdot n}{3}$ ), i, 1, n)

letra(i, j, n) :=

```

Ahora introduce los ejemplos y da click sobre cada uno:

letra_a(12)

letra_lab(11)

letra_c(12)

