Diseño de una estrategia didáctica para la enseñanza de la factorización utilizando geometría, para los cursos básicos de matemáticas en el primer semestre universitario.

Luz Stella Botero Ramírez

Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
2014

Diseño de una estrategia didáctica para la enseñanza de la factorización utilizando geometría, para los cursos básicos de matemáticas en el primer semestre universitario.

Luz Stella Botero Ramírez

Documento presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

M.Sc. Fernando Puerta Ortíz

Línea de Investigación:

Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Colombia
Sede Medellín
2014

A mis hijas Manuela y Laura,
Mi esposo Raúl
Mi madre Stella
Ellos con su paciencia, colaboración, palabras de aliento, abrazos, cariño y todo su apoyo hicieron realidad este proyecto.

A mi padre, que aunque no esté conmigo, siempre apoyó mis proyectos, sueños y metas.

Agradecimientos

Al profesor Fernando Puerta O. mil y mil gracias por sus valiosos aportes en este proceso, no solo en esta monografía sino en el desarrollo de mi maestría.

A mis profesores, que hicieron posible hacer realidad este nuevo sueño.

A mis compañeros, por haber hecho de esta una experiencia gratificante.

Por último quiero agradecer al profesor Alberto Jaramillo de la Universidad de Antioquia, por sus sugerencias para terminar con éxito esta maestría.

Resumen

La factorización es tal vez uno de los temas fundamentales en el álgebra básica; entender este tema facilita en gran medida la asimilación de otros más avanzados. En los cursos básicos universitarios de matemáticas se ha detectado grandes deficiencias en esta área, debido tal vez a la poca unificación de procesos, a la interpretación ó al análisis de situaciones problema, evidenciando la dificultad que el estudiante tiene para asimilar el lenguaje matemático y que pueda incorporarlo a su estructura cognitiva para luego aplicarlo en todas las áreas del conocimiento.

En este trabajo desarrollamos una estrategia didáctica en pro de dar solución al problema planteado, al integrar elementos de la geometría a la factorización para dar solución a ecuaciones lineales y cuadráticas. Las estrategias didácticas planteadas buscan motivar al estudiante para mejorar la comprensión y asimilación de estos conceptos que en su etapa escolar se aprenden de forma memorística y no deductiva.

Palabras claves: lenguaje matemático, estrategia, aprendizaje significativo, unidad didáctica, enseñanza para la comprensión.

Abstract

Factoring is perhaps one of the key issues in basic algebra; understand this issue greatly facilitates the assimilation of other more advanced. In university foundation courses in mathematics has major shortcomings in this area, perhaps due to the lack unification process, interpretation or analysis of problem situations, demonstrating the difficulties the student has to assimilate mathematical language and that incorporate his cognitive structure to later apply in all areas of knowledge.

In this paper a teaching strategy for resolving the problem posed by integrating elements of geometry factorization is proposed to allow the student a significant learning of the concept because in his school years you learn by rote and not deductive.

Keywords: mathematical language, strategy, meaningful learning, teaching unit, teaching for understanding.

Contenido

Introducción

La enseñanza del álgebra históricamente ha estado acompañada de dificultades tanto cognitivas como actitudinales, puede ser debido a falencias en aritmética o por ser considerada difícil, además del manejo de las variables de forma aritmética; esto hace que en ocasiones apreciar el lenguaje algebraico no sea fácil, dicho lenguaje es un elemento dinamizador del lenguaje de las matemáticas y del verdadero valor y significado de las variables y expresiones equivalentes. En nuestro sistema educativo el álgebra se ha descontextualizado. Como consecuencia, nuestros estudiantes memorizan fórmulas pero no interiorizan ni comprenden el verdadero significado, las relaciones existentes y la gran aplicabilidad que posee.

La factorización de expresiones polinómicas genera una visión más amplia para la producción y reconocimiento de expresiones que son equivalentes. Esto conlleva a mejorar la habilidad y desempeño para la comprensión del tema. Esta comprensión será asimilada cuando el estudiante pueda de forma natural manipular expresiones, reconocer propiedades de igualdad y de expresiones que las simplifiquen. Se deben evidenciar las relaciones entre los conceptos involucrados y las diversas representaciones que se puedan dar, es decir, clarificar la relación entre los factores y los resultados que se dan en un proceso de factorización y sus aplicaciones.

Como el aprendizaje es un proceso continuo y con base en las nuevas tecnologías, las concepciones sobre el aprendizaje y las estrategias de enseñanza, éste debe ser construido por el estudiante, dándose así un aprendizaje significativo y activo, generando en él intereses y necesidades enfocadas en una mejor asimilación de estos temas.

Se debe en consecuencia plantear una estrategia de enseñanza y aprendizaje donde el estudiante sea favorecedor y creador del conocimiento; donde el papel del docente pase a ser solo de orientador, que pueda identificar las necesidades y ser un impulsador en el proceso.

Pretendemos entonces un cambio, donde el estudiante se convierta en protagonista de su propio aprendizaje, logrando identificar las diferencias en que ellos interiorizan dicho aprendizaje.

En los estándares en Matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional se plantea una educación por competencias, buscando que el estudiante asuma una posición crítica y dinamizadora en el proceso. Partiendo de este punto y considerando las dificultades cognitivas, se presenta una propuesta diferente ya que tradicionalmente estos temas de factorización no se abordan desde el enfoque geométrico.

Es por esto que queremos implementar esta propuesta para fortalecer las capacidades que no se habían logrado por el método que tradicionalmente se venía trabajando y que evidencia la poca comprensión algebraica en los estudiantes.

1. Descripción del problema y objetivos

1.1 Planteamiento del problema

En el estudio del álgebra tanto en la educación secundaria como en los cursos básicos de algunas carreras universitarias se detecta el problema del manejo del lenguaje simbólico propio de esta disciplina. En ocasiones los estudiantes en secundaria manejan mínimamente estos temas y no se usan herramientas alternas como la representación gráfica que permite la visualización de algunos procesos para resolver problemas que involucran polinomios y su factorización.

Esta propuesta tiene la finalidad de diseñar e implementar una estrategia didáctica para la enseñanza de los temas de factorización utilizando geometría para ser implementada en los cursos básicos de Matemáticas del primer semestre en las diferentes carreras universitarias.

Con esta estrategia didáctica, se busca que los estudiantes comprendan mejor las expresiones racionales que serán aplicadas en cursos posteriores; todo esto se desarrollará a través de la geometría.

En la historia de la matemática y especialmente en el álgebra geométrica podemos encontrar recursos didácticos que permiten visualizar la factorización de polinomios cuadráticos que poseen raíces enteras, para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje en la resolución de problemas que involucran polinomios y ecuaciones.

El conocimiento algebraico es indispensable por su aplicabilidad en diferentes ciencias, por ello se hace necesaria su apropiación para la construcción de modelos y la estructuración de razonamientos. Este conocimiento se inicia en los primeros años escolares con la aritmética y se fortalece en la educación básica con el álgebra, pues es a partir de allí que se cimientan las bases de todo el quehacer matemático. A partir de este proceso de factorización por medio de la geometría, como recurso didáctico, se espera que se puedan mejorar los procesos de enseñanza aprendizaje.

1.2 La pregunta

¿Cómo diseño una estrategia didáctica que facilite el aprendizaje significativo del estudiante en los primeros niveles de la educación universitaria, en conceptos de factorización utilizando la geometría?

1.3 El contexto

Las actuales tendencias educativas apuntan a que sea el estudiante el encargado de la construcción de su propio conocimiento y promueven la investigación para despertar en ellos la curiosidad, el pensamiento crítico, la construcción de hipótesis, entre otras.

En la enseñanza de las ciencias la parte experimental juega un papel muy importante, pero en las matemáticas la experimentación en el aula de clase se ha visto relegada por la clase teórica y la experimentación proporciona al estudiante un pensamiento más crítico, permitiéndole formular hipótesis, comprobar la validez de resultados, dar generalizaciones de lo que observa, hacerse preguntas sobre lo que sucederá si se cambian algunos signos, variables, etc.

El Aprendizaje significativo de los conceptos aquí expuestos, se fundamenta en la utilización de los conceptos previos de los estudiantes adquiridos en su recorrido por el bachillerato, y en este caso, mediante el uso de geometría básica, obtener resultados clásicos del álgebra para la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Diseñar una estrategia didáctica para la factorización de polinomios a partir de la geometría, luego aplicar estos procedimientos para operar expresiones racionales en los cursos básicos de matemáticas en el primer semestre universitario.

1.4.2 Objetivos específicos

- Identificar y caracterizar estrategias para la enseñanza de las operaciones de factorización aplicadas a expresiones racionales; visualizar geométricamente las propiedades más relevantes que tienen estas operaciones y mostrar algunas aplicaciones de estas ideas.
- Identificar y caracterizar estrategias para la enseñanza de ecuaciones lineales y cuadráticas que se derivan de la factorización.
- Elaborar actividades para la apropiación de estos conceptos utilizando procedimientos geométricos, de forma que puedan aplicarse a la factorización de expresiones racionales, y lograr la generalización y planteamiento de nuevas situaciones.

2. Marco teórico

2.1 Referente pedagógico

Esta propuesta didáctica de aprendizaje estará apoyada en la Teoría de Aprendizaje Significativo de David Ausbel, en la enseñanza para la comprensión y la consideración de los lineamientos curriculares.

De las investigaciones realizadas previamente se ha observado un bajo aprovechamiento de los estudiantes en los temas de álgebra, como anteriormente se había argumentado. Una de las principales dificultades radica en la poca comprensión de los objetos y procedimientos algebraicos. Históricamente para el desarrollo de las matemáticas y en particular del álgebra, la geometría jugó un papel primordial en la construcción de conceptos, definiciones, significados, procedimientos y símbolos que permitieran dar solución a los problemas de la naturaleza. Es entonces en esa línea que trabajaremos para lograr un Aprendizaje Significativo en los estudiantes, de manera que relacionen su estructura cognitiva con el objeto a conocer y la forma de relacionarse con él, siendo conscientes de la dificultad que implica en algunas ocasiones llevarlo a la práctica.

La construcción de los conceptos y procedimientos algebraicos está muy relacionado. Duval (1998) afirma que:

> "… *estamos entonces en presencia de lo que se podría llamar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual y, por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos*".

Establece que, cuando se hace una representación de algo, esta es parcial con respecto al concepto, por ello hay que considerar totalmente necesaria la integración entre las diferentes representaciones del objeto matemático para su formación.

Es aquí donde se evidencia que la “matematización de un problema” (llevar del lenguaje común a símbolos matemáticos) juega un papel importante y la base es entender bien el enunciado con las diferentes representaciones de la situación planteada, permitiendo realizar una acción que probablemente conlleve a la solución del problema. Desde este punto de vista, es indispensable considerar las dificultades que se presentan en el manejo de las representaciones y analizar las tareas de conversión de estas representaciones que se van a proponer.

Facilitar la comprensión de conceptos ha sido, desde siempre, el fin de la enseñanza, uno de los objetivos de los docentes es enseñar para la comprensión. En la Universidad de Harvard se desarrolló el modelo “Enseñar para la comprensión”. Este modelo busca responder a las preguntas ¿Qué se debe enseñar? ¿qué es importante comprender? ¿cómo debemos enseñar para la comprensión? ¿Cómo los estudiantes y profesores pueden saber lo que el alumno entiende y cómo los alumnos pueden desarrollar una comprensión más profunda? Uno de los paradigmas actuales de la educación es el cambio de ser sólo transmisor de información a potenciar la comprensión y de incorporar nuevos alcances en lo que respecta a tecnología, pedagogía y contenidos.

2.1.1 La teoría del aprendizaje significativo de Ausubel

Un aprendizaje se considera significativo si los contenidos son relacionados de forma arbitraria y sustancial, es decir, no asimilados al pie de la letra e incorporarlos a su estructura cognitiva, es decir, a lo que el estudiante ya sabe. Para Ausbel el auténtico aprendizaje ocurre cuando el individuo le da significado a lo que se aprende.

En el proceso educativo hay que considerar en primer lugar que el estudiante llega al aula con conocimientos previos y lo que se le enseñe lo debe relacionar con sus ideas previas. Este proceso se puede dar si el estudiante tiene en su estructura cognitiva conceptos como ideas y proposiciones que permitan que las nuevas ideas que se pretenden introducir a su nuevo conocimiento pueda interactuar con las que tenía previamente.

Decimos entonces que se da un aprendizaje significativo si logramos que la nueva información se "conecte" a su estructura cognitiva y eso es lo que pretendemos ya que la adquisición de significado ha sido y seguirá siendo tema de interés de numerosos teóricos para comprender la forma como estos se combinan con su estructura cognitiva. Se trabaja entonces la Teoría de Aprendizaje Significativo de David Ausbel (1978).

Esta teoría puede resumirse, según lo expresado por el propio Ausbel (2002), así:

> "*El conocimiento es significativo por definición. Es el producto significativo de un proceso psicológico cognitivo ('conocer') que supone la interacción entre unas ideas 'lógicamente' (culturalmente) significativas, unas ideas de fondo ('de anclaje') pertinentes en la estructura cognitiva (o en la estructura del conocimiento) de la persona concreta que aprende y la 'actitud' mental de esta persona en relación con el aprendizaje significativo o la adquisición y retención de conocimientos*".

Para que se pueda dar un aprendizaje significativo requiere no solo de una actitud hacia dicho aprendizaje sino también de un material que sea altamente significativo; es por ello que la interacción entre las ideas de su estructura cognoscitiva y los nuevos significados es lo que facilita la adquisición de nuevos significados. Hay que tener claro que la estructura cognitiva de cada alumno es diferente y por ello los significados que cada uno le da a las ideas es único en sí mismo.

Cuando hablamos de aprendizaje significativo hay que tener muy claro que la interacción entre el concepto nuevo y su estructura cognitiva se denomina *subsumidor*, es decir, aquellas ideas, proposiciones o conceptos que sirven de "anclaje" para la información nueva, a partir de ello Moreira (2006, p.15) argumenta que:

> *"[…] El Aprendizaje Significativo se produce cuando la nueva información "se ancla" en conceptos relevantes (subsumidores) preexistentes en la estructura cognitiva".*

El Aprendizaje significativo entonces se caracteriza por la interacción entre aspectos específicos y relevantes de su estructura cognitiva con las informaciones nuevas que van adquiriendo significados y formarán parte de su estructura cognitiva, esto es posible realizando diferenciación, elaboración de aquellos conocimientos previos "subsumidores" y por tanto de la propia estructura cognitiva.

Ausbel diferencia tres tipos de aprendizaje significativo, que son

- **El aprendizaje representacional.** Es el más básico de los aprendizajes y de él dependen los demás, consiste en darle significado a diversos símbolos, ellos pueden ser verbales o escritos.

- **El aprendizaje de conceptos.** Es de cierta manera representacional. Para Ausbel (1978, p.86), los conceptos los define como

  > "*objetos, eventos, situaciones o propiedades que poseen atributos criteriales comunes y se designan, en una culturalidad, por algún signo o símbolo aceptado*".

  Estableciendo una equivalencia entre el símbolo y un referente, es decir los atributos del objeto.

- **El aprendizaje proposicional.** Contrario al representacional, es aprender el significado de las ideas en forma de proposición, es decir, aprender el significado de la ideas que se expresan verbalmente, a través de conceptos, en forma de una proposición.

Cuando se realizan indagaciones conceptuales se pueden identificar que en la estructura cognitiva existe un orden jerárquico para que se dé el aprendizaje significativo:

Aprendizaje subordinado. Cuando el nuevo conocimiento es asociado y ampliado por la estructura cognitiva, puede ser subordinado derivativo, si el nuevo conocimiento se asimila por comparación de algo que se conoce y es subordinado correlativo cuando se aprende por elaboración o modificación de conceptos o proposiciones aprendidas previamente, agregándole atributos que permitan ampliar los conceptos.

Aprendizaje superordenado. Cuando la nueva información es más general que la idea que el estudiante tenía en su estructura cognitiva y va de lo particular a lo general.

Aprendizaje combinatorio. La nueva información es potencialmente significativa por ser relacionable con la estructura cognitiva como un todo.

En la programación y el desarrollo del contenido de cualquier disciplina encaminada a lograr aprendizajes significativos en los alumnos debe tenerse en cuenta cuatro principios.

1. **Diferenciación progresiva.** Es el proceso de interacción y anclaje de un concepto subsumidor; puede modificarse una o varias veces, y cuando esto sucede, se da lo que denominamos diferenciación progresiva. Este proceso está generalmente en el aprendizaje subordinado, en especial el correlativo, en el que los conceptos “subsumidores” están siendo continuamente re-elaborados, modificados, es decir, adquiriendo nuevos significados.

2. **Reconciliación integradora.** Cuando se trata de nuevas ideas o conocimientos, la discriminación de los “subsumidores” es más compleja y el alumno debe establecer reconciliaciones, combinar o recombinar elementos previos ya existentes.

3. **Organización secuencial.** Se refiere al orden secuencial de los contenidos, basándose en los materiales el estudiado y el aprendido previamente, lo cual justifica plenamente una organización curricular secuencial. Es necesario respetar las relaciones naturales de dependencia en el contenido.

4. **Consolidación.** Para lograr la generalización, interiorización efectiva y significativa, es preciso, enfatizar en la reiteración, y la realización de tareas en contextos y momentos diferentes. Este proceso en ocasiones se debe realizar varias veces por el profesor en aras de un buen entendimiento.

Ausbel propone organizadores previos como medio para maniobrar conocimientos previos y facilitar el aprendizaje, estos se implementan en sus principios programáticos como son la diferenciación progresiva y la reconciliación integradora.

2.1.2 La Enseñanza para la comprensión

La nueva tendencia ha sido trabajada por la Doctora Martha Stone Wiske. Ella plantea que a raíz de los cambios tecnológicos que han generado cambios en cómo nos relacionamos y lo que somos, las tecnologías de la información han crecido enormemente en los últimos 5 años y han transformado la economía, la política y la sociedad. Esta nueva cultura define el conocimiento como una sustancia que se origina entre las personas, se construye socialmente y se aprende es por las interacciones.

En este aspecto de construir conocimientos, se muestra a los profesores como aquellos que generan la indagación productiva, esto es lo que siempre buscamos aunque en ocasiones no de manera consciente "lo que necesitamos con el fin de hacer lo que queremos hacer" (Dewey 1922). Necesitamos preparar a nuestros estudiantes para una economía diferente, potenciando la colaboración, innovación, creatividad y pensamiento crítico.

En la pedagogía para la comprensión se hace necesario tener un marco conceptual definido de forma que se pueda guiar y plantear preguntas claves para un buen desarrollo del proceso, estas preguntas son:

- ¿Qué tópicos valen la pena comprender?
- ¿Qué aspectos de esos tópicos deben ser comprendidos?
- ¿Cómo podemos promover la comprensión?
- ¿Cómo podemos averiguar lo que comprenden los alumnos?

Se responden estas preguntas con base en cuatro elementos: los tópicos generativos, las metas de comprensión, el desempeño de la comprensión y una evaluación diagnóstica continua; estos elementos están orientados a guiar el proceso de aprendizaje.

Para un buen desarrollo de dichos procesos, estas temáticas se desarrollan así:

Tópicos generativos. Son los motivadores del aprendizaje, ya que son aquellos temas que el estudiante debe comprender.

Metas de comprensión. Definen lo que los estudiantes deben aprender, hasta dónde deben llegar, aquí están inmersos los procesos, ideas y relaciones que ayudan a una mejor comprensión.

Desempeños de comprensión. Capacidad de usar lo que se conoce en su interacción con el mundo, por ello es uno de los elementos centrales de la Educación para la comprensión.

Evaluación diagnóstica continua. Viene estrechamente relacionado con las metas para la comprensión, pues el conocimiento es continuo y progresa en la medida que constantemente se haga valoración de los avances del desempeño, es decir, siempre habrá una comparación en lo ya realizado y las metas a alcanzar.

Esta enseñanza para la comprensión es un trabajo complejo, ya que el docente dentro del aula se convierte en investigador en acción ya que debe analizar constantemente los cambios dentro del aula. Como lo mencionamos anteriormente, la Educación para la comprensión, apoya los desempeños de comprensión, la formulación de metas y la evaluación constante que permita mejorar las prácticas.

2.2 Marco disciplinar

Para realizar un análisis didáctico se deben determinar los organizadores del currículo, es decir, las herramientas teóricas y conceptuales que en conjunto facilitan un conocimiento didáctico. (Rico, 1997). Es decir, son aquellos conocimientos que son fundamentales para el diseño, desarrollo y evaluación de Unidades Didácticas (Rico y Segovia, 2001).

La factorización para un estudiante que ingresa a la universidad debe ser un tema natural y su manejo eficiente, pero en la actualidad nuestros estudiantes no están lo suficientemente preparados como para asumir que estos temas están en su estructura cognitiva, por ello es que presentamos esta unidad didáctica con el objetivo de presentar los conceptos de una forma notablemente más sencilla.

El origen del término geometría se remonta al antiguo Egipto, Sumeria y Babilonia, los primeros geómetras que eran empíricos, producto de la práctica, se centraron en la medida de predios agrarios y en la construcción de pirámides y monumentos por medio de medición de ángulos; en el siglo VI a.C. Pitágoras comenzó a demostrar diversas leyes arbitrarias e inconexas de la geometría empírica, deduciéndolas como conclusiones lógicas con un número limitado de axiomas o postulados.

Otro gran matemático griego fue Euclides que en el siglo III a.C. en su obra “Los Elementos”, recopila, ordena y sistematiza todos los conocimientos de geometría hasta su época. Lo hace con conceptos básicos no demostrables como son el punto, la recta, el plano y el espacio, los usa como punto de partida para las definiciones, axiomas y postulados, demuestra teoremas, y estos a su vez sirven para demostrar otros; crea nuevos conocimientos a partir de unos ya establecidos con base en razonamientos lógico-deductivos. Los griegos introdujeron los problemas de construcción con regla y compás.

Los primeros indicios que hoy conocemos como álgebra se encuentran en unas tablas de arcilla de la cultura babilónica, con un sistema numérico sexagesimal, operaciones aritméticas y solución de problemas algebraicos y geométricos, aproximadamente en el año 600 a.C. En dicha tabla se observan las convenciones que actualmente se usan para entender el sistema de numeración babilónica y su conversión al sistema decimal. Los problemas algebraicos, aparecen resueltos como “recetas” considerando casos particulares, asignándole el nombre de álgebra retórica. No se encuentra en las tablas una fórmula general, podían resolver ecuaciones cuadráticas pero sólo en algunos casos.

Los griegos por otra parte usaron las figuras geométricas para representar magnitudes, es decir, “los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones se realizan por medio de construcciones geométricas, el producto de dos números se convierte en áreas, la suma de ellos es la prolongación de segmentos, etc. Estas expresiones se les presentan actualmente a los estudiantes como casos de factorización y en muchas ocasiones como fórmulas terminadas, no permitiéndole la “construcción” de dichas fórmulas.

En el desarrollo de la propuesta didáctica que presentaremos, se usará la metodología de dar primero la expresión algebraica y luego su representación geométrica

Podemos mencionar otros trabajos como son los de Diofanto, considerado el más importante de los algebristas griegos de la época, ya que introdujo la simbología algebraica, utilizando abreviaciones de palabras para representar algunas nociones de álgebra. Su obra más importante está plasmada en un tratado de 13 libros del que sólo se conocen los primeros seis. En ellos se dan soluciones particulares, enteras o racionales a ecuaciones algebraicas determinadas o indeterminadas; trabaja las ternas pitagóricas, que se resolverían luego con el Teorema de Pitágoras.

Otro momento importante en la historia del álgebra corresponde a los musulmanes, que se extendían desde la India hasta España; el árabe era en aquella época el lenguaje internacional de las matemáticas, avanzando no solo en el álgebra sino también en la trigonometría. El más recordado de los matemáticos árabes de la época es Al-Kwarizmi ya que en su libros “Al-jabr wa´lmuqäbala”, aparece la palabra “al-jabr” (restauración del equilibrio mediante la transposición de términos), “muqäbal” (simplificación mediante la cancelación de términos), entre otros. De la palabra “al-jabr” es que se deriva la palabra álgebra. En este libro se expone uno de los métodos antiguos más usados para la resolución de ecuaciones de segundo grado que es el de completación de cuadrados. A pesar de que su nivel es más elemental que el de Diofanto y presenta menos simbología (escribe los números con palabras, en lugar de símbolos numéricos), está más cerca del álgebra elemental moderna por su desarrollo sistemático y la argumentación lógica de las premisas a la conclusión.

Otro momento en este recorrido histórico se da en el Renacimiento, con la invención de la imprenta, permitiendo la rápida difusión de las producciones matemáticas y científicas de la época, interesándose en conocer los procedimientos empleados por los antepasados para la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas. Francoise Viéte, es el primero en usar una vocal para representar lo que actualmente se conoce como parámetro y una consonante para representar una variable. Este cambio de lenguaje se denominó más tarde álgebra simbólica y fue la que permitió el desarrollo de la geometría analítica y posteriormente el cálculo infinitesimal.

En esta línea es que pretendemos trabajar y recoger el contexto histórico del álgebra para evidenciar la facilidad de asimilar los procesos de factorización desde una mirada algebraica, considerando la historia del álgebra como base para dicho desarrollo

Comenzaremos nuestro estudio con la factorización de polinomios.

2.2.1. Factorización

El proceso de factorizar no es otra cosa que escribir una expresión algebraica o número como un producto de varios objetos o términos más pequeños llamados factores.

En la civilización griega se dieron los primeros grandes talentos matemáticos sobresalientes, comenzando con Euclides de Alejandría (aprox. 300 a. de C.) en su ciudad que fue destruida tres veces (en 47 a. de C. por los romanos, en 392 por los cristianos, y finalmente en 640 por los musulmanes). Era el centro mundial de la ciencia, aunque por las guerras se disminuyó considerablemente la civilización, se dio un mejoramiento en la escritura árabe, ya que los escritores árabes tradujeron fragmentos de obras griegas aritméticas, iniciando una nueva investigación en matemáticas. Durante las cruzadas (1100-1300), los europeos descubrieron esta civilización; Cremona (1114-1187), Robert de Chester (s. XII), Leonardo de Pisa (alrededor de 1200), conocido como Fibonacci y Regiomontanus (alrededor de 1460) fueron los principales traductores y los primeros científicos de Europa Occidental.

En aquel tiempo, las matemáticas se separaban en álgebra y en geometría.

A Diofanto se le considera el inventor del algebra. Aunque es herencia de la antigüedad griega y oriental. El famoso libro Al-jabr wál muqabala escrita por Mohammed ben Musa Al-Khwarizmi (830 A.D) comienza por dar solución a ecuaciones cuadráticas. El manuscrito más viejo conocido data de 1342 y comienza con un ejemplo: considere la ecuación cuadrática:

$$x^2 + 10x = 39 \qquad (1)$$

Tal ecuación tiene una solución desconocida x y es llamada raíz (*dshidr* en árabe), palabra que al comienzo significó el lado de un cuadrado de superficie dada ("Una raíz es cualquier cantidad que debe ser multiplicada por sí misma", F. Rosen 1831, p.6).

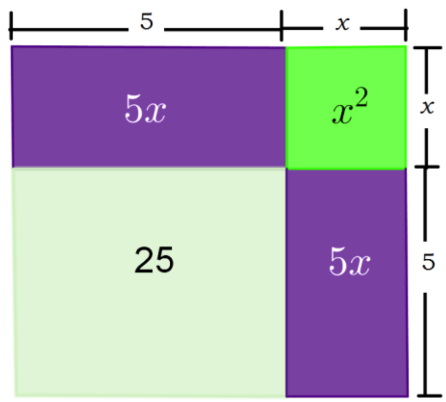


Figura 1

Al-Khwarizmi bosqueja un cuadrado de lado x para representar x^2 y dos rectángulos de lados 5 y x para el término $10x$. La ecuación (1) muestra que la región de morado y verde es $x^2 + 10x$, donde x es el lado de cada rectángulo, el otro lado es 5. Así que de la figura: $39 = x^2 + 10x$, y, $(x+5)^2 = 39 + 25$, luego $(x+5)^2 = 64 = 8^2$, por tanto $x+5=8$ ó $x+5=-8$ y como $x>0$ entonces $x=3$.

Analicemos un segundo ejemplo (de Al-Khwarizmi):

$$x^2 + 21 = 10x \qquad (2)$$

Para obtener su solución se bosqueja un cuadrado de x^2 unidades cuadradas y ligamos un rectángulo de ancho x y de longitud desconocida para el rectángulo de 21 unidades cuadradas como se muestra en la figura 2.

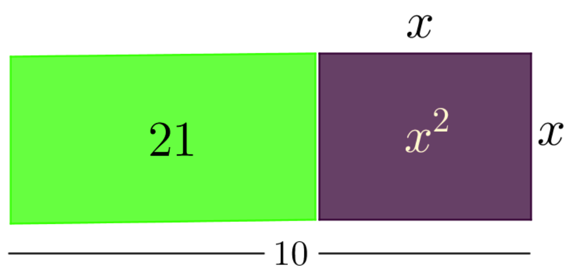


Figura 2

De (2) se infiere que el rectángulo total tiene de lado 10 unidades lineales. Se divide en dos rectángulos de igual área (Área B = Área $A+x^2$) como se muestra en la figura 3 y entonces Área A + Área $B=21$ unidades cuadradas.

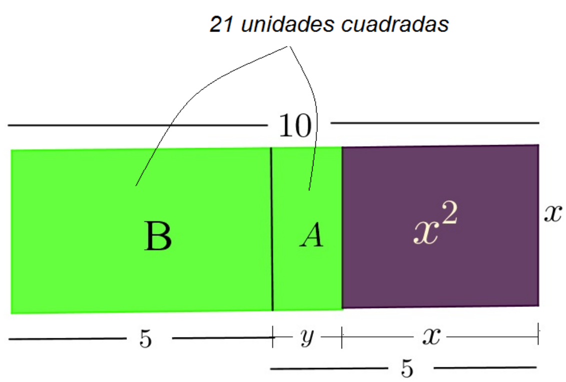


Figura 3

Agregamos el rectángulo A como en la figura 4 y “completamos” el rectángulo C tal que se forme un cuadrado de lado 5 (que es igual a $x+y$. Esto es: $5=x+y$). Entonces:

$$\text{Área } A + \text{Área } B + \text{Área } C = 5^2 = 25\,.$$

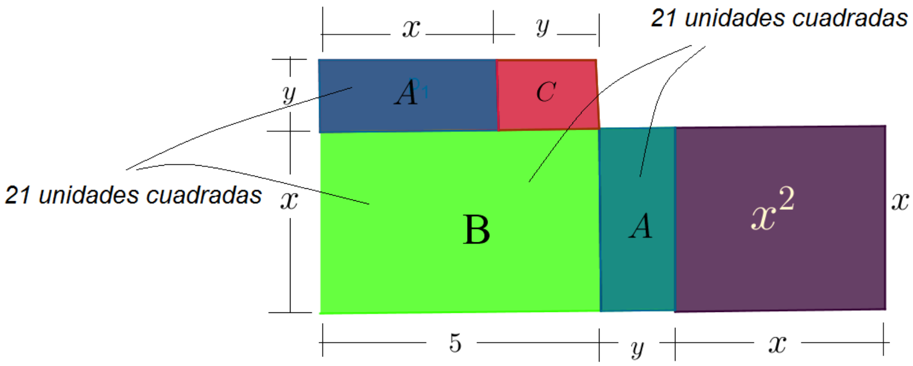


Figura 4

Entonces $21 + \text{Área } C = 25$, por tanto $\text{Área } C = 4$, pero $\text{Área } C = y^2$, $\therefore y = 2$, $\therefore x = 3$ pues $x + y = 5$.

En nuestra unidad didáctica pretendemos hacer este tema lo más simple posible. Utilizaremos el método usado por Al-Khwarizmi de forma geométrica usando cuadrados y rectángulos.

Describamos entonces las figuras que vamos a utilizar

Cuadrados de varios tamaños, inicialmente tres como se muestran en la figura 5.

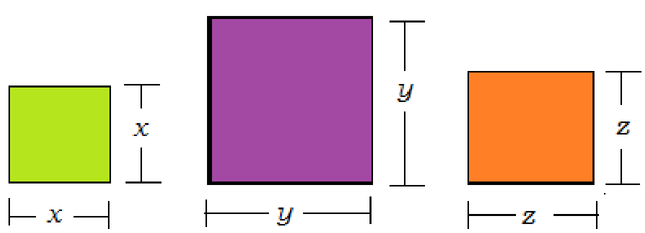


Figura 5

Rectángulos de varios tamaños como se muestran en la Figura 6

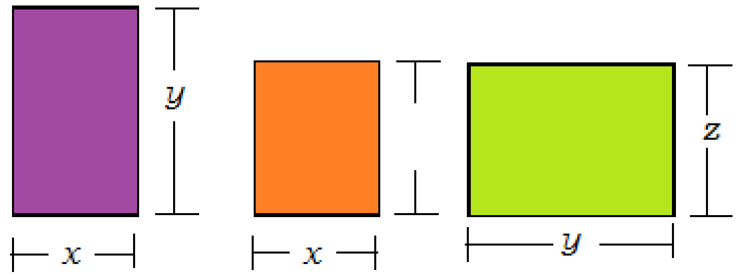


Figura 6

Las áreas de estas figuras son entonces: x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz respectivamente.

Con los primeros dos rectángulos y el cuadrado x^2, unirlos para que se forme un rectángulo como se ve en la figura 7:

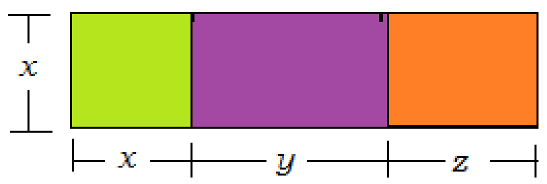


Figura 7

El área de este rectángulo es $x \cdot x + x \cdot y + x \cdot z$. Observemos que estos rectángulos comparten el ancho, es decir, un lado común que es “ x ” a esto se le llama **factor común**, lo sacamos y nos queda: $x(x + y + z)$ que es igual al área del rectángulo.

En conclusión, el factor común es aquello como su nombre lo indica que es común para todos los términos, entonces, si estamos trabajando con figuras obtenemos algo común a todas las figuras.

Si solo hay algo común en unas de las figuras, obtenemos otro caso, que es el **factor común por agrupación.**

Formar un rectángulo con las siguientes figuras; como se muestra en la figura 8

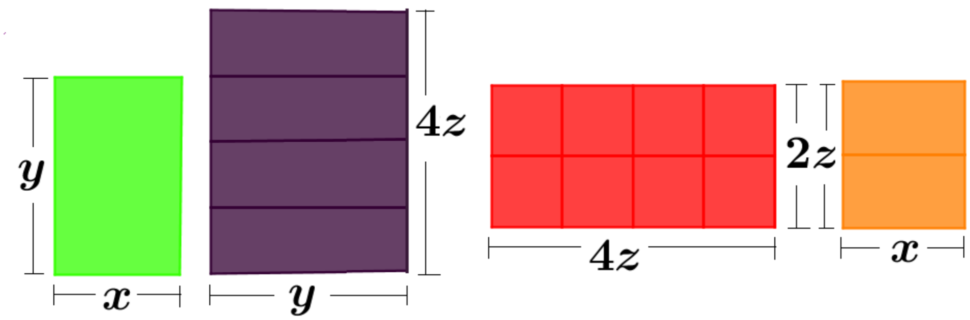


Figura 8

Observamos que no todas se pueden unir con un lado, entonces realizamos lo siguiente; como se muestra en la figura 9.

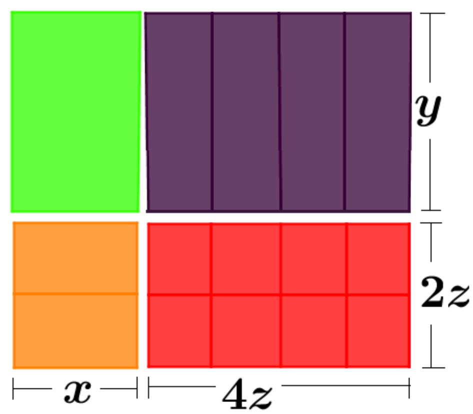


Figura 9

En las figuras superiores el factor común entre xy e $4yz$ es y; en las figuras inferiores el factor común entre $2xz$ y $8z$ es $2z$, se obtiene en este caso:

$xy + 4yz + 2xz + 8z^2$.

Debemos asociar los factores comunes

$(xy + 4yz) + (2xz + 8z^2)$.

Ahora sacamos el factor común en cada uno de los paréntesis

$y(x + 4z) + 2z(x + 4z)$.

Obtuvimos otro factor común que es $(x+4z)$

$(x+4z)(y+2z)$.

Esta es la factorización de la primera expresión.

Observemos que son precisamente los lados del rectángulo.

Para operar con estos rectángulos se hace necesario definir algunas operaciones:

Suma:

Consideremos entonces los siguientes rectángulos:

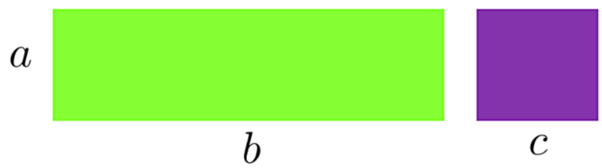


Figura 10

Si se quiere sumarlos ó adicionarlos, se deben pegar, como se muestra en la figura,

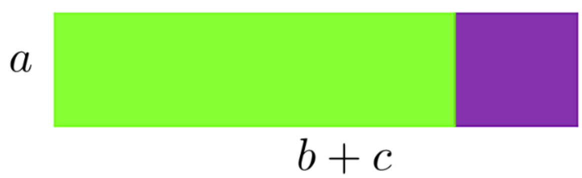


Figura 11

Obteniéndose entonces que el área del nuevo rectángulo es $ab+ac$ y como vimos anteriormente comparten un lado común, es decir, tienen un factor común, quedando la adición de la forma: $a(b+c)$.

Resta:

Consideremos ahora los siguientes rectángulos:

Figura 12

Queremos del primer rectángulo quitar el segundo, para ello debemos duplicar el primer rectángulo, obteniendo así los nuevos rectángulos:

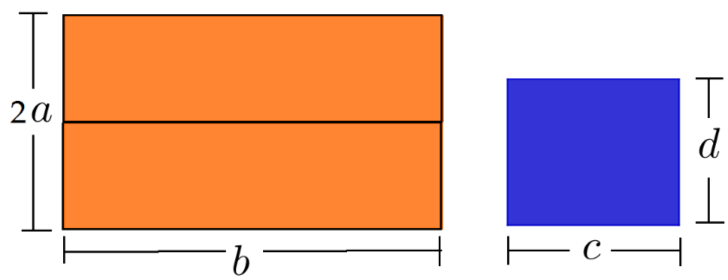


Figura 13

Para realizar la resta introducimos el rectángulo de la derecha en el que habíamos duplicado en el paso anterior, obteniendo el siguiente rectángulo, como se muestra en la figura 14.

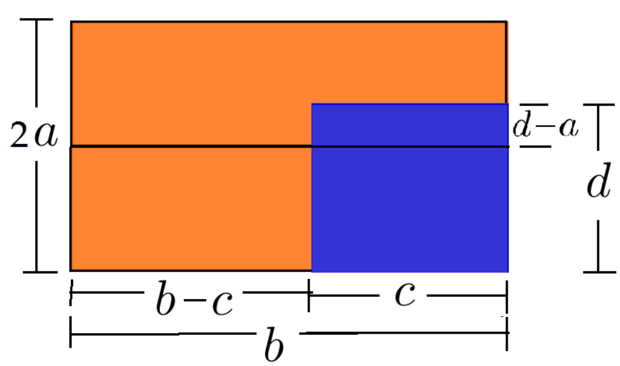


Figura 14

En la figura se tiene:

$$\begin{aligned} ab-cd &= a(b-c)+ca-[ca+(d-a)c] \\ &= a(b-c)-c(d-a) \end{aligned}$$

Cuando: $a=b$ y $c=d$, se obtiene

$$\begin{aligned} a^2-c^2 &= a(a-c)-c(c-a) \\ &= (a-c)+c(a-c) \\ &= (a-c)(a+c) \end{aligned}$$

Por tanto $a^2-c^2=(a-c)(a+c)$ Esto es la **diferencia de cuadrados**.

Al igual que las operaciones entre números reales podemos también realizar la multiplicación de la siguiente forma:

Con trinomios:

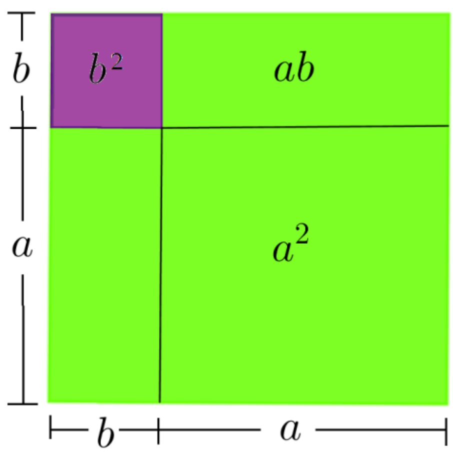


Figura 15

Del cuadrado de la figura 15 se tiene que:

$$(a+b)(a+b)=a^2+b^2+ab+ab$$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, que es un Trinomio Cuadrado Perfecto.

Producto de binomios:

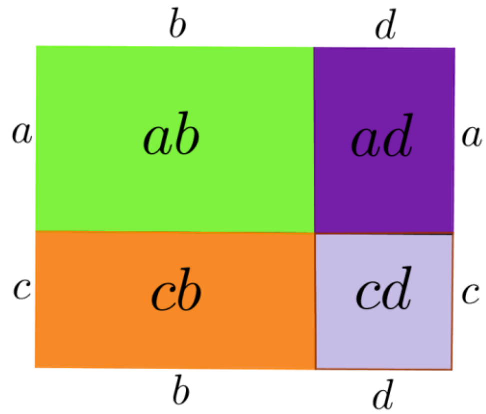


Figura 16

De la figura 16 se desprende: $ab+ad+cb+cd=(a+c)(b+d)$

Si se tienen cuadrados, es decir, $a=b$ y $c=d$, obtenemos:

$$a^2+ac+ac+c^2=(a+c)(a+c)$$

$$a^2+2ac+c^2=(a+c)^2$$

Para factorizar $1-q^n$, donde q es tal que $0<q<1$, consideremos el triángulo rectángulo de altura 1 y como se muestra en la figura:

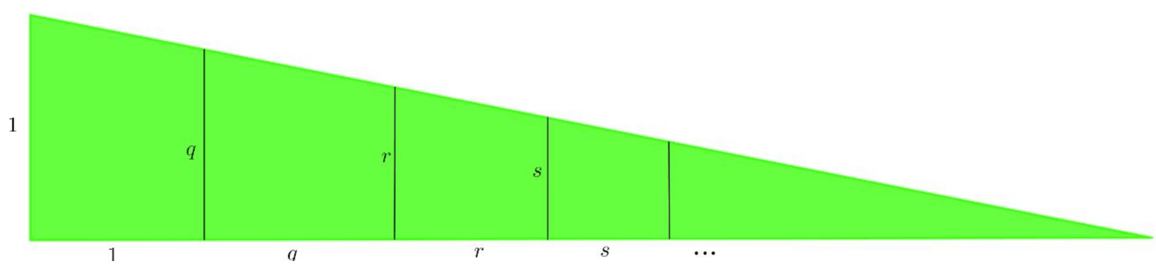


Figura 17

Para hallar los segmentos paralelos entre sí, y perpendiculares al cateto base que se construyen como está en la figura 18 utilizaremos semejanza de triángulos:

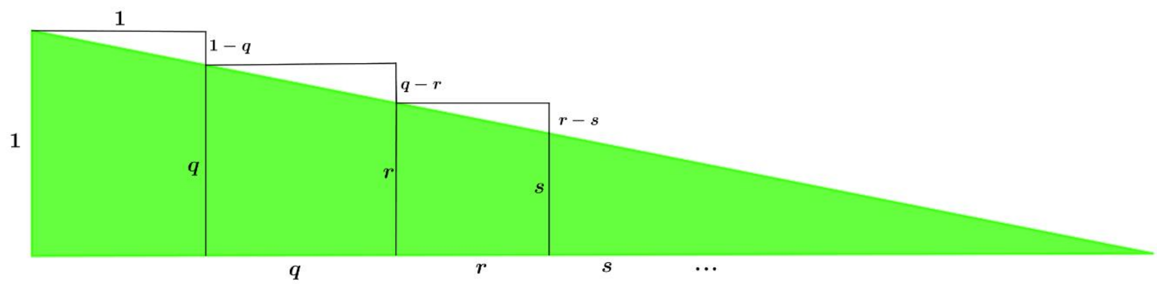


Figura 18

Consideremos ahora los triángulos azules. Por semejanza de triángulos, en la figura 19 tenemos:

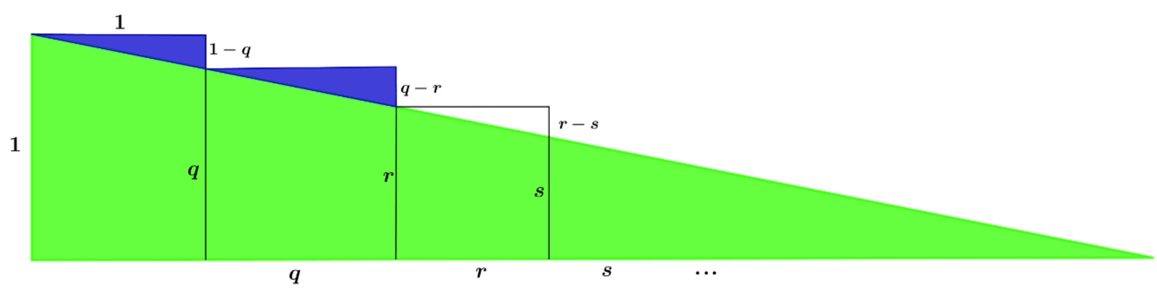


Figura 19

$\frac{1-q}{1}=\frac{q-r}{q}$, luego $1-q=1-\frac{r}{q}$ y $\frac{r}{q}=q$

Por tanto se tiene que $r=q^2$.

Observemos ahora los triángulos morados en la figura 20, similarmente al anterior por semejanza de ellos se tiene:

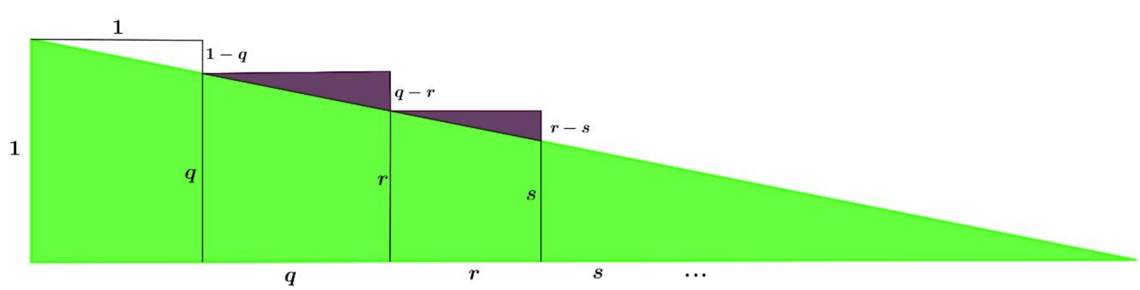


Figura 20

$\frac{q-r}{q}=\frac{r-s}{r}$ luego $1-\frac{r}{q}=1-\frac{s}{r}$ y $\frac{r^2}{q}=s$.

Habíamos obtenido en los triángulos anteriores que $r = q^2$, reemplazando obtenemos que: $\frac{q^4}{q} = s$, por tanto se tiene que $s = q^3$.

Obteniendo los valores en el triángulo de la figura 21.

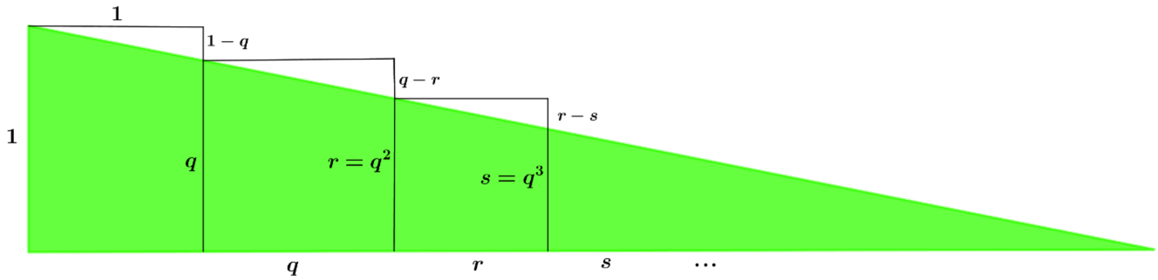


Figura 21

De esta forma se sigue y en la partición n-ésima, se tiene como lo indica la figura 22:

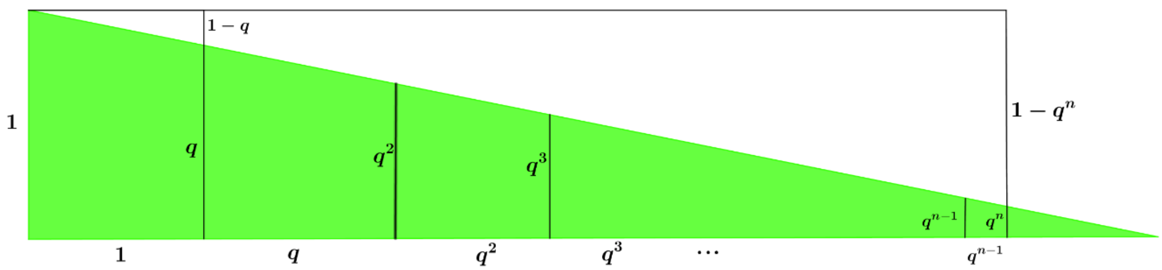


Figura 22

Nuevamente por semejanza de triángulos entre el primero que habíamos trabajado de lados 1 y $1-q$ y el otro de lados $(1+q+q^2+q^3+q^4+\cdots+q^{n-1})$ y $1-q^n$ como se muestra en la figura, se obtiene que:

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1+q+q^2+q^3+q^4+\cdots+q^{n-1}}{1-q^n}$$

Por tanto

$$1-q^n = (1-q)(1+q+q^2+q^3+q^4+\cdots+q^{n-1})$$

Si queremos factorizar ahora $a^n - b^n$ (donde $b < a$) se puede reescribir de la forma $a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$; así podemos aplicar el procedimiento anterior realizando el cambio de variable $q = \frac{b}{a}$.

De esta forma podemos afirmar que:

$$a^n - b^n = a^n\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^3+\cdots+\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}\right)$$

$$= a\left(1-\frac{b}{a}\right)a^{n-1}\left(1+\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\cdots+\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right)$$

$$= (a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

La factorización relaciona operaciones como la multiplicación y la división, facilitándonos el trabajo para resolver ecuaciones. Estas ecuaciones pueden ser lineales, cuadráticas o de grado superior. Veremos algunos métodos usados antiguamente para resolver ecuaciones lineales.

Ahora se puede trabajar también los cubos, consideremos entonces el cubo de la figura 23 de lado $(a+b)$.

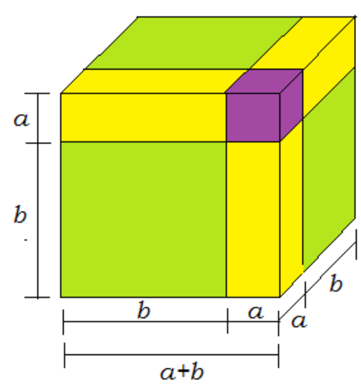


Figura 23

Dicho cubo está conformado por las figuras:

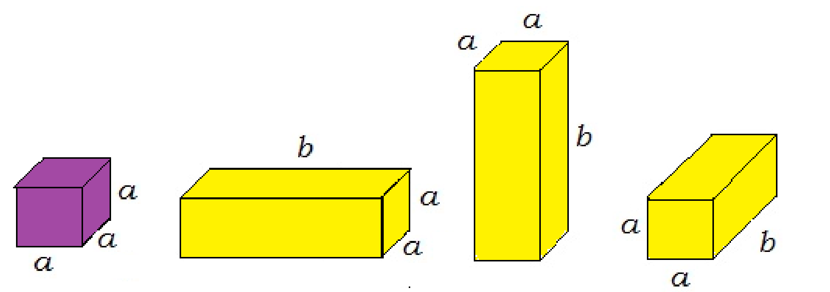


Figura 24

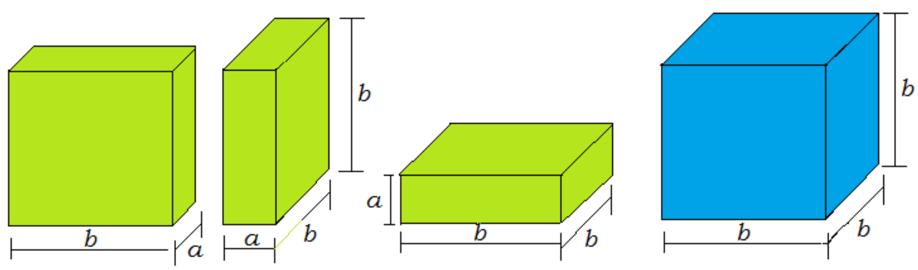


Figura 25

De volúmenes a^3 (figura morada), a^2b (figuras amarillas), ab^2 (figuras verdes) y b^3 (figura azul).

Uniendo todas estas figuras se obtiene el cubo de lado $(a+b)$, es decir, que el volumen de este cubo es:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Este sería entonces la suma al cubo, otro caso de factorización.
De forma similar se tiene la diferencia al cubo, se puede trabajar con los estudiantes, para que ellos deduzcan cómo resolverlo:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Para mostrar la suma y diferencia de cubos, se hace también trabajando con cubos. Para el caso de la diferencia de cubos, utilizamos el cubo mostrado en la figura 26,

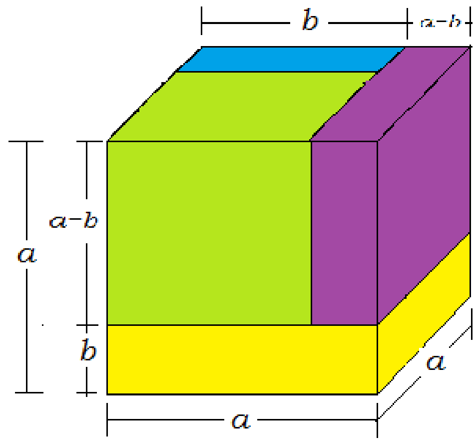


Figura 26

Vemos que el lado es a y hay otro cubo de lado b (verde), se le pide al estudiante que analice bien los cubos que se tienen y deduzca la fórmula de la diferencia de cubos que es:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Este material se trabaja con el estudiante para que analice muy bien los resultados obtenidos.

De forma similar se obtiene la fórmula para la suma de cubos:

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

De esta forma dimos un recorrido por la factorización usando la geometría, pasemos ahora a la solución de ecuaciones usando figuras planas.

2.2.2. La ecuación Lineal

Tablero de ecuaciones

Consideremos primero el Tablero de Ecuaciones. Este método consiste como su nombre lo indica de un tablero dividido en dos partes iguales, donde cada uno representa un lado de la ecuación. Para trabajarlo tomamos figuras (fichas) de dos formas diferentes, pueden ser cuadrados y círculos. Las cuadradas representan la incógnita, llamémosla en nuestro caso (x) y las circulares representan la unidad (1). A cada ficha se le coloca por un lado el signo positivo $(+)$ y por el otro lado el signo negativo $(-)$. Los valores de las figuras están representados en el siguiente cuadro, de la figura 27.

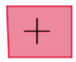
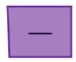
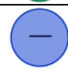
Ficha	Valor
	x
	$-x$
	1
	-1

Figura 27

Para resolver algunas ecuaciones lineales del tipo $ax+b=cx+d$ (con a,b,c y d números enteros) para que la ecuación no varíe, se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

1. En cada lado del tablero se le puede adicionar el mismo número de fichas de la misma forma y con el mismo signo.
2. Dos fichas de la misma forma y distinto signo en un mismo lado del tablero se pueden quitar del tablero, ya que se anulan (ó cancelan).
3. A ambos lados del tablero se pueden quitar fichas de la misma forma y con el mismo signo.

Veamos cómo resolver la ecuación $3x-2=4x+3$ en el tablero de ecuaciones.

1. Lo primero que debemos hacer es ubicar las fichas así, como se indica en la figura 28.

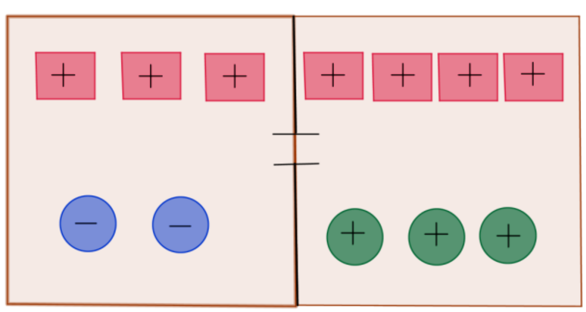


Figura 28

2. Eliminamos los números de un lado del tablero, es decir, dejamos en ese lado sólo incógnitas y en el otro lado solo números. En nuestro ejemplo debemos añadir 3 incógnitas negativas y 3 unidades negativas, se obtiene entonces en el tablero lo siguiente, como se muestra en la figura 29.

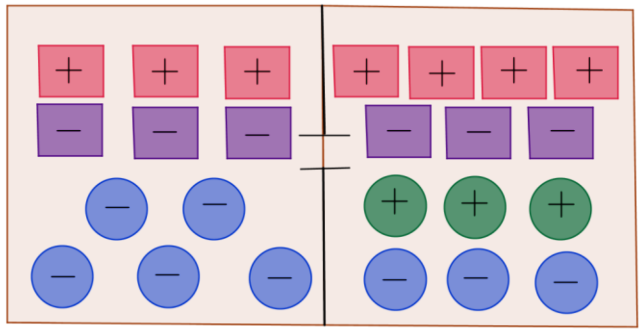


Figura 29

3. Con las reglas anteriores se tiene, figura 30:

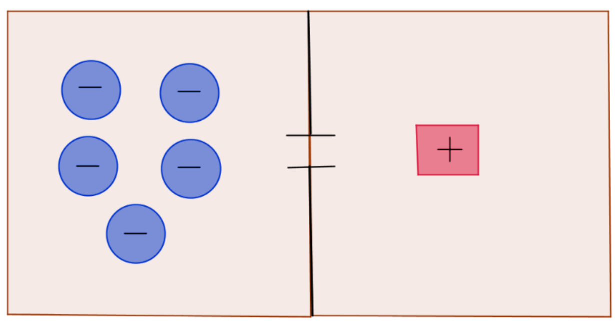


Figura 30

4. La solución de la ecuación es entonces:

$$x = -5$$

La balanza de Orlov.

Otro material didáctico útil es la "balanza de Orlov". Permite también la resolución de algunas ecuaciones de primer grado con una incógnita y es mejor que el tablero de ecuaciones.

La estructura consta de tres balanzas, una que es la principal y a ella van unidas dos que llamamos las auxiliares, estas se unen y forman un sistema. Esta balanza posee cuatro platos llamados p_1, p_2, p_3 y p_4 como se muestra en la figura 31.

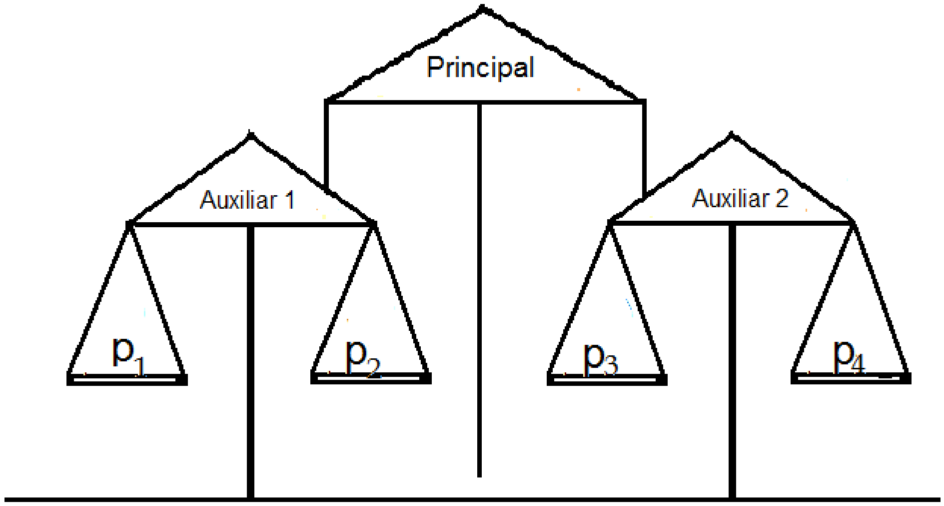


Figura 31

El funcionamiento de la balanza es el siguiente:

Si se coloca peso en el primer plato (p1), la balanza principal se mueve en el siguiente sentido (Figura 32):

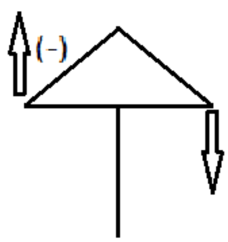


Figura 32

Entonces p1 queda con signo (-).

Si se coloca peso en el segundo plato (p2), la balanza principal se mueve en el siguiente sentido (figura 33):

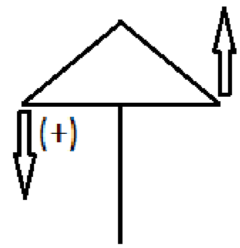


Figura 33

En este caso, p2 queda con signo (+).

Si se coloca peso en el tercer plato (p3), la balanza principal se mueve como se muestra en la figura 34:

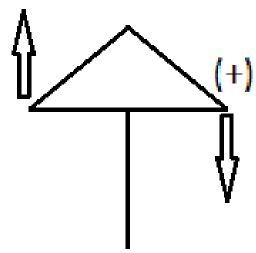


Figura 34

Para este caso, p3 queda con signo (+).

Y por último, si se coloca peso en el cuarto plato (p4), la balanza principal se mueve en el siguiente sentido (figura 35):

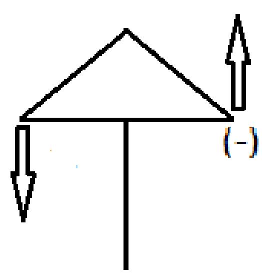


Figura 35

En este caso, p4 queda con signo (-).

Con estas convenciones, el sistema completo queda representado de la siguiente forma (Figura 36):

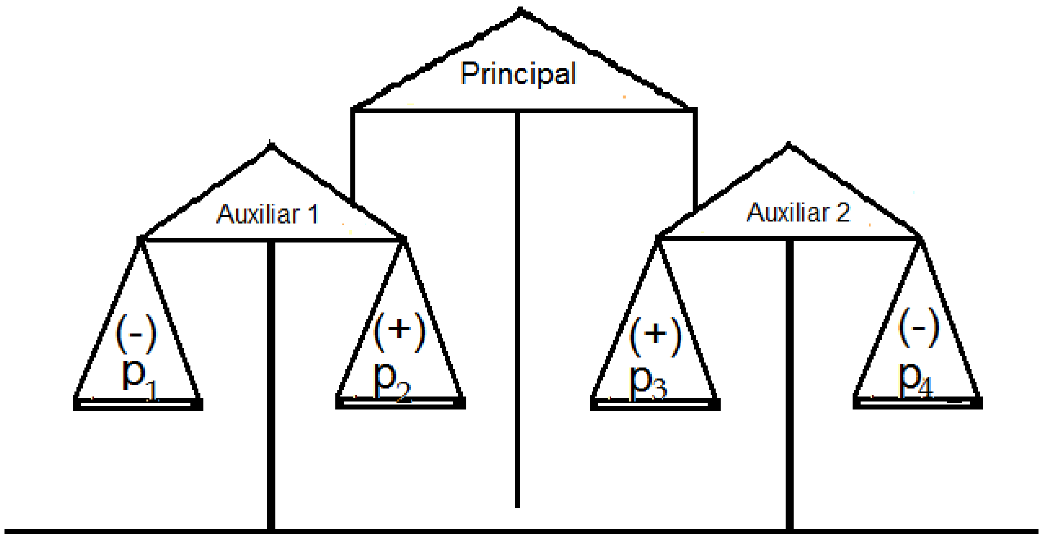


Figura 36

Haciendo uso de este sistema representamos ahora las incógnitas con pesas cuadradas iguales y las unidades con pesas circulares, ambas tanto incógnitas como unidades de igual peso; la balanza auxiliar 1 simbolizará el primer miembro o miembro de la izquierda y la balanza auxiliar 2 simbolizará el segundo miembro o miembro de la derecha.

Desarrollemos la ecuación $4x-2=5x-4$: esta se puede representar de la siguiente forma (figura 37):

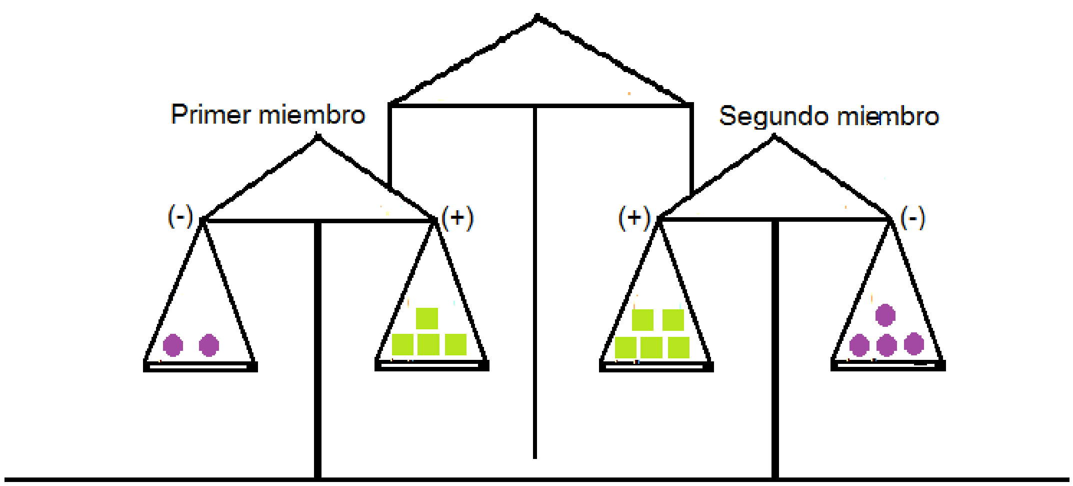


Figura 37

Para dar solución a esta ecuación, debemos considerar las siguientes reglas que permiten que el sistema siempre esté en equilibrio.

1. Pasar las pesas del lado positivo (+) de una balanza al lado negativo (-) de la otra ó viceversa.
2. Quitar el mismo peso de los dos lados de una misma balanza.

Siguiendo estas normas se tiene el esquema.

Primero equilibramos la balanza según el paso (1), para obtener (figura 38):

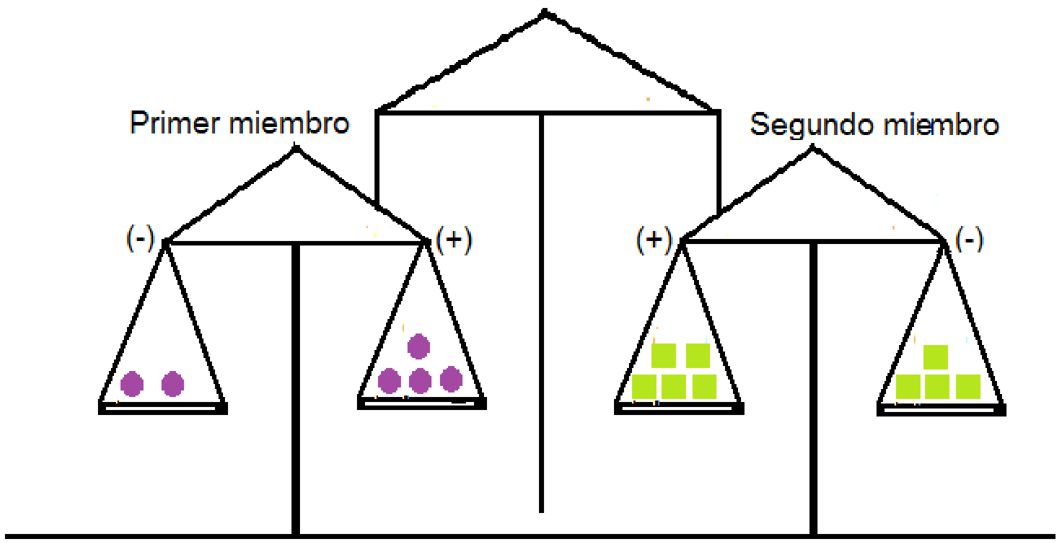


Figura 38

Luego, extraemos de los platos de una misma balanza, resultando (figura 39):

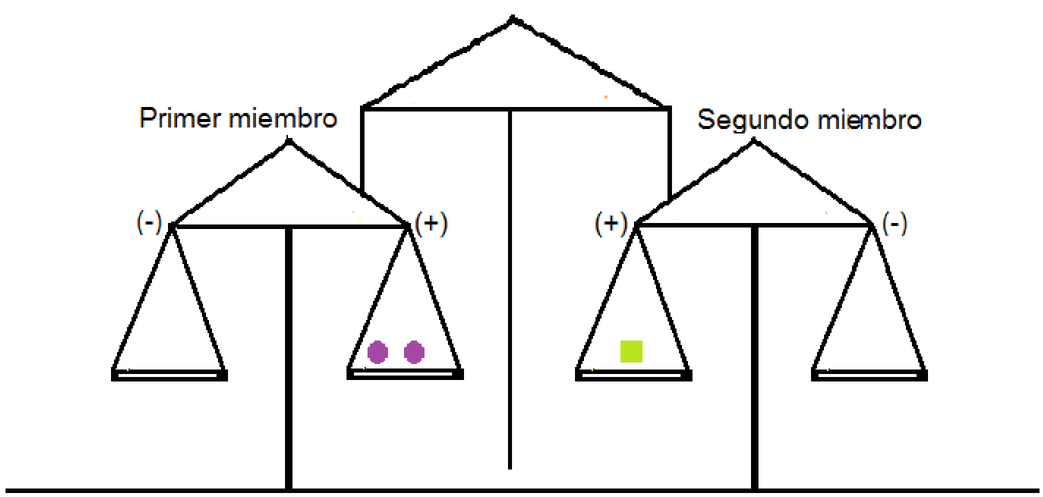


Figura 39

Se tiene entonces que: $x = 1 + 1$ luego $x = 2$.

La balanza matemática.

La balanza simple, es un recurso didáctico que nos permite realizar operaciones de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, permitiendo solucionar ecuaciones lineales y explicar la ley distributiva.

Este instrumento consiste de una estructura central que sostiene una varilla marcada con distancias, no tiene platillos como la anterior, pero en cada una de las marcas se puede colgar peso y lo que se pretende es mantener la varilla en equilibrio y para ello se debe de colocar un peso a un lado de la balanza (primer miembro de una ecuación) y luego colocar uno o varios pesos al otro lado (segundo miembro) de forma tal que la balanza permanezca en equilibrio, es decir, conserve la relación de igualdad. Suponemos que siempre que se pese un cuerpo, debe tener el mismo valor.

Ejemplo: Una persona de 60 kg de peso se sienta a 3 metros del punto de apoyo de la balanza. A qué distancia se deben sentar sus hijos de 40 y 20 kg para que queden en equilibrio?

Solución: Los hijos se deben sentar a 3 m al otro lado para que queden en equilibrio pues

$$\begin{aligned} 60(3) &= 40(3) + 20(3) \\ &= (40 + 20)(3) \end{aligned}$$

Como se ve en la figura 40

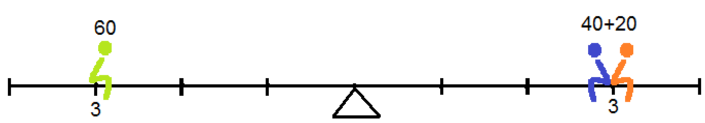


Figura 40

El primer miembro es el lado izquierdo y el segundo miembro el lado derecho. En la balanza podremos pasar objetos de un lado a otro, como lo hacemos en las ecuaciones, pasar de un miembro a otro, aplicando operaciones aritméticas conocidas.

Ejemplo 2: Si la misma persona de 60 kg de peso se sienta a 6 metros del punto de apoyo de la balanza y uno de sus hijos el que pesa 20 kg de peso se sienta a 2 m del punto de equilibrio de la balanza. A qué distancia se debe sentar el hijo de 40 kg de peso para que queden en equilibrio?

Solución: En este caso los hijos se sientan a distintas distancias; para llegar a la solución, llamemos x la distancia que desconocemos, es decir, la distancia a la que el hijo que pesa 40 kg debe sentarse. Tenemos entonces lo siguiente:

$$60(6) = 20(2) + 40x$$

$$360 = 40 + 40x$$

$$360 = 40(1 + x)$$

$$\frac{360}{40} = 1 + x$$

$9 - 1 = x$ luego $x = 8$

Observemos la figura 41 de la balanza en equilibrio.

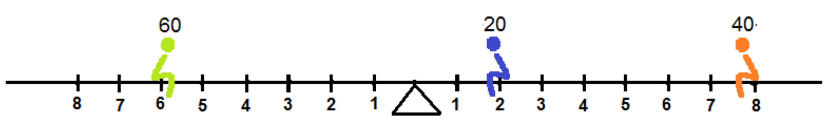


Figura 41

Estas balanzas entonces son útiles para la solución de ecuaciones sencillas.

2.2.3. La ecuación cuadrática.

Una ecuación cuadrática en una variable es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Las soluciones a esta ecuación no siempre son números reales. El caso más sencillo de analizar es la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es decir, $x^2 = -1$; no existe ningún número real que satisfaga dicha ecuación, pues para todo x en $\Re$, $x^2 \geq 0$. Analizaremos ahora aquellos casos en los que se van a obtener soluciones reales, estas no en todos los casos serán positivas.

Veremos un método para resolver estas ecuaciones cuadráticas mediante geometría, es decir, por medio de áreas de rectángulos; para ello asumimos que a, b y c son números reales positivos. Veamos entonces los casos que se nos presentan para la solución de dichas ecuaciones y al final daremos la solución general con un cambio de variable para considerar todas las soluciones reales.

Primer caso: $x^2 = c$, con $c \geq 0$. En este caso se obtiene la solución $x = \pm\sqrt{c}$.

Para este caso construiremos una semicircunferencia de radio $\frac{c+1}{2}$, como se muestra en la figura 42.

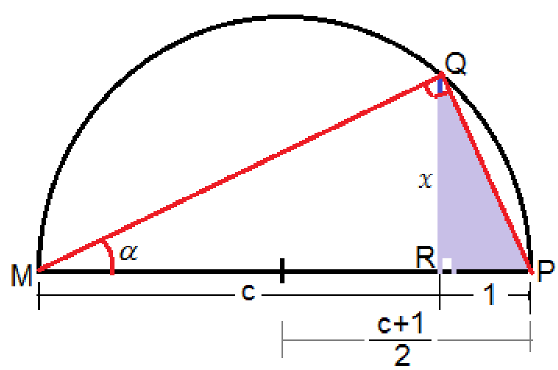


Figura 42

Si por R levantamos la perpendicular única a $\overline{MP}$ siendo Q el intersecto de esta recta con la circunferencia, entonces $M\hat{Q}P$ es recto por estar inscrito en la semicircunferencia.

Por semejanza de triángulos entre el bordeado de rojo (PQM) y el sombreado azul (PQR) se tiene que: $\frac{x}{c} = \frac{1}{x}$, luego $x^2 = c$ y concluimos que $x = \sqrt{c}$.

Si se toma la otra parte de la circunferencia como se muestra en la figura 43

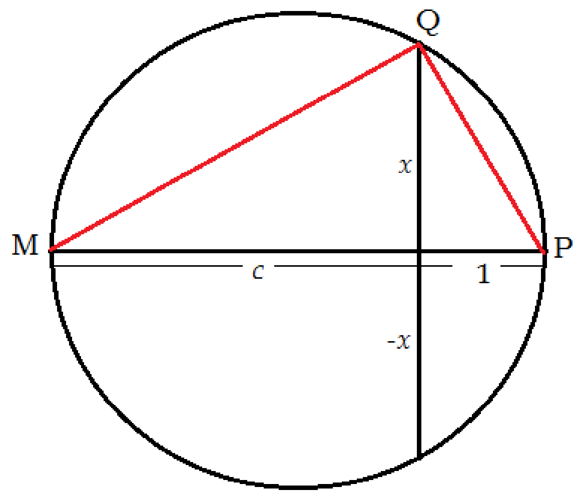


Figura 43

En este caso se tiene que $(-x)^2 = c$ y haciendo el mismo razonamiento anterior se llega al mismo resultado.

Segundo caso: $x^2 + bx = c$ con $b > 0$ y $c > 0$; en este caso planteamos la ecuación gráficamente con rectángulos (figura 44).

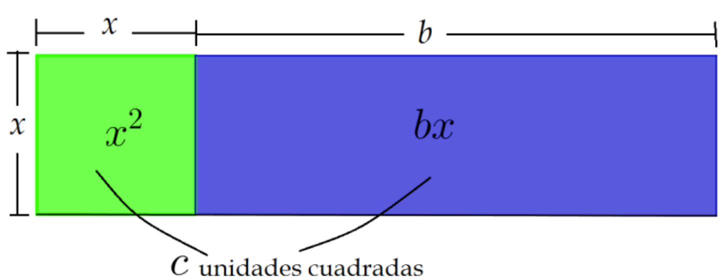


Figura 44

Queremos hallar valores m y n, con $n > 0$ tal que $(x-m)^2 = n$ obteniendo $x - m = \pm\sqrt{n}$ como en el caso 1. El coeficiente lineal de $(x-m)^2$ es $-2mx$. Hacemos $-2m = b$, entonces $-m = \frac{b}{2}$. Pretendemos entonces hallar un cuadrado que tenga de lado $x + \frac{b}{2}$; este es el valor que llamamos n.

Consideremos un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$ y completamos el cuadrado de lado $x+\frac{b}{2}$ como se muestra en la figura 45:

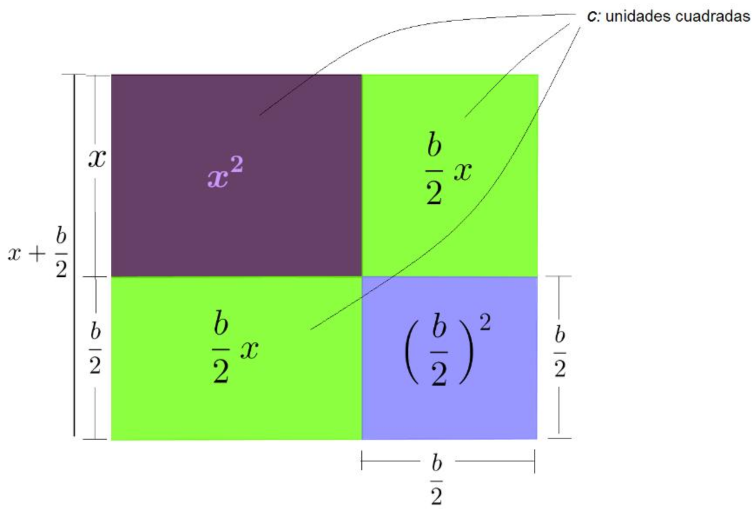


Figura 45

Entonces: $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^2+\frac{b}{2}x+\frac{b}{2}x+\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$\therefore \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x^2+bx\right)+\frac{b^2}{4}$. Pero se tiene que $x^2+bx=c$ entonces

$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = c+\frac{b^2}{4}$; por tanto $x+\frac{b}{2}=\pm\sqrt{c+\frac{b^2}{4}}$ y $x=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{c+\frac{b^2}{4}}$

Ejemplo. Resolvamos la ecuación $x^2+15x=34$

Lo que pretendemos es hallar un cuadrado que sería la solución a la ecuación; de esta forma se tiene que (figura 46)

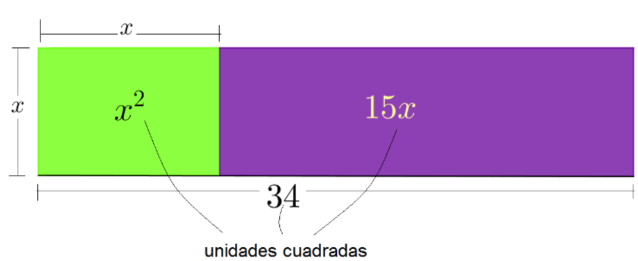


Figura 46

Para formar el cuadrado, debe dividirse en dos el coeficiente que está acompañado de la x, obteniendo entonces el siguiente cuadrado (figura 47).

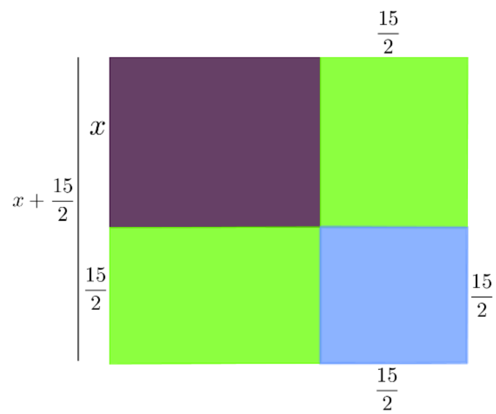


Figura 47

Como es un cuadrado, los lados son iguales y se obtiene que:

$$\left(x+\frac{15}{2}\right)^2=34+\left(\frac{15}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{15}{2}\right)^2=34+\frac{225}{4}$$

$$\left(x+\frac{15}{2}\right)^2=\frac{136+225}{4}$$

$$\left(x+\frac{15}{2}\right)^2=\frac{361}{4}$$

$$\left(x+\frac{15}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{361}{4}}$$

por tanto se tiene que: $x+\frac{15}{2}=\pm\frac{19}{2}$.

Tercer caso: $x^2=bx+c$ con $b>0$ y $c>0$. Como en el caso anterior, queremos encontrar geométricamente m y n con $n>0$ de tal forma que $(x-m)^2=n$. Aquí el cuadrado tiene lado $x-\frac{b}{2}$; construimos entonces un cuadrado de lado x; y resultan dos rectángulos de áreas bx y c unidades cuadradas, como se muestra en la figura 48.

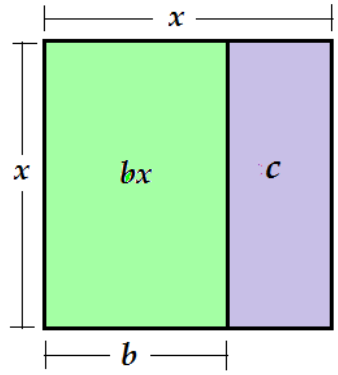


Figura 48

Ahora, en el rectángulo verde se divide el lado b a la mitad, se tiene (figura 49):

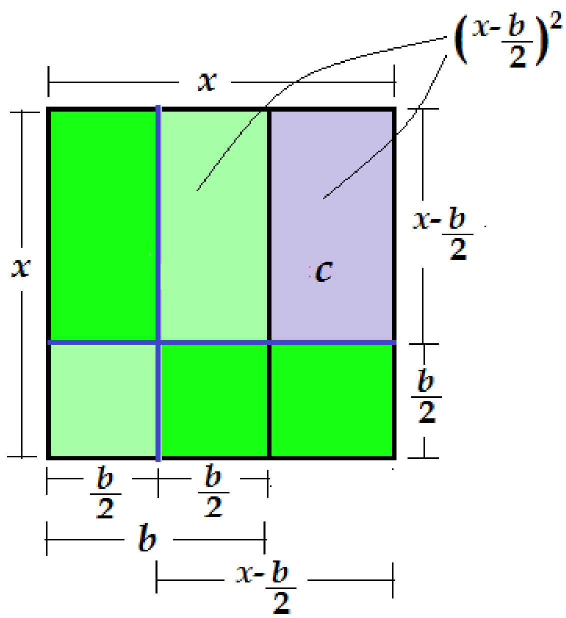


Figura 49

$$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2=x^2-2\frac{b}{2}\left(x-\frac{b}{2}\right)-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$=x^2-bx+\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{4}=c+\frac{b^2}{4}$$

$$\therefore \quad \left(x-\frac{b}{2}\right)^2 = c+\frac{b^2}{4}$$

Luego $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 = c+\frac{b^2}{4}$ obteniendo $x-\frac{b}{2} = \pm\sqrt{c+\frac{b^2}{4}}$

Despejando x se tiene $x = \frac{b}{2} = \pm\sqrt{c+\frac{b^2}{4}}$

Ejemplo: Resolver la ecuación $x^2 = 10x+39$. En este caso $x-\frac{b}{2} = \pm\sqrt{c+\frac{b^2}{4}}$ y $c = 39$ entonces construimos un cuadrado de lado x a partir de los rectángulos de área $10x$ y 39 unidades cuadradas, (figura 50).

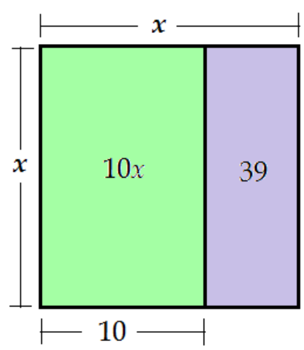


Figura 50

Dividimos b entre dos, o sea que $\frac{b}{2} = 5$ y construimos un cuadrado de longitud x (figura 51).

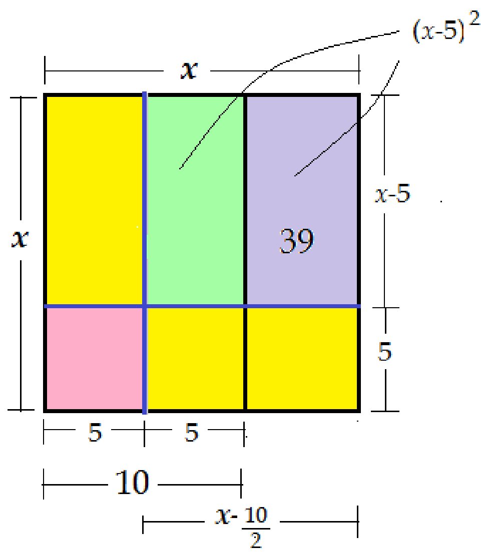


Figura 51

Se obtienen dos rectángulos amarillos de área $(x-5)5$ y un cuadrado rosa de área $5^2 = 25$

.

$$(x-5)^2 = 10x + 39 - 2(x-5)5 - 25$$

$$= 10x + 39 - 10x + 50 - 25$$

$(x-5)^2 = 64$ obteniendo $x = 5 \pm 8$. La solución positiva es $x = 5 + 8 = 13$ y la solución negativa es $x = 5 - 8 = -3$.

Cuarto caso: $x^2 + c = bx$ con $b > 0$ y $c > 0$.

Se trata entonces de hallar un cuadrado de lado x y adicionarle un rectángulo de área c unidades cuadradas. Reescribiendo la ecuación anterior se tiene que: la ecuación $x^2 + c = bx$ es equivalente a la ecuación: $x^2 - bx = c$. Para determinar el cuadrado hay que considerar dos opciones si $x > \frac{b}{2}$ ó $x < \frac{b}{2}$. Analicemos cada una de estas opciones:

Opción 1: si $x > \frac{b}{2}$, se buscará un cuadrado de lado $x - \frac{b}{2}$, observemos la construcción en las siguientes figuras: primero pegamos el cuadrado x^2 y el rectángulo c, obteniendo un rectángulo de lados x y b (figura 52).

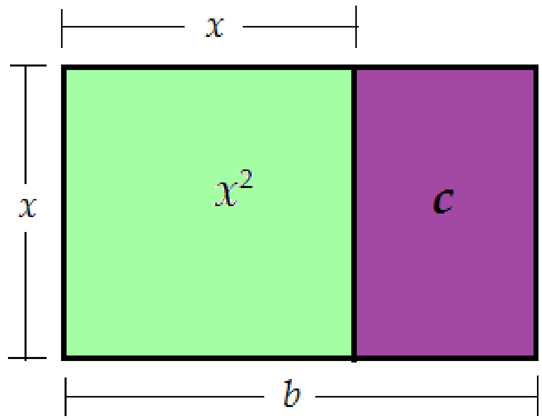


Figura 52

Dividimos b entre dos, o sea $\frac{b}{2}$ (figura 53).

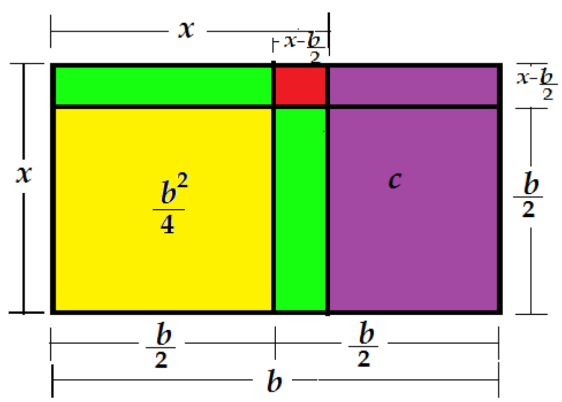


Figura 53

De esta nueva figura obtenemos los dos rectángulos verdes de área $\frac{b}{2}\left(x-\frac{b}{2}\right)$ y el cuadrado amarillo de área $\frac{b^2}{4}$. Queremos determinar el área del cuadrado rojo de área $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2$. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{b}{2}\right)^2 &= bx-2\left(x-\frac{b}{2}\right)\frac{b}{2}-\frac{b^2}{4}-c\\ &= bx-xb+\frac{b^2}{2}-\frac{b^2}{4}-c\\ &= \frac{b^2}{4}-c\end{aligned}$$

Entonces $\left(x-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}-c$ y por tanto $x-\frac{b}{2}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$ que es: $x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-c}$

Opción 2: si $x<\frac{b}{2}$, tendríamos un cuadrado de lado $\frac{b}{2}-x$, se tiene entonces que (figura 54)

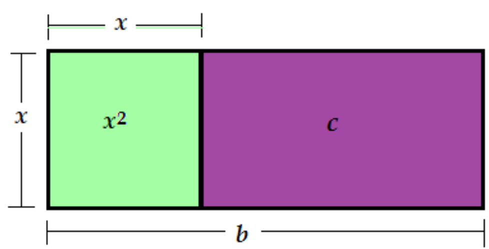


Figura 54

Dividimos el lado b en dos partes iguales, se obtiene entonces (figura 55):

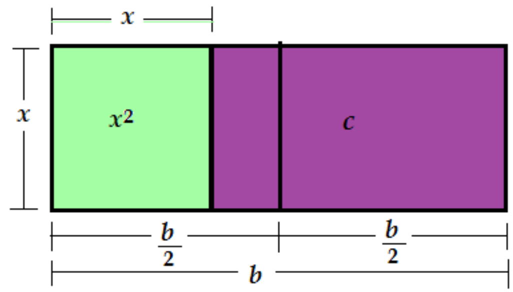


Figura 55

Obtenemos los dos rectángulos amarillos de área $\left(\frac{b}{2}-x\right)x$ y hallemos el cuadrado de área $\left(\frac{b}{2}-x\right)^2$ (figura 56):

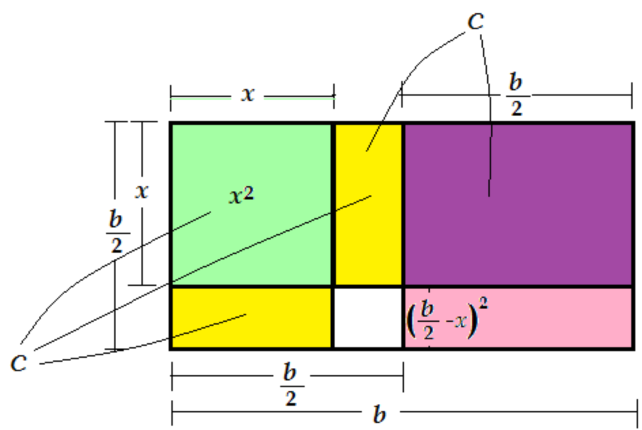


Figura 56

De la figura 56 podemos ver que:

$$\left(\frac{b}{2}-x\right)^2=\frac{b}{2}(b)-2c+\left(\frac{b}{2}-x\right)x-\left(\frac{b}{2}-x\right)\frac{b}{2}$$

$$=\frac{b^2}{2}-2c-\left(\frac{b}{2}-x\right)\left(\frac{b}{2}-x\right)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{b}{2}-x\right)^2=\frac{b^2}{2}-2c-\left(\frac{b}{2}-x\right)^2$$

$\therefore \quad 2\left(\frac{b}{2}-x\right)^2 = \frac{b^2}{2} - 2c$, entonces:

$\left(\frac{b}{2}-x\right)^2 = \frac{b^2}{4} - c$ sacando raíz se obtiene que: $\frac{b}{2} - x = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$

Lo que nos lleva a las soluciones: $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.

Ejemplo: Obtener el valor de x en la ecuación: $x^2 + 28 = 16x$

Solución: Trazamos un rectángulo de lado 16 y ancho x como se muestra en la figura 57.

Como $b = 16$, dividimos dicho valor entre dos, obteniendo: $\frac{b}{2} = 8$,

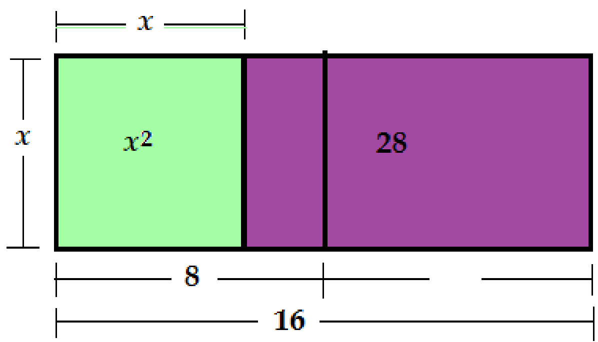


Figura 57

Ahora queremos formar un cuadrado de lado 8, obtenemos la figura 58:

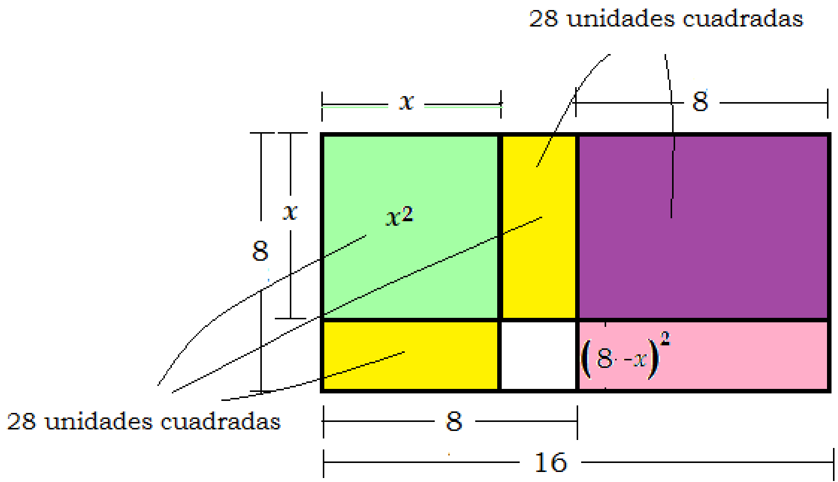


Figura 58

De la figura 58 podemos ver que:

$$(8-x)^2 = 8(16) - 2(28) + (8-x)x - (8-x)8$$

$$= 128 - 56 - (8-x)(8-x) = 72 - (8-x)^2$$

$$\therefore \quad (8-x)^2 = 72 - (8-x)^2 \qquad \therefore \quad 2(8-x)^2 = 72$$

$$\therefore \quad (8-x)^2 = 36 \qquad \therefore \quad 8 - x = \pm 6$$

lo que nos lleva a las soluciones: $x_1 = 8+6 = 14$ y $x_2 = 8-6 = 2$.

Quinto caso: Si los tres coeficientes son positivos, en este caso se tiene la ecuación de la forma . $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ y entonces si tiene solución, ellas son negativas, por ello realizaremos un cambio de variable:

haciendo $w = -x$ ó $x = -w$ y como $w^2 = x^2$, $w^2 + \frac{b}{a}(-w) + \frac{c}{a} = 0$

Por tanto $w^2 + \left(\frac{-b}{a}\right)w + \frac{c}{a} = 0$ es equivalente a $w^2 + \frac{c}{a} = \frac{b}{a}w$

Como $\frac{b}{a} > 0$, estamos en el caso anterior.

Ejemplo: Resolver $5x^2+8x+3=0$

Solución: Es equivalente a:

$$x^2+\frac{8}{5}x+\frac{3}{5}=0$$

$$x^2+\frac{3}{5}=\frac{-8}{5}x$$

Realizamos ahora el cambio de variable $w=-x$, obteniendo:

$$w^2+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}w \text{ que es lo mismo que } (-x)^2+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}(-x)$$

Dividimos $b=\frac{8}{5}$ entre dos, o sea $\frac{4}{5}$.

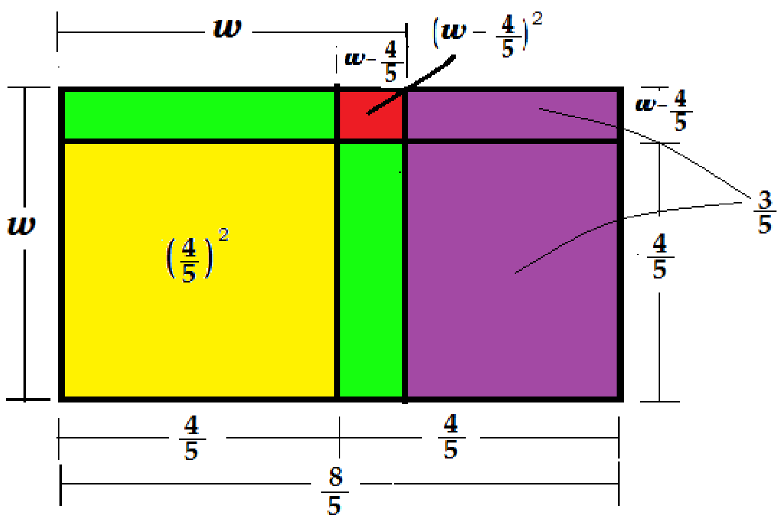


Figura 59

De la figura 59 se observa que:

$$\left(w-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{8}{5}w-\left(\frac{4}{5}\right)^2-2\left(w-\frac{4}{5}\right)\frac{4}{5}-\frac{3}{5}$$

$$=\frac{16}{25}+\frac{32}{25}+\frac{3}{5}=\frac{16}{25}-\frac{15}{25}=\frac{1}{25}$$

$$\therefore\ w-\frac{4}{5}=\pm\frac{1}{5} \qquad \therefore\ w=1 \text{ ó } \therefore\ w=\frac{3}{5}.$$

Como $w = -x$ entonces $x = \frac{-3}{5}$ ó $x = -1$

Compilando lo anterior y teniendo en cuenta que el coeficiente que acompaña a la variable al cuadrado no siempre es 1, se presenta la siguiente solución.

Solución general. En términos generales se tiene la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ para que la ecuación sea de tipo cuadrática. Esta ecuación siempre se divide por a, obteniendo así la ecuación $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Así $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$ y se trabaja como el segundo caso.

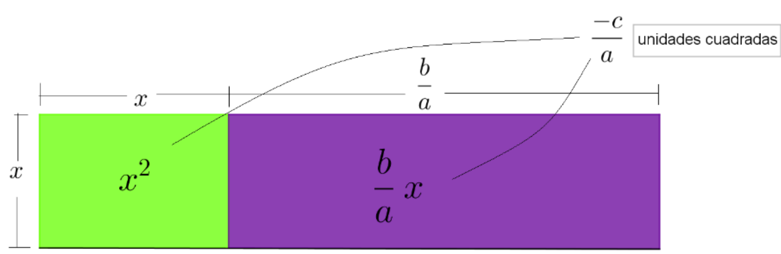


Figura 60

Como se ve en la figura 60, se supone que el área es $\frac{-c}{a}$, en el caso en que $\frac{-c}{a} > 0$. (Si $\frac{-c}{a} < 0$ se considera la ecuación $x^2 + \frac{c}{a} = \frac{-b}{a}x$, en el caso $\frac{-b}{a} > 0$. Si en este último caso es $\frac{-b}{a} < 0$ se hace el cambio de variable $x =$ -w. Luego se aplican los casos respectivos analizados anteriormente).

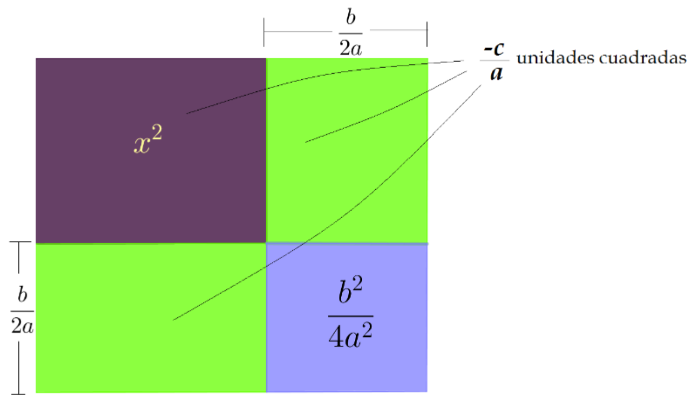


Figura 61

Entonces se distribuyen los rectángulos de tal manera que como se ve en la figura 61:

$$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2=\left(x^2+2\frac{b}{2a}x\right)+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$=\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$=\frac{-c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \qquad =\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Entonces $\quad x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por tanto $\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2.3 Marco legal

Desde el punto de vista legal, damos en primer lugar una mirada a la Constitución Política de Colombia. En su artículo 44 consagra la educación como un derecho fundamental de los niños y en su artículo 67 establece, “La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social, con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura". El área de matemáticas queda enmarcada entonces en este artículo.

Siguiendo en este recorrido, analizamos el Plan Decenal de Educación (2006-2016) En el Plan de gobierno del Presidente Juan Manuel Santos se expone en los Fines y Calidad de Educación en el Siglo XXI (globalización y autonomía) propone "Adoptar, consolidar y poner en marcha una política de Estado que articule el sistema educativo incluyente, coherente y con flexibilidad pedagógica en sus diferentes niveles de educación inicial, básica, media, superior y de formación para el trabajo y el desarrollo humano, y entre los distintos contextos y entornos de aprendizaje, alrededor del desarrollo de las capacidades de aprender a aprender, aprender a ser, aprender a hacer, para lograr una formación integral ciudadana, democrática y de convivencia pacífica".

En la Ley General de Educación (1994), desde su sección tercera hace referencia a la educación básica, en su artículo 20 de los objetivos generales de la educación básica en su inciso c), "Ampliar y profundizar en el razonamiento lógico y analítico para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y de la vida cotidiana". El artículo 21 de los objetivos específicos de la educación básica en el ciclo de primaria en su inciso e), "El desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones, así como la capacidad para solucionar problemas que impliquen estos conocimientos"; el artículo 22 de los objetivos específicos de la educación básica secundaria en su inciso c), "El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana"; y en su artículo 23 donde se considera a las matemáticas como una de las áreas obligatorias.

También la educación Colombiana se reglamenta en el decreto 1860 de 1994, en cuanto a los aspectos pedagógicos y organizativos, en su capítulo III sobre el Proyecto Educativo Institucional, donde expone el cumplimiento de condiciones culturales y sociales, pilares fundamentales en los proyectos de las Instituciones Educativas.

Desde finales de 1996, El Ministerio de Educación Nacional inicia el proceso de construcción participativa de los Lineamientos Curriculares para orientar la Educación

Matemática en el país. Estos plantean unos antecedentes que son un punto de partida para nuestro quehacer docente. Se plantea entonces una nueva visión del conocimiento y de la actividad matemática en la escuela, señalando como aspecto fundamental el reconocimiento de nuevas tecnologías, tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones, todo esto enfocado desde unos conocimientos básicos como son el pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, quedando incluidos en ellos los sistemas geométricos y los algebraicos y analíticos, todo esto desde un contexto de las situaciones problemáticas de las mismas matemáticas, de la vida diaria y de las otras ciencias, para facilitar los procesos de razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación, modelación y elaboración, comprobación y ejercitación de procedimientos.

Los Estándares Básicos de Competencias en las áreas fundamentales del conocimiento como son Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía (2006) realizado entre el Ministerio de Educación Nacional y las facultades de Educación del país, documento enriquecedor que proporciona pautas para la construcción del currículo, facilitando la evaluación permanente; presenta además objetos de conocimiento diferenciados en los pensamientos matemáticos y enfocados en situaciones problema.

> "*Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos*"

Podemos también citar en el Plan de Desarrollo "Antioquia la más Educada" que propone la educación como motor de la transformación de Antioquia.

> " … *el eje de la transformación de nuestra sociedad es la educación. Sin una educación de calidad para todos, las desigualdades sociales están destinadas a acrecentarse. En el departamento nuestra apuesta por la educación se verá reflejada en el diseño y ejecución de programas y proyectos que respondan a las necesidades particulares de cada subregión, con énfasis en los maestros y maestras … Aprendimos que la educación debe entenderse en un sentido amplio que trascienda los muros de los colegios. La Antioquia del siglo XXI debe ser la*

> *Antioquia en donde todas las personas tengamos espacio en el mundo maravilloso de la educación*"

Se habla de universidades e instituciones de educación superior de calidad y que no solo se encuentren en el área urbana sino también en el área rural, teniendo una buena cobertura e interacción.

Por último en el Programa de Gobierno de la Alcaldía de Medellín "Un hogar para la vida, en cuanto a la educación, hace notar que:

> "*La educación ha de ser entendida como formación, esto es, como construcción de sujetos, habida cuenta de que el ser humano tiene que desarrollar a lo largo de su vida, el potencial con el que nace… La educación es la principal herramienta para lograr el desarrollo humano integral, no solo en términos individuales, sino también sociales de integrabilidad y búsqueda de un mayor ejercicio de la libertad*".

2.4 Antecedentes

Actualmente, en el que el mundo cambia muy rápidamente, el sistema escolar debe estar diseñado para andar a la par, ya que se corre el riesgo de estar desactualizados, teniendo en cuenta la misión de nosotros los profesores de preparar a las nuevas generaciones para afrontar con éxito la vida que les tocará vivir en su quehacer como profesionales.

Siempre se afirma que el aprendizaje de la matemática es difícil y los estudiantes, no sólo universitarios, sino también de primaria y secundaria, constantemente manifiestan su aversión por esta materia y argumentan en muchos casos su deseo de abandonar su estudio teniendo como eje la pregunta ¿qué aplicabilidad tiene dentro de su programa académico?

La gran dificultad que tenemos los docentes, entre otras, es que no aplicamos los conocimientos matemáticos al contexto real de los estudiantes. El alumno no siente que la matemática está en su labor diaria, como cuando promedia qué le falta a su equipo predilecto para pasar a la siguiente ronda, en sus juegos, etc. Ante esta realidad no podemos permanecer pasivos, debemos replantear los objetivos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas orientadas a dinamizar y agilizar el razonamiento con el fin de impedir los aprendizajes memorísticos y mecánicos.

Nuestra responsabilidad es de formar individuos capaces de pensar y aplicar sus conocimientos en su vida profesional. Cuando los estudiantes relacionan lo aprendido con lo que a diario viven y son capaces de enfrentar problemas, construir nuevos conocimientos, podemos afirmar que se da un aprendizaje significativo en matemáticas. Para ello debemos reformular objetivos, contenidos y sobre todo metodología en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Debemos despertar el interés por aprender, por comprender el lenguaje propio de las matemáticas que está en la naturaleza y hay que saberlo identificar y matematizar, poder escribir conceptos y algoritmos logrados a través del aprendizaje significativo; esto se hace a través de construcciones que no necesariamente deben ser muy elaboradas para la apropiación de conceptos utilizando su estructura cognitiva.

En la actualidad el Ministerio de Educación Nacional ha permitido la flexibilidad en la construcción de los planes curriculares, hablando de educación por competencias, es decir, un currículo que desarrolle el ser y el hacer, facilitando en el estudiante asumir una posición crítica en la toma de decisiones (Lineamientos Curriculares, 2004).

Cuando los estudiantes ingresan a la universidad e inician sus primeros cursos en matemáticas de cualquier programa académico, muestran grandes vacíos (deficiencias) en temas como las operaciones con fracciones, factorización, potenciación y radicación de expresiones racionales.

En muchas ocasiones a pesar de que en su momento lo habían entendido, su forma memorística y sus deficiencias conceptuales en el álgebra y su poca destreza para resolver ejercicios y problemas, hacen que se les dificulte el proceso y se origina la deserción temprana.

Esta propuesta busca diseñar una estrategia didáctica para la interpretación y análisis de las operaciones con factorización de números reales, la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas, enfocado a superar las deficiencias con las que llegan los estudiantes a los cursos básicos de matemáticas.

Se pretende abordar estos temas utilizando elementos muy importantes de la geometría para que el estudiante se apropie de estos conocimientos tan básicos pero que son la base de muchos de los cursos posteriores.

Es necesario aclarar que recurrimos a la geometría porque nos permite la construcción de materiales que facilitan una interacción ideal entre los objetos que se manipulan y los conceptos que se buscan fundamentar; en particular las relaciones espaciales que enriquecen y subyacen en las estructuras propias de la geometría, lo que la convierte en un mediador muy importante para el logro de aprendizajes realmente significativos como es nuestro propósito.

El libro: Analysis by its History de Hairer y Wanner (2008) hace un recorrido histórico completo del desarrollo de la matemática desde sus inicios. Apoyados en este libro comenzamos nuestro trabajo, posteriormente se consultó sobre los temas de la solución de ecuaciones lineales utilizando el tablero de ecuaciones y la balanza de orlov, que permitieron abordar este tema de una manera sencilla, luego se trabajó la balanza matemática que si bien permitía la solución de ecuaciones lineales, mostró una forma sencilla de abordar el tema de distributividad, para distribuir los pesos de forma que la balanza quedara en equilibrio, y por último se trabajaron las ecuaciones cuadráticas basado en lo trabajado previamente en factorización usando solo figuras geométricas sencillas para llegar a las soluciones.

3. Metodología

Debido a las dificultades detectadas a nivel conceptual de los estudiantes en los temas de expresiones racionales y sus operaciones, se hace necesario implementar una propuesta con un enfoque diferente que facilite la asimilación e interiorización de los temas antes mencionados.

Como este trabajo está orientado en la línea de una Maestría de Profundización y en el Acuerdo 033 del 2008, define en su artículo 10 las modalidades de los trabajos finales como actividades académicas de diversa índole; nos enmarcamos en el concepto de monografía de compilación, donde se analizarán los diferentes planteamientos de los autores que han trabajado en el tema y se diseñará una estrategia didáctica de la factorización utilizando geometría, considerando para el desarrollo un planteamiento diferente del que históricamente se ha venido dando. Nos hemos propuesto trabajar las situaciones problema y el aprendizaje significativo, desarrollado esto a manera de monografía

4. Propuesta didáctica

Después de identificadas en mi experiencia docente las dificultades históricas y epistemológicas en lo relacionado con la factorización, la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas, considero que la factorización trabajada desde el punto de vista geométrico es una gran herramienta, ya que permite entender el tema de una forma mucho más sencilla.

A continuación se presentan algunos ejercicios que buscan lograr la comprensión y el apropiamiento del significado de factorización, proporcionando un aprendizaje significativo y permitiendo como argumentamos anteriormente una enseñanza para la comprensión de estos conceptos con el objetivo que los estudiantes los interioricen de forma tal que queden en su estructura cognitiva y puedan manejarse naturalmente.

Para que esto sea posible, se debe primero dar al estudiante una exposición de los temas de la forma en que se trataron en el marco disciplinar, esto le facilitará la apropiación de conceptos, posteriormente para un buen entendimiento y desarrollo del tema. Se proponen para la solución de ejercicios cinco etapas, ellas son:

1. **La Generalización.** Permitirá fortalecer el lenguaje algebraico, para que el estudiante posteriormente lo use de manera natural y pueda trabajar con él secuencia de figuras geométricas y numéricas, partiendo de la observación del caso más sencillo al más general.
2. **Paso del lenguaje aritmético al algebraico**. Expresar situaciones específicas de forma aritmética, para que se generalice mediante símbolos algebraicos; luego hacer la interpretación de expresiones simbólicas que permitan relacionar los resultados aritméticos con los algebraicos.
3. **Acercamiento a la factorización**. Plantear a los estudiantes problemas algebraicos que se puedan solucionar geométricamente para luego mediante las operaciones realizadas hacer comparaciones y llegar a una interpretación geométrica de la

factorización y las operaciones con polinomios que permitan dar solución a ecuaciones lineales y cuadráticas.

4. **Factorización con geometría**. Se deben establecer generalizaciones a partir de observaciones de aquello que sucede con regularidad, permitiendo establecer y comprobar con argumentos geométricos; devolverse en los procesos para desarrollar productos notables y generar conclusiones.
5. **Solución de ecuaciones**. Identificada la factorización, se podrá dar solución a ecuaciones haciendo uso de las herramientas geométricas planteadas.

Considerando esto, se presentan unos ejercicios modelo que el profesor puede ir llevando al estudiante por estas etapas para cumplir el objetivo de un aprendizaje significativo, donde los conceptos logren mejor comprensión de forma tal que impacten favorablemente su estructura cognitiva.

Presentamos a continuación una lista de problemas. Por ser una propuesta para universitarios se plantean de forma general. El docente desde su experiencia elaborará la solución de los procesos que llevan a la solución, así tendrá más posibilidad de prestar ayuda a sus estudiantes en el momento oportuno y de la forma más efectiva.

Problemas prototipo.

1. Observa las siguientes figuras:

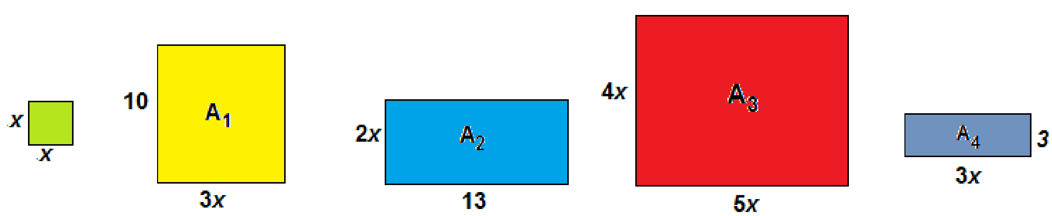


Figura 62

a) Encuentre el área de A_1, A_2, A_3 y A_4.

b) Combina varios de esos rectángulos y encuentre el área de la figura formada.

c) Encuentra la suma de todas las áreas (recuerda agrupar términos semejantes).

2. Usando el tablero de ecuaciones, resuelve:

a) $2x+13=-3x-4$
b) $5x+2=3x-11$

- ¿Puedes escribir otras reglas para las operaciones en el tablero?

3. Usando la balanza de Orlov, resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4x-3=7-2x$
b) $-5x-8=4x+3$

- Qué podemos afirmar si la balanza está en equilibrio?
- ¿Si a ambos lados (+) de la balanza les coloco un mismo peso que pasa?
- ¿Si a ambos lados con signos contrarios les coloco un mismo peso que pasa?
- ¿Puedes argumentar otras reglas válidas para la balanza?

4. Haciendo uso de la balanza matemática, responde las siguientes preguntas:

a) ¿Si hay más peso, se debe colocar más cerca o lejos del punto de equilibrio para mantener el sistema en equilibrio?

b) Escribe las reglas o normas para mantener el sistema en equilibrio.

5. La figura 63 representa el producto $(2+3+4)^2$ al ser representado como producto de los sumandos mediante la representación geométrica de la suma y el cuadrado.

Usando la propiedad conmutativa del producto de números reales, $y \cdot z = z \cdot y$, y la representación geométrica anterior determinar:

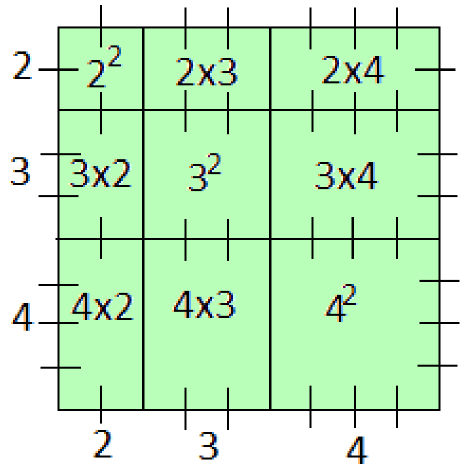


Figura 63

a) Una expresión para el producto $(a+b+c)^2$.

b) Usando la ley asociativa $(x+y)+z=x+(y+z)$ y el resultado del inciso anterior, probar que: $((a+b)+c)^2=(a+(b+c))^2=(a+b+c)^2$.

c) Usando la expresión algebraica de $(x-y)^2$ y los ítems anteriores, generar una expresión para $(a+b-c)^2$ y probarla usando las construcciones geométricas de $(a+b+c)^2$ y de $(x-y)^2$.

6. Observa los siguientes problemas:

a) Usando la diferencia de cuadrados y su construcción geométrica, determine el valor de $(n+1)^2-n^2$ en términos de n (figura 63).

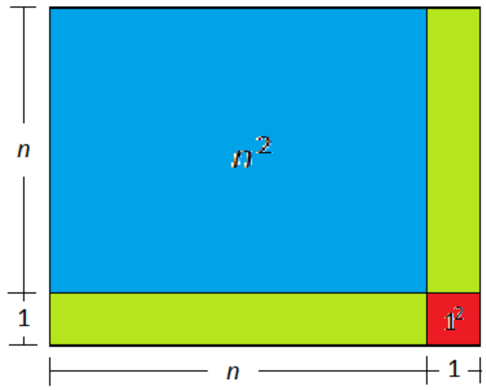


Figura 64

b) Observa la figura 65

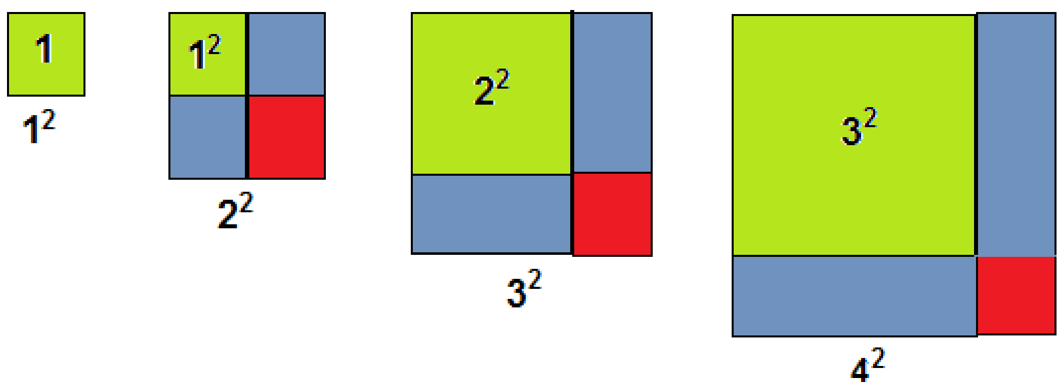


Figura 65

- Tienes el cuadrado $1^2 = 1$
- El segundo cuadrado es 2^2 y observa que si quitas el primer cuadrado, obtienes $2^2 - 1^2 = 3$, es decir $2^2 = 1 + 3$.
- El tercer cuadrado es 3^2 y si quitas el cuadrado verde 2^2, te queda 5, es decir $3^2 = 2^2 + 5$ y como $2^2 - 1^2 = 3$, entonces $3^2 = 1 + 3 + 5$.
- Repite el proceso anterior para el cuadrado 4^2.

- Observando los patrones que se forman en la gráfica y según los resultados anteriores, ¿cómo se puede expresar la diferencia?

c) Usando esta idea geométrica cómo expresarías la suma de los n primeros impares y verifica usando (a) que la fórmula es válida.

7. Observa la figura 66:

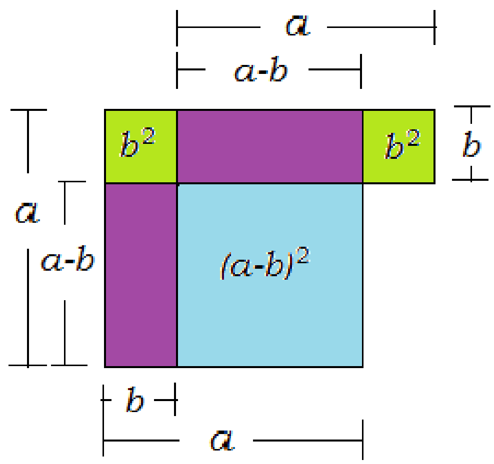


Figura 66

a) Muestra que representa $(a-b)^2$ y utilícelo para deducir su fórmula.

b) Compara este resultado con el construido en la parte teórica, ¿observa alguna diferencia?

c) ¿Cuál es el área total?

d) Usa la gráfica para determinar $(a-b)^2$.

e) Compara $(a+b)^2$ cuando se sustituye algebraicamente b por $(-b)$.

8. Para cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas, representa geométricamente por medio de rectángulos su solución.

a) $4x^2 + x - 14 = 0$

b) $15x^2 + 34x = 16$

c) $3x^2 - 7 = 4x$

d) $10x^2 - 17x + 3 = 0$

e) $x^2 + 2x - 8 = 0$

9. Una llave tarda dos horas más que otra en llenar un tanque y abriendo las dos al tiempo se llena en 1 hora y 20 minutos. ¿cuánto tiempo tardará en llenar el tanque cada una por separado?

10. Un jardín rectangular de 40 m de largo por 20 m de ancho está rodeado por una acera de ancho uniforme. Halle el ancho de dicha acera si se sabe que su área es de 544 metros cuadrados.

5. Conclusiones

Los temas de enseñanza del álgebra, en especial los que tienen que ver con el proceso de factorizar, no son fáciles de abordar, por lo que debemos acudir a diferentes estrategias que nos permitan mejorar los resultados de nuestros estudiantes. El álgebra geométrica realmente puede logra que exista una mejor comprensión de los temas a pesar de las limitaciones que pueda tener, pero la forma visual que posee este recurso puede generar una mayor motivación, ya que se logra manipular los conceptos algebraicos de una manera más atractiva sin dejar de lado su fundamentación teórica.

El recorrido histórico nos permite comprender y enriquecer nuestros saberes para generar nuevos materiales que ayudarán a nuestros estudiantes en su aprendizaje, es por ello que en este trabajo se utilizó la geometría como recurso didáctico.

Este proyecto me dio la oportunidad de explorar nuevas ideas en la enseñanza de las matemáticas, analizadas desde una perspectiva más didáctica. En nuestro quehacer docente es indispensable renovar los métodos de enseñanza, en la cual se debe tener en cuenta que las nuevas generaciones son cambiantes según el medio, el contexto, la cultura y la información que en la actualidad les llega mucho más rápido por el uso de las nuevas tecnologías.

Espero que esta estrategia didáctica sea de ayuda a todos aquellos lectores que tengan la oportunidad de leerlo, pero fundamentalmente que a través de los maestros como mediadores, pueda llegar finalmente a los estudiantes que es nuestro objetivo principal. . Nuestro deber como docentes es despertar el interés y motivación de los estudiantes por nuestra asignatura y el objetivo será que sea incorporado a su estructura cognitiva para que los temas tengan una significación real y no queden rápidamente olvidados.

6. Bibliografía

- Ballén Novoa, Javier Orlando (2012). El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado. Tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- Blythe, Tina y colaboradores (2004). La Enseñanza para la comprensión. Guía para el docente. Buenos Aires: Paidós. 163 p.
- Cid, E., Godino, J. y Batanero, C. (2003). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Departamento de didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-4-6. 259 pp. (En: http://www.ugr.es/local /jgodino)
- Cruz Mendoza, Elías (2008). Diseño de una secuencia didáctica donde se generaliza el método de factorización en la solución de una ecuación cuadrática. Tesis de Maestría en Ciencias en Educación Matemática, Instituto Politécnico Nacional, México D.F.
- Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Matemática Educativa II. (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de: Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 5 (1993).
- Godino, J. y Batanero, C. (2004). Proporcionalidad y su didáctica para maestros. Departamento de didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada, 34 pp. (En: http://www.ugr.es/local/jgodino).
- Hairer, Ernest and Wanner, Gerhard (2008). Analysis by its History (2a ed). New York: Springer.
- Meavilla, Vicente (2012). Eso no estaba en mi libro de matemáticas. Books4pocket, 250 pp. Barcelona, España.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Santafé de Bogotá: Magisterio Editorial.

- Morales González, Ignacio (2008). Propuesta de enseñanza para la factorización algebraica. Tesis de Maestría en Ciencias en Educación Matemática, Universidad Michoacana San Nicolás de Hidalgo, Morelia (México).
- Moreira, M. A. (1997). Aprendizaje Significativo: La Visión Clásica. (En: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/visionclassicavisioncritica.pdf).
- Orlov K. (1971). Experimental verification of the use of the mathematical balance in secondary teaching. Educational Studies in Mathematics 3, 192-205.
- Plan de desarrollo "Antioquia la más Educada" (En: http://antioquia.gov.co/Plan_de_desarrollo_2012_2015/PDD_FINAL/PDD_FINAL/3_Fundamentos.pdf)
- Plan Decenal de Educación (En: http://www.plandecenal.edu.co/_html/1726/articles-244024_propuesta_santos__pnde.pdf).
- Polya, G. (1965). Cómo Plantear y Resolver Problemas. México: Trillas, (reimp. 2008).
- Proyecto de Acuerdo. Plan de desarrollo "Medellín un hogar para la vida" (En: http://www.medellin.gov.co/transito/archivos/plan-dllo-sttm/2012-04-30_proyecto_acuerdo.pdf).
- Puerta Ortiz, Fernando. Precálculo Geométrico. Escuela de Matemáticas. Universidad Nacional, Medellín. (Texto Borrador).