UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Potenciando Pensamiento Variacional y Uso de Sistemas Algebraicos con Geogebra

German Gracia Obando

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Maestría en Enseñanza de las Ciencas Exactas
Manizales - Caldas, Colombia
2018

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Enhancing variational thinking and use of algebraic systems using Geogebra

German Gracia Obando

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Maestría en Enseñanza de las Ciencas Exactas
Manizales - Caldas, Colombia
2018

Potenciando Pensamiento Variacional y Uso de Sistemas Algebraicos con Geogebra

German Gracia Obando

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencas Exactas y Naturales

Director:
MSc. Jaider Albeiro Figueroa Flórez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Maestría en Enseñanza de las Ciencas Exactas
Manizales - Caldas, Colombia
2018

Dedicatoria

La dedicación, esfuerzo y ganas por aprender han hecho posible la construcción de este trabajo de investigación.
A mis padres, José y Marleny, a mis hermanos, Adriana y Leonardo, a mis sobrinos Sebastián y Mariana por todo el amor que me han brindado y el empuje para hacer bien las cosas; en especial a mi hijo Samuel como una referencia en un futuro cercano y a mi esposa Ángela María, por el tiempo de paciencia y comprensión que ha tenido y sus motivaciones constantes para no desfallecer. Los amo.

Agradecimientos

Al Magister Jaider Albeiro Figueroa Flórez por su apoyo y constante dedicación como mi tutor, mi gurú y mi guía en este trabajo tan fascinante.

A los estudiantes de grado once, especialmente a Juan Camilo Duque Flórez y Jose Ángel Giraldo Hurtado y Laura Basto González quienes llevaron pasión en todo momento por aprender matemáticas.

A la Docente: Magister Diana Patricia Marín y al Rector: Magister Oscar Mario Grisales Lopez, de la Institución Educativa Escuela Normal Superior "Claudina Múnera" por su colaboración en el desarrollo de este trabajo y su apoyo incondicional.

A la Docente Licenciada Ángela Cristina Franco Martínez, por su colaboración en momentos oportunos, muchas gracias.

Índice general

1. Horizonte del Trabajo **1**
1.1. Descripción y Planteamiento del Problema 1
1.2. Justificación 2
1.3. Objetivos 5
1.3.1. Objetivo General 5
1.3.2. Objetivos Específicos 5

2. Marco Referencial **7**
2.1. Marco de Antecedentes 7
2.1.1. La enseñanza del concepto de límite en el grado undécimo, haciendo uso del Geogebra. 7
2.1.2. Estudio de funciones con Geogebra. 8
2.1.3. Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra. . . 8
2.1.4. Exploración del impacto producido por la integración del ambiente de geometría dinámica (AGD) Geogebra en la enseñanza de los cursos de matemáticas básicas de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia sede Palmira. 9
2.1.5. Razonamiento covariacional a través de software dinámico: el caso de la variación lineal y cuadrática. 10
2.1.6. Propuesta metodológica para la enseñanza-aprendizaje de la geometría mediada por el diseño de situaciones problema que contribuye a la formación de valores en el grado sexto de la I.E. Lola González. . . . 11
2.1.7. Incidencia de las tecnologías de la información y la comunicación como estrategia de aprendizaje del álgebra en estudiantes de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia sede Palmira 12
2.1.8. La utilización del software Geogebra como apoyo didáctico en la enseñanza de los temas de sistemas de ecuaciones y funciones y su relación con el rendimiento académico de los estudiantes de décimo año de la Unidad Educativa Tuntatacto, "Cantón Guano" 12
2.1.9. La génesis instrumental: un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software Geogebra con estudiantes de ingeniería 13
2.1.10. Estratégia didáctica mediada por el software Geogebra para fortalecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría en estudiantes de 9 de básica secundaria 14

2.2. Marco Teórico 15
2.2.1. Teorías sobre Construcción del conocimiento 16
2.2.2. Teorías sobre estrategias meta cognitivas en la resolución de problemas 21
2.2.3. Teorías sobre el papel de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas. 26
2.3. Marco Conceptual 29
2.3.1. ¿Qué es Geogebra? 29
2.3.2. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos 30
2.3.3. La variación 34
2.3.4. Función (Algunas ideas sobre su concepto y posibles maneras de abordarla en la escuela) 35
2.3.5. Proceso cognitivo 36
2.3.6. El razonamiento 37
2.3.7. Los problemas de optimización. 38
2.3.8. Reflexiones sobre el marco teórico y referencial 39

3. Metodología **43**
3.1. Tipo de Trabajo 43
3.2. Instrumentos metodológicos 43
3.2.1. Talleres de familiarización 43
3.2.2. Talleres guiados 44
3.2.3. Talleres de profundización 44
3.3. Población y muestra 44
3.4. Fuentes de información 44
3.5. Análisis e interpretación de los resultados 44

4. Resultados **47**
4.1. Prueba exploratoria 47
4.2. Experiencia en los talleres de familiarización 1, 2, 3 y 4 49
4.3. Experiencia talleres guiados 51
4.4. Taller Guiado 1 51
4.4.1. Taller Guiado 2 53
4.4.2. Taller Guiado 3 55
4.5. Experiencia Talleres de Profundización. 57
4.5.1. Taller de Profundización 1. 57
4.5.2. Taller de Profundización 2 59

5. Conclusiones y Recomendaciones **63**
5.1. Conclusiones 63
5.2. Recomendaciones 65

6. Bibliografía **67**

Anexos **71**

Resumen

En el presente trabajo de investigación se exploran las dificultades que presentan los estudiantes de último grado de bachillerato de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera, al abordar un problema de variación y en particular aquellos que hacen referencia a los problemas de optimización. Tiene como objetivo contribuir en la comprensión de este tipo de problemas y el uso adecuado de estrategias de solución, haciendo una mediación con el software educativo Geogebra. Dentro de los resultados encontrados se destacan: avances de los estudiantes en procesos asociados al pensamiento variacional, como reconocimiento y comprensión de variables, las conversiones de las representaciones algebraicas y la modelación y generalización; el uso de geogebra como mediador en la búsqueda de estrategias de solución; la solución de problemas de optimización al margen de la teoría de derivadas, entre otros.

Palabras Claves:Geogebra, pensamiento variacional, optimización, representaciones, resolución de problemas.

Abstract

In the present research work are explored the difficulties presented by the students of last grade from the highschool Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera, when it's approach a variation problem and in particular that mae refererences to optimization problems. The objective is to contribute to the understanding of this kind of problems and the appropriate use of solution strategies, based on the use of Geogebra educational software. Among the results found are: student advances in processes associated with variational thinking, understanding of variables, conversions of algebraic representations and modeling and generalization; the use of geogebra as a mediator in the search for solution strategies; the solution of optimization problems outside the theory of derivatives, among others.

Keywords: Geogebra, variational thinking, optimization problems, representations, problem solving.

Introducción

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, especialmente el cálculo diferencial, ha sido objeto de preocupación a nivel mundial por el alto índice de estudiantes con dificultad para aprender la materia que conlleva de manera causal a un aumento en el índice de reprobación. Esto deja ver la importancia de incentivar el estudio de la variación desde temprana edad, de modo que se una al niño al amor por ell saber, aprender y hacer matemáticas (Ramos, 2013).

Las Matemáticas en Colombia se perciben como una de las áreas más difíciles de aprender por parte de los estudiantes en las aulas de clases, entiéndase esto como el hecho que no son bien acogidas por los educandos, quienes no ven sentido a lo que se escribe con números y letras. Una manera de contrarrestar lo anterior, consiste en dar importancia al aporte que hace el uso de las tecnologías y su incorporación en los procesos de enseñanza y aprendizaje, particularmente en el área de matemáticas; puesto que involucran una dinámica activa y atractiva para llevar al estudiante y a su vez las potencialidades que estan ofrecen como mediador cognitivo en el papel amplificador y reorganizador de conocimientos. Además, las ventajas que estan ofrecen, a través de los sistemas de representación ejecutables, la modelación y la simulación se convierten en un arma poderosa a la hora de incursionar al niño en el estudio de la variación y la sistematización de sus ideas.

Las ideas anteriormente expuestas, da al uso de las TIC un papel relevante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es decir, tanto para los docentes como para los estudiantes. Los primeros tienen el reto de repensar su quehacer educativo y el modo de percibir las matemáticas, y los segundos repensar sobre su propio pensamiento y la tarea de deducir desde la exploración sobre los objetos matemáticos en estudio y la sistematización de sus ideas, de tal modo que a la vez que reorganiza sus ideas o percepciones previas amplifica sus aprendizajes (Moreno, 2001).

El uso de la aplicación Geogebra, brinda múltiples posibilidades para que el educando comprenda problemas algebraicos y de variación en el campo de la optimización, por la multifuncionalidad que presenta con las diferentes temáticas, y su versatilidad en el uso y manipulación de gráficas y simulaciones; por tanto, se convierte en un apoyo indispensable para el desarrollo de este trabajo que precisamente tiene como objeto contribuir al fortalecimiento de los procesos de reconocimiento y comprensión de variables, uso de sistemas de representación, modelación y generalización, asociados al pensamiento variacional, a partir de la solución de problemas de optimización. De este modo, buscamos atacar ciertas dificul-

tades detectadas en este tipo de competencias y hacer un aporte significativo en la obtención de mejores resultados en las pruebas internas y externas.

El trabajo se estructura básicamente en 5 capítulos. En el capítulo I, se expone el horizonte del trabajo (descripción del problema, justificación y objetivos). En el capítulo II, el marco referencial que da sustento teórico al trabajo y sus intenciones. En el capítulo III, se habla sobre la metodología, los instrumentos metodológicos a usar y la manera en que analizarán los resultados. El capítulo IV, presenta los resultados obtenidos producto de la intervención. Y el capítulo V, esboza las conclusiones del trabajo y algunas recomendaciones para trabajos futuros.

Capítulo 1

Horizonte del Trabajo

1.1. Descripción y Planteamiento del Problema

En tiempos de cambio poblacional e incremento de las tecnologías, se hace más interesante el ejercicio docente, siendo necesario la transformación de las didácticas generales y las estrategias para la enseñanza de las matemáticas. Se puede afirmar que una de las dificultades en el aula, es la representación analítica y algebraica de diferentes situaciones y problemas matemáticos, debido a la complejidad que tiene lo abstracto del lenguaje matemático; así mismo, el uso de números racionales y sus operaciones básicas, cosas que parecían interesantes en los primeros grados de secundaria, ya son hoy en día, aburridas y desmotivantes para los estudiantes de los grados superiores, lo que produce apatía en los Educandos frente a las matemáticas.

En este sentido, es preocupante que los estudiantes no tienen gusto por aprender matemáticas, esto se evidencia en que no saben interpretar y analizar problemas que involucran álgebra, por lo cual se hace necesario realizar en el aula diferentes actividades mediadas por la ofimática que motiven al estudiante en el saber y el saber hacer de esta disciplina, pues debe ser él mismo quien construya su conocimiento.

Adicionalmente, los planes de estudios universitarios, relacionados con el campo de las ciencias básicas y las ingenierías, han concedido papel fundamental, dentro de la componente de formación básica al estudio del cálculo diferencial, pues se considera parte fundamental en el futuro desempeño profesional de los estudiantes, por lo que es necesario en aspectos como:

- El tratamiento y estudio de fenómenos físicos (campo de la física).
- El análisis del comportamiento de factores como el crecimiento poblacional y la reproducción de ciertas especies (campo de la biología).
- Estudios financieros y de producción de una determinada empresa (campo administrativo).

- Cálculos rutinarios en diseños y construcciones (campo de la ingeniería) (Figueroa y Muñoz, 2003)

En fin, un mundo de situaciones cuyos comportamientos se pueden analizar y se pueden modelar a través de la teoría del cálculo diferencial.

En este sentido, el uso de software educativo y todo lo relacionado con el uso de herramientas ofimáticas estimulan al estudiante, de tal manera que se convierten en el mejor mediador pedagógico para desarrollar una mejor praxis en el aula, las aplicaciones cobran un papel relevante, especialmente cuando hablamos de resolver situaciones problemas que implican procesos de optimización.

La solución de este tipo de problemas es una de las dificultades más notorias en los estudiantes de último grado de educación media y de primer semestre en la Universidad, debido a que estas requieren del dominio de una serie de preconceptos y procedimientos (como proporcionalidad, semejanza y congruencia de figuras, el teorema de Pitágoras, las relaciones trigonométricas, manejo de diversas clases de funciones, solución de ecuaciones, factorización, el uso de sistemas de representación, algunas leyes de la física, etc.), procesos de pensamiento (como la modelación, el razonamiento, la generalización, abstracción, interpretación, comprensión, etc.) y uso de diversas estrategias para su solución (Figueroa y Muñoz, 2003). Además, se suman las dificultades en cuanto a las estrategias didácticas usadas por los docentes para enseñar y generar aprendizajes significativos en sus estudiantes al abordar las temáticas y procesos mencionados, especialmente en los niveles de educación básica y media.

Por lo tanto, para tratar de fortalecer el pensamiento variacional se hace necesario dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué estrategias se pueden implementar en la Institución Educativa Normal Superior "Claudina Múnera" para estimular el desarrollo del pensamiento variacional y la compresión de problemas de optimización con ayuda de Geogebra?

En este contexto, se presenta el trabajo "Potenciando Pensamiento Variacional y Uso de Sistemas Algebraicos con Geogebra", que busca contribuir al fortalecimiento de procesos asociados al pensamiento variacional, que posibilite al estudiante comprender y dar solución a problemas de variación, especialmente a problemas de optimización, haciendo uso de las tecnologías como herramienta de mediación cognitiva.

1.2. Justificación

La Unesco en su Catálogo Universal de Ciencias de 1990, tiene una parte dedicada a las Matemáticas, las cuales divide en los siguientes grupos: Algebra,análisis, funciones, geometría, teoría de números, investigación operativa, probabilidad, estadística. Los cuales están subdivididos en capítulos compuestos por cientos de temas (Ramos, 2013).

Los tres primeros temas que propone la Unesco, resultan más problemáticos a la hora de aprenderlos por parte de casi todos los estudiantes, pues no es un secreto que dar resolución a problemas que involucran álgebra, exigen al estudiante comprender diferentes sistemas de representación que son indispensables para la comprensión de lo abstracto y del uso de la letra como variable. Por ello, la dificultad es que los educandos llegan al último grado de bachillerato, sin apropiación conceptual de los diferentes las diversas temáticas relacionadas con el álgebra (operaciones con expresiones algebraicas, casos de factorización, ...), la solución de problemas que involucra ecuaciones (primer y segundo grado), desigualdades, etc. De igual manera, no asocian ni profundizan en conceptos como: el Teorema de Tales, las relaciones trigonométricas, las funciones y la graficación de su comportamiento, operaciones con funciones, cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, entre otros aspectos.

Hoy día en el ambiente escolar se habla de desarrollar en los estudiantes procesos de pensamientos como el numérico, métrico, espacial y el variacional, que brindan múltiples posibilidades para comprender y abordar situaciones de su entorno y de las mismas matemáticas. De estos tipos de pensamientos cobra gran relevancia el pensamiento variacional, toda vez que abre la posibilidad al estudiante de afianzar en la comprensión de conceptos como la proporcionalidad, funciones, variables, dependencia e independencia de variables y en el manejo de procesos como la modelación, generalización, abstracción, uso de sistemas de representación, entre otros (MEN, 1998).

Cabe señalar que la culpa no es solo de los educandos, también radica en el docente, puesto que no hemos entendido que los que debemos cambiar en nuestras metodologías o formas de enseñanza, somos los profesores. Ya que como lo declara Bruner: introducir a alguien a una disciplina no es simplemente cuestión de hacer que acumule los resultados en su memoria. Más bien es enseñarle a participar en el proceso que hace posible el establecimiento del conocimiento (Galván, 2013). Entendamos que los niños de hoy, son de hoy, por lo cual debemos adaptar nuestras clases a la onda de sus necesidades, no de las nuestras, y que mejor que hacer uso de las tecnologías que se acrecientan cada día, y que son el motor de ilusión, interés, entretenimiento y gran motivación de nuestros estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas.

En este marco, la educación matemática en Colombia ha sufrido cambios importantes, gracias al trabajo que se ha venido realizando en cuanto a la concientización y cualificación de los docentes, para abordar en la escuela la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y la incorporación de tecnologías como calculadoras y computadoras, que de alguna manera han revolucionado la forma de ver las matemáticas (MEN, 2004).

Los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias, plantean que una de las maneras de iniciar el estudio y desarrollo del proceso de la variación en el ámbito escolar, es a partir del abordaje de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambios y variación de la vida práctica, ya que durante la solución de las mismas, el estudiante se acerca a procesos, procedimientos y acciones que favorecen el desarrollo del pensamiento variacional y el uso de diversas estrategias de solución (MEN, 2002).

De igual manera se habla de la importancia que cumplen los medios tecnológicos en esta tarea, ya que facilitan la realización de procesos como la reorganización y amplificación del conocimiento, la modelación y la generalización a través de la interactividad y exploración de objetos matemáticos, y abren la posibilidad de visualizar sistemas de representaciones como las tabulares, las gráficas de tipo cartesiano y las pictóricas que permiten al estudiante comprender la variación desde varios escenarios y verificar los resultados obtenidos (MEN, 2004).

En aras de contribuir al mejoramiento de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en la educación matemática de Colombia, específicamente para la comprensión de las matemáticas y la resolución de problemas, se presenta el trabajo "Potenciando Pensamiento Variacional y Uso de Sistemas Algebraicos con Geogebra". Trabajo que con su aplicación y desarrollo ofrecerá a los estudiantes múltiples ventajas, entre las que sobresalen:

- Favorece la resolución de problemas en el campo de la optimización debido a la construcción de la simulación y modelación de la situación, a partir de las variables que anteceden el problema.
- Permite identificar con mayor facilidad las variables involucradas en el problema, ya que es fundamental para el proceso de modelación y representación ejecutable con Geogebra.
- Potencia la creatividad para resolver problemas e implementar estrategias personales y grupales, lo cual favorece la comunicación y el trabajo colaborativo, permitiendo hacer conjeturas y un proceso de solución más confiable.
- Fortalece los procesos generales en competencia matemática: razonamiento, resolución de problemas, la comunicación y la modelación; al integrar los pensamientos: variacional, los sistemas algebraicos y analíticos, espacial y los sistemas geométricos, numérico y los sistemas numéricos.
- Motiva constantemente al estudiante en el uso de la tecnología y la comprensión de la aplicabilidad de las matemáticas en un contexto real y de su cotidianidad.
- Permite abarcar temáticas y conceptos básicos del cálculo diferencial, como la teoría de las derivadas y los problemas de optimización.

En este orden de ideas, esperando que los resultados sean exitosos y/o satisfactorios, este proyecto se puede concebir como una estrategia didáctica, que hace uso de la tecnología como mediadora pedagógica, para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, en el marco de la resolución de problemas en el campo de la optimización.

Este proyecto presenta una gran viabilidad para su desarrollo y financiamiento, ya que son pocos los recursos financieros que se invierten, gracias a que en la Institución Educativa Escuela Normal Superior "Claudina Múnera", se cuenta con una sala de tecnología con las herramientas ofimáticas (el programa Geogebra es de uso gratuito) y computacionales

necesarias, para un grupo de hasta 35 estudiantes, cada uno con computador personal y, un tablero digital que facilita las explicaciones del docente y la interacción de los mismos estudiantes, por lo cual sólo se invierte en las copias de los talleres y las hojas de respuestas para cada estudiante. Igualmente, se cuenta con un excelente cuerpo docente y gran apoyo de los directivos para la transversalización de las áreas con la tecnología y medios informáticos.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Contribuir al fortalecimiento de los procesos de reconocimiento y comprensión de variables, uso de sistemas de representación, modelación y generalización, asociados al pensamiento variacional, a partir de la solución de problemas de optimización con el uso de Geogebra.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Proponer un trabajo de aula que contemple el diseño e implementación de actividades de aprendizaje mediadas con tecnología en las que los estudiantes pongan de manifiesto competencias y procesos de pensamientos asociados al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos.
- Analizar y socializar el impacto y resultados obtenidos en cuanto al fortalecimiento de procesos asociados al pensamiento variacional, con la aplicación de la propuesta de trabajo.

Capítulo 2

Marco Referencial

2.1. Marco de Antecedentes

Muchos son los estudios que se han realizado en aras de facilitar en los estudiantes el aprendizaje del cálculo diferencial, utilizando como herramienta didáctica medios tecnológicos, que sin duda han dado resultados interesantes. A continuación, se presentan algunos de estos trabajos, relacionados de alguna manera con la temática motivo de estudio.

2.1.1. La enseñanza del concepto de límite en el grado undécimo, haciendo uso del Geogebra.

Autores, Año: Indira Bustos Gonzalez, 2013. UNAL Sede Manizales.

Objetivo: Propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de límite de funciones reales haciendo uso del software Geogebra.

Metodología: Para realizar esta propuesta se implementó una metodología cuantitativa, en donde se realizó dos tipos de análisis estadísticos, uno descriptivo, un análisis inferencial, donde se efectuó un diseño cuasi-experimental.

Resultados y Conclusiones: La realización de este trabajo permitió enriquecer el uso didáctico de las Tics y los beneficios del aprendizaje de las matemáticas en especial en el concepto de límite de funciones. Geogebra dinamiza el aula de clase, es una buena herramienta para captar la atención de los estudiantes, haciéndolos más activos creativos y participativos facilitando el desarrollo de las clases, Se percibió ritmos diferentes en cada estudiante y se pudo observar diálogo matemático entre ellos. Se deduce que el incremento en las calificaciones al usar el Geogebra es significativo. La noción de límite usando habilidades ligadas a la visualización matemática hizo posible establecer relaciones entre ε y δ cuando se analizaron los gráficos de distintos tipos de funciones.

2.1.2. Estudio de funciones con Geogebra.

Autores, Año: Clara Benedicto Baldonado, 2012. Universidad de Valencia.

Objetivo: Aprovechar la visualización dinámica e interactiva que ofrece Geogebra para comprender, profundizar y mejorar la observación y análisis de las propiedades de las funciones.

Metodología: La utilización del modelo de Pirie y Kieren (1994) el cual reza que la comprensión matemática de un individuo particular sobre un tópico matemático específico, evoluciona a través de ocho estratos potenciales, de los cuales, tomaron en cuenta los primeros 4, debido a que los últimos cuatro estratos implican una dedicación mayor y el volumen de este trabajo propuesto no los satisface. Estrato 1: Conocimiento primitivo. Estrato 2: Creación de imagen. Estrato 3: Comprensión de la imagen. Estrato 4: Observación de la propiedad. Estrato 5: Formalización. Estrato 6: Observación. Estrato 7: Estructuración. Estrato 8: Invención.

Resultados y Conclusiones: Los estudiantes terminaron las sesiones con una comprensión clara de los conceptos estudiados (tasa de variación media, derivada, monotonía, extremos y concavidad); gracias a la visualización que ofrece el Geogebra además que permite razonar, deducir, crear un ambiente participativo y de motivación hacia las matemáticas. La mayoría de los alumnos alcanzaron el cuarto estrato del modelo de Pirie y Kieren. Citan que Geogebra ofrece los siguientes beneficios:

- Mejora el proceso de pensamiento de los estudiantes a medida que éstos construyen conocimiento matemático. Mejora el proceso de pensamiento de los estudiantes a medida que éstos construyen conocimiento matemático.
- Permite a los alumnos adquirir destreza en el manejo de herramientas de software aplicadas a la enseñanza de las funciones.
- Las representaciones gráficas son más fáciles de construir haciendo uso del software.
- Permite obtener el registro del trabajo con facilidad, ya que las actividades realizadas pueden guardarse y recuperarse sin inconvenientes permitiendo retomarlas en diferentes instancias e incluso imprimirlas.

2.1.3. Apropiación del concepto de función usando el software Geogebra.

Autores, Año: José Nelson Martínez Gómez, 2013. UNAL Sede Manizales.

Objetivo: Diseñar módulos didácticos e interactivos incorporando el software para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje y la apropiación del concepto de función, función lineal y cuadrática, así como su aplicación en la solución de situaciones problema de la vida real.

Metodología: Diseño y aplicación de módulos didácticos e interactivos incorporando el software Geogebra, cuya estructura está basada en la teoría del Aprendizaje Significativo y la Secuencia Didáctica de Pedagogía Conceptual de Miguel de Zubiría:

- Inicio: con dos fases: Motivación y Encuadre
- Etapa de comprensión: Sus fases son Enunciación y Modelación
- Etapa de desarrollo: Sus fases son Simulación y Ejercitación
- Cierre: Sus fases son Demostración, Síntesis y conclusión

Resultados y Conclusiones: Es necesario en el proceso de enseñanza de funciones en básica secundaria retomar con mayor énfasis el concepto de función como relación de magnitudes o representación de una ley de variación, permitiendo romper la barrera que sesga dicho concepto a solo una imagen visual o curva generada o una expresión analítica aislada. De esta manera, las aplicaciones y solución de las situaciones problemas planteadas en los diferentes módulos propuestos con el software Geogebra son una estrategia didáctica muy valiosa para tal motivo. Geogebra es una herramienta de gran utilidad para la orientación de un sinnúmero de temáticas (incluidas funciones cúbicas, exponenciales, logarítmicas, entre otras) con el potencial para generar aprendizajes significativos en los estudiantes; además, por ser un software de uso libre puede ser instalado fácilmente en las salas de sistemas de las instituciones Educativas y ser una herramienta de trabajo permanente de los docentes en el área de matemáticas.

2.1.4. Exploración del impacto producido por la integración del ambiente de geometría dinámica (AGD) Geogebra en la enseñanza de los cursos de matemáticas básicas de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia sede Palmira.

Autores, Año: Miguel Angel Carranza Rodriguez, 2011. UNAL Sede Palmira.

Objetivo:Analizar el impacto que la integración del AGD Geogebra en la enseñanza, al recurrir a varios sistemas de representación y a las interrelaciones entre los diversos tipos de registros, pueden generar en el aprendizaje de los contenidos y en el desarrollo de habilidades básicas en Matemáticas de los estudiantes matriculados en los cursos de Matemáticas Básicas de la Universidad Nacional de Colombia sede Palmira.

Metodología Esta investigación tuvo como eje de trabajo, obtener datos de la población objetivo desde el SIA de Palmira, y el DNA de Bogotá, realizando Estadística Descriptiva - Estadística Inferencial. Estos archivos son la base estadística de las conclusiones de esta investigación. Este trabajo contó con tres estrategias de enseñanza:
Estrategia 1. Con Mediación Tecnológica Completa (MTC) en la enseñanza tradicional (2 grupos, según distribución de listados del SIA) Estrategia 2. Con Mediación Tecnológica

Moderada (MTM) en la enseñanza tradicional (2 grupos) Estrategia 3. Sin Mediación Tecnológica (SMT) en la enseñanza tradicional- (4 grupos) Se usó Geogebra como software matemático específico para desarrollar la mediación tecnológica en los grupos seleccionados, es decir, para reforzar los procesos de significación, usando varios sistemas de representación haciendo interacción dinámica entre ellos.

Resultados y Conclusiones: La mediación del AGD Geogebra permite la movilización entre los sistemas de representación: simbólicos, numéricos, gráficos y analíticos; y el desarrollo de habilidades en el manejo y el análisis de las principales funciones reales de una variable real y el uso de las geometrías euclidiana y analítica. Con base en los resultados de esta experiencia se invita a la comunidad docente del país, para que inicien el rediseño parcial de sus cursos de matemáticas básicas de primer semestre de las universidades colombianas, contando con la mediación del AGD Geogebra.

2.1.5. Razonamiento covariacional a través de software dinámico: el caso de la variación lineal y cuadrática.

Autores, Año:Piedad Elena Ávila Mejía, 2011. UNAL Sede Medellín.

Objetivo:Describir el proceso de razonamiento covariacional asociado al concepto de función (lineal y cuadrática) a través del uso del software dinámico (Geogebra, Modellus).

Metodología: Se retoma algunas características del enfoque cualitativo en cuanto la descripción e inmersión del contexto, caracterización de los estudiantes, objeto de estudio, las unidades de análisis y los alcances y limitaciones de este estudio. Para tal objetivo se tuvo como herramientas principales tres actividades enmarcadas dentro del contexto de las funciones lineales y cuadráticas; además del uso de diversas herramientas tecnológicas como software, el papel y el lápiz, entre otros, como mediadores para el desarrollo de esas actividades.

Resultados y Conclusiones: Las conclusiones se dividieron en tres categorías:
El Concepto de Función Lineal y Cuadrática: el estudio de las funciones (lineal y cuadrática), debe ser abordado desde la noción de variación y es posible dejar de un lado la enseñanza "tradicional" que sobre este concepto se ha estado abordando. Características de las funciones como lo son crecimientos, decrecimientos, concavidades, puntos de inflexión, puntos máximos o mínimos, carecen de sentido cuando son trabajadas de manera tradicional en cambio se hacen más significativas para los estudiantes a través de sus propias vivencias.

El Razonamiento Covariacional: Aunque hubo acercamientos por parte de los estudiantes en cuanto a sus razonamientos, construcciones algebraicas y construcciones gráficas, no se observó que ellos hicieran un análisis de la variación, es decir que no identifican aun la variación de segundo orden. Cabe resaltar que este tipo de análisis carecía de interés con respecto a lo que se quería lograr con este estudio, lo que deja abierto el camino para posteriores actividades que generen esta profundización por parte de los estudiantes y de los docentes.

El Uso de Herramientas Tecnológicas: Las herramientas utilizadas a partir del software (Geogebra y Modellus) permitieron a los estudiantes validar aquellas construcciones que ellos realizaban tanto en lápiz y papel, como en computador, referentes a las gráficas, las tablas de valores o algunas respuestas de tipo aritmético y algebraico.

2.1.6. Propuesta metodológica para la enseñanza-aprendizaje de la geometría mediada por el diseño de situaciones problema que contribuye a la formación de valores en el grado sexto de la I.E. Lola González.

Autores, Año: Adriana Lucia Escobar, 2015.

Objetivo: Elaborar una propuesta metodológica para la enseñanza-aprendizaje de la geometría mediada por el diseño de situaciones problema que contribuya a la formación de valores en los estudiantes del grado sexto de la I.E. Lola González.

Metodología: Se aproxima un tipo de investigación en profundización de corte monográfico, empleando método inductivo, con enfoque cualitativo de corte etnográfico. Se tienen en cuenta las siguientes etapas para el desarrollo de la propuesta:

- Etapa 1. Como fuente primaria se realiza un par de pruebas diagnósticas. Una de conocimientos y la otra sobre valores.
- Etapa 2. Análisis de los resultados de las pruebas diagnósticas para detectar las necesidades cognitivas y afectivas de los estudiantes,
- Etapa 3. Implementar la propuesta diseñada
- Etapa 4. Validar la propuesta.

Resultados y Conclusiones:

- Mediante el desarrollo de las situaciones problema el estudiante forma parte activa en su proceso de aprendizaje, logrando que éste adquiera los conocimientos desde la interacción y el diálogo con sus compañeros.
- Los resultados obtenidos en la aplicación de la prueba de salida mostraron una mayor apropiación de los conceptos de perímetro y área que fueron los trabajados en el desarrollo de la situación problema.
- Al desarrollar la situación problema empleando el trabajo colaborativo, se observó cómo mejoró la tolerancia y la responsabilidad de cada estudiante al desempeñar su rol correspondiente dentro del grupo, con el fin, de no perjudicar el trabajo de sus compañeros de equipo.

2.1.7. Incidencia de las tecnologías de la información y la comunicación como estrategia de aprendizaje del álgebra en estudiantes de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia sede Palmira

Autores, Año: Jaime García Echavarría, 2012. UNAL Sede Palmira.

Objetivo:Desarrollar una secuencia didáctica en la que a través de la mediación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), se orienten procesos de enseñanza y de aprendizaje, de tal manera que permitan mejorar las competencias en matemática básica de los estudiantes, a través de un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) como el software Geogebra, para construir los conceptos de irracionalidad numérica y el de los productos notables.

Metodología: De manera puntual, se puede decir que la investigación se desarrolló con dos estrategias de enseñanza: Estrategia 1. Con mediación Tecnológica haciendo uso de los AGD: se usó Geogebra para reforzar los procesos de significación, usando varios sistemas de representación (como el numérico, el gráfico, el simbólico y el analítico) haciendo interacción dinámica entre ellos. Estrategia 2. Sin mediación Tecnológica: recibieron la clase tradicional, es decir, el tablero fue el principal recurso didáctico.

Resultados y Conclusiones: La secuencia didáctica que se realizó a través de la mediación tecnológica permitió fortalecer los procesos de aprendizaje de los estudiantes de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira, pues fue posible comprobar las relaciones entre los lados, las áreas de cuadrados y de rectángulos que se formaron para llegar a la construcción de los productos notables y al concepto de irracionalidad numérica, mejorando los desempeños en su primer parcial por medio de los objetos de aprendizaje haciendo uso del AGD Geogebra. El trabajo con los objetos de aprendizaje a través del software de Geogebra fue de gran utilidad porque permitió el desarrollo dinámico de las relaciones docente, estudiantes y objeto de conocimiento. Esto se evidenció a lo largo del desarrollo de las actividades propuestas en el aula.

2.1.8. La utilización del software Geogebra como apoyo didáctico en la enseñanza de los temas de sistemas de ecuaciones y funciones y su relación con el rendimiento académico de los estudiantes de décimo año de la Unidad Educativa Tuntatacto, "Cantón Guano"

Autores, Año: Mirna Yessenia Campoverde Delgado, 2015. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Riobamba. Ecuador.

Objetivo: Determinar si la utilización del software Geogebra como apoyo didáctico en la

enseñanza de la matemática en los temas de Sistemas de ecuaciones y funciones incide en el rendimiento académico en los estudiantes de décimo año de Educación Básica de la Unidad Educativa “Tuntatacto".

Metodología: Se aborda la metodología cuantitativa, con un enfoque pragmático, haciendo hincapié lo didáctico e instrumental, donde se relacionan las variables positivamente a través del chi cuadrado (χ^2) por su tendencia a dicha función y el uso de Geogebra.

Resultados y Conclusiones: Al aplicar el software Geogebra para fortalecer el rendimiento académico de los estudiantes y como apoyo didáctico en la enseñanza de la Matemáticas, se encontraron resultados positivos desde el desarrollo de la guía de utilización del software permitiendo que construyan su propio conocimiento, con la supervisión efectiva del docente. Desde las observaciones no estructuradas, se determina cualitativamente que los estudiantes sí desarrollaron el dominio de los sistemas de ecuaciones, las funciones y sus representaciones gráficas a través de Geogebra.

2.1.9. La génesis instrumental: un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software Geogebra con estudiantes de ingeniería

Autores, Año: Luis Daniel Chumpitaz Malpartida, 2015. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Objetivo:Analizar las acciones de los estudiantes que instrumentalizan al Geogebra en una secuencia de aprendizaje de la función definida por tramos.

Metodología: La metodología de investigación es cualitativa-experimental y es considerada en este trabajo a través de la ingeniería didáctica, ya que permitirá analizar exhaustivamente todos los componentes de los procesos de construcción y comunicación de los saberes matemáticos en la clase.

Resultados y Conclusiones:
Señalan que el uso del aspecto dinámico del Geogebra en la secuencia de aprendizaje, en particular cuando diseñamos actividades de construcción de una función por tramos de trazo continuo, permitió minimizar dificultades en identificar el dominio y realizar transformaciones, sin embargo con las variedad de posibilidades en el aspecto gráfico de la función definida por tramos dejamos abierta la posibilidad de establecer un determinado conjunto de características de esta función que hagan menos complicado su aprendizaje en los cursos cálculo y pre cálculo.

Aprecian que los equipos de estudiantes tenían integrantes que movilizaban esquemas de uso pre-existentes. En el uso del Geogebra, identificamos que estos esquemas pre existentes estaban relacionados con el uso de otro software, observamos esto cuando los estudiantes rea-

lizaban un arrastre, un zoom de acercamiento o alejamiento y el desplazamiento de la vista gráfica del Geogebra. En el uso de la función definida por tramos, se detalla que estos esquemas pre existentes están relacionados con actividades previas de aprendizaje de funciones, como cuando los estudiantes identificaban el dominio, el rango y realizaban transformaciones de funciones.

2.1.10. Estratégia didáctica mediada por el software Geogebra para fortalecer la enseñanza-aprendizaje de la geometría en estudiantes de 9 de básica secundaria

Autores, Año: Carlos Alberto Torres Rodríguez Deris María Racedo Lobo. 2014. Universidad de la Costa. Barranquilla.

Objetivo: Mejorar la enseñanza-aprendizaje de la geometría con la aplicación del software Geogebra en los estudiantes de 9 de educación básica secundaria.

Metodología: El presente trabajo de investigación es de nivel explicativo y según su finalidad se inserta en la categoría (grado de abstracción) de proyecto de investigación aplicada, ya que busca la solución a problemas prácticos, con un margen de generalización limitado. El enfoque epistemológico del proyecto es el hermenéutico, señalándosele como una investigación cuasi-experimental de corte cuantitativo.

Resultados y Conclusiones:

- Fue posible demostrar que en los temas de geometría del segundo periodo académico para el grupo experimental apoyado con el software Geogebra, se evidenció mejoramiento en el aspecto académico con respecto al grupo control que solo desarrolló clases bajo el enfoque tradicional.
- La estrategia didáctica empleada en esta investigación, con el apoyo del Geogebra, logró hacer que muchos de los estudiantes que tenían bajas o regulares notas se motivaran a "competir" y a discutir sobre temas geométricos, por lo que se puede afirmar que esta estrategia ayudó a reforzar la confianza de estos en su interacción con los otros.
- El uso del Geogebra reforzó las apreciaciones de tipo visual hechas por los estudiantes, ya que les permitió realizar medidas directas y manipular los objetos. Esto pone en ventaja a los estudiantes que utilizan este tipo de programas sobre aquellos que usan solo representaciones hechas en un tablero con un marcador y una regla o con lápiz y papel, ya que pueden verificar si las propiedades de un objeto o representación geométrica se cumplen en el espacio.

En concordancia con los antecedentes anteriormente descritos, el uso de las nuevas tecnologías para complementar al maestro su praxis pedagógica, vistas como potenciadores y facilitadores del aprendizaje en los estudiantes en los diferentes ciclos: básica primaria, secundaria y media vocacional; cobran gran importancia frente a las realidades actuales en

el proceso de enseñanza, en especial de las matemáticas. En este sentido, se aprecia que Geogebra, es una herramienta ofimática que ayuda como mediador pedagógico, entre el nuevo conocimiento matemático y el aprendiz, permitiéndole explorar y comprobar, diferentes teoremas y aspectos abstractos que contienen en sí, el tratamiento de diferentes expresiones algebraicas y gráficas.

2.2. Marco Teórico

En cualquier campo de educación, en especial el de las matemáticas, se encuentra que los procesos de aprendizaje han sido transformados a lo largo de la historia debido a los avances tecnológicos, a los cambios sociales y culturales, a las nuevas tendencias de mercadeo y medios de comunicación.

Desde este punto de vista se encuentra que las generaciones estudiantiles llegan a la academia con unos conocimientos construidos desde sus experiencias, los cuales se convierten en el punto de partida para el desarrollo: cognitivo, emocional, creativo; y para su formación integral.

Las teorías sobre las que se sustenta el presente trabajo las clasificaremos de la siguiente manera:

- **Teorías sobre Construcción del Conocimiento**: El Constructivismo: (La teoría de Piaget, Aspectos socio-cognitivos del aprendizaje), El Aprendizaje Significativo, Aprendizaje Colaborativo y el Trabajo en Grupo, La Teoría de las Situaciones Didácticas y La Cognición Situada.
- **Teorías sobre el Uso de Estrategias Meta-cognitivas en la Resolución de Problemas**: La Resolución de Problemas (Polya y Schoenfeld), Utilización Del Conocimiento y de las Estrategias en la Solución de Problemas, La Mediación Instrumental, Nuevos Sistemas de Representación
- **Teorías sobre el Papel de la Tecnología en el Aprendizaje de las Matemáticas**: TIC Miguel de Guzmán, La Tecnología y la Resolución de Problemas, Software Algebraicos y Aprendizaje de las Matemáticas, La Tecnología como Amplificador y Reorganizador del Aprendizaje.

Figura 2.1: Clasificación general de las teorías del trabajo de investigación. Fuente propia

2.2.1. Teorías sobre Construcción del conocimiento

Figura 2.2: Teorías sobre construcción del conocimiento. Fuente Propia

2.2.1.1. El constructivismo

El presente trabajo basa sus concepciones en dos teóricos que tienen gran relevancia para el constructivismo y en sí, para los procesos de enseñanza y de aprendizaje como tal, Jean

Piaget y Lev Vygotsky.

Según Moreno Armella & Waldegg, Jean Piaget afirma que a través del conocimiento físico, social y lógico, en el cual el niño se relaciona e interactúa tanto con el contexto físico que lo rodea como con las personas que comparten a su alrededor (sus estructuras cognitivas), construye su conocimiento, analizando y reflexionando acerca de sus pre saberes y los aprendizajes que va adquiriendo, lo que le permite a través de esta retrospección, hacer un proceso de inducción y deducción para reafirmar con más claridad el conocimiento ya adquirido por medio de la experiencia o modificarlo a través del error, es decir, las estructuras cognitivas evolucionan hacia un pensamiento cada vez más estable, que es capaz de incorporar en sus explicaciones un número creciente de situaciones del mundo físico y del entorno cognitivo. Piaget intenta explicar los mecanismos de adquisición y de utilización de los conocimientos a partir de la génesis de las operaciones lógico-matemáticas subyacentes a toda actividad intelectual (Moreno y Waldegg, 2002).

Las etapas sucesivas del desarrollo cognitivo del niño, son resultado – según Piaget – de la experiencia y de la acción del sujeto que actúan como motores de la construcción, e incluso de la reconstrucción de las representaciones internas que el niño se hace del medio físico, inicialmente percibido y comprendido de manera intuitiva. Piaget sostiene que, en lo esencial, el desarrollo cognitivo parte de la puesta en marcha de conocimientos concretos, sostenidos primero en representaciones inmediatas y posteriormente en hipótesis (construcción de la inteligencia abstracta). Se trata de un largo proceso de organización del mundo marcado por adquisiciones relacionadas con los conocimientos y con la utilización de sistemas de relaciones entre objetos (clasificación, seriaciones), entre los objetos y el sujeto, y finalmente entre los objetos, el sujeto, el tiempo y el espacio.

Piaget recuerda que la maduración y la influencia social no son ajenas al proceso del incremento de conocimientos. Sostiene que el desarrollo de los aprendizajes es igualmente la consecuencia de un factor importante como es la Equilibración.

La Equilibración de las estructuras cognitivas traduce el pasaje de un estado de menor equilibrio que resulta de respuesta del sujeto a las perturbaciones exteriores, hacia un estado de equilibrio superior que corresponde a posibilidades nuevas derivadas de una estructura cognitiva más poderosa. Así, en el dominio del desarrollo Lógico - matemático, ilustrado por la adquisición de las conservaciones, Piaget muestra que, en el curso del desarrollo el niño pasa por tres momentos clave: Las perturbaciones, las compensaciones y la puesta en correspondencia matemática. En el conjunto de desarrollo, los progresos en el conocimiento resultan de una construcción en la que el sujeto es el actor de sus aprendizajes en interacción con el mundo. La concepción del aprendizaje es resueltamente constructivista. Actuando sobre el medio, el sujeto reconstruye el mundo físico y social que le rodea, lo objetiviza y lo representa. (Moreno y Waldegg, 2002)

Desde Vygotsky se concibe el desarrollo cognitivo como el resultado de la interacción y relación del niño con el medio físico y social, teniendo en cuenta los entornos en los que se desenvuelve, pero poniendo como mediador necesario el lenguaje, el cual condiciona el

desarrollo cognitivo del estudiante, cambiando de acuerdo a la interiorización de lo social. Este teórico imprime gran importancia al lenguaje, haciéndolo ver como el mediador entre el estudiante y el conocimiento, y generando cambios estructurales de gran relevancia que permiten al alumno adquirir con la experiencia los presaberes.

Las corrientes de investigación que comparten la tesis de que la interacción del individuo con el medio social es determinante de sus adquisiciones cognitivas, se apartan de los acercamientos que privilegian la interacción intra – individual del aprendizaje. Vygotsky concibe el desarrollo cognitivo como la apropiación por parte del individuo, de las actividades humanas depositados en el mundo de la cultura.

La zona de desarrollo próxima

La tesis de Vygotsky significa que las capacidades de aprendizaje de un niño no deben ser confundidas con el nivel cognitivo que tiene en un determinado momento. En un dominio cualquiera, existe un espacio potencial de progreso en el que las capacidades individuales pueden ser sobrepasadas si se reúnen ciertas condiciones. La asistencia del otro es una de estas condiciones. Este potencial de aprendizaje que se actualiza en la interacción social, define uno de los conceptos centrales de la teoría de Vygotsky: La zona de desarrollo próximo. Ésta es una componente crucial del proceso de desarrollo porque presagia y prepara lo que el niño más tarde realizará por si solo: "Lo que un niño puede hacer hoy en colaboración con otro lo podrá hacer solo mañana". El aprendizaje antecede al desarrollo: La zona de desarrollo próximo asegura la vinculación entre ambos. El docente debe ajustar los contenidos y las condiciones de instrucción, no a las capacidades actuales del niño, sino a su potencial de progreso. (Moreno y Waldegg, 2002)

En este sentido la teoría constructivista permitirá a los estudiantes en el desarrollo de los talleres planteados en la investigación construir sus conocimientos y apropiarse con más claridad de las temáticas planteadas.

2.2.1.2 El aprendizaje significativo

Para D.P. Ausubel el aprendizaje debe ser una actividad significativa para la persona que aprende y dicha significatividad está directamente relacionada con la existencia de interacciones entre el conocimiento nuevo y el que ya posee el alumno. Ausubel critica la enseñanza tradicional en que el aprendizaje resulta poco eficaz si consiste simplemente en la repetición mecánica de elementos que el alumno no puede estructurar formando un todo relacionado. Para Ausubel, aprender es sinónimo de comprender. Por ello lo que se comprenda será lo que se aprenda y recordará mejor por que quedará integrado en las estructuras de conocimiento de cada cual.

La teoría del aprendizaje significativo es una introducción a la sicología del aprendizaje en el salón de clases, que se ocupa principalmente del problema de la enseñanza y de la adquisición y retención de las estructuras de significados en el alumno. El principio básico de esta teoría reside en la afirmación de que las ideas expresadas simbólicamente, van rela-

cionadas de modo no arbitrario; es decir de manera sustancial con lo que el alumno ya sabe. Por eso la recomendación Ausubeliana se basa en averiguar primero lo que el alumno ya sabe para proceder en consecuencia (Ausubel, Norak y Hannesian, 1976).

Para que se produzca aprendizaje significativo han de darse dos condiciones fundamentales:

1. Actitud potencialmente significativa de aprendizaje por parte del aprendiz, o sea, predisposición para aprender de manera significativa.

2. Presentación de un material potencialmente significativo. Esto requiere:

   a) Por una parte, que el material tenga significado lógico, esto es, que sea potencialmente relacionable con la estructura cognitiva del que aprende de manera no arbitraria y sustantiva;

   b) Y, por otra, que existan ideas de anclaje o subsumidores adecuados en el sujeto que permitan la interacción con el material nuevo que se presenta.

Atendiendo al objeto aprendido, el aprendizaje significativo puede ser representacional, de conceptos y proposicional. Si se utiliza como criterio la organización jerárquica de la estructura cognitiva, el aprendizaje significativo puede ser subordinado, superordenado o combinatorio (Rodríguez, 2004).

2.2.1.3 Aprendizaje colaborativo y el trabajo en grupo

Se define como la adquisición y construcción de conocimientos o destrezas con la ayuda de la interacción con los compañeros, bien sea esta interacción en forma de críticas, comparaciones, discusiones sobre los distintos puntos de vista, etc. Se ha demostrado en varias ocasiones que el trabajo en grupo es favorable al aprendizaje, ya que facilita cambios cognitivos, conlleva a discusiones que surgen de los distintos puntos de vista de los compañeros y además los distintos razonamientos que se exponen conllevan a un aprendizaje y una interacción constructivista (lo que un niño es capaz de hacer hoy con ayuda de alguien, mañana podrá hacerlo por sí solo") (Vigotsky, 1996)

De manera general, resultado de investigar, se encuentra que el trabajo colectivo es un factor de progreso cognitivo. Sin embargo, en ciertas ocasiones de co – acción, los aportes de cada uno de los miembros del grupo son menores que las de los sujetos cuando trabajan solos.

En suma, sería ilusorio pensar que el simple hecho de poner a trabajar en grupo a los alumnos nos garantiza automáticamente un progreso, si no se modifican sustancialmente las relaciones y los acuerdos de trabajo en el salón de clases. La organización de situaciones tutoriales puede permitir a los estudiantes poco aventajados, beneficiarse del trabajo con los alumnos más avanzados.

Las nuevas tecnologías se enfocan en este tema, aportando las herramientas necesarias para que las personas que accedan a ellas puedan compartir con los demás sus conocimientos,

intereses, ideas, gustos... Llevar a cabo tareas entre un grupo de estudiantes les proporciona una oportunidad en la que no sólo empiezan a comprender y adoptar ideas de los demás, sino también empiezan a discutir sus actividades y hacen que sus pensamientos sean visibles. (Hernández, 2008)

2.2.1.4 La teoría de las situaciones didácticas

Para Brousseau, desde la concepción más general de la enseñanza, el saber es una asociación entre buenas preguntas y buenas respuestas. Sobre esta base, el énfasis del acercamiento radica en la identificación y el diseño de las buenas preguntas que generen los conflictos cognitivos y sociocognitivos detonadores del aprendizaje; estas buenas preguntas constituyen las situaciones didácticas. (Moreno y Waldegg, 2002)

La teoría de las situaciones didácticas pone al profesor en una interacción asimétrica con respecto a los estudiantes puesto que es él quien conoce los propósitos y efectos didácticos de la situación presentada. Sin embargo, en el desarrollo de la actividad cognitiva, los participantes desarrollan una interacción simétrica en la búsqueda de soluciones a la situación planteada.

La situacion problema: La situación problema constituye el punto de partida de las situaciones didácticas. Definida como una situación didáctica fundamental, pone en juego, como instrumento implícito, los conocimientos que el alumno debe aprender. La situación problema es el detonador de la actividad cognitiva; para que esto suceda debe tener las siguientes características:

- Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender.
- Debe representar un verdadero problema para el estudiante, pero, a la vez, debe ser accesible a él.
- Debe permitir que el alumno use conocimientos anteriores.
- Debe ofrecer una resistencia suficiente para llevar al alumno a poner en duda sus conocimientos y a proponer nuevas soluciones.
- Debe contener su propia validación.

La resolución de una situación problema supone la superación de un conflicto cognitivo interno del sujeto entre sus conocimientos anteriores y los que resuelven la situación problema (Moreno y Waldegg, 2002).

2.2.1.5 La cognición situada

En los años recientes, la investigación en educación matemática ha tenido como uno de sus intereses principales demostrar que el aprendizaje y la práctica de las matemáticas no son actividades individuales, aisladas de los contextos socioculturales en los que tienen lugar.

Que la enseñanza y el aprendizaje siempre han tenido lugar dentro de contextos sociales que no solo tienen una influencia, sino que determinan la naturaleza del conocimiento construido (Moreno y Waldegg, 2002).

Las investigaciones realizadas desde la perspectiva situada sostienen que los factores sociales y lingüísticos son básicos para el estudio de los procesos de aprendizaje. En particular del aprendizaje de las matemáticas.

Esto implica que como docentes debemos estudiar los grandes problemas del contexto, tener claridad acerca de las competencias que pretendemos desarrollar en los estudiantes, apropiarnos con profundidad de los contenidos disciplinares y luego saber cómo llevar a cabo la mediación con ellos para que "aprendan" y refuercen las competencias, partiendo de sus saberes previos y aplicando estrategias didácticas pertinentes, de acuerdo con las competencias, contenidos y problemas.

De esta forma, la educación sigue siendo intencional, porque se trata de planear procesos de acuerdo con ciertas metas, pero esta planeación debe orientarse en torno al desarrollo de las competencias que requieren los ciudadanos de hoy (Tobón, Pimienta y García, 2010).

2.2.2. Teorías sobre estrategias meta cognitivas en la resolución de problemas

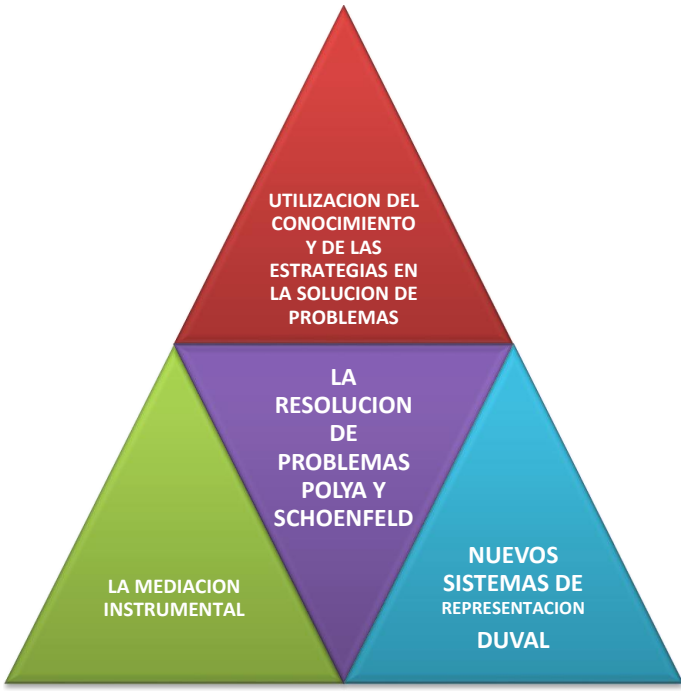


Figura 2.3: Esquema teorías sobre resolución de problemas. Fuente propia

2.2.2.1 La resolución de problemas

La actividad de resolver problemas ha sido considerada como un elemento importante en el desarrollo de las matemáticas y en el estudio del conocimiento matemático. En diferentes propuestas curriculares recientes se afirma que la resolución de problemas debe ser el eje principal del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática (MEN, 2002).

La resolución de problemas no es sólo uno de los fines de la enseñanza de las matemáticas, sino el medio esencial para lograr el aprendizaje. Mediante la resolución de problemas matemáticos, los estudiantes deberán adquirir modos de pensamiento adecuados, hábitos de persistencia, curiosidad y confianza ante situaciones no familiares que les serán útiles fuera de la clase de matemáticas. Incluso en la vida diaria y profesional es importante ser un buen solucionador de problema (Godino, 2004).

En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

Para Polya "resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, de salir de una dificultad, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados" (MEN, 2002). Polya describe las siguientes cuatro fases para resolver problemas y cada fase se acompaña de una serie de preguntas cuya intención clara es actuar como guía para la acción (Godino, 2004).

Comprender el problema: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?

Concebir un plan: ¿Se ha encontrado con un problema semejante? ¿O ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente? ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar. Hay aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría usted utilizarlo? ¿Podría utilizar su resultado? ¿Podría emplear su método? ¿Le haría a usted falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo? ¿Podría enunciar el problema en otra forma? ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.

Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible? ¿Un problema más general? ¿Un problema más particular? ¿Un problema análogo? ¿Puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición; descarte la otra parte; ¿en qué medida la incógnita queda ahora determinada? ¿En qué forma puede variar? ¿Puede usted

deducir algún elemento útil de los datos? ¿Puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre sí?

¿Ha empleado todos los datos? ¿Ha empleado, toda la condición? ¿Ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

Ejecución del plan: Al ejecutar su plan de la solución, compruebe cada uno de los pasos. ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto? ¿Puede usted demostrarlo?

Visión retrospectiva (Examinar la solución obtenida): ¿Puede usted verificar, el resultado? ¿Puede verificar el razonamiento? ¿Puede obtener el resultado en forma diferente? ¿Puede verlo de golpe? ¿Puede usted emplear el resultado o el método en algún otro problema? (Polya, 1965).

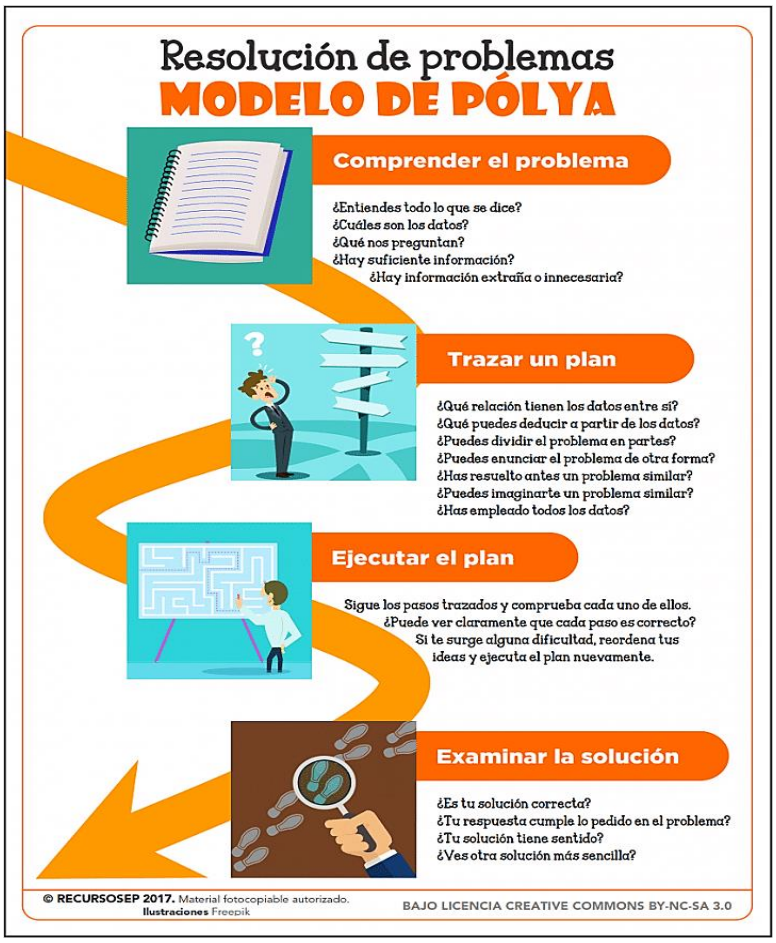


Figura 2.4: Modelo de Polya. Fuente: https://goo.gl/9XYD1e

Schoenfeld propone un marco con cuatro componentes que sirven para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas:

1. Recursos cognitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor.

2. Heurísticas: reglas para progresar en situaciones difíciles.

3. Control: aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles.

4. Sistema de creencias: nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y cómo trabajar en ella.

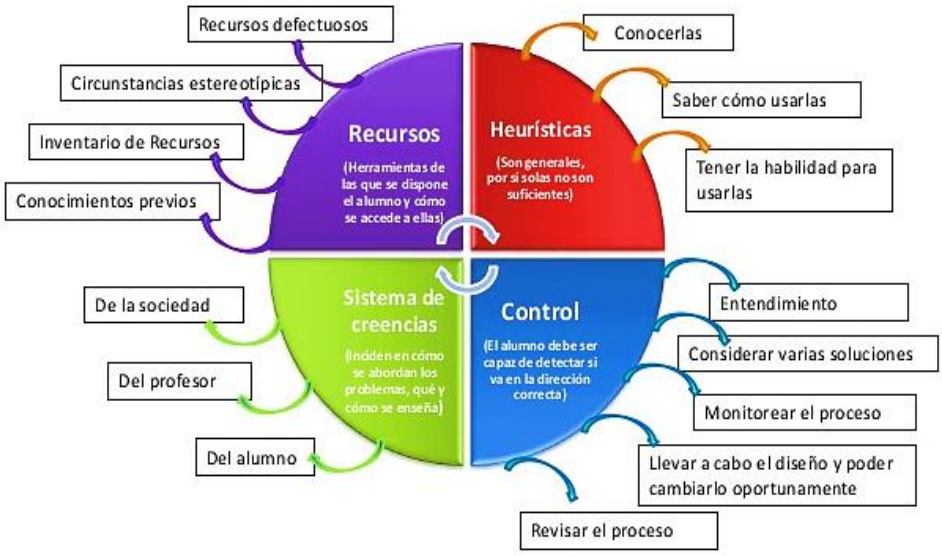


Figura 2.5: Modelo R. P. Schoenfeld. Fuente: https://goo.gl/bf83pn

2.2.2.2 Utilización del conocimiento y de las estrategias en la solución de problemas

Los conocimientos almacenados sobre el contenido no son capaces por si solos, de resolver los problemas. Debe existir también un mecanismo que dirija la búsqueda mental por las redes, para recuperar la información. Y debe existir un mecanismo que permita generar y probar de forma activa las nuevas relaciones entre conceptos y estructuras, cuando la información que se necesita no está almacenada exactamente de la forma que se necesita.

Las teorías del procesamiento de la información conciben que la mente humana posee, además de estructuras de conocimiento, un repertorio de estrategias de resolución de problemas que ayudan a interpretar los problemas, a localizar el conocimiento y los procedimientos almacenados, y a generar relaciones nuevas entre los ítems almacenados en la memoria por separado. Estas estrategias organizan el proceso de pensamiento, y recurren a diversos componentes del conocimiento para preparar un plan de acción que sea capaz de resolver la tarea planteada. Por lo tanto, debemos considerar tres aspectos fundamentales que ligan tanto los tipos de estructuras matemáticas que poseen las personas, los tipos de rutinas algorítmicas como las estrategias que poseen para acceder a sus conocimientos:

1. Cómo se representan los problemas.

2. Cómo se interrelacionan las características del entorno de la tarea con el conocimiento de un individuo.

3. Cómo se analizan los problemas y cómo se exploran las estructuras del conocimiento para conseguir asociar a una tarea la información que en un principio no se había relacionado con la misma (Resnick y Ford, 1991).

2.2.2.3 La mediación instrumental

La especie humana elabora herramientas con propósitos deliberados. Mediante la producción de herramientas hemos alterado nuestra estructura cognitiva y adquirido nuevos órganos para la adaptación al mundo exterior.

"La Mediación Instrumental aparece en las propuestas de Vygotsky como un concepto central para pensar y analizar las modalidades por las cuales los instrumentos influencian la construcción del saber" (Hernández , 2008).

En las matemáticas, la mediación se ha dado esencialmente a través de los sistemas semióticos de representación. La historia de dichos sistemas va exhibiendo las transformaciones conceptuales a que han dado lugar en el desarrollo de las matemáticas (Duval, 1998). El proceso de articulación entre el concepto matemático (el. objeto. matemático) y sus representaciones es un proceso de mutua constitución. Podría decirse que la evolución de los sistemas semióticos de representación, en el caso de las matemáticas, han pasado por diversas etapas entre las cuales vale la pena señalar la siguiente: la separación entre las representaciones mentales y las representaciones semióticas.

En la actualidad, las teorías de la cognición de mayor impacto en los contextos educativos, han reconocido la pertinencia del principio de mediación instrumental que se puede expresar de la siguiente manera: Todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico. En este principio convergen tanto la naturaleza mediada de la actividad cognitiva, como la inevitabilidad de los recursos representacionales para el desarrollo de la cognición. No hay actividad cognitiva al margen de la actividad representacional. (Moreno y Waldegg, 2002)

En sí, todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser material o simbólico, en nuestro caso, Geogebra.

2.2.2.4 Nuevos sistemas de representación (Enfoque de Duval, 1999)

En la actualidad, los instrumentos computacionales (calculadoras algebraicas, las computadoras, programas virtuales online y offline, ...) encarnan sistemas de representación que presentan características novedosas: Son sistemas ejecutables de representación, que virtualmente ejecutan funciones cognitivas que anteriormente eran privadas de los seres humanos.

Estos nuevos sistemas de representación (ejecutables como Geogebra) permiten al estudiante trabajar un problema desde diferentes enfoques cognitivos. Esto quizá nos esté indicando que un cambio central dentro la educación consistirá en abandonar el objetivo tradicional de fluidez algorítmica y sustituirlo por el objetivo de fluidez representacional, es

decir, que el estudiante pueda representar un problema en varios sistemas de representación y sea capaz de interpretar los resultados del tratamiento que se les dé a tales sistemas mediante el instrumento ejecutor del que disponga (Moreno y Waldegg, 2002).

Las matemáticas como toda actividad intelectual, sufren la profunda influencia de las tecnologías existentes. Con el correr del tiempo las tecnologías se tornan invisibles y las actividades que se generan a partir de ellas se conciben como actividades matemáticas independientes de aquella tecnología. Surge así la noción de una actividad matemática pura, al margen de su entorno sociocultural.

Los sistemas de representación clásicos (álgebra, cálculo, ecuaciones diferenciales, etc.) tienen una característica central: Son sistemas de representación diseñados para poder actuar sobre ellos mediante reglas de transformación bien definidas. Un caso elemental lo constituye la aritmética. En cambio, las representaciones ejecutables necesitan la mediación de un procesador sintáctico, como es un lenguaje de programación. Allí se transforma el trabajo cognitivo del estudiante: La actividad de construcción de significados se torna central (Moreno y Waldegg, 2002).

2.2.3. Teorías sobre el papel de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas.

Figura 2.6: Esquema teorias sobre tecnología y educación matemática. Fuente propia

2.2.3.1 La tecnología y la resolución de problemas

Hace algunos años, cuando la computadora empezó a vislumbrarse como un instrumento importante capaz de realizar diversas operaciones de manera eficiente y rápida, también se empezó a vislumbrar su potencia en la educación. En esta discusión hubo varias posiciones donde se señalaba la necesidad de tener más información acerca de cómo este instrumento podría utilizarse en el aprendizaje de varias disciplina (Santos, 1997).

En Matemáticas, por ejemplo, muchos profesores no permitían a sus estudiantes el uso de la calculadora en la resolución de problemas; esto era porque creían que la calculadora le restaba al estudiante posibilidades de desarrollar habilidades básicas necesarias en matemáticas (cálculos aritméticos, manipulaciones algebraicas, análisis discreto del comportamiento de relaciones o funciones matemáticas, etc.).

La discusión acerca de si los estudiantes deben o no usar instrumentos como la calculadora o la computadora en sus experiencias de aprendizaje está relacionada directamente con la pregunta: ¿Qué es lo que importa que el estudiante aprenda en matemáticas? El estudiante debe ser escéptico, hacer conjeturas, buscar evidencias, utilizar ejemplos y contraejemplos, y apoyar sus ideas con argumentos. El uso de la tecnología juega papel importante en el desarrollo de habilidades matemáticas por parte del estudiante, es decir, la tecnología ayuda a que el estudiante no sea solo un espectador o receptor del conocimiento, sino que pase a ser un ente activo vinculado directamente con el quehacer matemático.

Afortunadamente se ha reconocido la importancia del uso de la computadora en el aprendizaje y ahora el asunto es determinar cómo debe usarse este instrumento en las experiencias de aprendizaje de los estudiantes.

2.2.3.2 Papel de la tecnología como amplificador y reorganizador del aprendizaje

Son numerosos los trabajos que consideran las implicaciones posibles de las tecnologías informáticas, en particular de las calculadoras graficadoras, para el currículum. En términos generales, el punto de vista adoptado por los distintos autores consiste en estimar el impacto sobre la práctica escolar de dichos instrumentos. Es decir, su punto de vista consiste en imaginar (y evaluar) el desarrollo del trabajo escolar cuando las calculadoras se introducen en un currículum ya establecido (MEN, 2002).

En este sentido el papel de los instrumentos va más allá que el de servir de prótesis para la acción. La presencia de tales instrumentos puede reorganizar todo el funcionamiento cognitivo (Wertsch, 1993). Por ejemplo, puede contribuir al rediseño de las estrategias de resolución de problemas y a la reconceptualización mediante la sustitución de un sistema de representación. No olvidemos que: “Todo aprendizaje está mediado por instrumentos” (Martinez, 2008).

Frente a la calculadora, estamos entonces ante dos posibilidades:

- Entenderla como herramienta de amplificación
- Entenderla como herramienta de reorganización cognitiva

En realidad, es inevitable que, al introducir las calculadoras en la actividad de los estudiantes, se termine produciendo una nueva actividad matemática que, a su vez, genere una reorganización del conocimiento de los estudiantes.

Uno de los objetivos de la investigación en este terreno es tratar de entender cómo hay que realizar la implementación de la tecnología. Bien sabemos que la primera etapa puede implicar que tengamos que trabajar dentro del marco de un currículum ya establecido. Pero las innovaciones exitosas tendrán la capacidad de erosionar los currículos tradicionales. Aquí es donde la comprensión que alcancemos sobre el conocimiento producido con la mediación de las herramientas informáticas, se torna necesaria. (MEN, 2002)

La metáfora de las herramientas de amplificación sugiere pensar en una lupa. La lupa deja ver, amplificado, aquello que podía ser visto a simple vista. No cambia, por esto mismo, la estructura del objeto de nuestra visión. La metáfora de las herramientas de reorganización, sugiere pensar en un microscopio. Con el microscopio podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta. Accedemos entonces a un nivel de realidad novedoso. Se abre la posibilidad de estudiar algo nuevo y con ello, de acceder a un conocimiento nuevo.

La diferencia entre el impacto amplificador y el impacto reorganizador de las tecnologías puede apreciarse si distinguimos entre los efectos mientras se trabaja con la tecnología y los efectos que resultan de haber trabajado con la tecnología. La reorganización no puede separarse de la amplificación (Dorfler, 1993; Vasco, 2002).

2.2.3.3 Software algebraicos y aprendizaje de las matemáticas

En este sentido, y haciendo alusión a las Tics y el constructivismo, Stefany Raquel Hernández Requena en su artículo "El modelo constructivista con las tecnologías: aplicado en el proceso de aprendizaje", menciona:

"La teoría constructivista se enfoca en la construcción del conocimiento a través de actividades basadas en experiencias ricas en contexto. El constructivismo ofrece un nuevo paradigma para esta nueva era de información motivado por las nuevas tecnologías que han surgido en los últimos años. Con la llegada de estas tecnologías (wikis, redes sociales, blogs...), los estudiantes no sólo tienen a su alcance el acceso a un mundo de información ilimitada de manera instantánea, sino que también se les ofrece la posibilidad de controlar ellos mismos la dirección de su propio aprendizaje (...) Cambiar el esquema tradicional del aula, donde el papel y el lápiz tienen el protagonismo principal, y establecer un nuevo estilo en el que se encuentren presentes las mismas herramientas pero añadiéndoles las aplicaciones de las nuevas tecnologías, aporta una nueva manera de aprender, que crea en los estudiantes una experiencia única para la construcción de su conocimiento" (Hernández, 2008).

De acuerdo a lo anterior y teniendo en cuenta los apuntes hechos acerca de la importancia de las TIC en el proceso de aprendizaje, su interrelación con el constructivismo y a la vez con las matemáticas permitirán crear un ambiente de aprendizaje que permita al estudiante desarrollar el pensamiento creativo, por cuanto se desarrolla la habilidad para pensar, crear, proponer, analizar y reconstruir el conocimiento de acuerdo a sus necesidades e intereses; desarrollar el razonamiento critico de acuerdo a un modo de pensar y de reflexionar sus actuaciones y las experiencias propias de él, comparándolas y contrastándolas con el conocimiento que se construye para así apropiarse de manera más concreta y clara de los conceptos que se le brindan en la clase. Además, desde la resolución de problemas, puede permitirse claramente tanto el contraste de conocimientos (pre saberes y conocimientos nuevos) como la construcción de aprendizaje significativo, ya que estos parten necesariamente de las experiencias del estudiante y de su entorno cercano.

2.3. Marco Conceptual

2.3.1. ¿Qué es Geogebra?

Geogebra es un software dinámico de matemáticas para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. Geogebra es también una comunidad en rápida expansión, con millones de usuarios en casi todos los países. Geogebra se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo (IGI, 2017).

Podemos construir de modo muy simple puntos, segmentos, polígonos, rectas, vectores, cónicas, gráficas de funciones, curvas paramétricas y diagramas estadísticos. Todo esto dinámicamente, de forma que cualquier objeto puede sufrir modificaciones con un simple movimiento del ratón. El éxito en el uso de este programa dependerá en un gran parte del empeño y dedicación que tengamos para aprender el manejo de sus herramientas y comandos.

Sus datos más interesantes:

- Conectamos geometría, álgebra y hoja de cálculo de forma completamente dinámica
- Interfaz muy fácil de usar, a pesar de contar con poderosas herramientas
- Herramienta de autoría para crear materiales de aprendizaje interactivos como páginas web
- Disponible en varios idiomas, para millones de usuarios en todo el mundo
- Software de código abierto disponible gratuitamente para usos no comerciales (IGI, 2017)

Geogebra fue desarrollado por Markus Hohenwarterel y su grupo de trabajo, para permitir la exploración y manipulación directa y dinámica de la geometría, a través de la interacción didáctica. Es un medio de trabajo donde el estudiante tiene la posibilidad de experimentar con una materialización de los objetos matemáticos, de sus representaciones y de sus relaciones, de tal forma que los estudiantes pueden vivir un tipo de experimentación matemática que no es posible tener de otra forma. Por consiguiente, es natural esperar que los estudiantes que trabajen con Geogebra podrán avanzar en su comprensión y conocimiento de la geometría de una manera distinta a la que ofrecen los medios tradicionales. Los estudiantes que trabajen con el programa serán capaces de enfrentar problemas diferentes y más amplios.

2.3.2. Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

El MEN atribuye que el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas (MEN, 2002).

Un primer acercamiento en la búsqueda de las interrelaciones permite identificar alguno de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrado la variación:

- Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;
- La función como dependencia y modelos de función.
- Las magnitudes.
- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo.
- Modelos matemáticos de tipos de variación: Aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio relativo y el cambio absoluto. La proporcionalidad cobra especial significado.

En lo que concierne a la conceptualización de lo que se entiende por pensamiento variacional, rescatamos:

"El pensamiento variacional puede describirse, aproximadamente, como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas de tal forma que covarían de forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos de la realidad. Como la covariación de cantidades de magnitud en el tiempo" (Vasco, 2002).

Es importante resaltar el hecho de que pensamiento variacional no es sólo:

- Saber la definición de función.
- Saber fórmulas de áreas y volúmenes.
- Saber los modelos usuales de la física matemática.
- Saber dibujar y manejar gráficas de las funciones cartesianas.

Su propósito fundamental apunta a tratar de modelar patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad y que su desarrollo sólo es posible en la medida que el estudiante pueda lograr desarrollar:

- Pensamiento numérico.
- Pensamiento métrico.
- Pensamiento proporcional.
- Una notación apropiada.
- El pensamiento espacial, espacio temporal.
- Representaciones semióticas diferentes (gestuales, representaciones de máquinas y circuito, representaciones sagitales)

Además, busca que en el trabajo de aula se posibilite adelantar acciones como:

- Captación del patrón de variación.
- Creación del modelo mental.
- Echar a andar el modelo.
- Confrontar el modelo.
- Revisar el modelo mental.

Siguiendo a Vasco, para poder lograr desarrollar el pensamiento variacional es necesario que el estudiante modele procesos y fenómenos de la realidad. Entendiendo que un modelo es un sistema de componentes, relaciones y transformaciones, y la modelación como:

- Un arte.
- El arte de producir modelos matemáticos.
- Un arte del que depende cualquier progreso de la ciencia (Vasco, 2002).

Abordado así el desarrollo del pensamiento variacional se asume por principio que las estructuras conceptuales se desarrollan en el tiempo, que su aprendizaje es un proceso que se madura progresivamente para hacerse más sofisticado, y que nuevas situaciones problemáticas exigirán reconsiderar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas.

Entre los diferentes sistemas de representaciones asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional, la mecánica, las formulas y las expresiones analíticas.

Entonces, el Pensamiento Variacional enfatiza en las relaciones entre las cantidades, incluyendo las funciones, las formas de representar relaciones matemáticas y el análisis de cambio. Interpretar ideas utilizando un lenguaje de símbolos, efectuar relaciones entre cantidades, incluyendo las funciones, las formas de representar relaciones matemáticas y el análisis de cambio, esto permite el desarrollo del pensamiento variacional y de sistemas algebraicos y analíticos. Por ello, se preparan a los estudiantes para:

- Entender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos.
- Usar modelos matemáticos para representar y entender relaciones cuantitativas.
- Analizar el concepto de cambio en varios contextos.

2.3.2.1 La comunicación

Una necesidad común que tenemos todos los seres humanos en todas las actividades, disciplinas, profesiones y sitios de trabajo es la habilidad para comunicarnos. Los retos que nos plantea el siglo XXI requieren que en todas las profesiones científicas y técnicas las personas sean capaces de comunicarse.

A nivel de aula, para que el estudiante pueda comunicarse matemáticamente, necesitamos establecer un ambiente en clase tal que la comunicación sea una práctica natural y que permita que los estudiantes:

- Adquieran seguridad para hacer conjeturas, para preguntar, para explicar, para argumentar y para resolver problemas.
- Se motiven a hacer preguntas y a expresar aquellas que no se atreven a exteriorizar.
- Escriban sobre las matemáticas, sus impresiones y creencias en cualquiera actividad de evaluación.

- Hagan informes orales en clase en los cuales comunican a través de gráficas, palabras, ecuaciones, tablas y representaciones físicas.
- Frecuentemente estén pasando del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático (Figueroa y Muñoz, 2003).

2.3.2.2 La modelación

Actualmente con la aparición de la era informática, uno de los énfasis que se hace es la búsqueda y construcción de modelos matemáticos. La tecnología moderna sería imposible sin las matemáticas y prácticamente ningún proceso técnico podría llevarse a cabo en ausencia del modelo matemático que lo sustenta.

La resolución de problemas en un amplio sentido se considera en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la Modelación.

Treffers y Goffree, describen la modelación como "una actividad estructurada y organizada, mediante la cual el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para descubrir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas". Ellos proponen que, para transferir la situación problemática real a un problema planteado matemáticamente, pueden ayudar actividades como las siguientes:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general.
- Esquematizar.
- Formular y visualizar un problema en diferentes formas.
- Descubrir relaciones y regularidades.
- Transferir un problema de la vida real a un problema matemático.
- Transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido.

Una vez que el problema sea transferido a un problema matemático, puede ser atacado y tratado con herramientas matemáticas, para la cual se pueden realizar las siguientes actividades:

- Representar una relación en una fórmula
- Probar o mostrar regularidades
- Reafinar y ajustar modelos
- Utilizar diferentes modelos
- Combinar e integrar modelos

- Formular un concepto matemático nuevo y hasta generalizar.

2.3.2.3 La medición

Medir es la tercera actividad universal e importante para el desarrollo de ideas matemáticas y se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor o importancia. Aunque todas las culturas reconocen la importancia de ciertas cosas, de nuevo vemos que no todas las culturas valoran las mismas cosas en la misma medida. Gran parte depende del entorno local y de las necesidades que este provoca.

Medir se ocupa básicamente de comparar cosas en función de una cualidad compartida, y su desarrollo va de las comparaciones de pares a las comparaciones de muchos, y de las unidades normalizadas a los sistemas de unidades. La noción de cualidad como cantidad continua está ahí (a diferencia de las cantidades discretas al contar) y, en consecuencia, los problemas explicados por la medición son problemas que responden a la pregunta ¿Cuánto? a diferencia de los que responden a la pregunta ¿Cuántos? Que genera la actividad de contar (Bishop, 1999).

2.3.2.4 La generalización

Se concibe como la manera de abstraer lo que es común y esencial en muchas cosas para formar un concepto que las comprenda a todas. Se generaliza cuando abarcamos a un conjunto de objetos, a partir del establecimiento de patrones de regularidad. La generalización se introduce a partir del estudio de los cuantificadores.

2.3.3. La variación

Es considerado como uno de los ejes conceptuales más importantes evaluados por el ICFES en el área de las matemáticas. En este eje se incluye el concepto de variable como articulador de los problemas que se plantean. Desde este concepto, es posible indagar por las diferentes significaciones sobre "lo que cambia" en una situación determinada; el reconocimiento de diversos elementos asociados a situaciones de variación, como reglas de transformación, universos numéricos; reconocimiento y uso de regularidades, patrones; sentido y uso de las relaciones que se posibilitan desde estas situaciones, (como ecuaciones, inecuaciones, funciones); sentido, significado y uso de distintas formas de representación en situaciones de variación (ICFES, 2002; ICFES, 2017).

El significado y sentido de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambios y variación de la vida práctica. La organización de la variación en tablas, puede usarse para iniciar en los estudiantes el desarrollo del pensamiento variacional por cuanto la solución de tareas que involucre procesos aritméticos, inicia también la comprensión de la variable y de las fórmulas. La calculadora numérica se convierte en una herramienta necesaria en la iniciación del

estudio de la variación.

La identificación de la variable dependiente e independiente es más significativa cuando se inicia desde la representación de situaciones concretas. Por su parte las gráficas hacen posible el estudio dinámico de la variación (MEN, 2002).

2.3.4. Función (Algunas ideas sobre su concepto y posibles maneras de abordarla en la escuela)

Indudablemente uno de los primeros conceptos matemáticos que aparecieron en la humanidad es el de Función. Es muy posible que antes de aparecer la noción de número entero, el hombre haya utilizado la asociación de cantidad con algún objeto. (Kleiner, 1980) menciona que 3700 años antes de aparecer el concepto de función se tenían anticipaciones del mismo. Lo cierto es que se tenían registros en tablillas babilónicas de relaciones entre números y sus cuadrados, números y sus raíces cuadradas. Para que el concepto de función llegara a surgir se requirió del desarrollo de cuestiones fundamentales en las matemáticas como: la extensión del concepto de número (de los enteros a los complejos), la geometría, el álgebra simbólica, la unión de ambas y la introducción del movimiento como un problema central en la ciencia.

La palabra "Función" apareció por primera vez en los manuscritos de Leibniz de agosto de 1673 y en particular en el titulado "The inverse method of tangents or about functions" (Método inverso de tangentes o sobre funciones) y fué introducida para designar un objeto geométrico asociado con una curva. La notación "f(x)" fué introducida por Clairaut y definida por Euler alrededor de 1734. Además, Euler fue el primero en darle al concepto de función un papel central y explícito en su "Introductio in analysin Infinitorum" (Introducción al análisis infinitesimal), este define a una función como una cantidad variable, como una expresión analítica compuesta en cualquier forma de esa cantidad variable y números ó cantidades constantes. EULER mismo menciona que cualquier curva dibujada a mano libre en un lugar determina una relación funcional que puede no ser representada, ya sea explícita o implícitamente, en forma analítica ordinaria (Cuevas, 1998).

Según lo establecido en los Lineamientos Curriculares el estudio de las funciones tiene más sentido sí se hace a partir de la modelación de situaciones de cambio. Es importante que los alumnos se sensibilicen ante los patrones que se encuentren a diario en diversas situaciones, a describirlos y a elaborar modelos matemáticos de esos patrones y a establecer relaciones.

Las tablas son otra forma de introducir la noción de función, se pueden usar posteriormente para llevar los estudiantes a la graficación de situaciones problemas de tipo concreto. La identificación de la variable dependiente e independiente es más significativa cuando se inicia desde la representación de situaciones concretas.

Por su parte las gráficas cartesianas sirven para mirar la relación explícita entre las

variables que determinan una gráfica que puede ser iniciada con situaciones de variación cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes coordenados. Particularmente la gráfica tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando la noción de función como dependencia.

Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para enlazar patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio.

2.3.5. Proceso cognitivo

Bruner postula la teoría del desarrollo cognitivo donde su principal interés es el desarrollo de las capacidades mentales. Señala una teoría de instrucción preescriptiva porque propone reglas para adquirir conocimientos, habilidades y al mismo tiempo proporciona las técnicas para medir y de evaluar resultados. J. Bruner propone que, con la comprensión suficiente de la estructura de un campo de conocimiento, algo que se anticipa a los conceptos posteriores y más avanzados, puede enseñarse de modo apropiado a edades mucho más tempranas. Se puede enseñar cualquier materia a cualquier niño en cualquier edad si se hace en forma honesta. (Bruner, 1960) señala que aprendizaje exige la comprensión por parte de quien aprende y no la mera realización de las acciones que no entienden.

El alumno selecciona, codifica, abstrae, interpreta, integra y recupera información para solucionar problemas y el docente debe propiciar situaciones de aprendizaje donde el niño participe, haga, piense y descubra (explore la situación); debe presentar la materia de modo agradable, interesante y comprensible al niño y, también, debe esperar a que los niños estén dispuestos a volver en sí mismos, antes de hacer las abstracciones para que las entiendan (Estrada y Huanca, 2011).

El desarrollo alude a su interés en el desenvolviendo cognoscitivo y recalca tres modalidades de representación en una secuencia:

Enactiva: es el aprendizaje por medio de una determinada acción, se realiza sin palabras, ejemplo aprender a saltar la cuerda.

Icónica: es la representación por medios perceptibles como mediante una imagen como por ejemplo un mapa mental que nos permita seguir una ruta

Simbólica: se da a través de un esquema abstracto que puede ser el lenguaje o cualquier otro sistema simbólico estructurado. Es la traducción de la experiencia en palabras que permiten otro tipo de transformaciones más complejas.

J. Bruner insiste en los procesos empíricos para que la teoría pueda prescribir la práctica.

Según Bruner, la enseñanza puede facilitar el proceso de descubrimiento de los niños por sí mismos, sin que ello signifique encontrar verdades totalmente nuevas. Y para ello la enseñanza debe propiciar un ambiente lleno de situaciones que el niño pueda abordar, que favorezcan su autonomía y que lo estimulen a aprender haciendo; debe tomar en cuenta el orden eficaz de los materiales y que el alumno aprenda a través de su actividad, que aprenda descubriendo y resolviendo problemas (Serrano, 1990).

2.3.6. El razonamiento

Dentro del contexto de planteamiento y resolución de problemas, el razonamiento matemático tiene que ver estrechamente con las matemáticas como comunicación, como modelación y como procedimientos.

De manera general, entendemos por razonar la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión. Razonar en matemáticas tiene que ver con:

- Dar cuenta del cómo y el porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.

Complementando, son varias las razones para considerar la importancia de las situaciones problemáticas en el aula y sobre todo en la enseñanza de las matemáticas, como lo menciona Martin Van Reeuwijk:

- Es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas.
- El mundo evoluciona muy rápidamente, los procesos efectivos, de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos.
- El trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorios auto realizador y creativo.
- Muchos de los hábitos que así se consolidan tiene un valor universal no limitado al mundo de las matemáticas.
- Es aplicable a todas las edades (Reeuwijk, 1997).

2.3.7. Los problemas de optimización.

Para Crisólogo Flórez; resolver problemas de cambios y de optimización, en términos generales consiste en comprender la existencia de al menos dos variables involucradas en la situación, establecer su papel de dependencia o independencia, mirar sus relaciones y establecer una ley o patrón que permita medir los cambios que estas sufren en un determinado momento.

Los lineamientos curriculares plantean la importancia de abordar en la escuela situaciones problemáticas referidas a fenómenos de cambios y variación de la vida práctica como los problemas de optimización, ya que a través de su solución se puede dar inicio al estudio y desarrollo del proceso de la variación en el ámbito escolar y además el estudiante se acerca a procesos, procedimientos y acciones que le permiten acceder al desarrollo del pensamiento variacional (Figueroa y Muñoz, 2003).

La comprension de problemas

Es tonto el contestar a una pregunta que no se comprende. Es deplorable trabajar para un fin que no se desea. Sin embargo, tales errores se cometen con frecuencia, dentro o fuera de la escuela. El maestro debe tratar de evitar que se produzca en su clase. El alumno debe comprender el problema, Pero no solo debe comprenderlo sino también debe desear resolverlo. Si hay falta de comprensión o de interés por parte del alumno, no siempre es su culpa; el problema debe escogerse adecuadamente, ni muy fácil ni muy difícil, y debe dedicarse tiempo a exponerlo de un modo natural e interesante. Ante todo, el enunciado verbal del problema debe ser comprendido. El alumno debe estar en condición para separará las partes principales del problema, la incógnita, los datos y las condiciones del problema (Polya, 2002).

Como familiarizarse con el problema:

¿Por dónde puedo empezar? Empiece por el enunciado del problema.

¿Qué puedo hacer? Trate de visualizar el problema como un todo, tan claramente como pueda. No se ocupe de los detalles por el momento.

¿Qué gano haciendo esto? Comprenderá el problema, se familiarizará con él, grabando su propósito en su mente. La atención dedicada al problema puede también estimular su memoria y prepararla para recoger los puntos importantes.

Como trabajar para una mejor comprensión:

¿Por dónde debo empezar? Empiece de nuevo por el enunciado del problema. Empiece cuando dicho enunciado resulte tan claro y lo tenga tan bien grabado en su mente que pueda usted perderlo de vista por un momento sin temor de perderlo por completo.

¿Qué puedo hacer? Aislar las principales partes del problema. La hipótesis y la Conclu-

sión son las principales partes de un "problema por demostrar"; las incógnitas, los datos y las condiciones son las principales partes de un "problema por resolver". Ocúpese de las principales partes del problema, considérelas una por una, reconsidérelas, considérelas después cambiándolas entre sí, estableciendo las relaciones que puedan existir entre cada detalle y los otros y entre cada detalle y el conjunto del problema.

¿Qué gano haciendo esto? Esta usted preparando y aclarando detalles que probablemente entraran en juego más tarde (Polya, 2002)

Alusivo a lo anterior, Miguel de Guzmán destaca que la enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamientos, en los procesos de aprendizajes y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiados para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Para lo cual, se busca que el estudiante manipule los objetos matemáticos; active su propia capacidad mental; reflexione sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo conscientemente; haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental; se divierta con su propia actividad mental; se prepare así, para otros problemas de la ciencia y posiblemente, de su vida cotidiana; se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia (Guzman, 1993).

De este lado, y después de realizar un análisis reflexivo sobre las tres grandes categorías teóricas que dan soporte a este proyecto, rescatamos que

- Las teorías sobre la Construcción del Conocimiento permiten la interacción directa del educando con material real, concreto y manipulable y relacionarlas con sus presaberes y el nuevo conocimiento, convergiendo en buenas prácticas y buenos resultados.
- Uso de estrategias metacognitivas en la resolución de problemas son fundamentales para el desarrollo exitoso de los procesos de enseñanza y aprendizaje, sobre todo en el área de las matemáticas y específicamente para potenciar y desarrollar procesos asociados al pensamiento variacional como: Reconocimiento y comprensión de variables, Conversión y tratamiento de sistemas semióticos de representación, y La modelación y generalización.
- Las teorías sobre el Papel de la Tecnología en el Aprendizaje de las Matemáticas son la evidencia de los cambios didácticos que se deben dar en la escuela, en las formas de enseñanza y las nuevas formas de aprender las matemáticas puesto que permiten dinamizar e interactuar con lo abstracto de las situaciones problema y a su vez, ser manipuladas.

2.3.8. Reflexiones sobre el marco teórico y referencial

En resonancia a todo lo anteriormente expuesto de las teorías mencionadas, nos dan una luz de cómo se pueden concebir el papel que ha de cumplir el estudiante, el docente y la

tecnología dentro del trabajo de aula que se va a desarrollar.

Papel del estudiante

El papel del estudiante durante la ejecución y desarrollo de los talleres, aparte de que él es el agente activo y el actor principal en este proceso, también debe asumir las siguientes responsabilidades:

- Enfrentarse a nuevas experiencias cognitivas y situaciones problema para darle solución a partir de la comprensión de las mismas mediante el reconocimiento y comprensión de las variables involucradas
- Realizar conversiones y tratamientos de sistemas representación de los problemas o situaciones planteadas para la construcción de modelos en medios ofimáticos.
- Formular preguntas o inquietudes mediante una comunicación asertiva de sus ideas en forma escrita u oral a sus pares o al docente
- Modelar las situaciones en forma virtual con ayuda tecnológica y haciendo uso razonable de los equipos.
- Utilizar los conceptos previos que le permitan sortear obstáculos presentados.

Papel del docente

El papel del docente durante todo el desarrollo del proyecto, se convierte en un agente motivador y guía para los estudiantes con el propósito de hacer más provechoso y dinámico los procesos de enseñanza y de aprendizaje, con miras al fortalecimiento de los procesos asociados al pensamiento variacional, por lo cual debe:

- Buscar aclarar dudas, ideas y generalizaciones hechas por los discentes
- Generar ambientes de discusión y conclusión acerca de las preguntas,
- Posibilitar e integrar situaciones experienciales y vivenciales, con el fin que el conocimiento sea más fructífero haciendo uso de la lúdica y la creatividad.
- Organizar y direccionar las actividades en grupos de trabajo, de tal manera que se posibilite el aprendizaje colaborativo y cooperativo.
- Hacer uso adecuado en la introducción de la nueva terminología y demostrar la formalización
- Proporcionar la terminología apropiada y presentar la formalización requerida por el conocimiento matemático establecido.

- Trascender las situaciones a contextos diferentes que permita a los estudiantes observar la misma temática y ampliar el campo de los conceptos establecidos y aprendidos.

Papel del medio tecnologico (calculadoras y/o Software Geogebra)

El papel del medio tecnológico, tanto el computador personal como el programa ofimático Geogebra, se convierten en los mediadores pedagógicos entre el nuevo conocimiento y el estudiante, es decir, su papel se centra como agente facilitador del conocimiento desde un enfoque demostrativo visual y manipulable, por lo cual llevan al estudiante a la comprensión y modelación de las situaciones en la resolución de problemas. Así mismo, debe:

- Ser el instrumento que amplifica y reorganiza el conocimiento del educando y hasta en el docente.
- Generar ambientes virtuales de aprendizaje que propicien motivación y empatía hacia las matemáticas a partir de las representaciones formales de objetos, manipularlos y mostrar sus relaciones a partir de la variación.
- Permitir la interactividad guiada en forma secuencial, para la comprobación de los resultados en diferentes representaciones semióticas de las variables y la modelación y generalización de los procesos.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Tipo de Trabajo

Este trabajo está enmarcado en el paradigma cualitativo y es de tipo descriptivo, por cuanto se quiere describir avances de los estudiantes en el desarrollo de procesos asociados al pensamiento variacional, cuando se enfrentan a la solución de problemas de optimización.

Dentro de estos procesos deseamos fortalecer los siguientes:

1. Reconocimiento y comprensión de variables: percibirla identificarla y caracterizarla independiente o dependiente.

2. Conversión y tratamiento de sistemas semióticos de representación: Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos. Traducir el texto o situación en lenguaje simbólico matemático (expresión algebraica), en tablas de valores y/o en forma gráfica en el plano cartesiano (Godino, 2004).

3. La modelación y generalización: para representar y entender relaciones cuantitativas. Formular y visualizar un problema en diferentes formas. Descubrir relaciones y regularidades. Transferir un problema de la vida real a un problema matemático. Esto a su vez, conlleva a la generalización y formalización: entendidas como la manera de abstraer lo que es común y esencial en muchas cosas para formar un concepto que las comprenda a todas.

3.2. Instrumentos metodológicos

Para la ejecución de la "propuesta de trabajo de aula", se plantea la realización de los siguientes tres tipos de talleres: de Familiarización, Guiados y de Profundización.

3.2.1. Talleres de familiarización

La intención de estos talleres es inducir a los estudiantes al uso y manejo del software Geogebra y familiarizarlos con las herramientas de construcción necesarias para abordar los problemas de optimización.

3.2.2. Talleres guiados

Se presentan formas de solucionar problemas de optimización con Geogebra, el docente guía a los estudiantes en este proceso trabajando simultáneamente, a medida que los estudiantes son guiados estos participan en la resolución, dando respuesta a los cuestionamientos hechos, preguntas que estarán basadas en la identificación de variables, utilización de preconceptos, el establecimiento de relaciones y reglas que liguen las variables implicadas, entre otros. Con el propósito de iniciar el fortalecimiento de los procesos: reconocimiento y comprensión de variables, las conversiones de las representaciones algebraicas y la modelación; asociados al pensamiento variacional.

3.2.3. Talleres de profundización

Se proponen situaciones problemas más complejas, cada estudiante aborda la situación, luego se reúnen en grupos para socializar y discutir las posibles soluciones, por último cada grupo expone su propuesta de solución. Durante este proceso el docente orientará a los estudiantes en las inquietudes y hará sugerencias necesarias que encaminen a la solución de los problemas. Con el fin potenciar los procesos de reconocimiento y comprensión de variables, las conversiones de las representaciones algebraicas y la modelación.

3.3. Población y muestra

La población a tener en cuenta para el desarrollo del trabajo la conforman los estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera, Aguadas – Caldas, cuyas edades oscilan entre los 15 y 18 años y están caracterizados por un estrato socioeconómico 1 y 2, además, son jóvenes activos y participativos que vivencian los valores institucionales: la verdad, la virtud y la responsabilidad, y se proyectan socialmente a la comunidad aguadeña desde diferentes facetas culturales, deportivas y pedagógicas.

3.4. Fuentes de información

La información que nos permitirá describir los resultados obtenidos en el trabajo, proviene de las siguientes fuentes:

- La producción escrita de los estudiantes en los talleres.
- La observación directa en el aula.
- El proceso de comunicación y relación docente-estudiante.

3.5. Análisis e interpretación de los resultados

La información y los resultados obtenidos de las diversas fuentes, se analizarán teniendo en cuenta el desempeño de los estudiantes en los siguientes procesos: Reconocimiento y com-

prensión de variables, conversión y tratamiento de sistemas semióticos de representación y, la modelación y generalización.

De estos procesos tendremos en cuenta algunos aspectos puntuales que el estudiante debe hacer o evidenciar como se muestra a continuación.

Proceso: Reconocimiento y comprensión de variables:

- Saca los datos del problema a resolver.
- Escribe e identifica puntualmente las variables dependientes
- Reconoce y señala la variable o variables independientes.
- Escribe o llega a la conclusión de utilizar una fórmula o algoritmo.

Proceso: Conversión y tratamiento de sistemas semióticos de representación:

- Representación Figural: desde la concepción de un dibujo que representa el problema.
- Fenomenológica si hace uso del papel para representar la situación en forma escrita o algebraica.
- La representación ejecutable (Geogebra): si comprende y usa las funciones adecuadas del programa y construye la simulación de la situación.
- Gráfica (cartesiana): si construye la gráfica del comportamiento de la función que involucra el problema, en estos casos para determinar el máximo o el mínimo.
- Simbólica algebraica: si transcribe la situación de lenguaje cotidiano a lenguaje matemático en forma de función
- Numérico variacional (tratamientos): si le da algún tratamiento o conversión a la representación simbólica.

Proceso: La modelación y generalización.:

- Formular y visualizar un problema en diferentes formas.
- Descubrir relaciones y regularidades.
- Transferir un problema de la vida real a un problema matemático.

En los talleres de familiarización sólo se hará una descripción de cómo los estudiantes aceptaron el uso del programa en las clases de matemáticas.

Capítulo 4

Resultados

Los resultados obtenidos se presentan en el orden que fueron desarrollados los instrumentos metodológicos y se rescatan los aportes más significativos en cada una de ellos

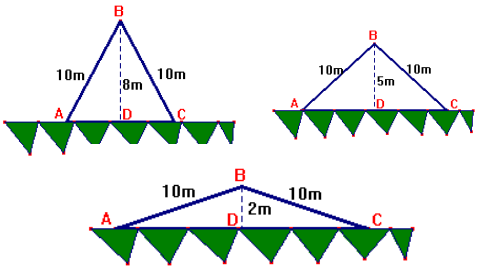
4.1. Prueba exploratoria

Los resultados obtenidos en la prueba exploratoria, cuyo objetivo era indagar sobre el conocimiento que los estudiantes tienen acerca de los conceptos de variación, función, variables (dependientes e independientes), el abordaje de problemas y la experiencia en el manejo de herramientas tecnológicas, se encontró que la mayoría de los educandos presentan dificultades con la apropiación de conceptos, ignorancia sobre problemas de variación, y un vacío conceptual enorme y de lectura frente a problemas algebraicos, de funciones, (en forma textual o literal, en forma algebraica y en forma tabular o gráfica), y problemas geométricos.

A continuación, se presentan generalizadas respuestas dadas por los estudiantes en la aplicación de la prueba, ya que fueron muy comunes:

Tabla 4.1: Resultados de la prueba exploratoria. Fuente propia

Preguntas	**Resultados**
1. Atendiendo a los conceptos que has podido construir en tus años de estudio, responde los siguientes ítems: ¿Has oído hablar de la variación?, ¿En qué momento y sobre que temática de estudio?, ¿Cómo la entiendes?	Es un cambio de valor en el que se pueden cambiar varios elementos. Se aplica en estadística y en matemáticas. Es el cambio o alteración en número X .La he usado en algebra lineal. La entiendo como una letra que puede sustituir por un numero cualquiera.
¿Qué problemas consideras están relacionados con el fenómeno de variación?	No sé. Ecuaciones y funciones.
Con tus palabras, expresa lo que entiendes por función	Es una regla que asigna a cada valor un número real X una variable Y. Es una operación que a cada elemento del conjunto x (dominio) corresponde a uno y únicamente uno del conjunto y (codominio)
¿Has oído hablar de variable?, ¿Cómo la entiendes?	No. Es una parte de una función o ecuación.
Describe en forma breve los pasos que usas para resolver problemas de matemáticas.	Leer, analizar, despejar si es necesario, hacer uso de una formula, y matemáticas básicas.

Preguntas	**Resultados**
	Leer el problema, analizarlo, entender el problema, aplicar un formula, reemplazar o sustituir, y por último operar para obtener el resultado.
2. Teniendo en cuenta la siguiente situación problema, responda las preguntas que se citan: Un pastor tiene dos lazos de cuerda de 10m de largo para hacer un cercado. Debe limitar un terreno por medio de las dos cuerdas y una barrera natural de piedra. Cada una de las siguientes figuras muestran un plan de las posibles formas de colocar las cuerdas contra la barrera AC de piedra cambiando la longitud BD:  ▪ Halle el área del triángulo ABC en cada caso. ▪ Escoja como variable x la longitud BD ¿Cuál es el valor máximo ymínimo que puede tomar esta variable? ▪ Usando el teorema de pitágoras, encuentra una fórmula para el área del triángulo ABC en función de x. ▪ Intenta hacer una gráfica de x contra área.	En cuanto a este punto, fueron muy pocos los estudiantes que dieron respuesta a la primera pregunta sobre el área de cada triángulo. Respecto a las demás ninguno las contestó.
3. ¿Alguna vez has manipulado un software matemático o una calculadora graficadora?, ¿Con qué objetivo?	Si, con el objetivo de resolver problemas y para aprender más y aplicarlos en la vida cotidiana. De mejorar conocimientos lógicos y matemáticos.

Preguntas	**Resultados**
¿Qué clase de software o programas de computación maneja?	Excel, Word, Power Point,
¿Qué software ha usado, para resolver problemas de matemáticas?	Calculadoras avanzadas online y offline, Geogebra.
¿Le parece bueno que las matemáticas se orienten haciendo uso en algunas ocasiones de computadoras o calculadoras?, ¿Por qué?	Pienso que las calculadoras son necesarias para facilitar el aprendizaje de las matemáticas de grados superiores. Si como material de apoyo, ya que se debe de hace practica manual para que el aprendizaje perdure. Sí, es buena en algunos casos de dificultad con ciertos temas y nos ayudaría a resolverlos de manera fácil. Aunque no es tan conveniente usar siempre las computadoras para resolver los problemas de matemáticas, ya que es necesario desarrollar la capacidad para hacerlo.

Se pudo apreciar, que durante el desarrollo de esta prueba exploratoria los estudiantes tienen dificultades frente a los procesos asociados al pensamiento variacional que se desean potenciar: el reconocimiento y comprensión de variables. la conversión y tratamiento de sistemas semióticos de representación y la modelación y generalización, puesto que la mayoría no respondieron muchas preguntas, en otras escribieron "no sé", y en las pocas que dieron si dieron respuesta, evidencian falta de apropiación de conceptos.

Así pues, de una u otra manera, se resalta la necesidad de potenciar el pensamiento variacional y el uso de sistemas algebraicos, en los estudiantes de último grado de la Escuela Normal Superior Claudina Múnera del Municipio de Aguadas.

4.2. Experiencia en los talleres de familiarización 1, 2, 3 y 4

Como se había expuesto en la metodología de este proyecto de investigación, los talleres de familiarización tienen como objeto introducir al educando en el reconocimiento de funciones y manejo de Geogebra, para poder tratar de dar solución a diferentes problemas matemáticos.

El aprendizaje del manejo y la utilidad de herramientas básicas del programa computacional Geogebra fue rápida y exitosa, y porque no decirlo acelerada, tal vez porque:

- los estudiantes en su mayoría manejan programas de office como Excel, Paint, Power Point, Word, aplicaciones Java en internet, el uso del celular Smartphone y sus aplicaciones con redes sociales;

- y/o gracias al orden de ejecución de los cuatro talleres de familiarización, por la conformación de grupos de trabajos, la ayuda visual en el tablero digital, la manera no instruccional de los talleres que invitan a la exploración mediante el uso de las herramientas de construcción básicas de Geogebra, para representar figuras geométricas y teselados necesarios para abordar los problemas de optimización.

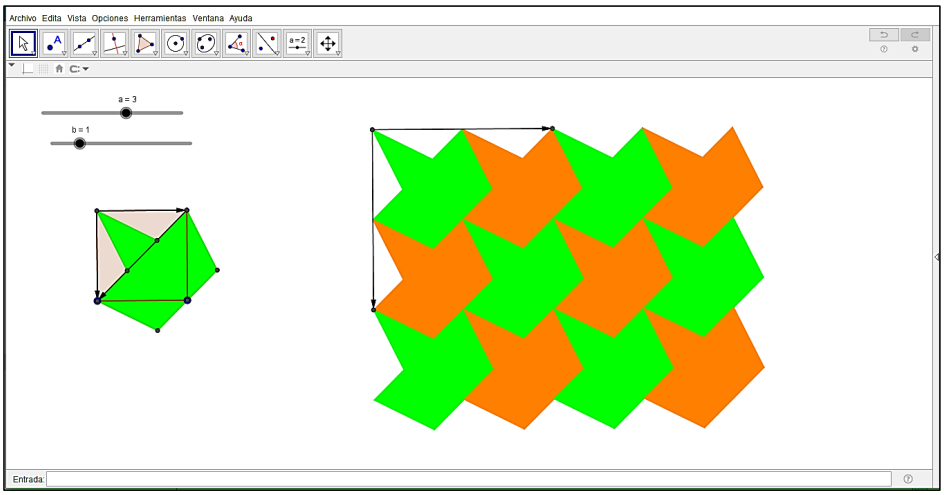


Figura 4.1: Representación de teselado con Geogebra. Taller de familiarización 4. Fuente: Elaboración de estudiantes.

En este sentido, durante la aplicación de estos talleres, se aprecia en los educandos las siguientes características y resultados:

- Realizan seguimientos oportunos y ágiles acordes a las orientaciones del profesor a través del tablero digital y el PC.
- Construyen figuras a partir de exploraciones con iconos y ficheros.
- Dan algunas orientaciones y correcciones a sus compañeros en el momento de la ejecución de cualquier taller, e indican herramientas de Geogebra.
- La realización de actividades reto, fueron fabulosas, puesto que ellos mismos sin necesidad de incitarlos, tomaron la iniciativa, buscando la manera o forma de resolverla, basándose en la actividad inicial o modelo.
- Evidencian interés y ganas de aprender matemáticas, ya que pueden ver en forma gráfica las diferentes representaciones y transformaciones de algunas funciones.
- Presentan motivación constante para el desarrollo de actividades matemáticas y geométricas con Geogebra.
- Propician un mejor ambiente de aprendizaje en el aula, puesto que se vivencia la ayuda mutua y el trabajo colaborativo.

- Genera mejores comprensiones mediante el uso de lenguaje matemático y todo lo referido al desarrollo secuencial, es decir, los estudiantes apropian y aplican el desarrollo de la solución de algunos problemas matemáticos en forma coherente, ordenada y lógica.

- Lo más motivante como docente del área, es llegar al aula después de realizar las diferentes actividades y escuchar a los educandos hablar de lo importante, interesante y gustoso que es desarrollar o trabajar situaciones matemáticas con Geogebra, aunque las realizadas en estos talleres son muy simples.

- Motiva al Docente en hacer uso continuo de las nuevas tecnologías como mediador hacia el aprendizaje en su quehacer pedagógico, gracias a las posturas de los educandos frente a la importancia, interesante y agradable que es el trabajo con Geogebra.

- Algunos estudiantes tienen dificultad en leer comprensivamente para realizar las actividades sugeridas, por lo cual, no saben interpretar los problemas propuestos o desafíos matemáticos.

- Pocos alumnos presentan estancamiento en la realización de las actividades con Geogebra, denotando apatía hacia el aprendizaje de las matemáticas antes y durante los talleres, lo que permitió hacer ajustes a los mismos para la construcción de simulaciones, teselados, y diferentes representaciones geométricas para motivarlos.

4.3. Experiencia talleres guiados

En estos talleres se inicia la solución de algunos problemas de optimización, usando Geogebra. En todos ellos, cada estudiante de grado undécimo tuvo acceso a un computador, trabajó con copias en forma individual, la resolución de las situaciones problemas en parejas, con el fin de socializar los hallazgos y aprendizajes obtenidos.

En este sentido, es conveniente referenciar en forma puntual pero descriptiva las acciones o evidencias que los estudiantes mostraron, en relación con los procesos objetivo de esta investigación:

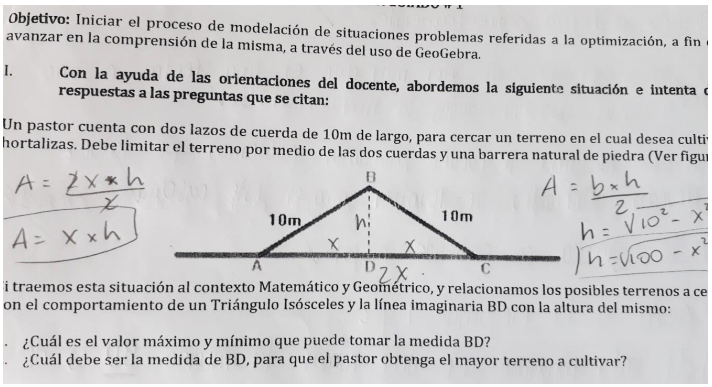
4.4. Taller Guiado 1

Reconocimiento y comprensión de variables: Durante el desarrollo de este taller, la experiencia fue poco grata. Ya que, en el momento de tratar de resolver la situación problema planteada en la fase inicial, los estudiantes tardaron demasiado en llegar a una respuesta o aproximación de la solución, es decir, no hubo abordaje de la situación ni reconocimiento de variables por parte de los estudiantes, incluso hacían comentarios como: “¿Qué hay que hacer?”, “¿Cómo así?”, “No entiendo”, “profe haga un ejercicio primero para saber qué hacemos”, “Ahora si empezó lo maluco otra vez”.

Teniendo en cuenta que el objetivo de estos talleres es guiarlos en la solución de los problemas que se les plantean, se decidió iniciar la orientación indicando paso por paso cómo se construía el modelo geométrico simulado en Geogebra, que ayudaría a solucionar el problema y ellos simplemente seguían las instrucciones.

En sí, no diferencian, ni reconocen con facilidad las variables, altura, área implicadas en el problema.

Conversión y tratamiento de sistemas semióticos de representación: debido a que presentaron dificultades para el reconocimiento de las variables, aun cuando fueron inducidos, la mayoría de ellos esperó que otros lo hicieran a pesar de estar por parejas. En este sentido, los estudiantes trataron de escribir la forma algebraica mediante sus tratamientos semióticos, pero les fue difícil hacerlo.


Objetivo: Iniciar el proceso de modelación de situaciones problemas referidas a la optimización, a fin
avanzar en la comprensión de la misma, a través del uso de GeoGebra.

I. **Con la ayuda de las orientaciones del docente, abordemos la siguiente situación e intenta**
respuestas a las preguntas que se citan:

Un pastor cuenta con dos lazos de cuerda de 10m de largo, para cercar un terreno en el cual desea culti
hortalizas. Debe limitar el terreno por medio de las dos cuerdas y una barrera natural de piedra (Ver figu

$A = \frac{2x \times h}{2}$

$A = x \times h$

$A = \frac{b \times h}{2}$

$h = \sqrt{10^2 - x^2}$

$h = \sqrt{100 - x^2}$

i traemos esta situación al contexto Matemático y Geométrico, y relacionamos los posibles terrenos a ce
on el comportamiento de un Triángulo Isósceles y la línea imaginaria BD con la altura del mismo:

. ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar la medida BD?
. ¿Cuál debe ser la medida de BD, para que el pastor obtenga el mayor terreno a cultivar?

Figura 4.2: Tratamiento y representación algebraica. Elaboración por estudiantes.

La modelación y generalización: una vez lograron escribir correctamente el problema a resolver, trataron de dar respuestas correctas a los interrogantes, pero con dificultad. A pesar de que Geogebra les muestra las soluciones geométricas y algebraicas, fueron muy pocos los educandos que resolvieron correctamente la actividad reto se evidencia que ciertos chicos, han iniciado en mejorar los procesos matemáticos.

Varias conclusiones fueron expresadas por los estudiantes acerca de la ejecución de este taller, a saber:

- "Este taller es importante para desarrollar con Geogebra actividades que tienen que ver con los problemas matemáticos de nuestra vida cotidiana, ya que Geogebra nos ayuda a tener una experiencia práctica a la hora de resolverlos".
- "Es espectacular para hacer la simulación de los ejercicios y para determinar el área de una figura". "Pude entender en qué consisten las funciones, y la relación con las variables".
- "La actividad fue muy productiva, ya que nos permite adquirir más conocimiento sobre el tema tratado de geometría (área, altura, base, etc.). lo que me permitió analizar muy bien todo para poder graficar la figura correctamente".

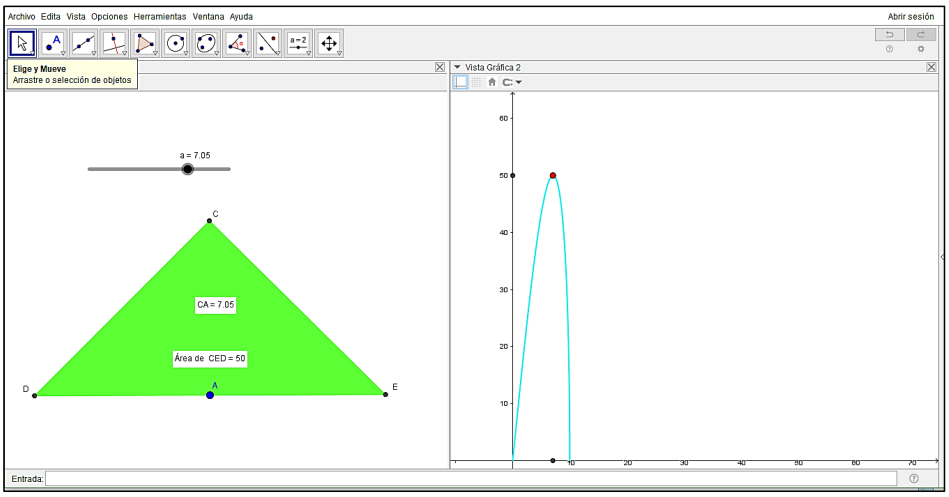


Figura 4.3: Representación con Geogebra área máxima de un terreno triangular a cultivar. Fuente: Elaboración de estudiantes.

4.4.1. Taller Guiado 2

Durante la aplicación de este segundo taller, se evidenció notablemente que hubo mayor acogida y mejor desempeño que en el Taller Guiado 1.

Reconocimiento y comprensión de variables: Al iniciar el taller, el docente hace lectura guiada (oral y escrita) de la situación problema a solucionar, con preguntas orientadoras para la construcción del modelo representacional del trabajo como: ¿Qué clase de curva es la que hay que graficar? ¿Qué necesito para hacer la gráfica de esa curva? La mayoría de los estudiantes respondieron, basándose en el ejercicio anterior, más que por comprensión de la situación.

Algunos estudiantes afirman: "como es una función cuadrática entonces la gráfica es una parábola y abre hacia abajo porque es negativa", "necesitamos hacer tabla de valores y y luego hacer la gráfica en un plano". este proceso sirvió para realizar la función en forma manual, determinado el vértice de la parábola y las raíces para una mejor comprensión de la parábola.

Posteriormente en la indicación: Mueva el deslizador de tal manera que cambie su medida, ¿Qué Observas?, cambia el área, la medida de la altura y de la base, ¿Será que el área y la altura cambian por si solas sin cambiar la base? Dando respuesta a estos interrogantes concluyen que la variable independiente era la base y la dependiente el área, pero todavía no era claro el papel de dependencia o independencia de la variable altura, porque es de aceptar que el área depende de la altura, pero también la altura depende de los cambios de la base.

Luego de varias intervenciones y discusiones entre profesor y estudiantes, se concluyó que la altura del rectángulo inscrito se comporta como variable dependiente si se pone en correspondencia con los cambios de medida de la base, ya que $h = 27 - (\frac{b}{2})^2$, donde h es la altura y b la base, pero si la relacionamos con la variable área entonces juega el papel de

independiente, porque el área depende también de la altura.

Se encontró que los educandos reconocieron las variables involucradas: base, altura, área del rectángulo; gracias a las preguntas orientadoras. Igualmente afirmaron que las variables dependientes son el área y la altura, porque dependen de la variable base.

Conversión y tratamiento de sistemas semióticos de representación: algunos estudiantes comprendieron la forma algebraica y por ende representaron en forma cartesiana la curva parabólica convexa con vértice en (0,27) el cual representa el rectángulo de área máxima. Mediante la construcción de la representación ejecutable, después de realizar una serie de pasos con Geogebra, comprendieron la independencia de la variable base, ya que las variables que intervienen son la base y el área, y la base determina hasta donde puede subir la altura. Al mover el deslizador comprueban que se alteran las variables base, altura y área y que la relación es directamente proporcional dado que entre mayor base menor altura y entre mayor altura menor base.

La aplicación de este taller arrojó los siguientes aprendizajes más generalizados y conclusiones, por parte de los estudiantes:

- "Al mover el deslizador cambian las medidas de la altura, la base y el área del rectángulo".
- "La relación entre la medida de la altura y la base, cuando se obtiene el rectángulo mayor es que la altura es el triple de la base".
- "A medida que cambia la base y la altura cambia el área y así se va haciendo el área máxima o mínima".
- "Logré aprender cosas nuevas sobre Geogebra y sobre función Cuadrática".
- "Aprendí a manejar mejor Geogebra para hallar el área de un rectángulo bajo una curva, sobre perpendiculares, cómo unir los puntos, realizar movimientos, hacer muchas cosas para hallar resultados correctos".
- "Aprendí como de una curva puede salir un rectángulo, el área de este, es posible hallar por medio de la base, la atura, aprendí a manejar mucho mejor el programa Geogebra, aplicando formulas, puntos, rectas, polígonos y deslizadores".
- "Podemos manejar la calculadora con temas vistos hoy día y nos ayuda a recordar los temas anteriormente vistos".
- "Sin duda al realizar la actividad se genera un mejor ambiente y es una mejor manera de aprender. El desarrollo de las actividades aplicando el programa es más interesante que cualquier clase que se vive de matemáticas".
- "Se pudo profundizar más acerca de las variables en Geogebra, ya que cada una puede ser dependiente o independiente en su contexto, son duras de identificar".

- "En cada actividad se aprenden muchos temas de los cuales no teníamos conocimiento, ojalá y sigamos aprendiendo mucho más".
- "Si se mueve el deslizador hacia la izquierda o la derecha el rectángulo llega a su área menor y si se mueve hacia una distancia intermedia llega a su máxima área".

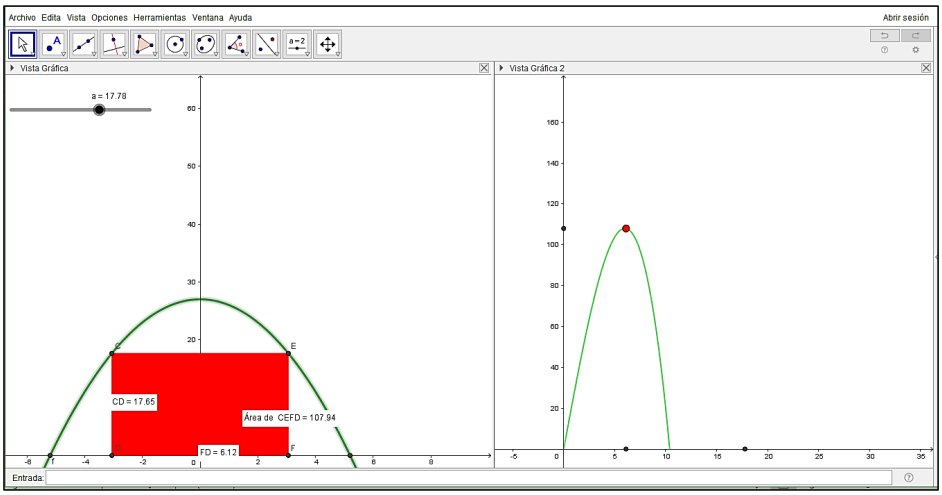


Figura 4.4: Representaciones del problema en Geogebra. Taller Guiado 2.

4.4.2. Taller Guiado 3

Desde el inicio del taller, los estudiantes demostraron interés y motivación por tratar de resolver problemas matemáticos con ayuda de Geogebra, denotando algunas cualidades acerca de los procesos asociados al pensamiento variacional, las cuales se destacaron durante el desarrollo del taller.

Conversión y tratamiento de sistemas semióticos de representación: Como fase introductoria, se les planteo la siguiente pregunta acerca de la construcción de una caja sin tapa: ¿Cuál debe ser el lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo? Buscaron la forma de escribir en forma algebraica las medidas de la base y el ancho de la lámina disminuida en x cm y lo cual daría la altura, esto lo hicieron correctamente pero no sabían que seguir haciendo. Entonces se les dió las indicaciones para trazar el objetivo o la forma de resolver el problema, teniendo en cuenta:

1. Determinar el objetivo del problema: averiguar que el volumen de la caja sin tapa sea máximo.
2. Expresar en forma de función tal objetivo: En este aspecto se les dio la pista que la caja es un prisma rectangular y les pedían hallar el volumen (volumen prisma rectangular = área de la base por la altura), y que para mejor comprensión conviene hacer un dibujo. En el cual escribieron las medidas en forma algebraica, como se muestra en la figura 11, lo que permitió aclarar dudas y que todos estén apuntando al mismo desarrollo.

Reconocimiento y comprensión de variables: En la construcción con Geogebra de la situación, se les preguntó ¿Cuáles son las variables involucradas en el problema? algunos estudiantes dijeron: "la base, el ancho y el volumen", y unos pocos mencionaron "la altura".

Una vez se logró dar entendimiento a esta situación, aclarando que la altura es la medida del cuadrito que vamos a recortar, puesto que es en ese punto que se va a doblar la lámina hacia arriba, se hizo otra pregunta ¿Cuáles son las variables independientes y cuáles son las dependientes? Para lo cual, respondieron que si se recortaba el cuadrito pequeño la altura era pequeña y daría cierto volumen y si se corta el cuadrito muy grande, la altura era más grande y daría otro volumen, es decir, que la medida de la base y el ancho de la lámina estaban condicionados por la medida del cuadrito y del volumen de la caja. En otras palabras, las variables dependientes son la medida de la base y del ancho de la lámina, y el volumen de la caja sin tapa. Las variables independientes son la altura o sea la medida del cuadrito.

La modelación y generalización: Los estudiantes construyeron con Geogebra la simulación de la lámina para recortarla en 2D y la simulación de la caja en 3D. luego se les preguntó: "¿Cuál es el tipo de grafica que representa al volumen?" Algunos dijeron que era una gráfica de una función cúbica porque la medida del volumen es cubico, otros dijeron que lo que se representaba es el punto máximo (volumen máximo), entonces era una parábola que abre hacia abajo, ya que en este tipo de grafica sabemos que señala un máximo y un mínimo. Así pues, se concluyó que es una función de la altura contra volumen, por lo que es una curva con forma parabólica convexa.

En la fase final de la simulación, se les propone que hallen el volumen de la caja con los valores encontrados en Geogebra, reemplazando el valor de la medida del lado del cuadrito en la ecuación planteada por ellos, para comprobar que el resultado debe ser igual al de la simulación. Lo cual les pareció sorprendente, puesto que habían escrito correctamente la forma algebraica de la situación y habían hallado el valor de la variable altura.

En este taller los estudiantes tuvieron mayor motivación y confianza para el proceso de resolución y modelación de problemas porque pudieron apreciar, desde tres enfoques diferentes y desde tres sistemas de representaciones, algunas formas de dar solución a un problema analizando el cambio de las variables. Por ello, la resolución de la actividad reto fue un éxito, puesto que se basaron en los procesos realizados para encontrar la solución usando Geogebra.

Algunas conclusiones y aprendizajes mencionados por los estudiantes son:

- "Me ayuda a resolver problemas que pueden salir en el ICFES y ya tengo experiencia para responder preguntas de este tipo y sobre variables dependientes e independientes".
- "Esta actividad favorece mejor el desarrollo o dominio del pensamiento variacional, ya que nos exigió comprender las variables antes de todo, escribir el problema en forma algebraica y grafica para su comprensión y, posteriormente realizar las modelaciones con Geogebra para hallar la solución".
- "Cada vez aprendo cosas nuevas de Geogebra relacionadas con la vida real".

- "A medida que avanzamos en las actividades con Geogebra, podemos aprender más fácil a sacar áreas y volúmenes y otras cosas útiles para aprender matemáticas en general".
- "Aprendí a manejar un sistema 3D, y trabajar con 3 variables para solucionar un problema de optimización".
- "La altura es directamente proporcional al volumen de la caja".
- "Aprendí a medir cual es el mayor de una caja o prisma dependiendo su largo y ancho y también la altura".
- "Aprendemos a razonar mejor, lo cual es muy importante para un futuro".

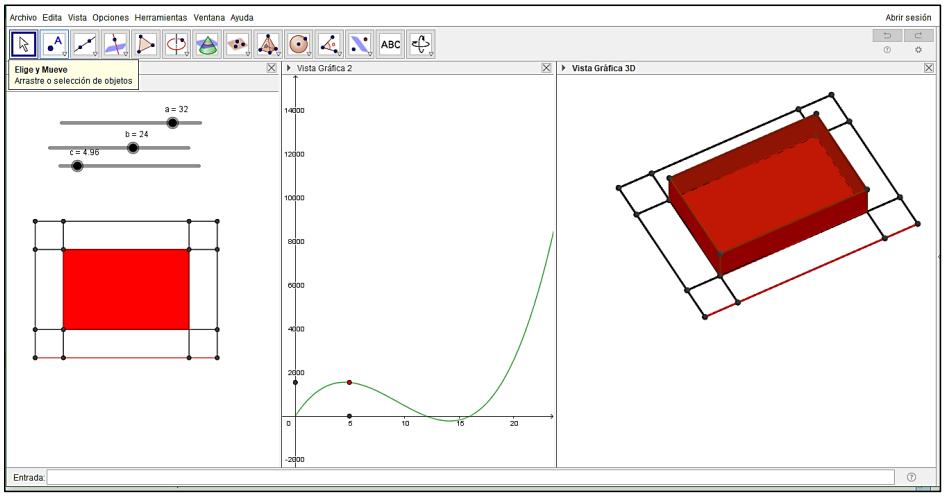


Figura 4.5: Representación construcción de caja sin tapa de volumen máximo. Fuente: Elaboración de estudiantes

4.5. Experiencia Talleres de Profundización.

4.5.1. Taller de Profundización 1.

En el desarrollo del Taller de Profundización 1, los estudiantes expresaron inconformidad, debido que ya no cuentan con ayuda en explicaciones por parte del profesor, ya que lo que se pretende es que sean ellos mismos quienes desarrollen la situación y construyan la simulación acertada con las herramientas de trabajo de Geogebra. Además, se buscan avances significativos en los procesos de reconocimiento de variables, interpretación, comprensión y solución de ciertos problemas de optimización.

Reconocimiento y comprensión de variables: en el tratamiento de la resolución del problema, los estudiantes comprenden que las variables involucradas, después de haber sido incitados o provocados, dicen la base menor, la base mayor, la altura y el área del trapecio y debido a que se prolonga por el canal, es decir, es la capacidad que va a tener la canaleta, luego se hace la aclaración que se debe definir, la variable independiente respecto a las demás,

hasta llegar a la conclusión de que la variable independiente es la base mayor del trapecio, puesto que la base menor ya estaba definida.

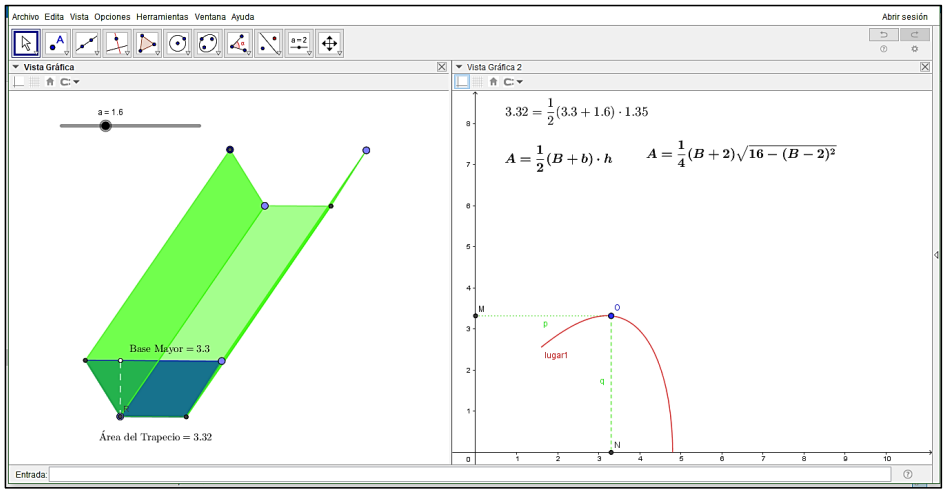


Figura 4.6: Construcción de canal de agua para que el flujo de agua sea máximo. Fuente: Elaboración de estudiantes.

Conversión y tratamiento de sistemas semióticos de representación: en la escritura algebraica del problema, algunos estudiantes escribieron la expresión apoyándose con un dibujo del trapecio hecho en papel, y describieron el objetivo del problema el cual era obtener el mayor flujo de agua por medio del canal con forma de trapecio. Luego, con ayuda de la fórmula para hallar el área del trapecio se facilitó la comprensión de la situación para dar la solución del mismo y con ayuda de Geogebra, al realizar la construcción de la simulación o representación ejecutable.

Además, los estudiantes introducen la gráfica en el plano cartesiano, que representa la función de base mayor contra área del trapecio, con el fin de hallar el máximo de capacidad. Posterior a esto, traducen al lenguaje simbólico algebraico, las fórmulas y les realizan el tratamiento adecuado para reemplazar los datos por los objetos creados en Geogebra, con el fin de observar las variaciones que se pueden presentar.

La modelación y generalización: la mayoría construye el trapecio con las características dadas en Geogebra en apoyo continuo, y propician una serie de pasos para construir la situación, lo que demuestra la comprensión del problema a desarrollar. Esto concibe en el entendimiento para la escritura de la fórmula asociada al problema y en la socialización de los resultados con sus pares generalizando la independencia de la base mayor, aunque cambien las medidas de la base menor, y debido al análisis de la escritura numérico variacional y los tratamientos dados a las fórmulas.

Complementando lo anterior, algunas de las concusiones y aprendizajes expuestos por los estudiantes son:

- "Ayuda a interpretar problemas de analizar imágenes y datos".
- "Comprendí que a pesar de que lo que se desea averiguar es la capacidad del canal para el mayor flujo de agua, todo depende es del área del polígono inicial y no del recorrido en este caso".
- "Comprendí la importancia de leer bien, pensar antes de escribir cualquier cosa y trazar o fijarme un objetivo de lo que voy hacer".
- "El problema también se puede hacer con la altura como variable independiente, pero fue más fácil con la base mayor".
- "Geogebra ha facilitado la comprensión de los problemas, ya que al hacer la simulación uno mismo, se compromete uno con la actividad y eso hace que el interés este todo el tiempo".

4.5.2. Taller de Profundización 2

El desarrollo de este segundo taller de profundización, fue productivo evidenciado en el ambiente de aula de querer aprender y con ánimo de resolver la situación problema planteada, algunos se acercaron a la construcción del modelo requerido y otros después de intentar desistieron y solicitan o esperaran orientaciones de sus compañeros.

Reconocimiento y comprensión de variables: en este punto para algunos estudiantes fue fácil identificar las variables involucradas en la situación problémica, afirmando que las variables son el costo y siendo la variable dependiente porque va a depender de qué tan largo o corto es el trayecto de la tubería por la tierra y depende también de que tan larga o corta sea la tubería que pasa por el pantano. En este sentido, las otras dos variables son, la tubería por tierra y la tubería por pantano, por lo cual, la variable independiente que se toma, es la tubería por tierra, ya que esta constituye la base menor del trapecio que se forma en la representación figural.

Conversión y tratamiento de sistemas semióticos de representación: en este proceso, los estudiantes se basaron en la solución de la situación del taller anterior, lo que les permitió afianzar los conocimientos y el desarrollo de los mismos procesos. Por ello, ciertos estudiantes trabajaron en conjunto (trabajo colaborativo) para poder determinar las formas de representación algebraica y cómo se construyen la simulación con Geogebra. Esto, les permitió analizar la situación y traducir el texto normal a lenguaje simbólico matemático, como expresión en forma gráfica en el plano cartesiano para determinar el vértice de la parábola cóncava como punto mínimo del costo de construcción del oleoducto.

La modelación: entienden las relaciones cuantitativas entre las variables, por lo cual, deciden algunos, que la longitud de la diagonal (la tubería que va por el pantano), se puede hallar usando el teorema de Pitágoras, y el valor de la longitud de la tubería en tierra sería 5 km menos lo que vale la variable X, entonces el costo de la tubería se puede calcular como el

precio de cada metro en tierra por la cantidad de metros que puede medir la tubería en tierra más el precio del metro de la tubería en pantano multiplicado por la longitud en metros de la tubería que pasa por el pantano.

Comprenden al momento de crear el lugar geométrico en Geogebra, que se forma la parábola que se había mencionado, la cual facilita el entendimiento del costo mínimo de tubería y que permite ver las variaciones al mover los deslizadores y el punto sometido como variable independiente.

Algunas conclusiones y aportes hechos por los educandos son:

- "Aprendimos obtener el valor mínimo a un proyecto real de alto presupuesto y su representación gráfica, con ayuda de Geogebra".
- "A medida que aumenta la base menor el costo disminuye".
- "Esta actividad nos permite afianzar el uso de las Tics lo que nos sirve para entender mejor los problemas que queremos resolver".
- "Esto nos permite más adelante en nuestras vidas analizar y realizar actividades tomando las calculadoras en nuestras manos".
- "Fue una actividad de mucho provecho para nuestra vida diaria, ya que en un futuro si llegamos a estudiar alguna carrera de ingeniería nos puede servir como base, para resolver dichos problemas".

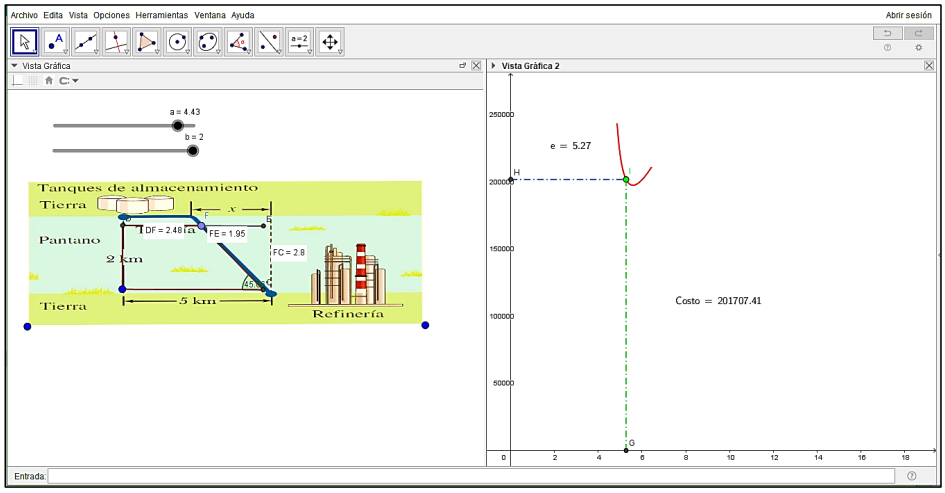


Figura 4.7: Representación petrolera para que el costo de construcción del oleoducto sea mínimo. Fuente: Elaboración de estudiantes.

En general, se aprecia en estos dos talleres que los estudiantes frente al reconocimiento y comprensión de variables: las perciben, las identifican y caracterizan como independientes o dependientes de manera más eficiente y lógica. sobre la Conversión y tratamiento de sistemas

semióticos de representación: representan y analizan situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos; traducen el texto o situación en lenguaje simbólico matemático (expresión algebraica), o en forma gráfica en el plano cartesiano con la ayuda de Geogebra. y respecto a la modelación: representan y entienden las relaciones cuantitativas entre variables, formulan y visualizan un problema en diferentes formas, descubren relaciones y regularidades, transfieren un problema de la vida real a un problema matemático.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

La enseñanza de las matemáticas es y será un gran reto para el docente, ya que las tendencias actuales lo definen como un facilitador del proceso de aprendizaje y al estudiante como un participante activo y más aún con la incorporación de las tecnologías en el aula, ya que estas han cambiado la forma de pensar y han facilitado la modelación de la aplicación de las matemáticas en situaciones reales. En este contexto, los buenos resultados obtenidos con la ejecución del proyecto "Potenciando pensamiento variacional y uso de sistemas algebraicos con Geogebra", se dan las siguientes conclusiones:

- Se evidencia un progreso en los estudiantes a la hora de abordar y resolver problemas de optimización y en el desarrollo de algunos procesos asociados al pensamiento variacional, entre ello resaltamos el reconocimiento y comprensión de variables (percibirla identificarla y caracterizarla independiente o dependiente), la realización de procesos de conversión y tratamiento de sistemas de representación (cuando los estudiantes representan y analizan situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos, tablas, gráficas, íconos, etc. Al traducir un texto o situación al lenguaje simbólico matemático, en tablas de valores y/o en forma gráfica en el plano cartesiano), y la construcción de modelos y procesos de generalización (cuando los estudiantes representan y entienden relaciones cuantitativas, formulan y visualizan un problema en diferentes formas, descubren relaciones y regularidades, entre otros aspectos)

- El uso de las nuevas tecnologías para complementar al maestro su praxis pedagógica, vistas como potenciadores y facilitadores del aprendizaje en los estudiantes en los diferentes niveles escolares, cobran gran importancia frente a las realidades actuales en el proceso de enseñanza, en especial de las matemáticas.

- Geogebra, es un excelente mediador pedagógico entre el nuevo conocimiento matemático y el aprendiz, ya que permite explorar y comprobar diferentes teoremas y aspectos abstractos en el tratamiento de diferentes sistemas semióticos de algebraica.

- Genera mejor comprensión mediante el uso de lenguaje matemático y todo lo referido al desarrollo secuencial, es decir, los estudiantes apropian y aplican el desarrollo de la solución de algunos problemas matemáticos en forma coherente, ordenada y lógica.
- Permite un mejor acercamiento hacia la resolución de problemas de optimización, apreciando de manera real y simultánea variaciones de las variables implicadas en el problema.
- Hace más fácil la identificación de las variables que intervienen en los problemas de optimización, proceso que es vital para la comprensión del mismo.
- Genera en los estudiantes creatividad para solucionar los problemas de optimización, permite construir estrategias de solución, verificarlas y sacar conclusiones, haciendo el proceso de resolución más confiable y de mejor aceptación.
- Sirve como estrategia didáctica a profesores, para mostrar a los estudiantes una nueva forma de afrontar los problemas de optimización. Por tanto, los estudiantes de último grado de bachillerato pueden tener acceso a la solución de problemas de optimización y a los conceptos básicos del cálculo diferencial (máximos, mínimos, entre otros).
- En el marco de la transversalización de las áreas del conocimiento, tenemos una nueva estrategia en el campo de la resolución de problemas como los que nos plantean los problemas de optimización.
- En este sentido, las evidencias encontradas en los resultados de las últimas tres pruebas externas INSTRUIMOS, muestran que los procesos cognitivos ligados al pensamiento variacional se han potenciado en forma paulatina, pasando de un promedio grupal en matemáticas de 35.77 a 38.25 y por último a 44.67 respectivamente.
- En complemento, los resultados en matemáticas de las Pruebas Saber 11, tuvieron un notable aumento desde que se inició el proceso de enseñanza de las matemáticas con Geogebra en relación a los años 2015, 2016 y 2017 pues pasaron de un promedio general de 49 con una desviación de 11 en 2015, a 51 con una desviación de 11 en 2016 y por último a 52 con una desviación de 10 en 2017; lo que da evidencia clara de los buenos resultados que brinda "Potenciando pensamiento variacional y uso de sistemas algebraicos con Geogebra".
- Por último, "Potenciando pensamiento variacional y uso de sistemas algebraicos con Geogebra", se ha presentado en diferentes espacios de divulgación científica del conocimiento como método de enseñanza en las líneas de resolución de problemas y de modelación matemática en los siguientes eventos:

- I Seminario en Innovación Académica para la Enseñanza - Aprendizaje de las Matemáticas. Realizado por la DNIA de la UNAL del 9 al 10 de mayo de 2017 en Bogotá
- IV Encuentro Internacional sobre la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Realizado en la UNAL sede Manizales, del 7 al 9 de septiembre de 2017 en calidad de ponencia.

- Primer Congreso de Educación Matemática Técnica y Profesional CEMTYP 2017. Realizado en la Universidad Tecnológica de Chile INACAP, sede Puente Alto, el día 22 de noviembre en Santiago de Chile, en calidad de ponencia.

5.2. Recomendaciones

En definitiva, y en aras de hacer proyección a esta investigación y sus mejoras en los diferentes talleres de familiarización, guiados y de profundización, se tienen las siguientes recomendaciones entorno al papel del docente, de los estudiantes y principalmente del potencial que tiene Geogebra:

- En todo momento se tuvo control para que Geogebra no tomara el lugar del estudiante, ni el lugar del profesor en los procesos de pensamiento variacional que se potenciaron con los talleres y las clases. El software Geogebra fue el instrumento de mediación entre el conocimiento y el estudiante para efectuar estos procesos de pensamiento matemático y desarrollar el aprendizaje significativo de los conceptos.

- Es importante entender que este proyecto se puede fortalecer con muchas más actividades y complementos virtuales, con la intención de fortalecer los procesos que se buscan potenciar sobre el pensamiento variacional, de tal manera que se pueda desarrollar desde el grado octavo en la introducción del concepto de función.

- Otro aspecto a tener en cuenta, es la capacidad o destreza mayor en algunos estudiantes, por lo cual, es bueno contemplar la idea de llevar un poco más de trabajo para estos, como actividades reto, las cuales estimulan el aprendizaje y potencian los procesos asociados al pensamiento variacional e inciden en el mejoramiento del papel del estudiante como agente activo de su formación académica. Al igual que se invita al finalizar cada taller, realizar reflexiones entre los estudiantes de manera guiada, con la finalidad de que aquellos que tuvieron dificultades pregunten a los estudiantes que lo terminaron primero cómo lo hicieron siendo ellos mismos quienes compartan la experiencia.

- Se recomienda realizar un reconocimiento de la calidad y estado de los equipos informáticos y de multimedia para evitar inconvenientes y retraso en el desarrollo de los talleres, esto es fundamental, desde el sentido pedagógico y motivacional que el estudiante adquiere, ya que con buenas herramientas hay más celeridad en el proceso y mayor estimulación en los educandos por aprender matemáticas.

- Es vital para el desarrollo óptimo de cada de uno de los talleres, con el objetivo de maximizar el tiempo en el aula de sistemas y mejorar el seguimiento de las indicaciones y/o instrucciones, consolidar reglas de comportamiento y responsabilidades por cumplir por parte de los educandos, buscar que las clases sean por periodos de dos horas, crear una carpeta especifica por cada estudiante y en la cual crean tres subcarpetas para guardar las actividades de los talleres de familiarización, los guiados y los de profundización.

Bibliografía

[1] Bishop, A. J.(1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona, España: Paidos Ibérica.

[2] Braun, E. (1996). *Caos Fractales y Cosas Raras.*Tercera edición. México: Fondo de Cultura Económica.

[3] Cuevas, C. (1998). Una propuesta constructivista, para la enseñanza del concepto de función, en un entorno inteligente de aprendizaje. *XII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Santa Fe de Bogotá, Colombia.

[4] Dorfler. (1993). Computer Use and Views of the Mind. En Learning from Computers: Mathematics Education and Technology. En L. M. Armella, Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización (pág. 5). Berlin: Springer-Verlag.

[5] Estrada, N. T., y Huanca, D. P. (2011). es.escrib.com. Recuperado de https://es.scribd.com/doc/58900345/Jerome-Seymour-Brun.

[6] Figueroa, J., y Muñoz, J. E. (2003). *Problemas de optimización, con Cabri*. Recuperado de http://unisucre-repositorio.metabiblioteca.org/handle/001/138.

[7] Galván Sánchez, D. A. (2013). *Un enfoque contructivista para el desarrollo de competencias mediante la reflexión y la interacción*. D.F, México: Cengage Learning Editores S.A.

[8] Godino, J. D. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada, España: GAMI, S. L. Fotocopias.

[9] Guzman, M. D. (1993). *Enseñanza de las ciencias y de las matemáticas*. Madrid, España: Editorial Popular.

[10] Hernández, S. (2008). El modelo constructivista con las nuevas tecnologias aplicado en el proceso de aprendizaje. *Revista de universidad y sociedad del conocimiento,10*, 26-35.

[11] Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES). (2017). *Documento de orientación grado 11*. Bogotá, Colombia: Icfes 2017.

[12] Institute Geogebra International (IGI). (2017). Geogebra: la calculadora gráfica para geometría, álgebra, cálculo, estadística y 3d. Matemática dinámica para aprender y enseñar. Recuperado de https://www.geogebra.org/about?ggbLang=es.

[13] Martinez Narvaez, J. (2008). La teoría del aprendizaje de Vygotski. *Innovación Pedagógica y Curricular,x* , 93- 94.

[14] Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998).*Estándares Básicos en Competencias.* Area de matemáticas. Bogota, Colombia: Ministerio de Educacion Nacional.

[15] Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.

[16] Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2002). *Formación de docentes en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas.*ISBN: 958-97013. Bogota, Colombia: Enlace Editores Ltda.

[17] Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda.

[18] Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2017). *Matemáticas 11.* Bogotá, Colombia: Equipo Editorial SM.

[19] Moreno, L. (2001). Instrumentos matemáticos computacionales.*Incorporación de nuevas tecnologías en el curriculo de matemáticas.* Bogotá, Colombía: Serie memorias.

[20] Moreno, L. y Waldegg, G. (2002). Fundamentación cognitiva de las matemáticas.*Seminario nacional formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*(pp.40-66). Bogota, Colombia: Serie memorias.

[21] Polya, G. (1989). *Como plantear y resolver problemas.* México, D.F: Trillas.

[22] Ramos, G. P. (2012). *Historia de las matematicas en colombia.* Medellín, Colombia: Ediciones Unaula.

[23] Reeuwijk, M. V. (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 12*, 9-16.

[24] Resnick, L. B., & Ford, W. W. (2006). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Madrid, España: Ediciones Paidós.

[25] Rodríguez, M. L. (2004). *La teoría del aprendizaje significativo.* Pamplona: CMC- Concept Mapping Conference. Recuperado de http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-290.pdf

[26] Santos, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* México: Iberoamérica.

[27] Tobón, S., Pimienta., J. H., y García, J. A. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias.* Mexico: Pearson.

[28] Vasco, C. (2011). Trayectoria biográfica de un intelectual colombiano: una mirada a las reformas curriculares en el país.*Revista colombiana de educación, 61*, 161-98.

[29] Vigotsky, L. (1996). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona, España: Ediciones Grijalbo.

Anexos

Anexo 1: Talleres de Familiarización.

Los siguientes talleres son basados de la experiencia “Problemas de optimización con Cabri” los cuales se modificaron para el uso y desarrollo con Geogebra

Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera
Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Aguadas – Caldas
2017

TALLER DE FAMILIARIZACION 1

Introducción:

En los últimos diez años se ha incrementado el uso de la tecnología computacional como apoyo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo que ha provocado la aparición de diversos y potenciales programas de geometría dinámica, siendo Geogebra uno de ellos, creado por Markus Hohenwarter a inicios del año 2001. Geogebra, es un procesador geométrico y un procesador algebraico, es decir, una aplicación de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra, cálculo y estadística, programado en el lenguaje Java, lo que facilita su uso en muchas plataformas.

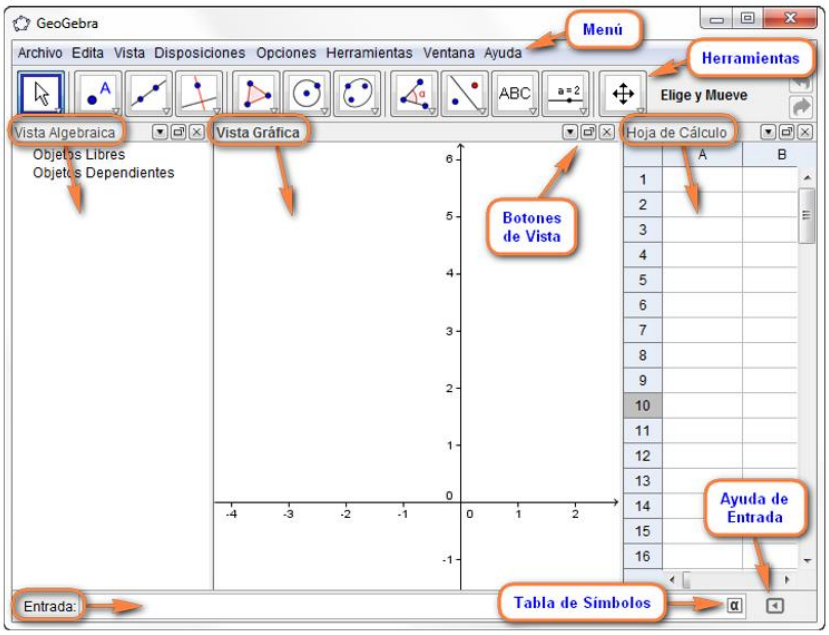
El programa es de fácil acceso, pues es gratuito, sencillo y fácil de aprender, convirtiéndolo en un programa versátil, que ofrece variadas y útiles aplicaciones a través de sus numerosas herramientas, permitiendo abordar problemas geométricos y de dibujo lineal en el plano, mediante la experimentación y la manipulación de distintos objetos, dando paso a la resolución de problemas de una forma interactiva.
Su funcionalidad es similar al resto de programas de geometría dinámica existentes, ya que, permite mediante la construcción de objetos elementales llevar a cabo la generación de nuevos elementos, estableciendo relaciones entre ellos, de forma tal, que es posible la manipulación dinámica de éstos. Desde su aparición, este programa ha superado las expectativas de los usuarios, manteniendo una ventaja con respecto a otros programas similares, pues su creador ha incorporado una opción para generar hojas dinámicas exportables, sin más que elegir una opción en el menú, permitiéndole trasladar las aplicaciones mediante la Web, lo que facilita el intercambio de actividades con una gran comunidad a nivel mundial por medio de wikis y foros.

Podemos construir de modo muy simple puntos, segmentos, polígonos, rectas, vectores, cónicas, gráficas de funciones, curvas paramétricas y diagramas estadísticos. Todo esto dinámicamente, de forma que cualquier objeto puede sufrir modificaciones con un simple movimiento del ratón.
El éxito en el uso de este programa dependerá en gran parte del empeño y dedicación que tengamos para aprender el manejo de sus herramientas y comandos.

Tomado de: Marco Vinicio Gutiérrez Montenegro;
Actividades dinámicas para realizar con el programa Geogebra

Zonas de la ventana de Geogebra: La pantalla de Geogebra se divide en varias zonas:
En la parte superior se encuentran los Menús y las Herramientas (barra de botones). En la parte central, la Vista Algebraica a la izquierda, la gran Vista Gráfica central y la Hoja de Cálculo a la derecha.

- Al inicio, la Hoja de Cálculo está oculta. Para mostrarla, elegir Menú Vista Hoja de Cálculo.
- Podemos elegir cualquier idioma para la interfaz en el Menú Opciones Idioma.



Tomado de: Geogebra en la Enseñanza de las Matemáticas 2012

La imagen anterior muestra la pantalla por defecto de Geogebra Escritorio. Dependiendo de qué uso se quiera dar a Geogebra (por ej. geometría, álgebra, estadísticas), se puede optar por la apariencia correspondiente desde el menú de Apariencias. Por defecto, se muestran la Vista algebraica y la Vista gráfica en la ventana de Geogebra.

La Barra de herramientas consiste en un conjunto de cajas de herramientas que contienen una colección de herramientas relacionadas. Usando estas herramientas, se pueden realizar construcciones en la Vista gráfica utilizando el ratón. Al mismo tiempo, las coordenadas y

ecuaciones correspondientes se muestran en la Vista algebraica. Observa que cada vista tiene su propia Barra de herramientas y, por lo tanto, es posible acceder a distintos conjuntos de herramientas.

La Barra de Entrada en la parte inferior de la ventana de Geogebra se utiliza para ingresar directamente coordenadas, ecuaciones, comandos o funciones. Basta presionar la tecla Intro para el objeto se represente algebraicamente en la Vista algebraica y aparezca su representación geométrica en la Vista gráfica.

Además, Geogebra ofrece una Vista gráfica 3D, una Vista CAS para utilizar el sistema CAS de Geogebra para cálculos simbólicos, una Vista de hoja de cálculo para trabajar con datos y conceptos estadísticos, así como también una Calculadora de Probabilidades para calcular y graficar distribuciones de probabilidades.

Todas las Vistas de Geogebra están vinculadas dinámicamente, lo cual significa que, si se modifica un objeto en una de las vistas, sus representaciones en las otras vistas se adaptarán a estos cambios en forma automática, si es posible.

PRUEBA EXPLORATORIA

Objetivo: Indagar sobre el conocimiento que los estudiantes tienen acerca de los conceptos de Variación, Función, Variables (Dependientes e Independientes), el abordaje de problemas y la experiencia de los estudiantes en el manejo de calculadoras o computadoras.

I. Atendiendo a los conceptos que has podido construir en tus años de estudio, responde los siguientes ítems.

- ¿Has oído hablar de la variación?, ¿En qué momento y sobre que temática de estudio?, ¿Cómo la entiendes?

_____
_____
_____
_____
_____

II. ¿Qué problemas consideras están relacionados con el fenómeno de variación?

_____
_____
_____
_____
_____

- Con tus palabras, expresa lo que entiendes por función.

_____
_____
_____
_____

- ¿Has oído hablar de variable?, ¿Cómo la entiendes?

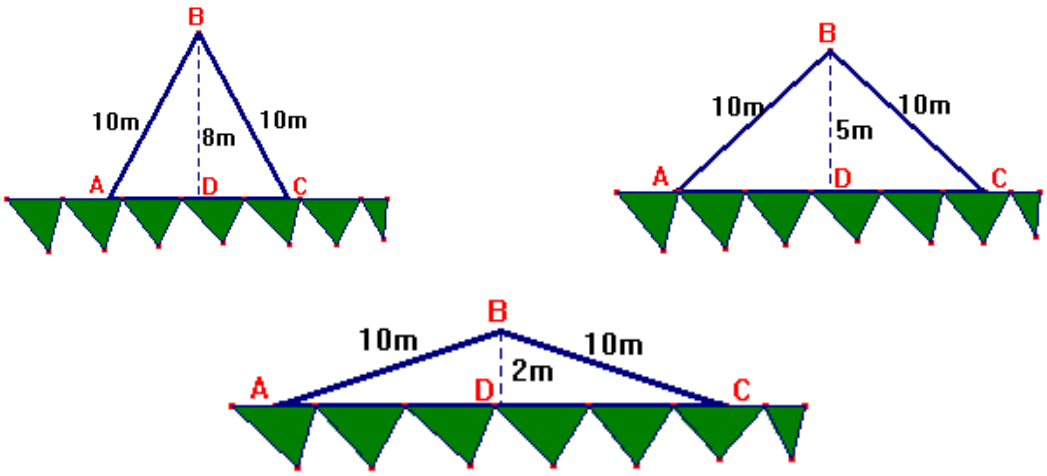
_____
_____
_____
_____
_____

- Describe en forma breve los pasos que usas para resolver problemas de matemáticas.

_____
_____
_____
_____

III. Teniendo en cuenta la siguiente situación problema, responda las preguntas que se citan.

Un pastor tiene dos lazos de cuerda de 10m de largo para hacer un cercado. Debe limitar un terreno por medio de las dos cuerdas y una barrera natural de piedra. Cada una de las siguientes figuras muestran un plan de las posibles formas de colocar las cuerdas contra la barrera AC de piedra cambiando la longitud BD.



Tomado de: Problemas de optimización con Cabri.

- Halle el área del triángulo ABC en cada caso.

- Escoja como variable X la longitud BD, ¿Cuál es el valor máximo y mínimo que puede tomar esta variable?
- Usando el teorema de Pitágoras encuentra una fórmula para el área del triángulo ABC en función de X.
- Intenta hacer una gráfica de X contra área.

IV. USO DE MEDIOS TECNOLOGICOS

- ¿Alguna vez has manipulado un computador o una calculadora graficadora?, ¿Con qué objetivo?

_____
_____
_____
_____
_____

- ¿Qué clase de software o programas de computación manejas?

_____
_____
_____
_____
_____

- ¿Qué software has usado, para resolver problemas de matemáticas?

_____
_____
_____
_____
_____

- ¿Te parece bueno que las matemáticas se orienten haciendo uso en algunas ocasiones de computadoras o calculadoras?, ¿Por qué?

_____
_____
_____
_____
_____

Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera
Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Aguadas – Caldas
2017

TALLER DE FAMILIARIZACION 2

Objetivo: Tener un acercamiento al uso y manejo del software Geogebra, a través del conocimiento de las funciones de algunos de los elementos y comandos que lo conforman.

ACTIVIDAD 1

Construcción de un triángulo cualquiera inscrito en una circunferencia.

1. Abra un nuevo archivo en el programa.
2. clic en vista gráfica y oculte los ejes coordenados.
3. Seleccione la herramienta Polígono y haga clic en tres puntos de la pantalla de la Vista Gráfica y de nuevo en el primer punto.

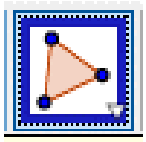


Figura 1: Polígono

4. Ahora usando la herramienta Circunferencia por Tres Puntos, haga clic sobre los tres vértices del triángulo.

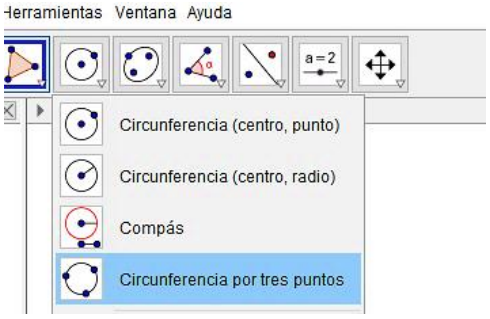


Figura 2: Circunferencia

5. Seleccionamos Punto Medio o Centro y hacemos clic sobre la circunferencia para hallar el centro o sea el Circuncentro.

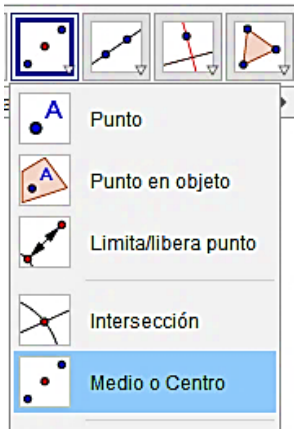
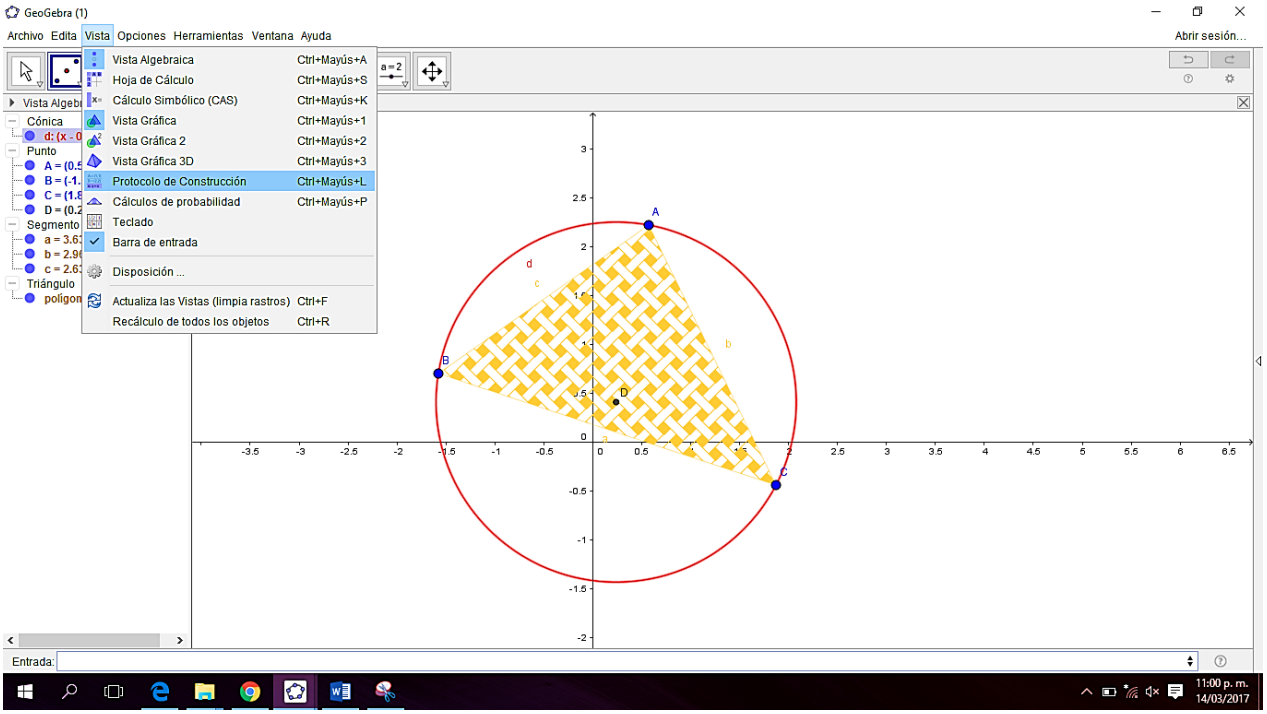


Figura 3: Punto Medio o Centro

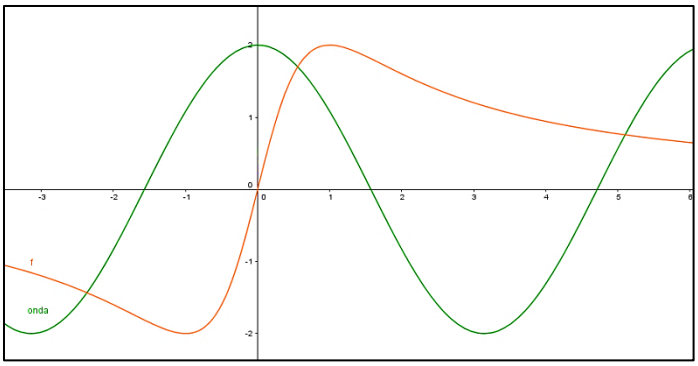
6. Cámbiele el nombre por la letra O, haciendo clic derecho sobre el punto, y clic en Renombrar
7. Personalice su diseño cambiando colores, texturas, tamaños, etc.
8. Finalmente, guarde su construcción con el nombre Actividad 1 y su nombre.
9. El Protocolo de construcción (ver menú Vista) proporciona una tabla que lista los pasos de la construcción. Usando las teclas de flecha puedes recorrer los pasos de la construcción. Además, puedes cambiar el orden le los pasos de la construcción arrastrando filas hacia arriba o hacia abajo.



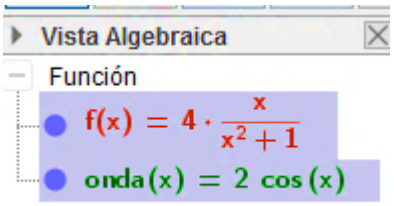
ACTIVIDAD 2

Ingreso de funciones

Para obtener la gráfica de una función y=f(x) basta con escribir en el cajón de entrada la fórmula analítica de la función. Por ejemplo: $4x/(x^2+1)$
Si escribimos y pulsamos INTRO obtendremos la gráfica de la función y además el programa le asignará un nombre por defecto (en este caso f(x)).

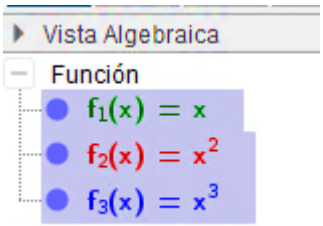


Podemos, asignarle nosotros el nombre que queramos a una función, basta con escribir nombre(x)= "expresión analítica" por ejemplo onda(x)=2*cos(x) obteniendo las siguientes graficas:

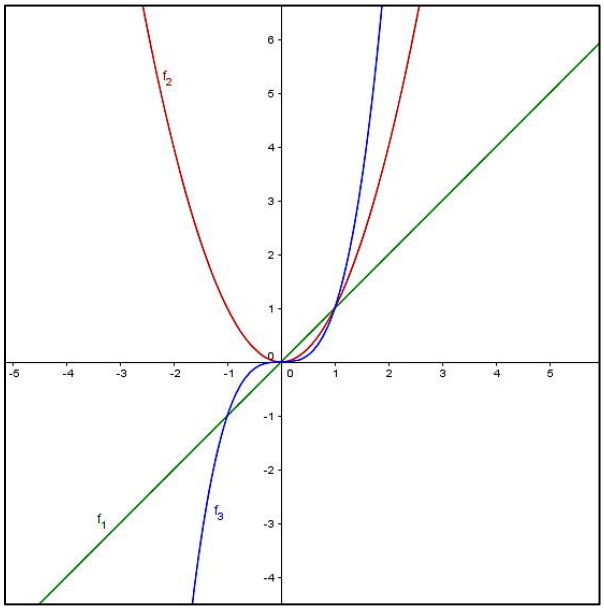


Si queremos ocultar alguna de ellas podemos desactivarlas en la ventana algebraica haciendo clic sobre los botones asociados a los objetos "función"

Si presionamos estos botones azules se ocultan (que no borran) las funciones quedando la vista limpia.



NUMERACIÓN DE FUNCIONES
Si nos interesa numerar una serie de funciones con subíndices basta escribir su nombre seguido de "guión bajo" y el número que queramos.
Así introduciremos:
f_1(x)=x, f_2(x)=x^2, f_3(x)=x^3 una a una obteniendo:



ACTIVIDAD 3

Parámetros de una ecuación lineal

Tarea: Utiliza deslizadores para cambiar dinámicamente los coeficientes de una ecuación lineal.

Paso a paso:

1. Abre una nueva ventana en Geogebra utilizando el menú Archivo.

2. Haz clic en la flecha que se encuentra a la derecha de la Vista gráfica para abrir la barra lateral de Apariencias y selecciona la apariencia Álgebra.

3. Ingresa y = 0.8 * x + 3.2 en la barra de entrada y presiona la tecla Intro.

Exploración: ¿Qué parámetros pueden cambiarse al modificar la ecuación de la recta en la Vista algebraica (utilizando las flechas del teclado) o en la Vista gráfica (utilizando el ratón)?

Pista: asegúrate de que la ecuación o la recta esté seleccionada antes de intentar modificarla.

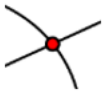
4. En la Vista gráfica, utiliza la herramienta Eliminar para eliminar la recta. Pista: tendrás que abrir una caja de herramientas para seleccionar esta herramienta.

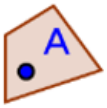
5. Utiliza la herramienta Deslizador

para crear dos deslizadores a y b usando su configuración predeterminada.

Pista: Al hacer clic en la Vista gráfica aparece una ventana que permite especificar los parámetros del deslizador. Haz clic en Aplicar para cerrarla y crear el deslizador.

6. Ingresa y = a * x + b en la barra de entrada y presiona la tecla Intro.

7. Selecciona la herramienta Intersección  de la Barra de herramientas de la Vista gráfica para crear el punto A, intersección de la recta y el eje de ordenadas (y).

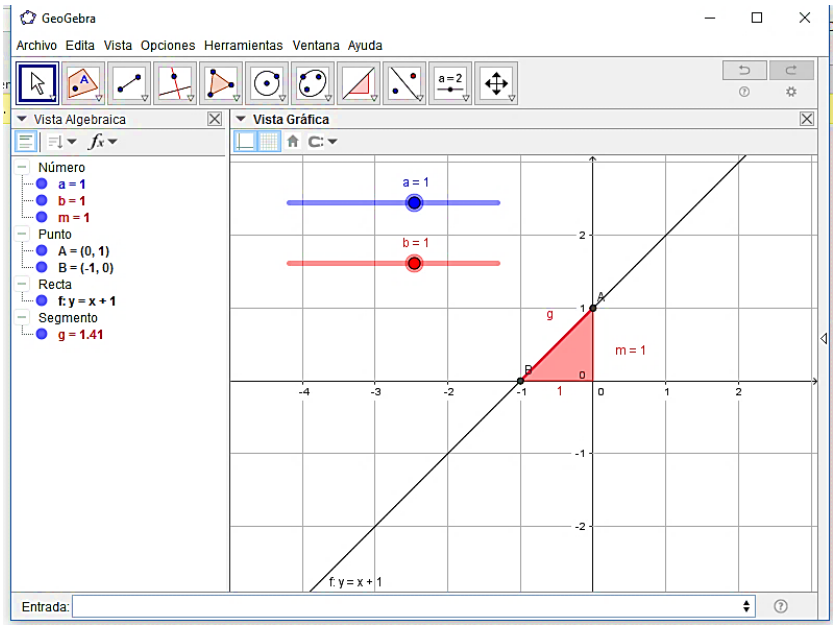
8. Utiliza la herramienta Punto en objeto 

para crear un punto B en el origen.

9. Utiliza la herramienta Segmento para crear el segmento de extremos A y B.

10. Utiliza la herramienta Pendiente para visualizar el triángulo de pendiente de la recta.

Pista: Si quieres mejorar la apariencia de tu construcción, puedes utilizar la Barra de Estilo (por ejemplo, para aumentar el grosor del segmento de modo que pueda distinguirse, aunque esté superpuesto con el eje, o mostrar el valor de la pendiente en lugar de su nombre). Selecciona el objeto que quieras modificar y luego haz clic en la pequeña flecha que se encuentra en la esquina superior izquierda de la Vista gráfica para abrir la Barra de estilo.



Describe tu experiencia con Geogebra:

¿Fue motivado todo el tiempo? ¿Cumplió sus expectativas? ¿Cómo Geogebra puede ayudarte en aprender matemáticas?

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera
Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Aguadas – Caldas
2017

TALLER DE FAMILIARIZACION 3

Objetivo: Construir un modelo de rectángulo a fin de avanzar en el proceso de familiarización a las herramientas de construcción de Geogebra.

Te invitamos con la ayuda del docente y las siguientes pautas a realizar la siguiente construcción:

- Construya un segmento AB
- Mueva el segmento AB hacia un lado de la pantalla.
- Mida el segmento AB.

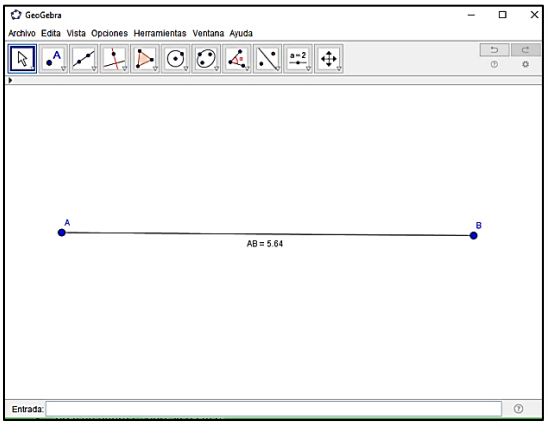


Figura # 1

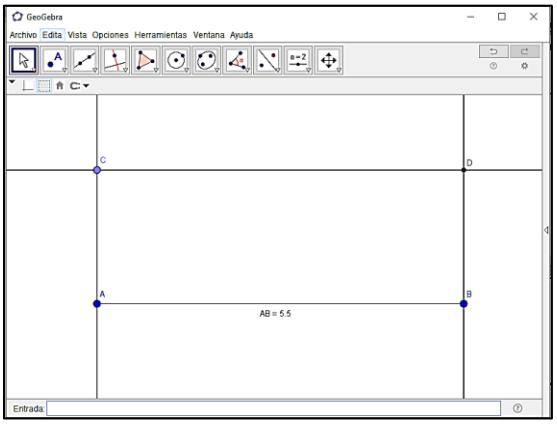


Figura # 2

- Arrastra el segmento AB por uno de los extremos. ¿Qué sucede con la medida del segmento?

_____
_____
_____

(Para realizar los pasos siguientes oriéntese con la Figura # 2).

- Trace una recta perpendicular L al segmento AB que pase por el punto A.
- Crea un punto C sobre la recta L.
- Mueva el punto C e intente sacarlo de la recta L. ¿Qué ocurre?

- Trace una recta paralela M al segmento AB, que pase por el punto C. Mueva el punto C, ¿Qué ocurre con la recta M?

_____

_____

_____

- Trace una recta perpendicular N al segmento AB que pase por B.
- Marque el punto de intersección de la recta M con la recta N y llámelo D.
- Oculte las rectas L, M,N y el segmento AB. Construya el polígono ABCD(ver figura 3).
- Halle el Área y el Perímetro del Rectángulo ABCD. (ver Figura # 4)

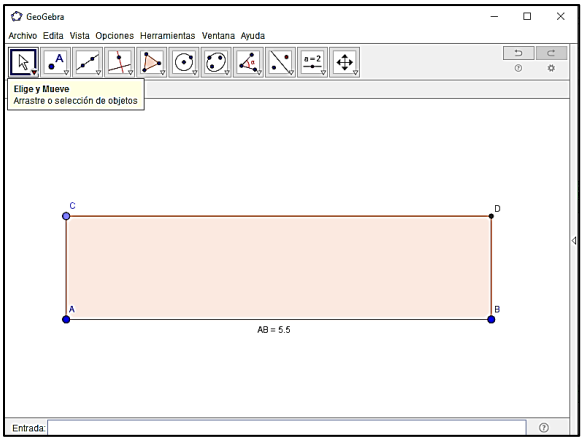


Figura # 3

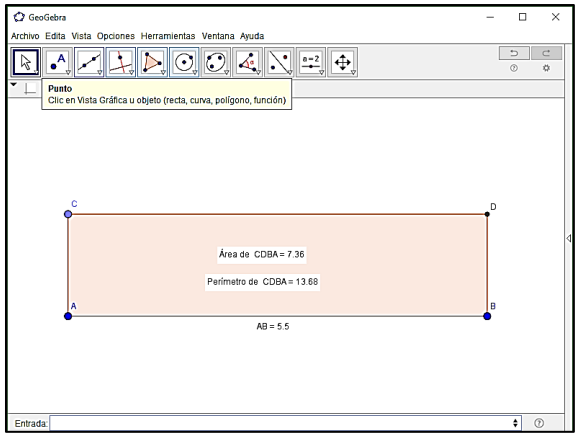


Figura # 4

- Arrastre el punto B. ¿Qué sucede con el Área y el Perímetro?, ¿Qué puedes concluir?

_____

_____

_____

_____

_____

- Mueva ahora el punto C. ¿Qué sucede?

_____

_____

_____

_____

_____

- ¿Te gusto esta actividad?, ¿Por qué?

_____

_____

_____

Actividad de reto

1. Usando las herramientas de construcción de Geogebra, construya un modelo de un Cuadrado.

2. Describa los pasos usados en la construcción del mismo.

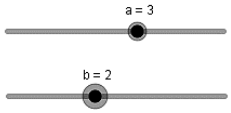
3. Recuerde que debe estar el plano de fondo sin los ejes y sin la cuadricula

Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera
Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Aguadas – Caldas
2017

TALLER DE FAMILIARIZACION 4

Objetivo: Abordar una situación referida a los cambios, a fin de tener un mejor acercamiento a las herramientas de construcción de Geogebra, que no han sido posibles usar en los talleres anteriores.

Te invitamos a realizar la siguiente construcción:



- Construye dos deslizadores a y b de longitud 0 a 5. (Ver figura 1).
- Construya una recta g y una perpendicular a ella h que pase por un punto A.
- Luego use circunferencia centro radio desde el punto A y digite radio a.
- Marque el punto de intersección entre la circunferencia y la recta h.
- Posterior desde el punto A repita el proceso con la circunferencia centro radio y coloca b. en intersecamos.

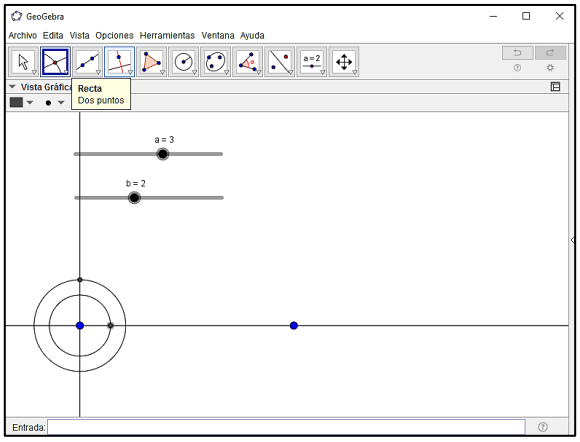


Figura 1

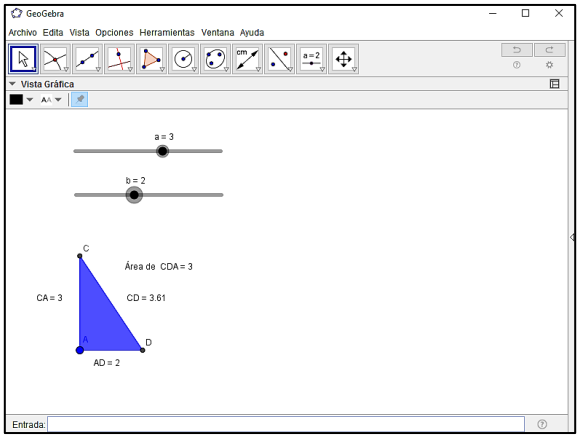


Figura 2

- Oculte todas las rectas y solo deje visible el punto inicial y los puntos de intersección
- Una los puntos con polígono para construir el triángulo rectángulo.
- Halle el área del triángulo (ver figura 2)
- Mueva los deslizadores. ¿Qué sucede con las medidas de los segmentos del triángulo CDA?
- ¿Qué ocurre con el Área del triángulo?

_____
_____
_____

- Explora, haciendo movimientos los deslizadores ¿Cuál debe ser la medida del segmento CA y AD respectivamente, para que el Área del triángulo sea el mayor posible?

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

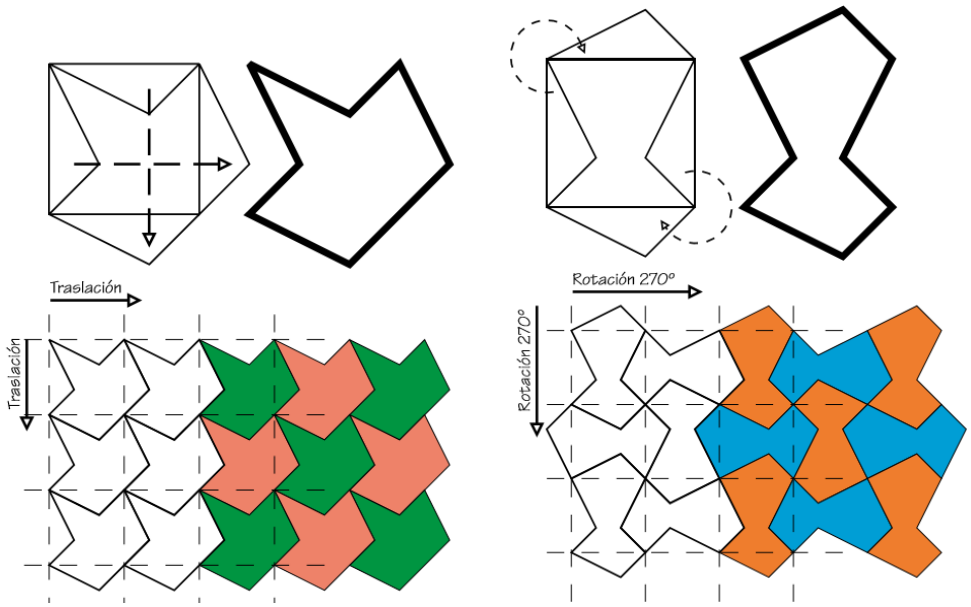
Expresa tus conclusiones.

_____
_____
_____
_____
_____
_____

Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera
Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Aguadas – Caldas
2017

TALLER DE FAMILIARIZACION 5

Objetivo: El objetivo de esta actividad, es construir una figura abstracta, una especie de mosaico o embaldosado, con el fin de tener un acercamiento al manejo de rotaciones y traslaciones de figuras planas.



Construcción paso a paso

1. Abra un nuevo archivo en el programa.
2. Oculte los ejes coordenados y de cuadrícula.
3. Insertamos dos Deslizadores desde min 0 a máx. 5 puede ser con incremento de 0,01. Ambos iguales.
4. Posterior los ubicamos en la parte superior izquierda y dejamos a =3 y b =1.
5. Selecciones **opciones, etiquetado, ningún objeto nuevo.** Para que no le aparezcan letras a los objetos.
6. Colocamos una semirrecta en forma horizontal y ocultamos el segundo punto.
7. Luego trazamos una perpendicular con el punto inicial de la semirrecta.
8. Utilizamos el botón de compas y seleccionamos centro radio. Le damos clic en el punto azul y posterior escribimos **a** en el recuadro (osea el primer deslizador)
9. Buscamos en puntos, el Punto de intersección, entre la circunferencia y la recta.
10. De nuevo usamos línea perpendicular y repetimos el proceso de tocar el punto y las rectas.
11. Quitamos todas las imágenes y solo dejamos los puntos.
12. Los unimos con segmentos.

13. Luego sacamos la circunferencia punto radio y escribimos **b.**
14. Señalamos los puntos de intersección.
15. Ocultamos las circunferencias y con rectas perpendiculares trazamos por todos los puntos.
16. Unimos los puntos de intersección diagonal ascendente y ocultamos las rectas construidas.
17. Utilizamos la herramienta polígono y hacemos un triángulo con los puntos internos uno arriba y otro de lado. No olvide cerrar el polígono tocando el punto inicial.
18. Usamos vector para trasladar las figuras uno horizontal de izquierda a derecha y el otro de arriba hacia abajo.
19. Señalamos el triángulo y señalo el vector el de la izq. y toco el vector derecha y toco el triángulo de arriba y el vector hacia abajo
20. Luego en Polígono damos clic y unimos los vértices del nuevo polígono e indicamos con otro color.
21. Lo señalamos con un clic y le damos clic en editar y luego copiar. De ahí tocamos la pantalla y le damos pegar.
22. Luego vamos a traslación y seleccionamos el polígono y luego en el vector que ya está creado.
23. Una vez lo traslade, le cambiamos el color, por uno favorito.
24. La intención después, es formar un mosaico de 4 x 4, de tal manera que solo uso los dos primeros polígonos.

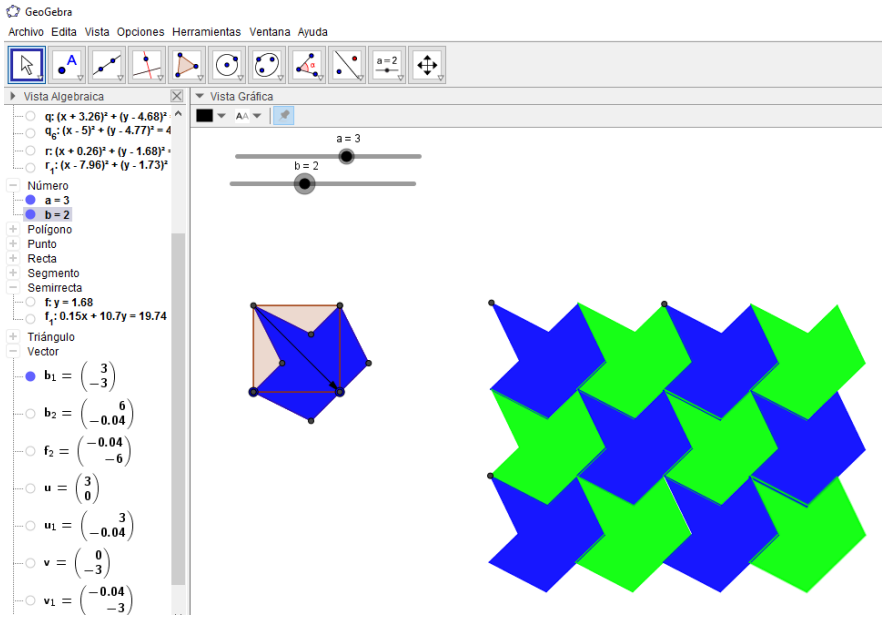


Figura 1

¿Qué encuentras en común respecto al deslizador a con el b?

_____

_____

_____

Actividad reto

Construye el segundo mosaico.

Expresa tus conclusiones, sobre:

Rotación:

_____
_____
_____
_____
_____
_____

Simetría:

_____
_____
_____
_____
_____
_____

Traslación de Figuras:

_____
_____
_____
_____
_____
_____

Anexo 2: Talleres Guiados.

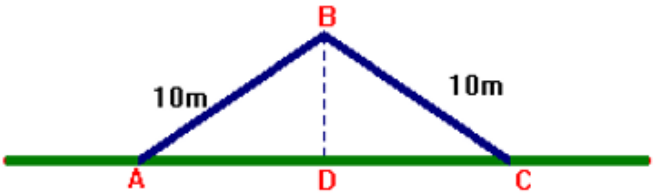
Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera
Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Aguadas – Caldas
2017

TALLER GUIADO 1

Objetivo: Iniciar el proceso de modelación de situaciones problemas referidas a la optimización, a fin de avanzar en la comprensión de la misma, a través del uso de Geogebra.

Con la ayuda de las orientaciones del docente, abordemos la siguiente situación e intenta dar respuestas a las preguntas que se citan:

Un pastor cuenta con dos lazos de cuerda de 10m de largo, para cercar un terreno en el cual desea cultivar hortalizas. Debe limitar el terreno por medio de las dos cuerdas y una barrera natural de piedra (Ver figura).



Tomado de: problemas de optimización con Cabri.

Si traemos esta situación al contexto Matemático y Geométrico, y relacionamos los posibles terrenos a cercar con el comportamiento de un Triángulo Isósceles y la línea imaginaria BD con la altura del mismo:

Responde:

1. ¿Cuál es el valor máximo y el valor mínimo que puede tomar la medida BD?

   _____

   _____

2. ¿Cuál debe ser la medida de BD, para que el pastor obtenga el mayor terreno a cultivar?

   _____

   _____

PAUTAS:

- Abra un archivo nuevo en Geogebra. Y desactive los ejes y la cuadricula, de tal manera que quede en blanco.
- Inserte un deslizador **a** desde 0 hasta 10. Y lo ubica en 5.5. Recuerde evitar el etiquetado.
- Trace **una recta horizontal** y desde el punto A, inserte una circunferencia centro A radio **a**.
- Trace una perpendicular con la recta y el punto A y, señale el punto de intersección con la circunferencia.
- Inserte otra circunferencia con centro en el punto nuevo trazado y radio 10.
- Señale los puntos de intersección con la recta horizontal inicial.
- Seleccione la herramienta polígono, y delimite el triángulo formado por los puntos relatados.
- Oculte todos los objetos restantes, de tal manera que solo quede el triángulo.
- Trace el segmento, que representa la altura del triángulo, y colóquele medida.
- Luego resalte el área del triángulo. Y escriba en entrada Ar= (segmento base*a) /2
- Abra la vista grafica 2. Asegúrese de que esta seleccionada y escriba (a,0)
- Luego digite (0, Ar).
- Ubíquese en recta perpendicular, trácela desde cada punto el del eje **Y** y el punto del eje **X**.
- Vaya a puntos y seleccione punto de intersección y ubíquelo entre las rectas construidas.
- Luego diríjase a líneas y selecciones lugar geométrico: seleccione el deslizador y luego toque el punto de intersección hallado en la vista grafica 2.
- Se le crea una gráfica que le muestra cual es la altura máxima alcanzada y la mínima para mayor certeza.

Revise su trabajo

- Mueva el deslizador a. ¿Qué sucede con la medida de BD y el Área?

  _____

  _____

- Explora e Intenta dar respuesta a las preguntas 1 y 2.
- Describe las conclusiones que puedes dar de esta actividad y los aprendizajes que alcanzaste a obtener en el proceso de ejecución de la misma.

Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera
Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Aguadas – Caldas
2017

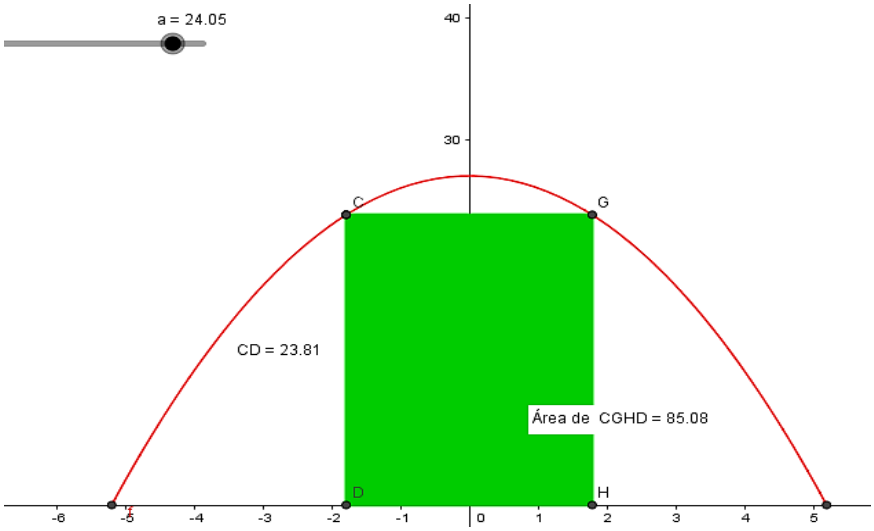
TALLER GUIADO 2

Objetivo: Iniciar el proceso de reconocimiento de variables en un problema de optimización, para avanzar en la comprensión y solución del mismo, apoyándonos en el uso de Geogebra.

I. Con la ayuda de Geogebra y las orientaciones del docente, abordemos la siguiente situación e intenta dar respuestas a las preguntas que se citan:

Hallar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la región limitada por la curva **y = 27 – x**^{2} y el eje X.

¿Cuál es el área máxima? ¿Cuál debe ser las medidas de la base y de la altura?



Pautas:

- Abra un archivo nuevo en Geogebra y oculte la cuadricula.
- De clic derecho sobre la vista gráfica; cambiar las unidades de 1 en 1 para el eje X y de 5 en 5 para el eje Y.
- Inserte un deslizador **a** desde 0 hasta 27 y lo ubica en 10. Recuerde evitar el etiquetado.
- Ingrese la función en la casilla entrada, de la siguiente manera: Entrada: Función[<Lista de números>] y escriba Función[27-x^2,-5.2,5.2]. Luego enter.

- Diríjase a puntos y seleccione intersección; señale las raíces.
- Inserte una circunferencia centro radio, a partir de uno de los dos puntos de intersección, con radio **a.**
- Señale el punto de intersección entre la circunferencia y la curva al lado del punto inicial de la circunferencia.
- Trace una recta perpendicular desde el punto de intersección sobre la curva con el eje X, luego encuentre los puntos de intersección y de nuevo inserte otra perpendicular, de tal manera que forme un rectángulo inscrito en la curva y de base el eje X.
- Oculte las rectas y la circunferencia.
- Con herramienta polígono una los puntos que forman el rectángulo.
- En entrada digite Ar=segmento base*segmento altura.
- Abrimos la vista Grafica 2. Organizamos las unidades de los ejes: para X 1 en 1 y en el eje Y de 10 en 10.
- Nos aseguramos que este seleccionada la vista grafica 2; digitamos en entrada **(0, Ar)** y **(a, 0)**
- Ubíquese en recta perpendicular, trácela desde cada punto insertado el del eje **Y** y el punto del eje **X**.
- Vaya a puntos y seleccione punto de intersección y ubíquelo entre las rectas construidas.
- Luego diríjase a líneas y selecciones lugar geométrico: seleccione clic en el deslizador y luego clic en el punto medio hallado en la vista grafica 2.
- Halle el área del rectángulo, por cualquier método.

  _____

  _____

- Mueva al deslizador. ¿Qué observas?

  _____

  _____

- ¿Quiénes cambian cuando mueve el deslizador?

  _____

  _____

- ¿Cuál crees que son las variables que intervienen en esta situación?

  _____

  _____

- ¿Cuál consideras que se comportan como independientes y cual como dependientes?

  _____

  _____

- Seleccione área y toque el rectángulo para saber qué área tiene; luego seleccione distancia y tome la medida de la base y de la altura del rectángulo tocando los puntos; recuerde que Área del rectángulo =base*altura.
- Explora cuando el área del rectángulo se hace máxima y cuál es el valor de la base y la altura cuando esto sucede. ¿Qué relación hay entre ellas?

_____
_____
_____
_____

II. Describe:

- Las conclusiones que puedes dar de esta actividad.

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

- El aprendizaje que lograste.

_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera
Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Aguadas – Caldas
2017

TALLER GUIADO 3

Objetivo: Reconocer variables en un problema de optimización a través del uso Geogebra, para avanzar en el proceso de comprensión y solución del mismo.

En ciencia, ingeniería y negocios a menudo tenemos interés en los valores máximo y mínimo de una función; por ejemplo, una empresa tiene interés natural en maximizar sus ganancias a la vez que minimiza los costos. La próxima vez que vaya al supermercado, observe que todas las latas que contienen, por ejemplo, 15 oz de alimento (0.01566569 pies3) tienen el mismo aspecto físico. El hecho de que todas las latas de un volumen específico tengan la misma forma (mismos radio y altura) no es coincidencia, puesto que hay dimensiones específicas que minimizan la cantidad de metal usado y, entonces, reducen los costos de construcción de la lata a una empresa. En el mismo tenor, muchos de los denominados automóviles económicos comparten muchas características extraordinariamente semejantes. Esto no es tan simple como el que una empresa copie el éxito de otra empresa, sino, en vez de ello, que un gran número de ingenieros buscan el diseño que minimice la cantidad de material usado.

Dennis G. Zill, Calculo Trascendentes Tempranas 4° Edicion.

I. Con la ayuda del Docente y el software Geogebra, resuelva la siguiente situación y responde los ítems que siguen:

Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se doblará.

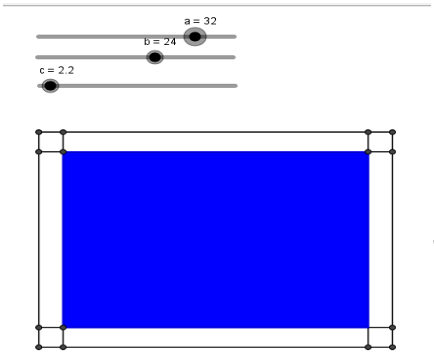
¿Cuál debe ser el lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

A partir del enunciado puede seguirse el proceso que se detalla a continuación:

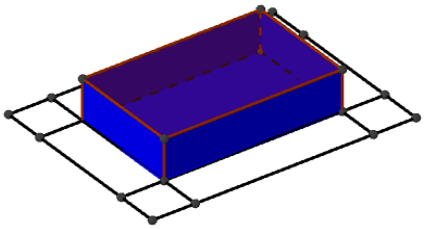
1. Determinar el objetivo del problema:

2. Expresar en forma de función tal objetivo.

3. La caja es un prisma rectangular: volumen = área de la base por la altura. Para mejor comprensión conviene hacer un dibujo.



Vista grafica 1



Vista grafica 3D

Paso a paso.

1. Abra un documento nuevo en Geogebra recuerde ocultar los ejes y la cuadricula.
2. Inserte 3 deslizadores: **a, b y c; a** (el ancho 24), **b** (la base 32), y **h** (la altura 32).
3. Insertamos una semirrecta AB. No olvide quitar el etiquetado.
4. Usamos circunferencia centro radio desde el primer punto y le asignamos al deslizador **a.**
5. Desde ese mismo punto trazamos otra circunferencia y le asignamos el deslizador **b.** de tal manera que con ayuda de rectas perpendiculares y los puntos de intersección, completemos el rectángulo simulado.
6. Insertamos ahora en cada uno de los vértices del rectángulo una circunferencia centro con radio **h**; y ubicamos los puntos de intersección con los lados.
7. Con segmentos unimos los puntos para terminar de construir la imagen inicial del rectángulo.
8. Ocultamos las circunferencias y las rectas, dejando sólo los puntos que delimitan el rectángulo y usamos la herramienta polígono para delimitarlo.
9. Lo que deseamos es cortar el cuadro de valor x, entonces el volumen de la caja sería:
   $\boldsymbol{Vcaja = base * ancho * altura}$ Insertamos en entrada: V= h (a – 2h) (b – 2h).
10. Abrimos la vista grafica 2. Nos aseguramos de estar en ella y digitamos (0, V) y (h,0).
11. Ubíquese en recta perpendicular, trácela desde cada punto insertado el del eje **Y** y el punto del eje **X**.
12. Vaya a puntos y seleccione punto de intersección y ubíquelo entre las rectas construidas.
13. Luego seleccione lugar geométrico y toque al deslizador **h** y al punto de intersección en la vista grafica dos.
14. Damos color rojo al punto de la gráfica, y a la curva generada.
15. Abrimos la vista grafica en 3D. y con ayuda de **Prisma o Cilindro desde su base**, seleccionamos el rectángulo y digitamos como altura **h**; de esta manera vemos claramente la caja formada.

Describe:

- Las conclusiones que puedes dar de esta actividad.

  _____

  _____

  _____

_____
_____
_____
_____

- Los aprendizajes que lograste.

_____
_____
_____
_____
_____
_____

- Y responde la pregunta inicial.

_____
_____
_____
_____

Teniendo en cuenta los valores del problema anterior halla las soluciones pedidas sabiendo lo siguiente:

$$\boldsymbol{Vcaja = base * ancho * altura}$$
$$\boldsymbol{= (32 - 2x)(24 - 2x)(x)}$$
$$\boldsymbol{= 768x - 112x^2 + 4x^3}$$

Estrategias para resolver problemas aplicados de mínimos y máximos

1. Identificar todas las cantidades dadas y las que se van a determinar. Si es posible, elaborar un dibujo.

2. Escribir una ecuación primaria para la cantidad que se va a maximizar o minimizar.

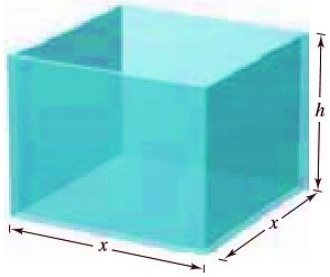
3. Reducir la ecuación primaria a una que tenga una sola variable independiente. Esto quizá implique el uso de ecuaciones secundarias que relacionan las variables independientes de la ecuación primaria.

4. Determinar el dominio admisible de la ecuación primaria. Esto es, determinar los valores para los cuales el problema planteado tiene sentido. 5. Determinar el valor máximo o mínimo deseado mediante las técnicas de cálculo.

Ron Larson, Calculo 1 de una variable 9° edición.

Ahora te reto

Un fabricante quiere diseñar una caja abierta que tenga una base cuadrada y un área superficial de 108 pulgadas cuadradas, como se muestra en la siguiente figura.



Caja Abierta con base cuadrada. S= superficie

¿Qué dimensiones producirá una caja con un volumen máximo?

Anexo 3: Talleres de Profundización.

Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera
Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Aguadas – Caldas
2017

TALLER DE PROFUNDIZACION 1

Objetivo: Avanzar en los procesos de reconocimiento de variables, interpretación, comprensión y solución de ciertos problemas de optimización, a través de la construcción de modelos con las herramientas de trabajo de Geogebra

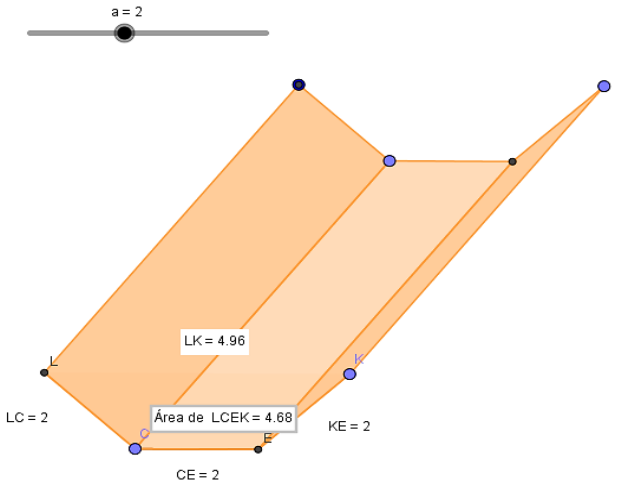
I. Con la ayuda de Geogebra, te invitamos a resolver la siguiente situación y a responder las preguntas citadas:

Situación

Un ingeniero debe construir la canalización de un pequeño arroyo. La forma de la canal vista de frente debe ser un trapecio isósceles 2m de base (ver figura).

¿Cómo debe el ingeniero diseñar la canal de tal forma que el flujo de agua por ella sea lo mayor posible en caso de llenarse completamente por cualquier causa natural? (O Desde otra perspectiva)

¿Cuáles deben ser las dimensiones del trapecio que auxilia la construcción del canal para obtener la de mayor flujo de agua posible en caso de llenarse completamente por cualquier causa natural?



- ¿Cuáles son las variables que intervienen en esta situación?
- ¿Cuáles se comportan como dependientes y cuales como independientes?

Describe:

- Los pasos usados para construir el modelo con Geogebra que te permitió dar solución al problema
- Las conclusiones que puedes dar de esta actividad.
- El aprendizaje que lograste.

- Haga la gráfica de la base contra el área
- ¿Qué tipo de gráfica crees que se obtiene?
- Describe tus conclusiones.

Institución Educativa Escuela Normal Superior Claudina Múnera
Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales
Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales
Aguadas – Caldas
2017

TALLER DE PROFUNDIZACION 2

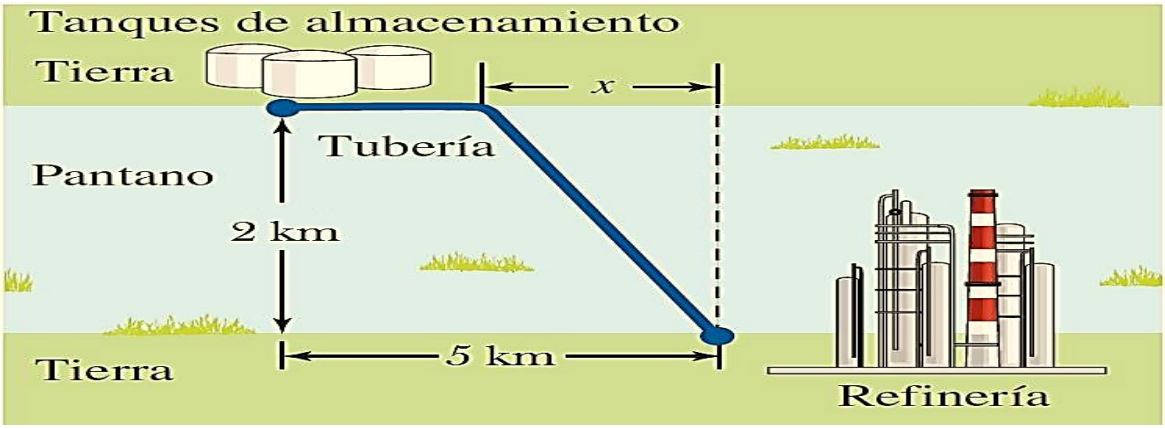
Objetivo: Avanzar en los procesos de reconocimiento de variables, interpretación, comprensión y solución de ciertos problemas de optimización, a través de la construcción de modelos con las herramientas de trabajo de Geogebra

I. Con la ayuda de Geogebra, te invitamos a resolver la siguiente situación y a responder las preguntas citadas:

Situación

Se construirá un oleoducto desde una refinería hasta unos tanques de almacenamiento, atravesando un pantano (ver figura); El costo de construcción a través del pantano es de 50000 dólares por kilómetro y en tierra firme es de 25000 dólares por kilómetro.

- ¿Cómo se debe construir el oleoducto para que el costo de construcción sea mínimo?



Fuente: *Dennis G. Zill, Calculo Trascendentes Tempranas 4° Edición. Pág. 243*

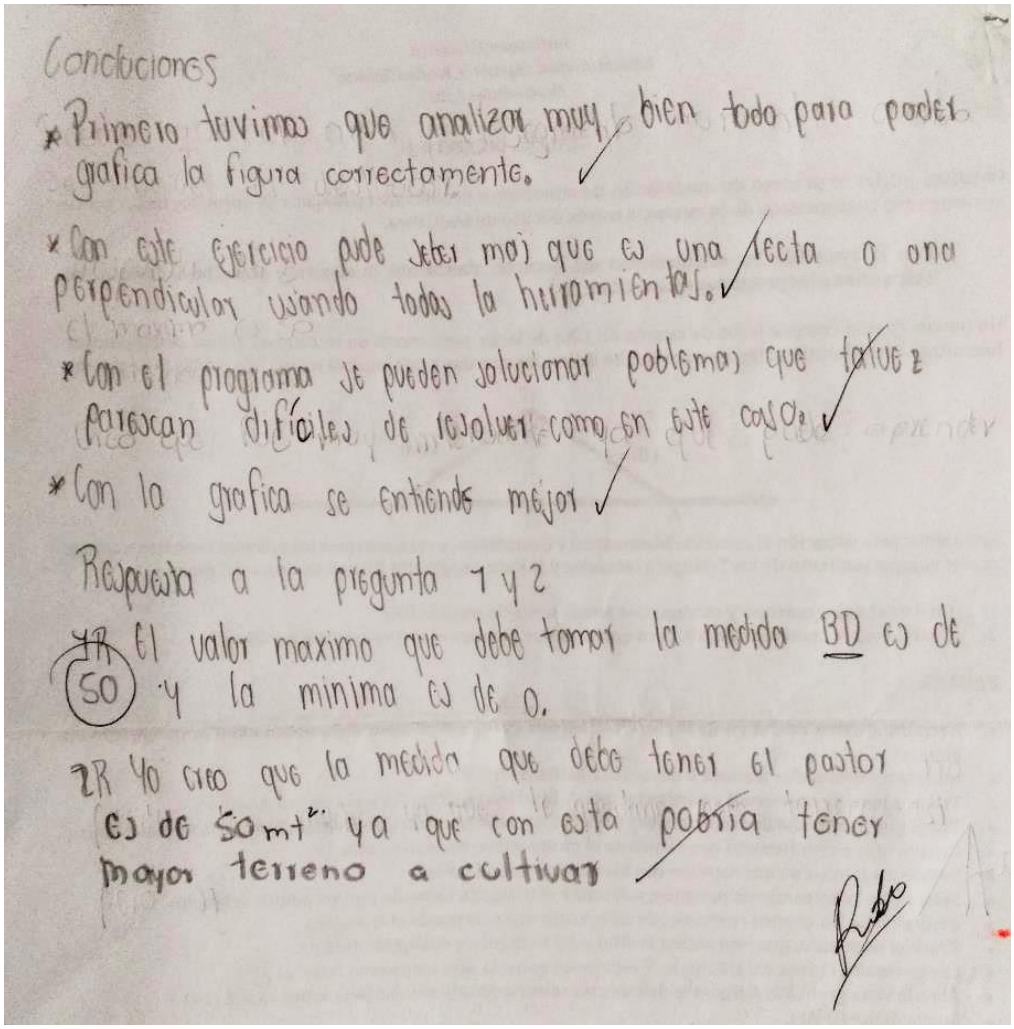
- ¿Cuáles son las variables que intervienen en esta situación? ¿Cuáles se comportan como dependientes y cuales como independientes?

Describe

- Los pasos usados para construir el modelo con Geogebra te permitió dar solución al problema
- Las conclusiones que puedes dar de esta actividad.

- El aprendizaje que lograste.
- Haga la gráfica de la base contra el área
- ¿Qué tipo de gráfica crees que se obtiene?
- Describe tus conclusiones.

Anexo 4: Soluciones y respuestas dadas por los estudiantes



Conclusiones

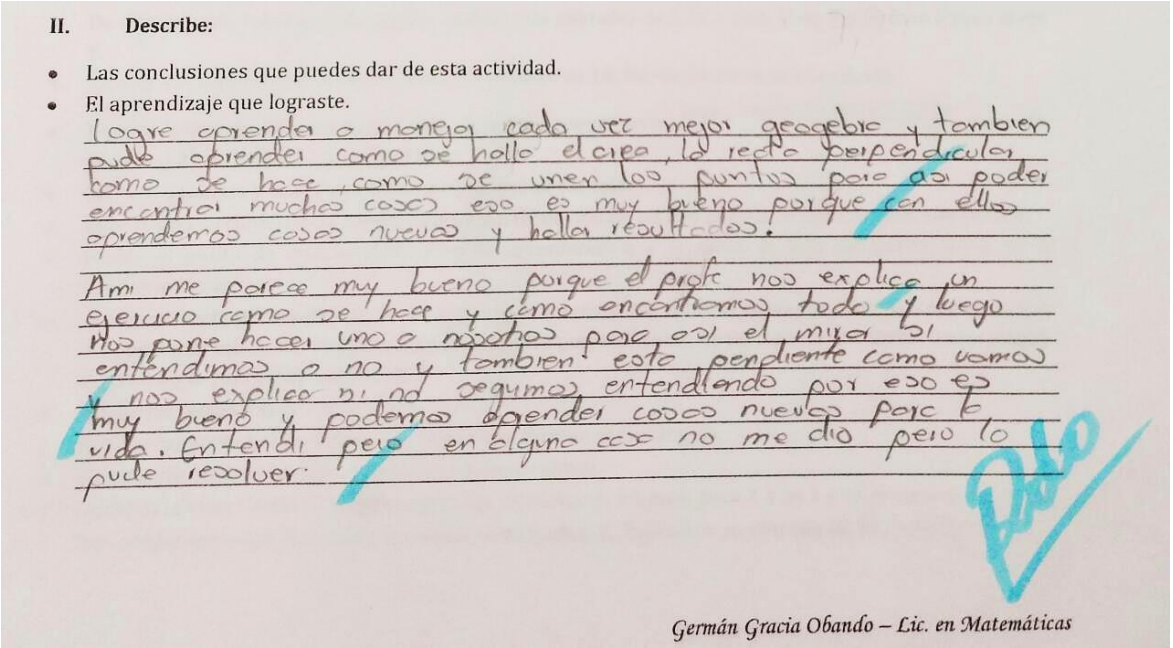
* Primero tuvimos que analizar muy bien todo para poder grafica la figura correctamente.
* Con este ejercicio pude saber mas que es una recta o una perpendicular usando todas la herramientas.
* Con el programa se pueden solucionar problemas que tal vez parezcan difíciles de resolver como en este caso.
* Con la grafica se entiende mejor

Respuesta a la pregunta 1 y 2

1R El valor maximo que debe tomar la medida BD es de 50 y la minima es de 0.

2R Yo creo que la medida que debe tener el pastor es de 50 mt² ya que con esta podria tener mayor terreno a cultivar

Figura 1: Respuesta actividad área máxima de un triángulo isósceles. Fuente: Elaboración de estudiantes.



II. Describe:

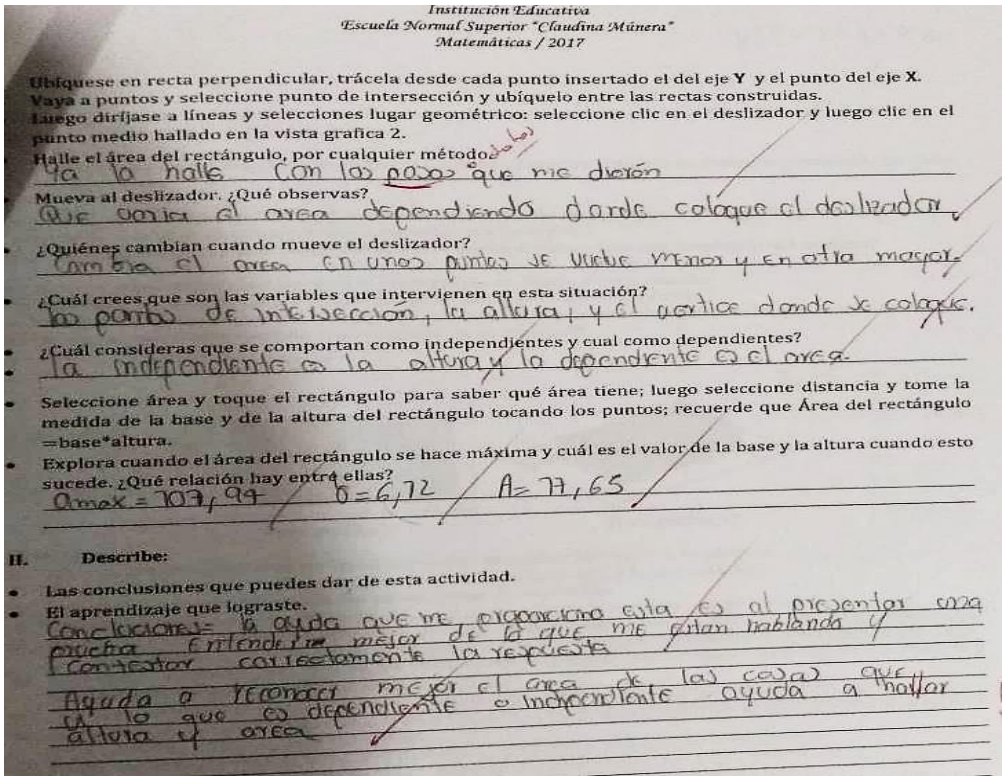
- Las conclusiones que puedes dar de esta actividad.
- El aprendizaje que lograste.

logre aprender a manejar cada vez mejor geogebra y tambien pude aprender como se halla el area, la recta perpendicular, como se hace, como se unen los puntos para asi poder encontrar muchas cosas eso es muy bueno porque con ellas aprendemos cosas nuevas y hallar resultados!

Ami me parece muy bueno porque el profe nos explica un ejercicio como se hace y cómo encontramos todo y luego nos pone hacer uno a nosotros para asi el mira si entendimos o no y tambien esta pendiente como vamos y nos explica si no seguimos entendiendo por eso es muy bueno y podemos aprender cosas nuevas para la vida. Entendi pero en alguna cosa no me dio pero lo pude resolver.

Germán Gracia Obando – Lic. en Matemáticas

Figura 2: Conclusiones taller de familiarización 3. Fuente: Elaboración de estudiantes



Institución Educativa
Escuela Normal Superior "Claudina Múnera"
Matemáticas / 2017

Ubíquese en recta perpendicular, trácela desde cada punto insertado el del eje Y y el punto del eje X. Vaya a puntos y seleccione punto de intersección y ubíquelo entre las rectas construidas. Luego dirijase a líneas y selecciones lugar geométrico: seleccione clic en el deslizador y luego clic en el punto medio hallado en la vista grafica 2.

Halle el área del rectángulo, por cualquier método.
ya lo halle con los pasos que me dieron

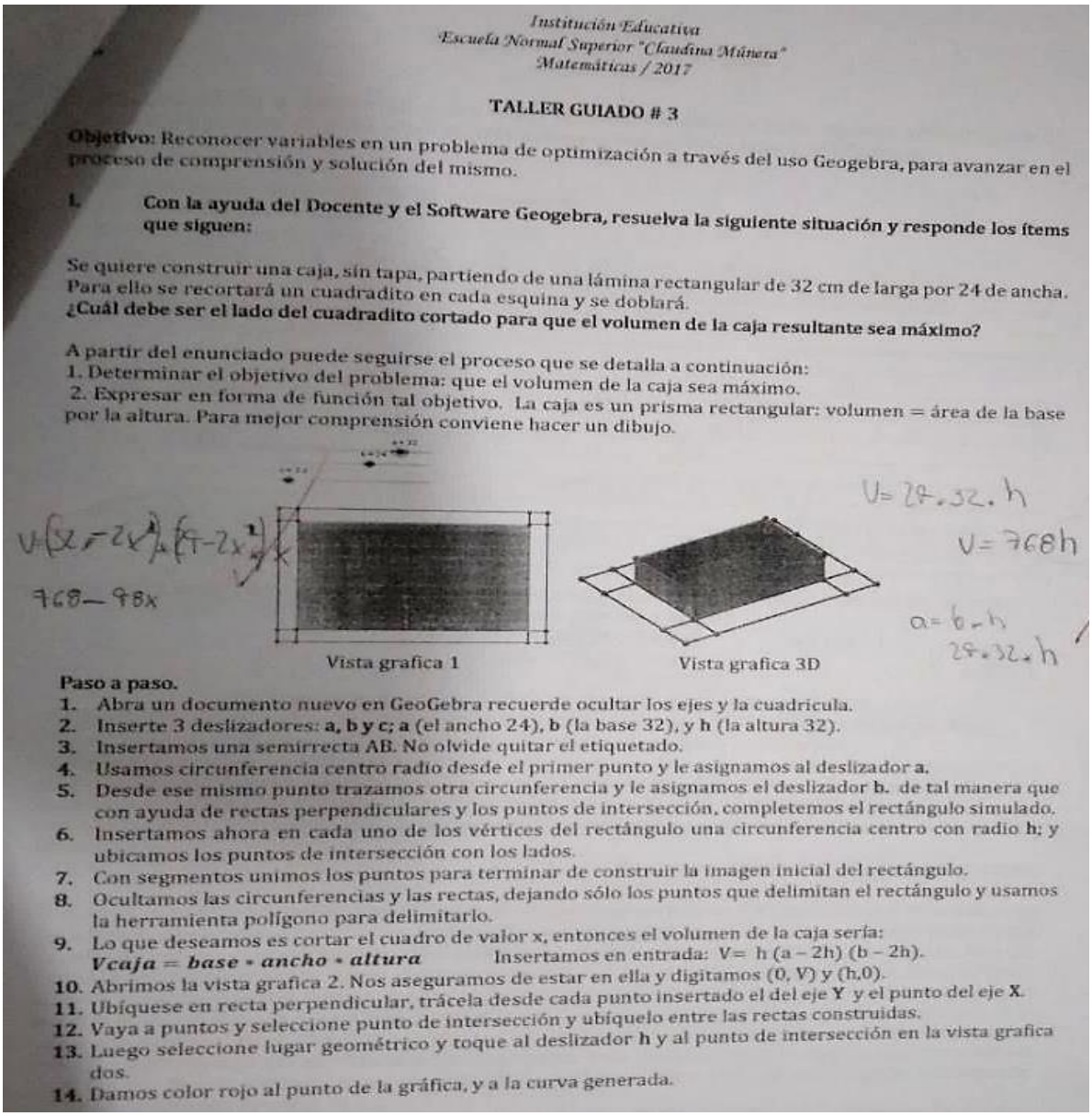
- **Mueva al deslizador. ¿Qué observas?**
Que varia el area dependiendo donde coloque el deslizador.
- **¿Quiénes cambian cuando mueve el deslizador?**
Cambia el area en unos puntos se vuelve menor y en otra mayor.
- **¿Cuál crees que son las variables que intervienen en esta situación?**
los puntos de intersecion, la altura, y el vertice donde se coloque.
- **¿Cuál consideras que se comportan como independientes y cual como dependientes?**
la independiente es la altura y la dependiente es el area.
- **Seleccione área y toque el rectángulo para saber qué área tiene; luego seleccione distancia y tome la medida de la base y de la altura del rectángulo tocando los puntos; recuerde que Área del rectángulo =base*altura.**
- **Explora cuando el área del rectángulo se hace máxima y cuál es el valor de la base y la altura cuando esto sucede. ¿Qué relación hay entre ellas?**
Amax = 107,99 / b=6,72 / A= 77,65

II. Describe:

- **Las conclusiones que puedes dar de esta actividad.**
- **El aprendizaje que lograste.**

Conclusiones: la ayuda que me proporciona esta es al presentar una prueba, entendi mejor de lo que me estan hablando y contestar correctamente la respuesta.
Ayuda a reconocer mejor el area de las cosas que hallar si lo que es dependiente o independiente ayuda a hallar altura y area.

Figura 3: Respuestas taller guiado1. Fuente: Elaboración de estudiantes.



Institución Educativa
Escuela Normal Superior "Claudina Múnera"
Matemáticas / 2017

TALLER GUIADO # 3

Objetivo: Reconocer variables en un problema de optimización a través del uso Geogebra, para avanzar en el proceso de comprensión y solución del mismo.

I. **Con la ayuda del Docente y el Software Geogebra, resuelva la siguiente situación y responde los ítems que siguen:**

Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se doblará.
¿Cuál debe ser el lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

A partir del enunciado puede seguirse el proceso que se detalla a continuación:
1. Determinar el objetivo del problema: que el volumen de la caja sea máximo.
2. Expresar en forma de función tal objetivo. La caja es un prisma rectangular: volumen = área de la base por la altura. Para mejor comprensión conviene hacer un dibujo.

$V=(32-2x)(24-2x)x$

$768-98x$

$V=24\cdot 32\cdot h$

$V=768h$

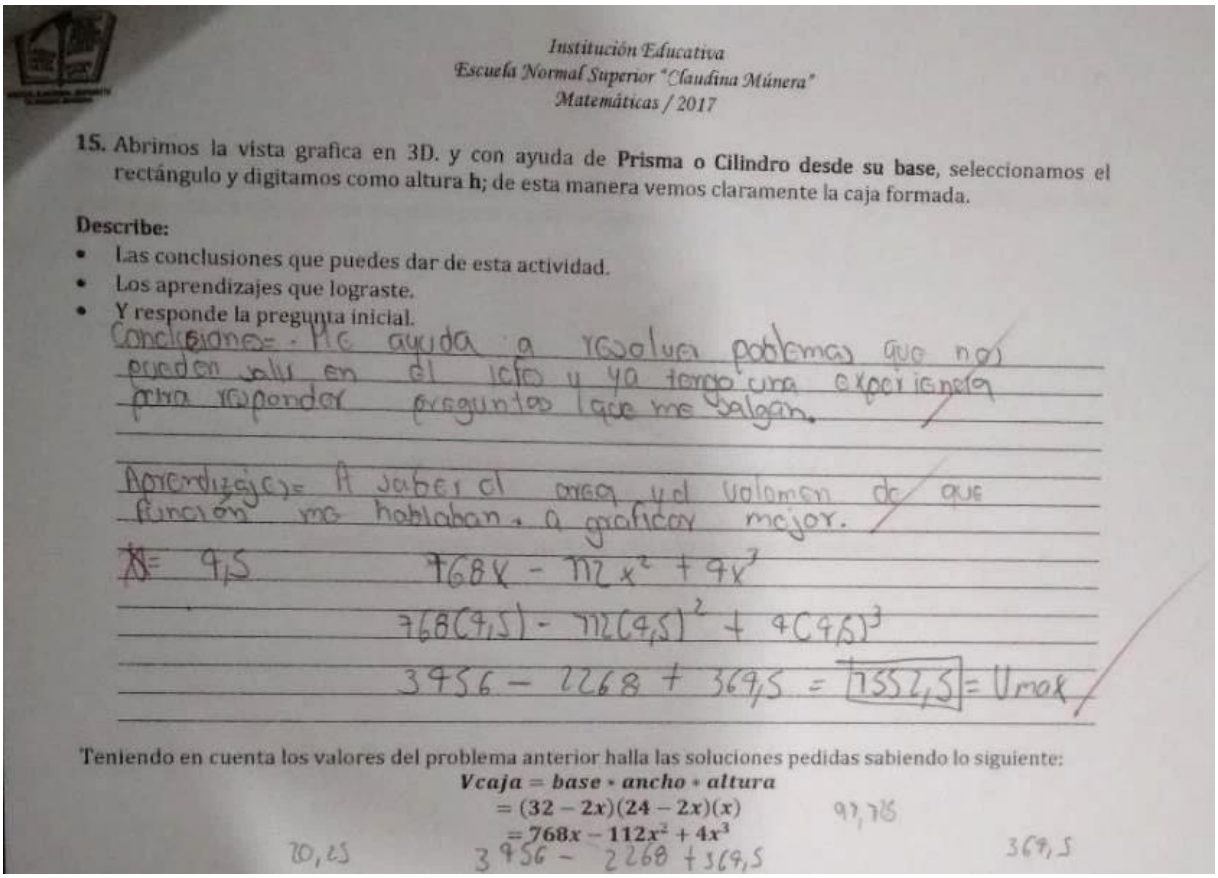
$a=b\cdot h$

$24\cdot 32\cdot h$

Vista grafica 1 Vista grafica 3D

Paso a paso.
1. Abra un documento nuevo en GeoGebra recuerde ocultar los ejes y la cuadricula.
2. Inserte 3 deslizadores: **a, b y c; a** (el ancho 24), **b** (la base 32), y **h** (la altura 32).
3. Insertamos una semirrecta AB. No olvide quitar el etiquetado.
4. Usamos circunferencia centro radio desde el primer punto y le asignamos al deslizador **a.**
5. Desde ese mismo punto trazamos otra circunferencia y le asignamos el deslizador **b.** de tal manera que con ayuda de rectas perpendiculares y los puntos de intersección, completemos el rectángulo simulado.
6. Insertamos ahora en cada uno de los vértices del rectángulo una circunferencia centro con radio **h**; y ubicamos los puntos de intersección con los lados.
7. Con segmentos unimos los puntos para terminar de construir la imagen inicial del rectángulo.
8. Ocultamos las circunferencias y las rectas, dejando sólo los puntos que delimitan el rectángulo y usamos la herramienta polígono para delimitarlo.
9. Lo que deseamos es cortar el cuadro de valor x, entonces el volumen de la caja sería:
   Vcaja = base • ancho • altura Insertamos en entrada: V= h (a – 2h) (b – 2h).
10. Abrimos la vista grafica 2. Nos aseguramos de estar en ella y digitamos (0, V) y (h,0).
11. Ubíquese en recta perpendicular, trácela desde cada punto insertado el del eje **Y** y el punto del eje **X**.
12. Vaya a puntos y seleccione punto de intersección y ubíquelo entre las rectas construidas.
13. Luego seleccione lugar geométrico y toque al deslizador **h** y al punto de intersección en la vista grafica dos.
14. Damos color rojo al punto de la gráfica, y a la curva generada.

Figura 4: Respuesta a la pregunta inicial del taller guiado 3. Fuente: Elaboración de estudiantes.



Institución Educativa
Escuela Normal Superior "Claudina Múnera"
Matemáticas / 2017

15. Abrimos la vista grafica en 3D. y con ayuda de **Prisma o Cilindro desde su base**, seleccionamos el rectángulo y digitamos como altura **h**; de esta manera vemos claramente la caja formada.

Describe:

- Las conclusiones que puedes dar de esta actividad.
- Los aprendizajes que lograste.
- Y responde la pregunta inicial.

Conclusiones= Me ayuda a resolver problemas que no pueden salir en el tablero y ya tengo una experiencia para responder preguntas que me salgan.

Aprendizajes= A saber el area y el volumen de que funcion me hablaban. a graficar mejor.

$x = 9{,}5$ $\quad 768x - 112x^2 + 4x^3$

$768(9{,}5) - 112(9{,}5)^2 + 4(9{,}5)^3$

$3956 - 2268 + 369{,}5 = \boxed{1552{,}5} = V_{max}$

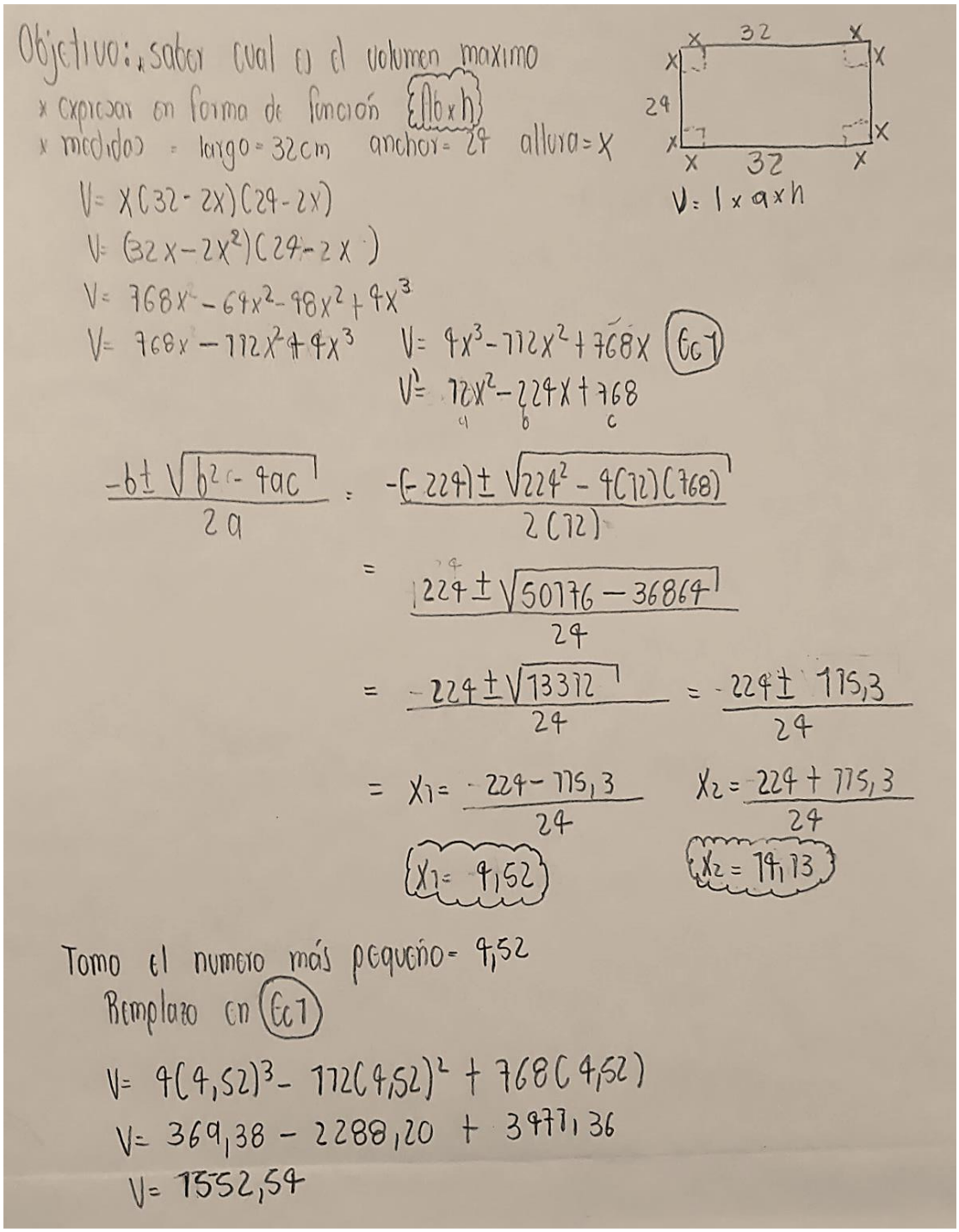
Teniendo en cuenta los valores del problema anterior halla las soluciones pedidas sabiendo lo siguiente:

$$V_{caja} = base \cdot ancho \cdot altura$$
$$= (32 - 2x)(24 - 2x)(x)$$
$$= 768x - 112x^2 + 4x^3$$

97,75

20,25 $\quad 3956 - 2268 + 369{,}5 \quad$ 369,5

Figura 5: Respuestas de algunos parámetros del taller guiado 3. Fuente: Elaboración de estudiantes.



Objetivo: saber cual es el volumen maximo

x expresar en forma de función {l b x h}

x medidas = largo = 32cm ancho = 24 altura = x

$V = x(32-2x)(24-2x)$

$V = (32x - 2x^2)(24 - 2x)$

$V = 768x - 64x^2 - 48x^2 + 4x^3$

$V = 768x - 112x^2 + 4x^3$ $\quad V = 4x^3 - 112x^2 + 768x$ (Ec 1)

$V' = 12x^2 - 224x + 768$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-224) \pm \sqrt{224^2 - 4(12)(768)}}{2(12)}$$

$$= \frac{224 \pm \sqrt{50176 - 36864}}{24}$$

$$= \frac{224 \pm \sqrt{13312}}{24} = \frac{224 \pm 115,3}{24}$$

$$= x_1 = \frac{224 - 115,3}{24} \qquad x_2 = \frac{224 + 115,3}{24}$$

$x_1 = 4,52$ $\qquad x_2 = 14,13$

Tomo el numero más pequeño = 4,52

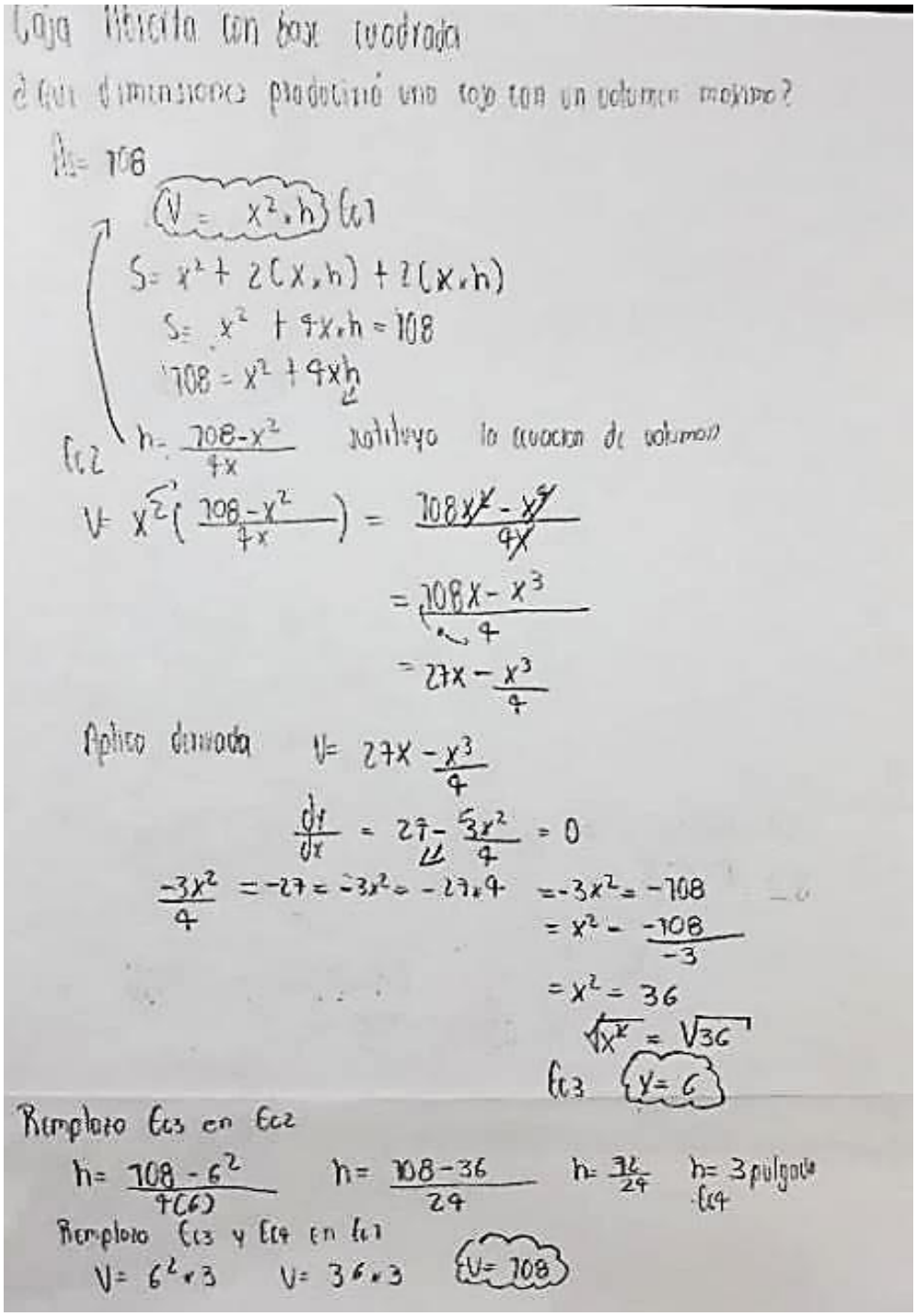
Remplazo en (Ec 1)

$V = 4(4,52)^3 - 112(4,52)^2 + 768(4,52)$

$V = 369,38 - 2288,20 + 3471,36$

$V = 1552,54$

Figura 6: Solución en forma algebraica del taller guiado 3: construcción de una caja sin tapa con capacidad máxima a partir de una lámina con medidas específicas. Fuente: elaboración estudiante.



Caja Abierta con base cuadrada

¿Qué dimensiones produciría una caja con un volumen máximo?

$S = 108$

$V = x^2 \cdot h$ Ec1

$S = x^2 + 2(x \cdot h) + 2(x \cdot h)$

$S = x^2 + 4x \cdot h = 108$

$108 = x^2 + 4xh$

Ec2 $h = \frac{108 - x^2}{4x}$ sustituyo la ecuación de volumen

$V = x^2\left(\frac{108 - x^2}{4x}\right) = \frac{108x^2 - x^4}{4x}$

$= \frac{108x - x^3}{4}$

$= 27x - \frac{x^3}{4}$

Aplico derivada $V = 27x - \frac{x^3}{4}$

$\frac{dV}{dx} = 27 - \frac{3x^2}{4} = 0$

$\frac{-3x^2}{4} = -27 = -3x^2 = -27 \cdot 4 = -3x^2 = -108$

$= x^2 = \frac{-108}{-3}$

$= x^2 = 36$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{36}$

Ec3 $x = 6$

Remplazo Ec3 en Ec2

$h = \frac{108 - 6^2}{4(6)}$ $h = \frac{108 - 36}{24}$ $h = \frac{36}{24}$ $h = 3$ pulgadas Ec4

Remplazo Ec3 y Ec4 en Ec1

$V = 6^2 \cdot 3$ $V = 36 \cdot 3$ $V = 108$

Figura 7: solución en forma algebraica de la actividad reto del taller guiado 3: Fuente: elaboración estudiante.

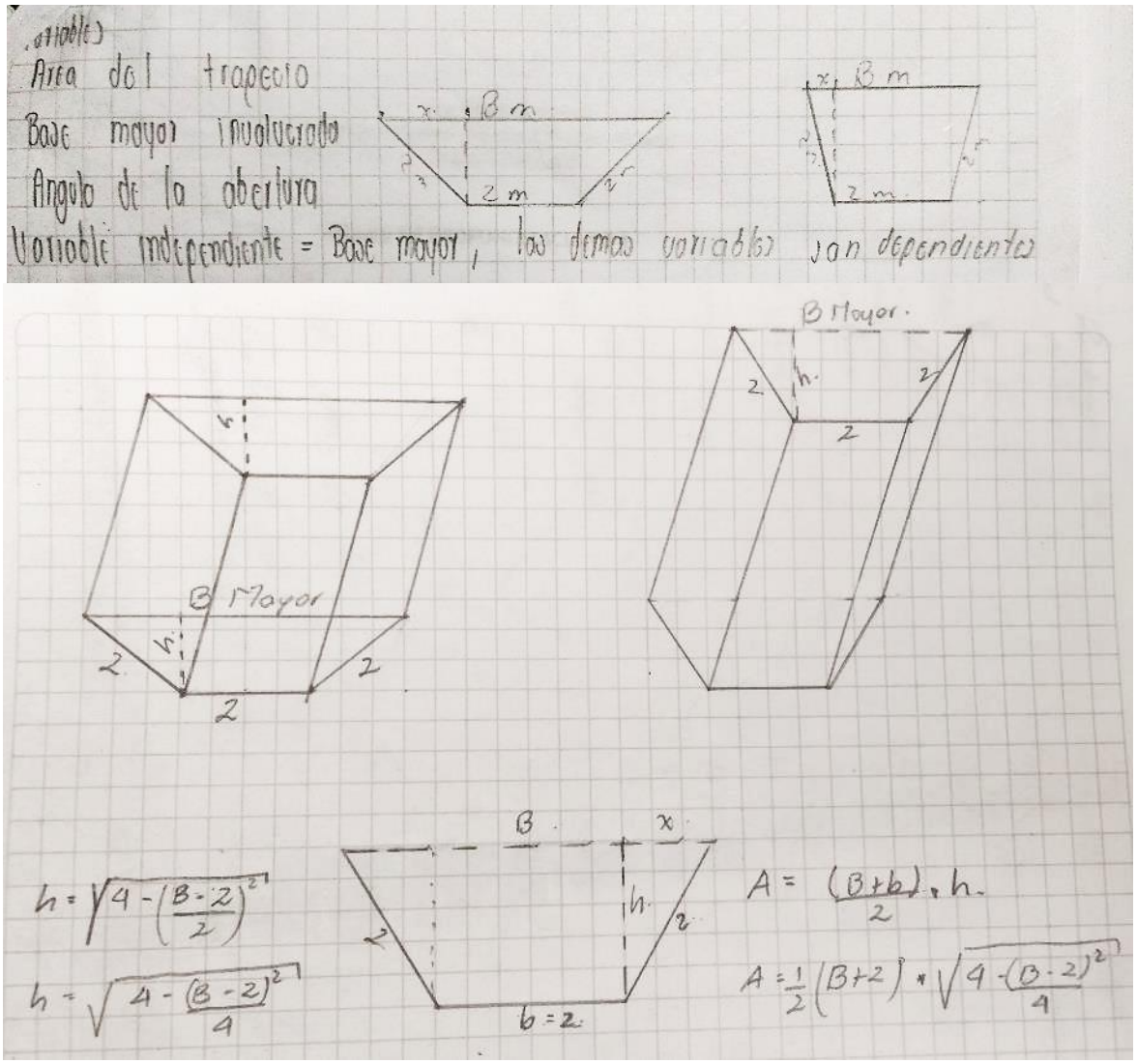
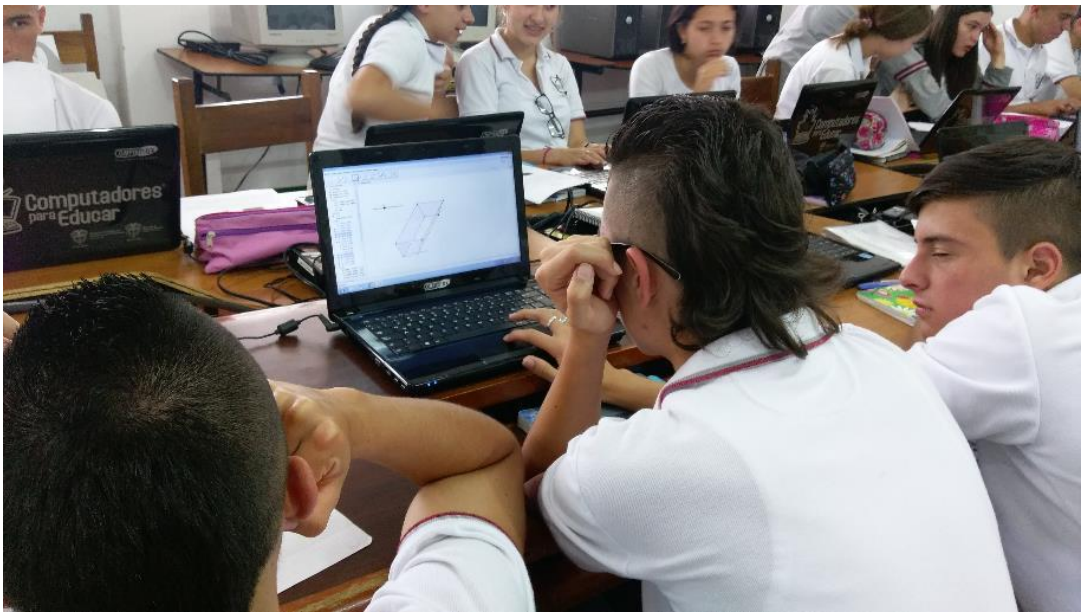
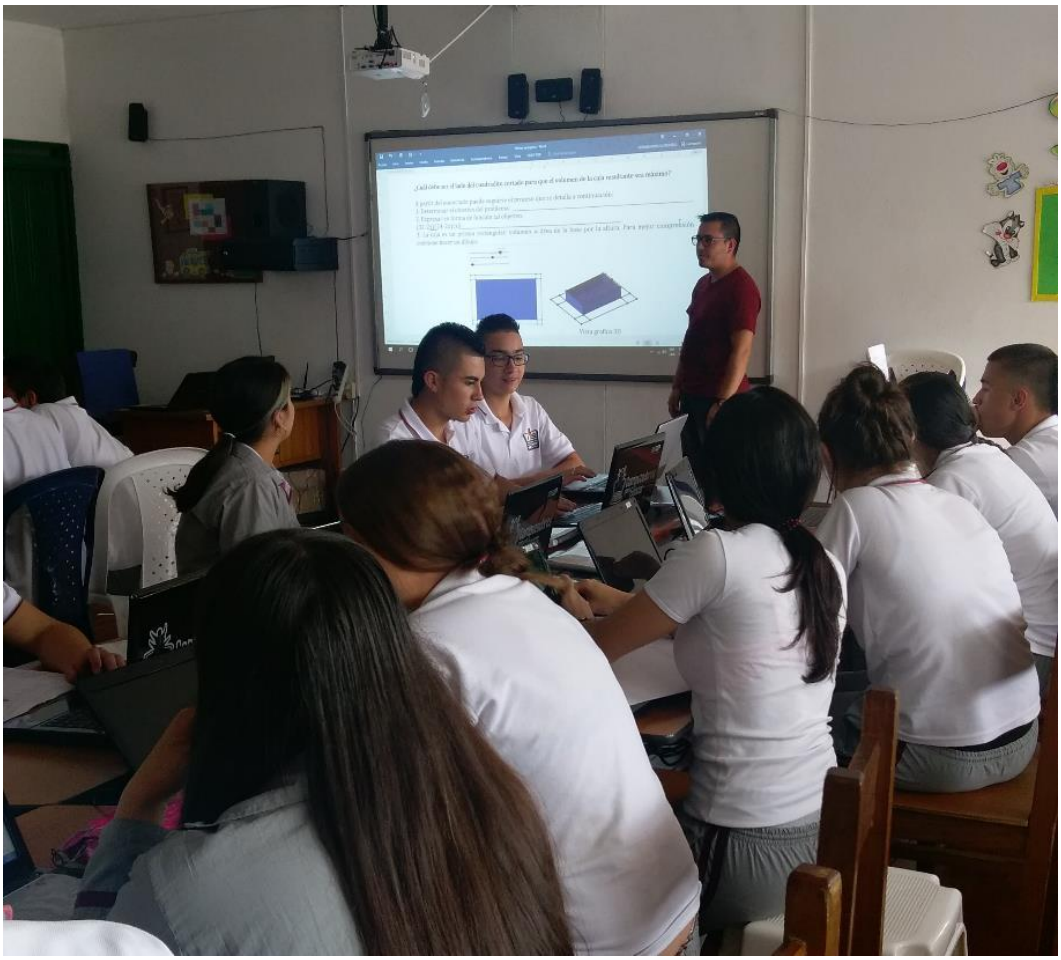
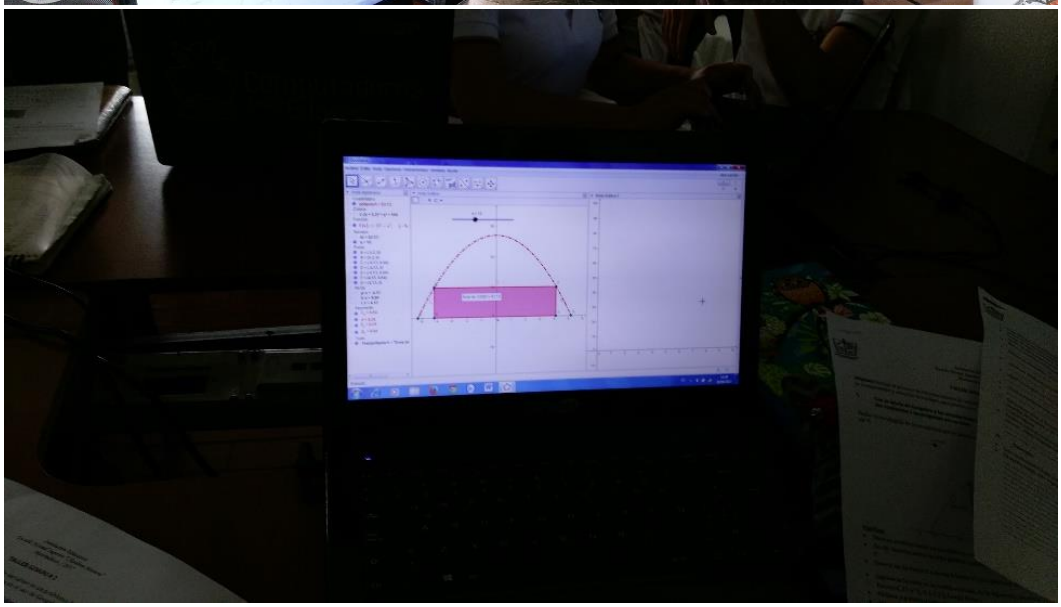


Figura 8: solución en forma algebraica y figural del taller de profundización 1: Fuente: elaboración estudiante.


Computadores
para Educar



Computadores para Educar



ESCUELA
NORMAL
SUPERIOR