UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Ecuación No-Lineal de la Dinámica Clásica y Cuántica de un Electrón Auto-Actuante

Juan Camilo Serna Bedoya

Universidad Nacional de Colombia sede Manizales

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Física

Manizales, Colombia

2015

Non-Linear Equation of the Classical and Quantum Dynamics of a Self-Acting Electron

Juan Camilo Serna Bedoya

Tesis de Maestría presentada como requisito para optar al título de:

Magister en Física

Directora:

Ph.D. Lucero Álvarez Miño

Línea de Investigación:

Teoría de Campos

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Física

Manizales, Colombia

2015

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios, fuente de toda sabiduría, a mi familia y amigos que me apoyaron en todo este proceso, y en especial a la profesora Lucero Álvarez Miño por su dedicación y entrega como directora de la tesis.

Resumen

En esta tesis de Maestría, se presenta un análisis riguroso de la dinámica clásica y cuántica de la interacción del electrón con su propio campo electromagnético, haciendo especial énfasis en el papel que juegan las simetrías del espacio-tiempo, llevando esto inevitablemente a la necesidad de las ‘’Antipartículas ’’ clásicas como consecuencia de la conservación del Tensor Momento-Energía del sistema Campo Electromagnético-Partícula.

Palabras clave: Electrodinámica Clásica, Autoenergía del Electrón, Lagrangiano de la QED, Antipartículas Clásicas, Ecuación de Dirac-Lorentz.

Abstract

In this thesis, I will present a rogorous analysis of the Classical and Quantum Dynamics of the interaction of an electron with his own electromagnetic field, with special emphasis in the role played by symmetries of space-time, taking this inevitably to the need of the Classical ‘’Antiparticles’’ as a consecuence of the conservation of the Energy-Momentum Tensor of the system Particle-Electromegnetic Field.

Keywords: Classical Electrodynamics, Electron Self-Energy, QED Lagrangian, Classical Antiparticles, Dirac-Lorentz Equation.

II

Índice general

Introducción VII

I Preliminares **1**

1. Relatividad Especial **3**
1.1. El Espacio-Tiempo de Minkowski 3
1.2. El Grupo de Poincaré 5
1.3. Cinemática y Dinámica Relativista 10

2. Principio Variacional **15**
2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange 15
2.2. Simetrías del Lagrangiano 17

II Teoría de Campos **23**

3. Campos Libres **27**

4. Campo Escalar o de Klein-Gordon **29**

5. Campo Espinorial o Campo de Dirac **31**

6. Campo Vectorial **33**

III Formalismo Clásico de la Interacción del Electrón con el Campo Electromagnético **39**

7. Lagrangiano de una Partícula Cargada Auto-interactuante **43**
7.1. Solución a las Ecuaciones de Maxwell 48
7.2. Campo Electromagnético producido por una carga puntual . . . 52

IV Formalismo Cuántico de la Interacción del Electrón con el Campo Electromagnético 57

8. Esquema General de Cuantización 61

9. Cuantización del Campo de Dirac y Propagador del Electrón 65

10. Cuantización del Campo Electromagnético y Propagador del Fotón 67

11. Interacciones y Expansión Perturbativa 69

12. Formalismo Cuántico de la Auto-Energía del Electrón 75

V Desarrollo Formal de la Auto-Energía Clásica del Electrón 81

13. Análisis Final. Demostración de la Necesidad de las "Antipartículas" Clásicas 97

14. Conclusiones 107

15. Perspectivas 109

VI Apéndice 111

15.1. A) Relaciones básicas Solución Avanzada 113
15.2. B) Demostración de algunas relaciones importantes 116
15.2.1. Construcción del tensor de Faraday a partir de la descomposición del potencial avanzado de Liénard-Wiechert . . . 116
15.2.2. Derivación de las ecuaciones de Maxwell con fuentes, a partir de los tensores $F_I^{\mu\nu}$ y $F_{II}^{\mu\nu}$. 117
15.2.3. Derivación del segundo par de ecuaciones de Maxwell, a partir de los tensores $F_I^{\mu\nu}$ y $F_{II}^{\mu\nu}$. 120
15.2.4. Construcción del tensor Momento-Energía 121
15.2.5. Demostración de la conservación del Tensor Momento-Energía 125
15.2.6. Demostración de la conservación del Tensor Momento-Angular 129
15.3. C) Propiedades fundamentales sistema oscilador armónico amortiguado e imagne especular. 132
15.4. D) Propagador partícula libre relativista. 134
15.5. E) Demostración conservación del vector Cuadri-Corriente 137
15.6. F) Derivación de la Ecuación de Dirac-Lorentz para la solución Avanzada 138
15.7. G) Partículas cargadas con estructura 140

Introducción

A pesar de que hayan transcurrido varios siglos desde que Newton comenzara una de las revoluciones del pensamiento más importantes que se tenga conciencia en el campo del entendimiento de la naturaleza de la realidad física del universo, actualmente todavía no existe una respuesta definitiva a este respecto. Independientemente de la percepción que se tenga sobre los principios básicos que subyacen a la realidad, hay que reconocer, que se necesitó la ayuda de un "Genio" como Newton, siquiera para comenzar el camino; ya que, el fué el único de su tiempo en percibir que además de que existían leyes que regían el movimiento de los cuerpos descritas por simples relaciones entre los cuerpos que interactuaban a través de "Fuerzas", había otro elemento que debía tenerse en cuenta, y este era la idea de "Campo".

Fue con Maxwell, que la idea de Campo adquiría vida propia, cuando lorgó unificar el trabajo de Faraday, Ampére, entre otros en sus famosas ecuaciones y además, poder determinar que el campo eléctrico y magnético, no eran sino dos realidades de una misma entidad, el Campo Electromagnético. Pero la historia no termina aquí; dado que se demostró que el campo electromagnético era una onda que se propagaba no sólo en un medio material, sino también en el vacío, y que además, si las leyes de la física eran invariantes ante la transformación de un sistema de referencia inercial a otro, las leyes que describen el electromagnetismo deberían ser covariantes ante las transformaciones de Galileo. Pero éste no fue el caso, lo cual conllevó a una gran crisis conceptual en la física, ya que podía ocurrir uno de dos fenómenos:

1. Las leyes que describen el electromagnetismo eran incorrectas, o en un sentido menos estricto, eran incompletas, lo que conlleva a una reformulación total o parcial de la teoría.

2. Las leyes de transformación que permiten conectar un sistema de referencia inercial con otro no eran las adecuadas.

Dado que, los experimentos realizados en esa época corroboraron todos los fenómenos propuestos por la teoría, la única salida era entonces encontrar un nuevo tipo de transformaciones ante las cuales las leyes físicas del electromagnetismo permanecieran invariantes; estas eran las *Transformaciones de Lorentz*. Aunque el nuevo tipo de transformaciones hubiesen sido encontradas en una

época anterior a la postulación de la Relatividad Especial, se necesitó del "Genio" de otro gran físico para desarrollar una nueva Cinemática y una nueva Dinámica que permitiera describir todos los fenómenos en este nuevo ámbito. Este genio fue Albert Einstein, quien además de ser famosos por haber puesto los cimientos de la nueva física que iba a ser desarrollada dos décadas más tarde, tuvo la intuición (para entender) y la determinación (para demostrar), que si se quería hacer la generalización de las leyes de la física a sistemas de referencia no-inerciales, debería interpretar al campo gravitacional no en el sentido newtoniano, sino como la curvatura del espacio-tiempo, condensado este hecho en su famosa Ecuación de Campo. A partir de este punto crucial, y de otros muchos que no mencionaremos por ahora, entra en juego algo que había pasado desapercibido hasta esa época, y que ha sido uno de los elementos cruciales para el desarrollo de otras nuevas teorías de la física actual, las *Simetrías.*

De la misma forma a la que se construye un edificio(en este sentido un edificio conceptual), se deberán sentar primero las bases de la teoría; y, dado que si las bases no son sólidas se corre el riesgo de un colapso, basaremos nuestra teoría en dos columnas fundamentales. Para nuestro caso, que es el análisis de la Interacción del Electrón con su propio Campo Electromagnético, desde el formalismo Clásico y el formalismo Cuántico, y teniendo en cuenta lo expuesto en los párrafos anteriores, nuestras dos columnas serán los *Campos* y las *Simetrías*. Para explicar ¿Por qué?, hay que tener en cuenta varios aspectos. Si queremos formular una teoría que se desarrolla en un espacio real o ficticio, las Simetrías ya sean Espacio-Temporales o internas determinarán la forma en la que se puede hacer física sobre ese espacio, claramente, todo esto sujeto a las variables intrínsecas del universo. El otro aspecto consiste en determinar la forma en la que los elementos definidos sobre este espacio pueden interactuar, y dado que tenemos una restricción muy particular debida a la Relatividad Especial, la idea de campo surge de forma natural y necesaria.

La estructura de la tesis es la siguiente:

La primera parte llamada *Preliminares*, se divide en dos capítulos. En el primer capítulo, que se denomina *Relatividad Especial,* se hará una introducción al Espacio-Tiempo de Minkowski, en especial, el grupo de transformaciones que actúan sobre este espacio, denominadas *Transformaciones de Poincaré*. Posteriormente, se hará un repaso de la cinemática y la dinámica relativista, y por último, se introducirá el concepto de fuerza de Minkowski, pero sólo en el sentido en el que nos interesa, esto es, aplicado al electromagnetismo. En el segundo capítulo, *Principio Variacional*, se revisará la formulación Lagrangiana de la mecánica en forma general, aplicada a los Campos. Primero, se derivarán las ecuaciones de Euler-Lagrange, luego, se analizarán las simetrías del lagrangiano con respecto a los dos tipos de variaciones que se pueden tener, variación en las variables del campo, y variación en las coordenadas. Por último, y dado que existe una conexión entre las simetrías del Lagrangiano y las cargas y corrientes

conservadas, se enunciará el teorema de Noether y sus implicaciones. En particular, se deducirá la existencia de una carga conservada correspondiente a la simetría de las traslaciones en el espacio-tiempo, cúya forma básica representa un tensor de segundo orden simétrico que denominaremos *Tensor Momento Energía*, el cual será fundamental para el análisis Clásico de la interacción del electrón con su propio campo electromagnético

En la segunda parte, *Teoría de Campos,* se hace un estudio de los tipos de campos que pueden existir en la naturaleza, en relación con el tipo de representaciones del grupo de Poincaré. Se encuentra que existen tres tipos de representaciones, la *Representación Escalar,* la *Representación Espinorial* y la *Representación Vectorial.* Es conveniente notar que el campo vectorial, es construído desde un punto de vista geométrico, ya que de esta forma queda mas clara su incidencia en la electrodinámica.

En la tercera parte denominada *Formalismo Clásico de la Interacción del Electrón con el Campo Electromagnético*, se hace una introducción rigurosa a la forma en la que interactúan el sistema conjunto de partícula y campo electromagnético, derivando las características principales para cada uno, como por ejemplo, la corriente eléctrica, sus propiedades, el tensor momento energía del campo electromagnético, su descomposición, su conservación, y los resultados más importantes que de ello se deriva, entre otros aspectos. Esta parte, es crucial en el análisis, ya que sirve como introducción y fundamento para la última parte de la tesis.

La cuarta parte *Formalismo Cuántico de la Interacción del Electrón con el Campo Electromagnético* analiza los aspectos más básicos de la Electrodinámica Cuántica, como son, cuantización de los campos clásicos, la expansión perturbativa aplicada a la QED, los propagadores del electrón y del fotón, y lo más importante, la *Polarización del Vacío* y la *Autoenergía del Electrón*, fenómenos que conllevan a la redefinición de los propagadores.

Por último, se llega a la parte más importante de la tesis, el *Desarrollo Formal de la Auto-Energía Clásica del Electrón.* En esta parte, se comprobará que el tipo de solución avanzada de los potenciales de Liénard-Wiechert, cumple las mismas propiedades que la solución retardada; luego se le atribuirá una interpretación física a este tipo de solución, y por último, haciendo la analogía con el sistema físico disipativo mas sencillo de todos, el oscilador armónico amortigüado, se llegará a una conclusión final muy importante, por su contenido físico análogo al caso del formalismo cuántico.

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

Relatividad Especial

Con el advenimiento de una nueva representación del espacio en el que vivimos, gracias al desarrollo de la Relatividad Especial, Einstein y sus contemporáneos no sólo dejaron un gran legado, sino que sentaron las bases para el desarrollo de nuevas teorías que pudieran explicar el mundo en que vivimos. Este capítulo estará dedicado a revisar los aspectos mas fundamentales de la Teoría de la Relatividad Especial, como lo es la Cinemática y Dinámica Relativista, sobre todo el concepto de fuerza, el cual será un elemento crucial en el entendimiento de las interacciones; primero entre partículas, luego entre campos y partículas, y posteriormente entre campos. Vale aclarar que este concepto de fuerza, muchas veces subestimado, va a ser la principal motivación al pasar del estudio de partículas a campos, no solamente desde el punto de vista clásico, sino también cuántico, ya que como se observará más adelante, la única manera de describir un fenómeno cuántico relativista, es a través de los campos (o de la teoría de cuerdas)[1].

1.1. El Espacio-Tiempo de Minkowski

Cuando se descubrió que la transformaciones de Galileo eran insuficientes para conectar sistemas de referencia inerciales (sistemas que se mueven uno con respecto a otro a velocidad relativa constante), debido a la no covarianza de la electrodinámica antes estas transformaciones, el único paso lógico (mas no la reformulación de las leyes físicas) era desarrollar un nuevo tipo de transformaciones que tuvieran en cuenta nuevos fenómenos aparentemente incompatibles con la teoría Newtoniana, como la velocidad de la propagación de las interacciones, que resultó tener un valor máximo de $c = 299792458\frac{m}{s}$(Velocidad de la luz en el vacío). Debido a esto, el concepto de tiempo y espacio perdieron su sentido absoluto.

El nuevo desarrollo de estas transformaciones debe respetar las siguientes consideracions sobre el espacio, el tiempo y la velocidad de la luz [2]:

Consideraciones sobre el espacio

- Debe ser de dimensión tres.
- Satisface los postulados de la geometría Euclideana.
- Es Homogéneo (origen arbitrario).
- Es Isotrópico (orientación de los ejes arbitrarios)

Consideraciones sobre el tiempo

- Es homogéneo ($t = 0$ arbitrario)
- Es Isotrópico (No distingue el pasado del futuro)

Consideraciones sobre la velocidad de la luz

- Es la máxima velocidad a la que se pueden propagar las interacciones.
- Su valor es el mismo en cualquier sistema de referencia inercial.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se puede ver que el espacio Euclideo de tres dimensiones pierde completamente el sentido en la descripción de los fenómenos relativistas, debido al caracter no absoluto del tiempo; por lo tanto, y debido a la invarianza del intervalo $x^2 = x_o^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ a causa del valor finito de la velocidad de la luz, se debe encontrar un nuevo espacio de representación de cuatro dimensiones que permita la incorporación implícita de las características antes mencionadas[1].

Se llamará a este espacio el *Espacio de Minkowski*, donde se define una métrica pseudo-euclídea[2]:

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (g_{\mu\nu}) \tag{1.1}$$

[1] Este supuesto es equivalente a hacer un embebimiento de la variedad Euclidiana de 3 dimensiones(lugar donde ocurren los sucesos físicos), en una variedad Lorentziana de 4 dimensiones[10].

[2] En este trabajo, trabajaremos con este tipo de métrica a diferencia de $diagG = (-1, 1, 1, 1)$; definida para poder realizar los productos internos.

1.2. El Grupo de Poincaré

Se denominará *Transformaciones de Lorentz Homogéneas* a todos los automorfismos que preserven el producto interno, o en un sentido más físico, que preserven la norma de los vectores de la forma:

$$x^2 \equiv x_o^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{1.2}$$

Más generalmente, se llamará *Transformaciones de Lorentz Inhomogéneas* o *Transformaciones de Poincaré* a todos los automorfismos que preserven la estructura:

$$(x-y)^2 \equiv (x_o - y_o)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2 \tag{1.3}$$

Se puede comprobar fácilmente que el conjunto de las transformaciones de Lorentz forman un *grupo* bajo la composición usual de homomorfismos, es decir, si se tiene la regla de transformación:

$$x^{'\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu} \tag{1.4}$$

que transforma los vectores de un sistema inercial Σ a otro sistema inercial $\Sigma^{'}$, con la condición $(x^{'})^2 = (x)^2$, por lo tanto:

1. Para toda Λ_1 ,$\Lambda_2 \in \mathcal{L}$ arbitraria, entonces $\Lambda_3 = \Lambda_1\Lambda_2 \in \mathcal{L}$. (Clausura)
2. Para toda Λ_1 ,Λ_2,$\Lambda_3 \in \mathcal{L}$ arbitraria, entonces $\Lambda_1(\Lambda_2\Lambda_3) = (\Lambda_1\Lambda_2)\Lambda_3$ (Asociatividad)
3. Existe la transformación identidad denotada por I tal que $\Lambda_1 I = I\Lambda_1 = \Lambda_1$. (Existencia del elemento neutro o identidad)
4. Para toda transformación arbitraria Λ_1 existe otra transformación $(\Lambda_1)^{-1}$ tal que $\Lambda_1(\Lambda_1)^{-1} = (\Lambda_1)^{-1}\Lambda_1 = I$. (Existencia del elemento inverso)

Donde se ha denotado el conjunto de todas las transformaciones de Lorentz como $\mathcal{L}$.

Al espacio de Minkowski definido anteriormente se denotará como $\mathcal{M}$, y a sus elementos vectores contravariantes[3]. Entonces, un elemento representado por la posición en este espacio será de la forma:

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{1.5}$$

[3]Dada la notación usual para denominar vectores en el espacio euclidiano de tres dimensiones, en ciertas partes de este trabajo, denominaremos a los vectores en 4 dimensiones en el espacio de Minkowski como cuadri-vectores o simplemente vectores, cuando no haya lugar a confusión.

Para poder definir el producto interno, se debe construir el espacio dual a $\mathcal{M}$ que se denominará como $\mathcal{M}^*$, y estará conformado por todo el conjunto de transformaciones lineales:

$$f : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \tag{1.6}$$

$$x \longmapsto f(x) \tag{1.7}$$

Teniendo esto en cuenta, el producto interno entre dos elementos x y $y \in \mathcal{M}$ quedará definido con la ayuda del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ como:

$$x \cdot y = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu y_\mu = x_\mu g^{\mu\nu} y_\nu \tag{1.8}$$

La norma de un vector será de la forma:

$$x \cdot x = (x)^2 = x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = x_\mu g^{\mu\nu} x_\nu \tag{1.9}$$

Debido a la invarianza de la norma de los vectores ante una transformación de Lorentz, se sigue que:

$$g_{\mu\nu} x^{'\mu} x^{'\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma = g_{\rho\sigma} x^\rho x^\sigma \tag{1.10}$$

Por lo tanto, se observa que

$$\Lambda^\mu{}_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{1.11}$$

Este resultado codifica la forma explícita en la que las transformaciones de Lorentz dejan invariante la métrica, esto es, dejan invariante los productos internos en el espacio de Minkowski.

En forma matricial

$$\tilde{\Lambda} G \Lambda = G \tag{1.12}$$

Aplicando el determinante a ambos lados, resulta

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \tag{1.13}$$

lo cual conduce a

$$\det \Lambda = \pm 1 \tag{1.14}$$

Se puede demostrar que el grupo de Lorentz es un *Grupo de Lie,* es decir, una variedad diferenciable, la cual se dota de estructura de grupo, en donde las operaciones de grupo[4][15]:

$$\cdot \ : G \times G \longrightarrow G, \ (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2 \quad \text{(Producto)}$$

$$in \ : G \longrightarrow G, \ g \mapsto g^{-1} \quad \text{(Inversa)}$$

son diferenciables, por lo tanto, los elementos son funciones continuas de los parámetros del grupo[4]. Dado el cambio de signo en el determinante (1.14), no hay una transformación que pueda corresponder al cambio continuo de un parámetro del grupo; de acuerdo con esto el grupo de Lorentz es no conexo. Entonces, si $\det\Lambda = 1$ (o $\det\Lambda = -1$) la transformación se denomina *Propia (Impropia).*

Ahora, teniendo en cuenta la componente $\rho = 0$ y $\sigma = 0$ en la ecuación (1.11), se puede ver que

$$\Lambda^{\mu}{}_{o} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{o} = g_{oo} \tag{1.15}$$

por lo tanto

$$(\Lambda^{o}{}_{o})^2 - \Lambda^{i}{}_{o}\Lambda^{i}{}_{o} = 1 \tag{1.16}$$

Como consecuencia, $(\Lambda^{o}{}_{o})^2 \geq 1$. Si la transformación cumple $\Lambda^{o}{}_{o} \geq 1$ ($\Lambda^{o}{}_{o} \leq -1$) la transformación se denomina *Ortócrona (No Ortócrona),* porque perservan o no las direcciones en el tiempo respectivamente. Es claro ver que tampoco aquí es posible pasar continuamente de una transformación ortócrona a una no ortócrona o visceversa debido a la variación de un parámetro del grupo.

En resumen, se tiene que el grupo de Lorentz es un grupo de Lie que se compone de cuatro componentes desconectadas entre si, que dependen del signo del determinante de Λ y del valor de $\Lambda^{o}{}_{o}$. De ello resulta que sólo la parte que contiene a la identidad puede ser un subgrupo del grupo de Lorentz, que corresponde al *Subgrupo Ortócrono Propio*, las demás componentes del grupo de Lorentz pueden ser obtenidas por la conjugación de elementos de este subgrupo con los elementos de un grupo discreto $\{\mathbf{1}, \mathbf{P}, \mathbf{T}, \mathbf{PT}\}$ [1], donde[4]:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

es la *Matriz Identidad* usual en 4 dimensiones que cumple $\det\mathbf{1} = 1$ y $1^{o}{}_{o} = 1$,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

es la *Matriz de Inversión Temporal*, que cumple $\mathbf{T}^2 = \mathbf{1}$, $\det\mathbf{T} = -1$ y además $T^{o}_{o} = -1$.

[4]Dadas las propiedades del grupo de Lorentz, es claro que la información relevante la podremos encontrar en el subgrupo Ortócrono Propio. Las demas componentes conexas, pero desconectadas entre sí, e isomorfas como variedades a ésta, pueden ser encontradas con las conjugaciones de los elementos de este subgrupo con los elementos de los grupos discretos.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

es la *Matriz de Paridad,* donde $\mathbf{P^2} = \mathbf{1}$, $\det \mathbf{P} = -1$ y además $P^o_{\ o} = 1$. Por último,

$$\mathbf{PT} = \mathbf{TP} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

Se representará a estos subconjuntos como:

Subgrupo Ortócrono Propio $\mathcal{L}_+^\uparrow$ como las transformaciones
que cumplen $\det \Lambda = 1$ y $\Lambda^o_{\ o} \geq 1$
Subconjunto Ortócrono Impropio $\mathcal{L}_-^\uparrow = \mathbf{P}\mathcal{L}_+^\uparrow$ como las transformaciones
que cumplen $\det \Lambda = -1$ y $\Lambda^o_{\ o} \geq 1$
Subconjunto No Ortócrono Impropio $\mathcal{L}_-^\downarrow = \mathbf{T}\mathcal{L}_+^\uparrow$ como las transformaciones
que cumplen $\det \Lambda = -1$ y $\Lambda^o_{\ o} \geq -1$
Subconjunto No Ortócrono Propio $\mathcal{L}_+^\downarrow = \mathbf{PT}\mathcal{L}_+^\uparrow$ como las transformaciones
que cumplen $\det \Lambda = 1$ y $\Lambda^o_{\ o} \geq -1$

Es conveniente introducir la forma explícita de una transformación de Lorentz Ortócrona propia arbitraria[3][7].

1. **Rotaciones Espaciales**.

   Las rotaciones en el espacio físico alrededor de un eje y un ángulo arbitrarios serán realizadas una matriz que se denotará por R y tiene la forma.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_n \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

donde la matriz R_n es un elemento del grupo de rotaciones en tres dimensiones.

1. **Transformaciones de Lorentz puras o Boosts**.

En general, un *Boost* está relacionado con la invarianza de sistemas de referencia inerciales, el cual se mueven uno con respecto del otro con una velocidad relativa constante $\vec{v}$ y se puede representar con una matriz en la forma mas general como

$$L = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & n_j \sinh\alpha \\ -n_i \sinh\alpha & \delta^i{}_j n^i n_j (\cosh\alpha - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta_j \gamma \\ -\beta^i \gamma & \delta^i{}_j \frac{\beta^i \beta_j}{\beta^2}(\gamma - 1) \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

donde $\vec{n} = (n^1, n^2, n^3)$ es el vector unitario en la dirección de $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ y $\gamma = \cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Para $t, g \in G$ donde G es un grupo se define una *traslacion izquierda* como $l_t : G \longrightarrow G$, $l_t g = tg$. De manera análoga, se define una *traslacion derecha* como $r_t : G \longrightarrow G$, $r_t g = gt$. Debido a que la traslación a izquierda por un elemento $g \in G$ es un difeomorfismo que mapea una vecindad de la identidad a una vecindad de g, toda la información local del grupo está concentrada en una vecindad de la identidad, y el espacio tangente en la identidad juega un papel muy importante[4]. Si además, se define sobre este espacio vectorial tangente una nueva operación, el *corchete de Lie*, como $[A, B] = AB - BA$, para $A, B \in T_e G$ (EspacioTangente en la identidad), éste se convierte en el *Álgebra de Lie* de este grupo de Lie determinado.

Debido a que el grupo de Lorentz es un grupo de Lie, se puede conocer la información del grupo en un entorno de la identidad, por lo tanto, haciendo variaciones de un elemento a otro próximas a la identidad, se puede ver que la transformación será[5][1]:

$$\Lambda = \mathbf{1} + \boldsymbol{\omega} \tag{1.23}$$

o matricialmente

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\nu \tag{1.24}$$

Entonces, realizando varias transformaciones sucesivas de este tipo, se puede llegar a cualquier elemento del grupo. Si se tiene en cuenta el caso infinitesimal de (1.11),

$$(\delta^\mu{}_\lambda + \boldsymbol{\omega}^\mu{}_\lambda)\eta_{\mu\nu}(\delta^\nu{}_\rho + \boldsymbol{\omega}^\nu{}_\rho) = \eta_{\lambda\rho} \tag{1.25}$$

Realizando la expansión.

$$\eta_{\lambda\rho} + \omega_{\lambda\rho} + \omega_{\rho\lambda} + O(\omega^2) = \eta_{\lambda\rho} \tag{1.26}$$

se observa que $\omega_{\lambda\rho} = -\omega_{\rho\lambda}$, es una matriz real antisimétrica con 6 componenentes independientes, 3 que específican las rotaciones en tres dimensiones y 3 los Boosts. Si además, se amplía el grupo de Lorentz adicionando traslaciones en el espacio-tiempo, se llega al famoso **Grupo de Poincaré** que es el grupo de las simetrías Espacio-Temporales, el cual transforma vectores(dependiendo de la representación) entre sistemas de referencia inerciales de la forma[7]:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{1.27}$$

Es claro comprobar que el conjunto de transformaciones de la forma (1.24) forman un grupo, sólo falta verificar que:

$$x' = \Lambda_1 x + a_1 \tag{1.28}$$

$$x'' = \Lambda_2 x + a_2 = \Lambda_2 \Lambda_1 x + \Lambda_2 a_1 + a_2 \tag{1.29}$$

Si se adopta la notación en la cual la transformación (1.28) se puede escribir como (Λ, a), entonces la relación anterior se escribe de la forma:

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \tag{1.30}$$

Claramente se ve que la identidad es $(I, 0)$, y que la inversa resulta de acuerdo con(1.30) de la forma:

$$(\Lambda, a)^{-1} = (-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1}) \tag{1.31}$$

Las relaciones de conmutación de los generadores del Grupo de Poincaré son[5]:

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} \tag{1.32}$$

$$i[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma} P^{\rho} \tag{1.33}$$

$$[P^{\mu}, P^{\rho}] = 0 \tag{1.34}$$

1.3. Cinemática y Dinámica Relativista

Para lograr una nueva descripción de la Cinemática y la Dinámica Newtoniana, cabe preguntarnos primero sobre el nuevo espacio de representación en el que nos encontramos ahora. En relación con la métrica de Minkowski, vemos que el Espacio-tiempo queda dividido en tres sectores, representado esquemáticamente por el cono de luz. Fig 1.1. Las partículas que residen dentro del cono de luz pueden viajar con una velocidad finita $v < c$, las partículas que residen sobre el cono de luz viajan a una velocidad $v = c$, y las que se encuentran fuera del cono de luz a una velocidad $v > c$. Debido al principio de causalidad, sólo nos interesa describir partículas que se muevan dentro o en el borde del cono de luz.

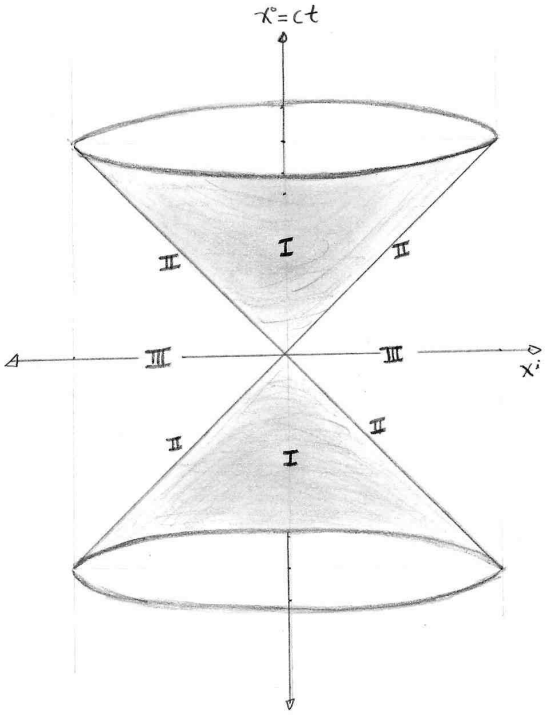

Fig. 1.1. División del Cono de Luz.

Como se vio anteriormente, existe un conjunto de transformaciones que preservan el producto interno en el espacio de Minkowski, es decir, preservan el intervalo espacio-temporal entre dos sucesos 1 y 2 con coordenadas $(ct_1, \vec{x}_1)$ y $(ct_2, \vec{x}_2)$ respectivamente[3]:

$$S_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 \tag{1.35}$$

Aunque por ahora no quede muy claro, mas adelante se demostrará que este grupo de transformaciones (Grupo de Poincaré) corresponde al Grupo de Simetrías Espacio-Temporales. Entonces, el grupo de Poincaré dotado con una nueva operación de conmutación, se convertía en una Álgebra de Lie, en donde las constantes de estructura del álgebra podían definir completamente la forma en que se operaban los elementos de este conjunto[13]. Cuando se puede establecer un homomorfismo del Grupo de Poincaré en otro grupo de automorfismos de un espacio vectorial V, se dice que se ha encontrado una representación de este grupo, es decir, cada elemento del grupo será interpretado como una transformación lineal del espacio vectorial V en sí mismo. En cierto sentido, se puede analizar al grupo no como un ente abstracto, sino por la forma como actúa sobre el espacio vectorial. De esta forma, y en relación al gran trabajo realizado por Wigner[wigner] en la década de 1940 del siglo pasado se puede construir los elementos básicos para la descripción de las partículas (y en general los campos) cuánticas relativistas.

Por otra parte, dado que el tiempo absoluto pierde sentido en la relatividad especial, se necesita encontrar un nuevo parámetro que permita le descrición de los fenómenos físicos que ocurren en el espacio-tiempo. Como se mostró anteriormente, este parámetro debe estar relacionado con el intervalo espacio-temporal ds^2, ya que éste intervalo permanece invariante cuando aplicamos las transformaciones espacio-temporales. Debido a esto, y teniendo en cuenta la ecuación (1.35), se puede ubicar en nuevo sistema inercial ubicado exactamente en la partícula, y dado que en este sistema $\vec{x} = 0$, tenemos

$$ds^2 = c^2 dt^2 \tag{1.36}$$

que se denomina el *Tiempo Propio de la Partícula.*

Se define entonces la *Cuadri-Velocidad* u como[5][8][9]:

$$u = \frac{dx(s)}{ds} = \dot{x}(s) \tag{1.37}$$

O en componentes

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha(s)}{ds} = (\frac{dx^0}{ds}, \frac{dx^0}{ds}\frac{\vec{v}}{c}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\frac{\vec{v}}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) \tag{1.38}$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula usualmente definida en mecánica Newtoniana.

De (1.38), se puede ver claramente que

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} = \gamma \tag{1.39}$$

Si se deriva la cuadri-velocidad con respecto al tiempo propio, se obtiene la *Cuadri-Aceleración,* la cual toma la forma*:*

$$\ddot{x}(s) = \dot{u}(s) = \frac{du}{ds} \tag{1.40}$$

Ahora, para la definición del cuadri-vector *Momentum Lineal*, se hace necesario introducir un nuevo parámetro invariante e intrínseco a la partícula que determina la forma de movimiento, el cual será la masa en reposo de la partícula m_o[6]. La explicación de la naturaleza de este parámetro esta por fuera de este trabajo, por lo tanto sólo nos referiremos a él sin hacer mención a su procedencia e implicaciones.

[5] En este momento se definirá la cuadri-velocidad como u en lugar de v, para no confundir con la velocidad física $\vec{v}$, pero mas adelente, cuando no haya lugar a confusión(Sólo se trabaje en el espacio de 4 dimensiones), se utilizará la notacion usual.

[6] Como se verá más adelante, este parámetro intrínseco a las partículas o a los campos, deberá ser re-evaluado, ya sea desde el punto de vista Clásico o Cuántico para la consistencia de la teoría.

El *Cuadri-Momento,* en su forma mas simple como una generalización del momentum lineal en mecánica Newtoniana se define como:

$$p = m_o c u \tag{1.41}$$

o en componentes

$$\begin{aligned} p^0 &= \frac{m_o c}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} \\ \vec{p} &= \frac{m_o \vec{v}}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} \end{aligned} \tag{1.42}$$

Es posible demostrar que el momentum es siempre un vector de tipo tiempo, cuya norma es[7]:

$$p^2 = m_o^2 c^2 = p^{0^2} - \vec{p}^2 \tag{1.43}$$

Para encontrar ahora las leyes de movimiento que rigen a las partículas, cabe primero preguntar como se puede lograr la extensión de la tercera ley de Newton al ámbito relativista. En el caso más sencillo, sería de la forma[10]:

$$\frac{d}{ds} p = K = \dot{p} \tag{1.44}$$

Esta ecuación es conocida como la *Ecuación de Movimiento de Minkowski* y K como *Fuerza de Minkowski.* K será el análogo de la fuerza de Newton, la cual corresponderá al cambio en el momentum lineal de la partícula.

Para definir explícitamente la forma de K, hay que tener en cuenta ciertos factores relativos a las propiedades invariantes e intrínsecas de la partícula, además de otros tipos de restricciones como por ejemplo, que ésta no puede ser constante[10], ni tampoco puede tener dependencia implícita solamente de las coordenadas.

En este punto, la pregunta mas lógica sería entonces encontrar la forma de la fuerza de Minkowski K, la cual permita la completa descripción de una partícula que posea carga eléctrica , y encontrar las soluciones a las ecuaciones de movimiento. Digo en este punto, porque cuando se hable de la teoría de campos, la descripción será un poco diferente.

Considérese primero el caso en el que K es lineal [8]. La relación $K^\mu = \alpha v^\mu$ (donde α es una constante) entra en conflicto con la condición que la fuerza de

[7] De ahora en adelante, usaremos unidades naturales en donde la velocidad de la luz $c = 1$ y la constante de Planck $\hbar = 1$.

[8] Por ahora el caso no lineal no será estudiado, ya que no estamos teniendo en cuenta interacciones

Minkowski debe ser ortogonal a la velocidad $K \cdot v = 0$ [10]. Entonces, la forma mas sencilla sería:

$$K^{\mu} = \alpha^{\mu\nu} v_{\nu} \tag{1.45}$$

donde $\alpha^{\mu\nu}$ es un tensor arbitrario cuya forma será explicada mas adelante.

Por la condición de ortogonalidad, se debe cumplir que

$$\alpha^{\mu\nu} v_{\mu} v_{\nu} = 0 \tag{1.46}$$

Esta ecuación se debe satisfacer para un v^{μ} arbitrario tal que el tensor sea de la forma

$$\alpha^{\mu\nu} = -\alpha^{\nu\mu} \tag{1.47}$$

Tomando el caso en el que se tenga una partícula acoplada a un campo tensorial $F^{\mu\nu}$ a través de una constante de acople escalar e[10], K^{μ} debe tomar la forma explícita solicitada .

$$K^{\mu} = e v_{\nu} F^{\mu\nu} \tag{1.48}$$

Obviamente, no se ha definido todavía la forma ni el significado de este campo tensorial, pero de cierta manera se ve la conexión entre las partículas y la forma como interactúan a través de este. Posteriormente, se asociará este campo tensorial $F^{\mu\nu}$ al tensor de *Campo Electromagnético*. Por ahora, no se podrá decir nada más acerca de este campo hasta que en un capítulo posterior se haga su introducción de una forma más intuitiva desde el punto de vista geométrico.

Capítulo 2

Principio Variacional

A pesar de que al final del capítulo anterior se haya hecho mención de la idea de campo, todavía no queda claro por qué es necesario su introducción como elemento fundamental. La idea de este capítulo, es sentar las bases de la descripción de los campos como entes independientes, explicar su dinámica y sus propiedades básicas.

Siguiendo la evolución de pensamiento desde la física Newtoniana hasta la física Relativista, parecería natural describir todos los fenómenos que ocurren en la naturaleza en terminos de partículas e interacciones entre las mismas; el problema surge cuando se pretende describir conjuntos de partículas que interactúan entre sí y con sistemas externos. Debido a la imposición propuesta en relatividad especial de la invarianza del intervalo espacio-temporal ds^2, queda claro que las mediciones de intervalos espaciales y temporales de forma disjunta no tiene sentido, sólo la conjunción de estos dos conceptos es válida para la total descripción de la realidad, llevando esto a nuevos fenómenos como la dilatación del tiempo y contracción del espacio. Por lo tanto es imposible considerar cuerpos rígidos en relatividad especial[9]; en conclusión necesitamos un nuevo elemento que permita describir las interacciones que se pueden llevar a cabo entre las partículas. Este nuevo elemento es el *Campo*, el cual adquiere naturaleza propia.

2.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

En este punto conviene hacer una introducción al formalismo *Lagrangiano.* Como punto de partida se tomará la *Acción,* que se pude definir como[1]

$$S[\varphi] = \int dt\ L[\varphi(t)] \tag{1.49}$$

Como en realidad interesa analizar teorías locales donde la evolución del sistema en un punto específico dependa únicamente del valor del campo en puntos

vecinos a este, es decir teorías causales, entonces, $L[\varphi(t)]$ debe corresponder a una función tal que

$$L[\varphi(t)] = \int d^3x \; \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x), \partial_\mu\partial_\nu\varphi(x), ..., \partial_\mu...\partial_\varepsilon\varphi(x)) \tag{1.50}$$

donde el número de derivadas es finito.

Similar a como se hace en el caso de una partícula[12], las ecuaciones de movimiento del campo se obtienen a partir del principio variacional, en donde las soluciones clásicas se obtienen a partir de la condición de que la acción sea estacionaria(En este caso se debe imponer que sea un mínimo). Entonces, si se tiene una variación en el campo de la forma

$$\varphi(x) \longrightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x) \tag{1.51}$$

la variación en la acción será

$$S[\varphi] \longrightarrow S[\varphi + \delta\varphi] = S[\varphi] + \delta S[\varphi, \delta\varphi] \tag{1.52}$$

con la condición que $\delta S[\varphi, \delta\varphi] = 0$, en donde la variación satisface las condiciones de frontera apropiadas.

Como el campo y sus derivadas transforman de acuerdo a $\varphi(x) \longrightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x)$ y $\partial_\mu\varphi(x) \longrightarrow \partial_\mu\varphi(x) + \partial_\mu\delta\varphi(x)$; y teniendo en cuenta que $\partial_\mu\delta\varphi(x) = \delta(\partial_\mu\varphi(x))$, la variación de la acción resulta

$$\begin{aligned}
\delta S[\varphi, \delta\varphi] &= S[\varphi + \delta\varphi] - S[\varphi] \\
&= \int d^4x \{\mathcal{L}(\varphi(x) + \delta\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x) + \partial_\mu\delta\varphi(x)) - \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu\varphi(x))\} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi(x)}\delta\varphi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))}\partial_\mu\delta\varphi(x) \right\} \text{ integrando por partes}
\end{aligned}$$

$$\delta S[\varphi, \delta\varphi] = \int d^4x \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi(x)} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))} \right) \right\} \delta\varphi(x) \tag{1.53}$$

resultado que se debe anular debido al principio de mínima acción sólo si[10]

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi(x)} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi(x))} \right) \tag{1.54}$$

y se le denomina *Ecuación de Euler-Lagrange*, la cual describe completamente la dinámica de los campos (o partículas).

2.2. Simetrías del Lagrangiano

Una *Transformación de Simetría* [12], es un tipo especial de transformación que deja *invariante* el objeto sobre el cual actúa. En física especialmente, las simetrías juegan un papel decisivo en la descripción de los fenómenos que ocurren en la naturaleza, ya que independientemente del sistema de referencia que se utilice (Simetría espacio-temporales) o de ciertas leyes de conservación de las propiedades intrínsecas de los objetos (Carga, energía, entre otros), el análisis físico de cualquier sistema siempre estará vinculado de forma directa o indirecta a las cantidades conservadas de la teoría.

Ya que será necesario para la continuación del trabajo, se deberá analizar ahora las posibles variaciones continuas que se pueden producir en el lagrangiano. Claramente, sólo se puede tener dos tipos de variaciones:

1. Variación en las coordenadas (Dominio).

$$x^\mu \longrightarrow x^{'\mu} = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \omega^\alpha X^\mu_\alpha(x) \tag{1.55}$$

2. Variación del campo (Rango).

$$\varphi_l(x) \longrightarrow \varphi'_l(x') = \varphi_l(x) + \delta\varphi_l(x) = \varphi_l(x) + \omega^\alpha \Phi_{l\alpha}(x) \tag{1.56}$$

donde $|\omega^\alpha| \ll 1$ es el parámetro de la variación, y $X^\mu_\alpha(x)$, $\Phi_{l\alpha}(x)$ son la forma de la variación.

Como se enunció anteriormente, el tipo de transformaciones continuas que se puede aplicar al lagrangiano son $\delta x^\mu = \omega^\alpha X^\mu_\alpha(x)$ y $\delta\varphi_l(x) = \omega^\alpha \Phi_{l\alpha}(x)$. Para que este tipo de transformaciones sean simetrías del Lagrangiano se debe cumplir que:

$$\delta S = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int d^4x \mathcal{L}(x) = 0 \tag{1.57}$$

es decir, la acción debe quedar invariante.

Ya que se necesita encontrar una expresión para $\mathcal{L}'(x')$, se puede realizar una expansión en serie de Taylor en términos del lagrangiano original y de las coordenadas en la forma [1]

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x) + \tilde{\delta}\mathcal{L}(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(x) \tag{1.58}$$

Dada la condición sobre la invarianza de la acción, al realizar la integral, se debe encontrar una medida de integración invariante que relacione la conexión de los dos sistemas ante la transformación. Debido a que sobre las coordenadas sólo actúa el grupo de simetría espacio-temporales(Grupo de Poincaré), se necesita encontrar la regla de transformación

$$
\begin{aligned}
d^4x' &= \det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right) d^4x \\
&= \det\begin{pmatrix} 1+\frac{\partial\delta x^0}{\partial x^0} & \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^0} & \frac{\partial\delta x^2}{\partial x^0} & \frac{\partial\delta x^3}{\partial x^0} \\ \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^1} & 1+\frac{\partial\delta x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\delta x^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\delta x^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^2} & \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^2} & 1+\frac{\partial\delta x^2}{\partial x^2} & \frac{\partial\delta x^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^3} & \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^3} & \frac{\partial\delta x^2}{\partial x^3} & 1+\frac{\partial\delta x^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} d^4x \\
&= (1+\partial_\mu\delta x^\mu)d^4x
\end{aligned} \tag{1.59}
$$

de (1.57) se puede ver que

$$
0 = \int d^4x \left[(1+\partial_\mu\delta x^\mu)\mathcal{L}(x) + \partial_\mu\delta x^\mu\mathcal{L}(x) + \tilde{\delta}\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(x)\right] \tag{1.60}
$$

Como se sabe que[10]

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu(\delta x^\mu\mathcal{L}(x)) &= \partial_\mu\delta x^\mu\mathcal{L}(x) + \partial_\mu\delta x^\mu\mathcal{L}(x) \\
\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_l(x)}\tilde{\delta}\varphi_l(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_l(x))}\tilde{\delta}\partial_\mu\varphi_l(x)
\end{aligned} \tag{1.61}
$$

y además, si se tiene en cuenta las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_l(x)} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_l(x))}\right)$ y la conmutatividad de los operadores $\tilde{\delta}\partial_\mu = \partial_\mu\tilde{\delta}$, se llega a que $\tilde{\delta}\mathcal{L}(x)$ puede ser expresada como

$$
\tilde{\delta}\mathcal{L}(x) = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_l(x))}\tilde{\delta}\varphi_l(x)\right) \tag{1.62}
$$

Dado que $\tilde{\delta}\varphi_l(x) = \delta\varphi_l(x) - \delta x^\nu\partial_\nu\varphi_l(x)$ y además, invocando las relaciones

$$
\begin{aligned}
\delta x^\mu &= \omega^\alpha X^\mu_\alpha \\
\delta\varphi_l &= \omega^\alpha\Phi_{l\alpha}
\end{aligned} \tag{1.63}
$$

se llega finalmente a la ley de conservación:

$$
\int d^4x\omega^\alpha\partial_\mu\left[X^\mu_\alpha\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_l)}\left(\Phi_{l\alpha} - X^\nu_\alpha\partial_\nu\varphi_l\right)\right] = 0 \tag{1.64}
$$

Es muy importante notar que se ha encontrado una expresión de la forma:

$$
J^\mu_\alpha = X^\nu_\alpha\left(-\delta^\nu_\mu\mathcal{L} + \partial_\nu\varphi_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_l)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_l)}\Phi_{l\alpha}\right) \tag{1.65}
$$

denominada *Cuadri-Corriente de Noether*[1], y que debido a la construcción se conserva, es decir

$$\partial_\mu J^\mu_\alpha = 0 \tag{1.66}$$

También, se puede expresar esta misma ley de conservación en una ecuación de continuidad mas conocida, en la forma:

$$\partial_0 J^0_\alpha + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\alpha = 0 \tag{1.67}$$

donde J^0_α es la densidad de carga y $\vec{J}_\alpha$es la densidad de corriente.

Se puede definir también una nueva expresión

$$Q_\alpha = \int d^3x J^0_\alpha \tag{1.68}$$

llamada *Carga de Noether*, la cual, debido a la ecuación de continuidad (1.67) se conserva, es decir

$$\frac{d}{dt} = Q_\alpha = \int d^3x J^0_\alpha = -Q_\alpha = \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_\alpha = 0 \tag{1.69}$$

El desarrollo realizado anteriormente, se conoce como el *Teorema de Noether*, el cual postula que cada simetría continua da lugar a una ley de conservación, y por lo tanto a la existencia de una carga-corriente conservada. Más adelante se estudiará el significado de las cargas de Noether cuando se analicen las simetrías espacio-temporales y las simetrías internas de los campos, especialmente de campos cargados, conllevando esto a una serie de resultados demasiado importantes para los próximos capítulos.

Veamos ahora algunos ejemplos de las simetrías y sus correspondientes cargas conservadas que interesan en un modelo físico.

1) Traslaciones Espacio-Temporales.

En el caso de las traslaciones espacio-temporales, se pueden definir las variaciones del campo y de las coordenadas de la forma[1]:

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{1.70}$$

$$\varphi'_l(x') = \varphi_l(x) \tag{1.71}$$

que en la versión infinitesimal toman la forma

$$\delta x^\mu = \omega^\alpha \delta^\mu_\alpha \tag{1.72}$$

$$\delta\varphi_l(x) = 0 \tag{1.73}$$

donde se ha supuesto $a^\mu = \omega^\mu$ y $|\omega^\alpha| \ll 1$.

En este caso, se puede ver que $X^{\mu}_{\alpha} = \delta^{\mu}_{\alpha}$ (donde δ^{μ}_{α} es el delta de Kronecker) y $\Phi_{l\alpha} = 0$. Para que la acción sea invariante ante traslaciones espacio-temporales se debe tener un lagrangiano sin dependencia explícita de las coordenadas.

Teniendo en cuenta esto y cambiando la notación $\alpha = \nu$, se llega a la conclusión que existen 4 corrientes conservadas representadas por la expresión:

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \partial_{\nu}\varphi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_l)} - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L} \tag{1.74}$$

.

denominada *Tensor de Energía-Momento (o Energía-Esfuerzo) Canónico.*

Por construcción, $\partial_{\mu}T^{\mu}{}_{\nu} = 0$, es decir, se conserva. A partir de lo anterior, se puede verificar que las cargas conservadas son

$$P_{\nu} = \int d^3x T^0{}_{\nu} = \int d^3x \left(\partial_{\nu}\varphi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi_l)} - \delta^0_{\nu}\mathcal{L}\right) \tag{1.75}$$

que corresponde a la definición usual del *Cuadri-Momentum.* En particular, un caso muy especial se presenta cuando $\nu = 0$, donde la carga asociada es el *Hamiltoniano.*

$$H = P_0 = \int d^3x \left(\partial_0\varphi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi_l)} - \mathcal{L}\right) \tag{1.76}$$

y a la expresión $\mathcal{H} = \left(\partial_0\varphi_l \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\varphi_l)} - \mathcal{L}\right) = T^0{}_0$ se le denomina *Densidad Hamiltoniana.*

2) Transformaciones de Lorentz.

Para las transformaciones de Lorentz, las variaciones del campo y las coordenadas son un poco más complejas que en el caso de traslaciones espacio-temporales, ya que además de actuar sobre las coordenadas, las transformaciones de Lorentz actúan sobre el campo mezclando sus componentes de una manera definida, que depende de la representación del grupo de Lorentz, o sea del tipo de campo que se esté considerando. Por ahora, limitaremos el estudio a describir el caso más general; cuando se hable de los tipos de campos, se hará la particularización pertinente.

La forma en la que actúa una transformación de Lorentz sobre las coordenadas espacio-temporales, y sobre el campo se puede definir de la forma[1].

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} \tag{1.77}$$

$$\varphi'_l(x') = M_{l'l}(\Lambda)\varphi_l(x) \tag{1.78}$$

O en su versión infinitesimal :

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \omega^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \frac{1}{2}\omega^{\sigma\rho}\left(\delta_{\sigma}{}^{\mu}\eta_{\rho\nu} - \delta_{\rho}{}^{\mu}\eta_{\sigma\nu}\right) \tag{1.79}$$

$$M_{l'l} = \delta_{l'l} + \frac{1}{2}\omega^{\sigma\rho} i\left(S_{\sigma\rho}\right)_{l'l} \tag{1.80}$$

donde como se vió anteriormente, $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ y $(S_{\sigma\rho})_{l'l}$ es la representación del álgebra del grupo de Lorentz(a ser estudiada en capítulos posteriores).

Como consecuencia, la variación se puede expresar como:

$$\delta x^{\mu} = \omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = \frac{1}{2}\omega^{\sigma\rho}\left(\delta_{\sigma}{}^{\mu}\eta_{\rho\nu}x^{\nu} - \delta_{\rho}{}^{\mu}\eta_{\sigma\nu}x^{\nu}\right) \tag{1.81}$$

$$\delta\varphi_l(x) = \frac{1}{2}\omega^{\sigma\rho} i\left(S_{\sigma\rho}\right)_{ll'}\varphi_{l'}(x) \tag{1.82}$$

La forma de la variación será $X^{\mu}_{\sigma\rho} = (\delta_{\sigma}{}^{\mu}x_{\rho} - \delta_{\rho}{}^{\mu}x_{\sigma})$ y $\Phi_{l\sigma\rho} = i\left(S_{\sigma\rho}\right)_{l'l}\varphi_{l'}(x)$. Para que la acción sea invariante ante las transformaciones de Lorentz, se deben combinar los $\varphi_l's$ de tal manera que el lagrangiano sea un escalar.

Con respecto a esta simetría, se puede deducir que existen 6 corrientes conservadas.

$$J^{\mu}_{\sigma\rho} = (\delta_{\sigma}{}^{\nu}x_{\rho} - \delta_{\rho}{}^{\nu}x_{\sigma})\left(-\delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L} + \partial_{\nu}\varphi_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_l)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_l)} i\left(S_{\sigma\rho}\right)_{ll'}\varphi_{l'} \tag{1.83}$$

De la expresión anterior, el tensor momento energía $T^{\mu}{}_{\nu}$ se puede definir como $T^{\mu}{}_{\nu} = \partial_{\nu}\varphi_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_l)} - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L}$, por lo tanto, se puede reescribir la expresión anterior como

$$J^{\mu}_{\sigma\rho} = T^{\mu}{}_{\sigma}x_{\rho} - T^{\mu}{}_{\rho}x_{\sigma} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_l)} i\left(S_{\sigma\rho}\right)_{ll'}\varphi_{l'} \tag{1.84}$$

Ahora, las cargas asociadas a esta simetría serán:

$$J_{\sigma\rho} = \int d^3x J^0_{\sigma\rho} = \int d^3x\left(T^0{}_{\sigma}x_{\rho} - T^0{}_{\rho}x_{\sigma} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_l)} i\left(S_{\sigma\rho}\right)_{ll'}\varphi_{l'}\right) \tag{1.85}$$

Ya que existen 6 generadores linealmente independientes, 3 de éstas cargas estarán asociadas a la simetría rotacional y corresponderán al *Momentum Angular.*

$$J_{ij} = \int d^3x\left(T^0{}_{i}x_{j} - T^0{}_{j}x_{i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_l)} i\left(S_{ij}\right)_{ll'}\varphi_{l'}\right) \tag{1.86}$$

donde $T^0{}_{i}x_{j} - T^0{}_{j}x_{i}$ definirá el *Momento Angular Orbital* y $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\varphi_l)} i\left(S_{ij}\right)_{ll'}\varphi_{l'}$ el *Momento angular Intrínseco* o de *Espín.*

Las otras 3 cargas estarán asociadas con la invarianza bajo transformaciones de Lorentz canónicas o Boosts.

$$J_{0i} = \int d^3x \left(T^0{}_0 x_i - T^0{}_i x_0 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_l)} i \left(S_{0i}\right)_{ll'} \varphi_{l'} \right) \tag{1.87}$$

3) Simetrías Internas.

Cuando existe una simetría interna, la forma en la que ésta actúa sobre las coordenadas y el espacio interno puede ser expresada como[1]

$$x'^\mu = x^\nu \tag{1.88}$$

$$\varphi'_{lI'}(x') = M_{I'I} \varphi_{lI}(x) \tag{1.89}$$

donde I representa el índice interno y $M_{I'I}$ una representación del grupo de Lie G que actúa sobre el espacio interno. En la versión infinitesimal, se puede ver que

$$\delta x^\mu = 0 \tag{1.90}$$

$$\delta \varphi_{lI}(x) = \omega^\alpha i \left(T_\alpha\right)_{II'} \varphi_{lI'}(x) \tag{1.91}$$

donde iT_α es una representación del álgebra de Lie del grupo de Lie G, y además vemos que los generadores cumplen el álgebra $[T_\alpha, T_\beta] = i f^\gamma_{\alpha\beta} T_\gamma$ (Hay suma implícita sobre índices repetidos)

De esta forma en analogía con el análisis de las otras simetrías, se observa que $X^\mu_\alpha = 0$ y además $\Phi_{lI\alpha} = i \left(T_\alpha\right)_{II'} \varphi_{lI'}$.

El número de cargas conservadas dependerá de la dimensión del álgebra del grupo de simetrías internas. En general, se definirá la corriente en la forma:

$$J^\mu_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_{lI})} (iT_\alpha)_{II'} \varphi_{lI'} \tag{1.92}$$

,y sus correspondientes cargas conservadas como

$$Q_\alpha = \int d^3x J^0_\alpha = -\int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_{lI})} (iT_\alpha)_{II'} \varphi_{lI'} \tag{1.93}$$

Parte II

Teoría de Campos

Habiendo ya descrito las características principales del Lagrangiano, y de sus simetrías espacio-temporales, falta en este momento definir ¿Qué tipos de campos pueden existir en la naturaleza?. Para responder a este interrogante, hay que primero, realizar la distición entre el formalismo Clásico y Cuántico. La descripción formal de la teoría clásica del electrón se hace enteramente a partir de la definición de una partícula que posee carga eléctrica y masa(electrón), interactuando con el campo electromagnético; en cambio, la teoría cuántica del electrón se hace sólamente en función de un campo fermiónico, que interactúa con otros campos a través del campo electromagnético. Por ahora, no se hace necesario ahondar en esta distición; en cambio se va a responder la pregunta formulada anteriormente con ayuda del Grupo de las Simetrías espacio-temporales.

Capítulo 3

Campos Libres

Como se estudia generalmente en la teoría de grupos, una *Representación*[13] de un grupo es un Homomorfismo del grupo en cuestión, en el conjunto de transformaciones lineales que actúan sobre un espacio vectorial. Claramente, para la descripción completa de los fenómenos físicos, se necesita encontrar el tipo de partículas que pueden existir en la naturaleza. Estas partículas estarán determinadas por el espacio donde el campo deberá tomar los valores, por lo tanto, se hace necesario introducir en el formalismo la manera en la que el espacio-tiempo determina los fenómenos físicos que se vayan a describir. Con esto a la mano, se deberá encontrar las representaciones del grupo de Poincaré, ya que es éste el grupo de las simetrías espacio-temporales.

Para este grupo, existen 3 tipos distintos de representaciones [1][17]

1. La *Representación Escalar,* donde las coordenadas y el campo transforman como:

$$x \to x' = \Lambda x + a \tag{2.1}$$

$$\varphi_l(x) \to \varphi'_l(x') = \sum_l M_{ll'}(\Lambda)\varphi_l(x) \tag{2.2}$$

$$\varphi(x) \to \varphi'(x') = \varphi(\Lambda x + a) \tag{2.3}$$

donde $l = 1$ y $M(\Lambda) = 1$, es decir, sólo existe una componente del campo, por lo tanto éste transforma de la forma trivial bajo Poincaré. De lo anterior, se puede ver que, el campo asocia un escalar a cada punto del espacio, y este valor del campo no cambia cuando este se transforma.

2. La *Representación Vectorial,* donde se tiene que:

$$l \rightarrow \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$\varphi^{\mu}(x) \rightarrow \varphi'^{\mu'}(x') = \sum_{l=1}^{n} M(\Lambda)^{\mu'}{}_{\mu} \varphi^{\mu}(x) \tag{2.4}$$

$$M(\Lambda)^{\mu'}{}_{\mu} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \tag{2.5}$$

y en general la *Representación Tensorial* de rango (m, n) donde el campo $\varphi^{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \nu_2 \cdots\cdots \nu_n}(x)$ transforma con

$$M(\Lambda)^{\mu'_1 \cdots\cdots \mu'_m}{}_{\nu'_1 \cdots\cdots \nu'_n} \; {}_{\mu_1 \cdots\cdots \mu_m}{}^{\nu_1 \cdots\cdots \nu_n} = \Lambda^{\mu'_1}{}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\mu'_m}{}_{\mu_m} \Lambda_{\nu'_1 \cdots \nu'_n}{}^{\nu_1 \cdots \nu_n} \tag{2.6}$$

El campo vectorial asocia un vector a cada punto del espacio,en el cual las coordenadas y las componentes del campo son mezcladas bajo la acción del grupo en forma no trivial.

3. La *Representación Espinorial.*

Para este caso, en analogía con los demás campos,

$$M(\Lambda) = \exp(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}) \tag{2.7}$$

Pasemos ahora al estudio formal de los Campos libres es decir, en ausencia de interacciones.

Capítulo 4

Campo Escalar o de Klein-Gordon

Como se mencionó anteriormente, el Campo Escalar debido a su regla de transformación trivial, es el tipo de campo más sencillo que puede existir en la naturaleza, y debido a efectos prácticos, sólo se mencionarán sus características principales, sin profundizar mucho en su estructura.

Se puede demostrar[10] que el lagrangiano más simple para este Campo Escalar es de la forma:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)(\partial^\mu \phi) - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 \tag{2.8}$$

donde $\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi\right)(\partial^\mu \phi)$ está relacionado con la energía cinética, y $\frac{\mu^2}{2}\phi^2$ con la energía potencial. Si se aplica el principio variacional, haciendo la variación con respecto al campo ϕ, se tiene que la ecuación de movimiento del campo es:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi = 0 \tag{2.9}$$

o en forma más compacta

$$\left(\Box + \mu^2\right)\phi = 0 \tag{2.10}$$

donde $\partial_\mu \partial^\mu = \partial^2 = \partial_o^2 - \vec{\nabla}^2 = \Box$ es el operador D'Alambertiano, y μ se relaciona con la masa del campo(o con la de las partículas).

Este campo describe particulas escalares y sin espín, cúya solución es en forma de ondas planas de la misma forma que la del oscilador armónico.

En este momento, parecería que se ha olvidado a las partículas por completo, pero como se verá a continuación, estas son apenas excitaciones elementales de

los campos, estando esto en concordancia de que la idea fundamental es el campo y no la partícula.

Supóngase ahora que el campo ϕ depende del espacio-tiempo a través de la fase $\xi = k \cdot x$ a partir de la relación $\phi = \phi(\xi)$[10]. Las derivadas parciales serán entonces $\partial_\mu \phi = k_\mu \phi'$, donde la prima denota la derivada con respecto a la fase ξ. Por lo tanto, el lagrangiano se podrá re-escribir en la forma:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{k^2}{2}\phi'^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 \tag{2.11}$$

Sustituyendo la transformada de Fourier

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \; e^{-ik\cdot x}\tilde{\phi}(k) \tag{2.12}$$

en la ecuación de Klein-Gordon, se llega a que $k^2 = \mu^2$. Este resultado sumamente importante, indica que se puede interpretar a k^μ como el cuadri-momentum de una onda plana $e^{-ik\cdot x}$, y debido a la relación de dispersión anterior, cada modo de Fourier de ϕ se manifiesta como una partícula con masa μ.

Capítulo 5

Campo Espinorial o Campo de Dirac

En orden de complejidad encontramos ahora el Campo Espinorial, que transforma bajo las transformaciones de Lorentz con[1][17]

$$M(\Lambda) = \exp(\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}) \tag{2.13}$$

, donde el generador de las transformaciones

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \tag{2.14}$$

se expresa en términos de las *Matrices de Dirac* γ^0,γ^1,γ^2 y γ^3 que satisfacen el Álgebra de Clifford[5]

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} \equiv \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}_{4\times 4} \tag{2.15}$$

donde $\mathbf{1}_{4\times 4}$ es la matriz identidad. Las matrices de Dirac tienen la forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

y las matrices σ^i, $i = 1, 2, 3$ son las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

que satisfacen el álgebra $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij}\mathbf{1} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$.

Como en el caso del Campo Escalar, se necesita construir para el Campo de Dirac un Lagrangiano que sea un invariante de Lorentz. Como se puede ver por ejemplo en [5], o en [17], se puede construir un Lagrangiano que sea un escalar de Lorentz a partir de ciertas combinaciones de las matrices γ^μ en la forma más simple como

$$\mathcal{L}_{Dirac} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \tag{2.19}$$

donde $\bar{\Psi} = \Psi^*\gamma^0$

Haciendo la variación respectiva a los dos campos $\bar{\Psi}$ y Ψ, resulta en las ecuaciones de movimiento

$$\bar{\Psi}(-i\gamma^\mu\partial_\mu - m) = 0 \tag{2.20}$$

y

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0 \tag{2.21}$$

donde a cada una se le denomina *Ecuación de Dirac.*

Capítulo 6

Campo Vectorial

Según el modelo estándar, existen en la naturaleza 4 fuerzas fundamentales[17]. Asociada a cada fuerza, existe un tipo especial de partícula(y en general de campo) responsable de la interacción entre las partículas a través de esta fuerza, que depende del tipo de propiedades de las partículas que están interactuando. En este capítulo se estudiará un tipo muy especial de campo, responsable de la interacción electromagnética entre las partículas que poseen carga eléctrica. Cabe resaltar, que el análisis que se va a realizar, debido al propósito general de este trabajo, será desde el punto de vista geométrico, ya que, de esta forma, será más fácil comprender la introducción(y por tanto la incidencia) del campo electromagnético.

Supóngase la existencia de un campo clásico cargado, como por ejemplo el campo de Dirac libre. Debido a que es un campo complejo, el lagrangiano de Dirac es invariante ante la transformación de fase global [1]

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow e^{iq\theta}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow e^{-iq\theta}\bar{\psi}(x) \end{aligned} \tag{2.22}$$

en la forma

$$\mathcal{L}\left(\psi, \partial_\mu\psi\right) = \mathcal{L}\left(e^{iq\theta}\psi, \partial_\mu(e^{iq\theta}\psi)\right) = \mathcal{L}(e^{iq\theta}\psi, e^{iq\theta}\partial_\mu\psi) \tag{2.23}$$

que, como se vio anteriormente (capítulo simetrías internas), en forma infinitesimal puede ser expresado de acuerdo a la variación con respecto a $\Phi = iq\psi$ y $\bar{\Phi} = -iq\bar{\psi}$.

La correspondiente corriente conservada que surge del teorema de Noether, es por lo tanto[1]

$$J^\mu = -\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Phi - \bar{\Phi}\frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = -i\bar{\psi}\gamma^\mu(iq\psi) = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{2.24}$$

donde, debido a su construcción se comprueba realmente que se conserva, es decir, aplicando el operador ∂_μ sobre la cuadri-corriente J^μ

$$\partial_\mu J^\mu = q\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi + q\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \tag{2.25}$$

debido a la ecuación de Dirac $\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu = im\bar{\psi}$ y $\gamma^\mu\partial_\mu\psi = -im\psi$, entonces

$$\partial_\mu J^\mu = qim\bar{\psi}\psi + q\bar{\psi}\left(-im\psi\right) = 0 \tag{2.26}$$

De la corriente conservada, se puede encontrar la carga conservada

$$Q = \int d^3x J^0(\vec{x},t) = \int d^3x\ q\bar{\psi}\gamma^0\psi \tag{2.27}$$

Según los principios de simetría y conservación que deben poseer las cantidades físicas, es de esperarse entender esta fase en un sentido más general. Si se tiene una fase global, se podría fijar esta fase en cualquier punto del espacio x_f; por lo tanto, la fase en cualquier otro punto quedaría determinada. Si se quiere trasladar a un caso en el que el origen arbitrario de la fase se pueda extender a todos los puntos del espacio, es decir sin tener un origen especial, se debería extender la teoría a un campo en el que se pueda ajustar la fase de manera independiente en cada punto del espacio, por lo tanto, se debe promover la invarianza del campo ante la transformación de fase local

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{iq\theta(x)}\psi(x) \tag{2.28}$$

lo que representaría tener un grupo de simetría $U(1)$ en cada punto del espacio, y por lo tanto se tendría un grado de libertad físico menos debido a la posibilidad de ajustar la fase en cualquier punto.

¿Qué pasa con el Lagrangiano?. Debido a la existencia de esta simetría, se puede comprobar fácilmente que los términos sin derivadas que se tenía anteriormente no sufren cambios, pero los términos que si las contienen deben ser re-definidos para que se cumplan las propiedades de invarianza, debido a esto, se puede ver

$$\mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu\psi(x)\right) \neq \mathcal{L}\left(e^{iq\theta(x)}\psi(x), \partial_\mu(e^{iq\theta(x)}\psi(x))\right) \tag{2.29}$$

como consecuencia que $\partial_\mu(e^{iq\theta(x)}\psi(x)) = e^{iq\theta(x)}\partial_\mu\psi(x) + iq\partial_\mu\theta(x)e^{iq\theta(x)}\psi(x)$.

El problema se manifiesta en el hecho que, como se sabe, la derivada es un operador que permite comparar los valores del campo en dos puntos distintos[17].

$$\partial_\mu\psi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left[\psi(x^\nu + \varepsilon\delta^\nu_\mu) - \psi(x^\nu)\right]}{\varepsilon} \tag{2.30}$$

Donde los puntos x^ν y $x^\nu + \varepsilon\delta^\nu_\mu$ están separados una distancia infinitamente pequeña.

Pero, debido a que los campos que se están sustrayendo $\psi(x^\nu + \varepsilon\delta^\nu_\mu)$ y $\psi(x^\nu)$ transforman en formas completamente diferentes bajo el grupo de simetrías $U(1)$, entonces se necesita encontrar una manera de determinar los campos sobre una misma base para que puedan ser comparados. Lo que se hace entonces, es transportar el campo $\psi(x)$ al punto $x^\nu + \varepsilon\delta^\nu_\mu$ sin que éste sufra algún cambio, y realizar la diferencia[15]. Este tipo de transporte se denomina *Transporte Paralelo.* Si se quiere ser riguroso, se debe definir la forma en que se transporta paralelemente el campo de un punto a otro.

Ahora, lo primero que se necesita, es encontrar un tipo especial de transformación que permita compensar la diferencia en las transformaciones de fase de un punto a otro(o sea una transformación de cambio de base en el espacio interno).

Se define una función escalar $W(x, y)$ que depende de los dos puntos y tenga la regla de transformación bilocal[17]

$$W(x, y) \to W'(x, y) = e^{iq\theta(x)} W(x, y) e^{-iq\theta(y)} \tag{2.31}$$

Se puede ver de la suposición anterior, que el producto $W(x, y)\psi(y) \to e^{iq\theta(x)} W(x, y) e^{-iq\theta(y)} e^{iq\theta(y)} \psi(y) = e^{iq\theta(x)} W(x, y)\psi(y)$ transforma en la forma necesaria.

Debido a esto, se puede definir nuevamente la derivada en la que sí es posible comparar los valores del campo en la forma[1][9]

$$D_\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\left[W(x^\nu, x^\nu + \varepsilon\delta^\nu_\mu)\psi(x^\nu + \varepsilon\delta^\nu_\mu) - \psi(x^\nu)\right]}{\varepsilon} \tag{2.32}$$

denominada *Derivada Covariante.*

Dada la forma en la que fué construída la derivada covariante, se puede comprobar explícitamente que

$$D_\mu \psi(x) \to [D_\mu \psi(x)]' = e^{iq\theta(x)} D_\mu \psi(x) \tag{2.33}$$

resultado sumamente importante, ya que si compara esto con la derivada definida anteriormente $\partial_\mu(e^{iq\theta(x)}\psi(x)) = e^{iq\theta(x)}\partial_\mu\psi(x) + iq\partial_\mu\theta(x)e^{iq\theta(x)}\psi(x)$, se puede ver que de alguna forma se ha "hecho desaparecer.^{el} término $iq\partial_\mu\theta(x)e^{iq\theta(x)}\psi(x)$ que resultó problemático. Más adelante se entenderá la incidencia física de este término .

En este sentido, la construcción realizada anteriormente parece simplemente un mecanismo que posibilita pasar de una derivada ∂_μ a otra D_μ que sí permite comparar los valores del campo sobre una misma base. Físicamente, no lo parece tanto, ya que en el sentido más general, no se ha definido todavía la forma que debe tener $W(x^\nu, x^\nu + \varepsilon\delta^\nu_\mu)$ para que se cumplan estas condiciones. Por lo tanto se debe ahora analizar la definición explícita de este término.

Lo que se necesita entonces es una expresión para $W(x,y)$ en puntos separados una distancia infinitesimal[9].

$$\begin{aligned} W(x^\nu, x^\nu + \varepsilon\delta^\nu_\mu) &= W(x,x) + \varepsilon\delta^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu} W(x,y)|_{y=x} + O(\varepsilon^2) \\ &= 1 + \varepsilon\delta^\nu_\mu \, iqA_\nu(x) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde por definición $W(x,x) = 1$ y $\frac{\partial}{\partial y^\nu} W(x,y)|_{y=x} = iqA_\nu(x)$. .

Debido a la regla de transformación $W(x,y) \to W'(x,y) = e^{iq\theta(x)} W(x,y) e^{-iq\theta(y)}$, y a lo anterior, se ve que

$$\begin{aligned} iqA_\nu(x) &= \frac{\partial}{\partial y^\nu} W(x,y)|_{y=x} \to \frac{\partial}{\partial y^\nu}\left[e^{iq\theta(x)} W(x,y) e^{-iq\theta(y)}\right]_{y=x} \\ &= e^{iq\theta(x)} \frac{\partial}{\partial y^\nu} W(x,y)|_{y=x} \, e^{-iq\theta(x)} - iq\partial_\nu\theta(x) e^{iq\theta(x)} W(x,x) e^{-iq\theta(x)} \\ &= iqA_\nu(x) - iq\partial_\nu\theta(x) \end{aligned} \tag{2.35}$$

Es decir, el campo vectorial $A_\nu(x)$ transforma exactamente a como lo hace el Cuadri-potencial electromagnético

$$A_\nu(x) \to A'_\nu(x) = A_\nu(x) - \partial_\nu\theta(x) \tag{2.36}$$

Este nuevo campo vectorial $A_\nu(x)$ que aparece debido a la compensación necesaria para la comparación de los campos se denomina *Conexión* o *Campo Gauge.*

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede definir nuevamente la Derivada Covariante como

$$D_\mu\psi(x) = \partial_\mu\psi(x) + iqA_\mu(x)\psi(x) \tag{2.37}$$

Ahora, analizando la forma en la que transforma $D_\mu\psi(x)$

$$\begin{aligned} D_\mu\psi(x) &\to [D_\mu\psi(x)]' = \left(\partial_\mu + iqA'_\mu(x)\right)\psi'(x) \\ &= \partial_\mu(e^{iq\theta}\psi) + iq(A_\mu - \partial_\mu\theta)e^{iq\theta}\psi \\ &= iq\partial_\mu\theta e^{iq\theta}\psi + e^{iq\theta}\partial_\mu\theta + e^{iq\theta} iqA_\mu\psi - iq\partial_\mu\theta e^{iq\theta}\psi \\ &= e^{iq\theta}(\partial_\mu + iqA_\mu)\psi = e^{iq\theta} D_\mu\psi(x) \end{aligned} \tag{2.38}$$

se observa que transforma en la forma requerida.

Resumiendo; se ha partido de un campo cargado, y promoviendo llegar a una simetría interna local desde una global correspondiente a la conservación del acople escalar(carga), aparece un nuevo campo vectorial que se asociará con el cuadri-potencial electromagnético, el cuál se encarga de compensar sobre la

comparación de los campos evaluados en puntos diferentes. Dado que, como se vio anteriormente, las partículas son los modos de Fourier del campo, es decir, las excitaciones elementales del campo, se puede asociar un tipo especial de partícula a este nuevo campo vectorial llamada *Fotón.* En este sentido, y como conclusión principal se puede entender al fotón como el mediador de una de las fuerzas fundamentales, el electromagnetismo entre partículas cargadas.

Hasta ahora, sólo se ha podido ir un paso mas allá al cambiar las derivadas ordinarias por las derivadas covariantes cuando se inducen interacciones entre los campos cargados. Pero debido a la introducción de este nuevo campo vectorial, se debe específicar también la forma en la que interactúan el campo cargado $\psi(x)$ y el campo vectorial $A_\mu(x)$. A la interacción inducida en este sentido se le denomina *Acoplamiento Mínimo*[1].

Es decir, se comienza con

$$\mathcal{L}_D(\psi(x), \partial_\mu\psi(x)) = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \tag{2.39}$$

y se termina con

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D(\psi(x), D_\mu\psi(x)) &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu(x) - m)\psi(x) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Como se había mencionado, el término que representa la interacción entre $\psi(x)$ y el campo vectorial $A_\mu(x)$ es de la forma

$$\mathcal{L}_{int} = -q\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) = -J^\mu(x)A_\mu(x) \tag{2.41}$$

Si quiere que el campo $A_\mu(x)$ tenga existencia propia, se debe encontrar un término cinético que represente completamente la dinámica de éste, de otra forma, las ecuaciones de movimiento serían triviales, es decir, la variación de la acción con respecto al campo sería cero, $\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} = -J^\mu(x) = 0$.

Como se sabe, el campo y la derivada covariante del campo transforman en la forma

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iq\theta(x)}\psi(x) \tag{2.42}$$

$$D_\mu\psi(x) \to [D_\mu\psi(x)]' = e^{iq\theta(x)}D_\mu\psi(x) \tag{2.43}$$

Construyendo el conmutador $[D_\mu, D_\nu]$

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= (\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\nu + iqA_\nu) - (\partial_\nu + iqA_\nu)(\partial_\mu + iqA_\mu) \\ &= iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \end{aligned} \tag{2.44}$$

el cuál transforma como:

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \to e^{iq\theta(x)}[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \tag{2.45}$$

Se puede definir la *Intensidad del Campo* (o *Curvatura*) como

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{iq}[D_\mu, D_\nu] \tag{2.46}$$

Con esto a la mano, el término cinético del campo $A_\mu(x)$ queda representado por la expresión[3,17]:

$$\mathcal{L}_M(\partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.47}$$

Agregando este término al lagrangiano original, y variando la acción con respecto a $A_\mu(x)$, es decir, $\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} = \partial_\mu F^{\mu\nu} - J^\nu = 0$, se encuentran las dos ecuaciones de Maxwell con fuentes.

Parte III

Formalismo Clásico de la Interacción del Electrón con el Campo Electromagnético

En esta parte se analizará la forma en la que interactúan una partícula cargada(electrón) con su propio campo electromagnético. Para ello, se seguirá fielmente el análisis de las referencias [10] y [8], ya que desde mi punto de vista, tienen la exposición más clara de este tema. Ya que, los calculos pertinentes al formalismo avanzado van a ser realizados en forma rigurosa en la parte 5, en este capítulo, sólo se hará mención a los aspectos más básicos del formalismo retardado.

Capítulo 7

Lagrangiano de una Partícula Cargada Auto-interactuante

En forma similar a lo que se hizo para el campo de Dirac, se va a suponer que se tiene una partícula cargada interactuando con un campo electromagnético. El lagrangiano para el sistema será entonces de la forma[8]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_o^C(\varphi^\alpha, \partial_\mu\varphi^\alpha) + \mathcal{L}_o^P(z^\mu, \dot{z}^\mu) + \mathcal{L}_{int}(\varphi^\alpha, \partial_\mu\varphi^\alpha, z^\mu, \dot{z}^\mu) \tag{3.1}$$

donde $\mathcal{L}_o^C(\varphi^\alpha, \partial_\mu\varphi^\alpha)$ corresponde al término del campo electromagnético, $\mathcal{L}_o^P(z^\mu, \dot{z}^\mu)$ corresponde al término de la partícula y finalmente $\mathcal{L}_{int}(\varphi^\alpha, \partial_\mu\varphi^\alpha, z^\mu, \dot{z}^\mu)$ al término de interacción.

Si se quiere encontrar la ecuación de movimiento de la partícula, se debe variar $\mathcal{L}$ con respecto a las coordenadas de la partícula para encontrar

$$m_0 c\ddot{z}^\mu = K^\mu(\varphi^\alpha) \tag{3.2}$$

que no es otra cosa que la ecuación de movimiento de Minkowski, donde $K^\mu(\varphi^\alpha)$ es la fuerza de Minkowski. Cabe resaltar el hecho de la dependencia explícita de la fuerza de las variables del campo φ^α.

Análogamente, si se varía $\mathcal{L}$ con respecto a $\varphi^\alpha(x)$, se encuentran las ecuaciones de movimiento del campo

$$\Xi_\alpha = f_\alpha(z^\mu) \tag{3.3}$$

en este caso también se evidencia el hecho de la dependencia explícita del término inhomogéneo $f_\alpha(z^\mu)$ debida a la presencia de la partícula. Como se podrá notar, esta ecuación se asemeja a la ecuación de Minkowski para la partícula.

Cuando $\Xi_\alpha = 0$ encontramos las ecuaciones para el campo libre o sin fuentes(en el vacío).

¿Que hace falta?. Para que la descripción sea completa, se debe encontrar la forma en la que interactúan el campo y la partícula. Como se vio anteriormente, la forma en la que interactúan un campo cargado y el campo electromagnético es a través del término $-J^\mu A_\mu$, entonces lo que queda, es definirlo para la partícula y el campo electromagnético.

Considérese una partícula que se desplaza a través de una línea de universo $z^\mu = z^\mu(s)$ parametrizada por el tiempo propio. Fig 3.1.

Fig.3.1.Línea de Universo.

Para una partícula cargada, se pude definir el cuadri-vector corriente como[8]

$$j^\mu = \rho_0 c u^\mu \tag{3.4}$$

(Se utilizará j^μ para denotar la cuadri-corriente de la partícula).

Ya que se está tratanto con partículas puntuales, se debe definir explícitamente la forma de la ecuación (3.4). Dirac[20], postuló un tipo especial de

corriente correspondiente a una partícula puntual, la cual, dado su naturaleza, tiene la forma[1]

$$j^{\mu}(x) = ec \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \dot{z}^{\mu}(s)\delta(x - z(s)) \tag{3.5}$$

donde se tiene la condición subsidiaria $\dot{z}^{\mu}\dot{z}_{\mu} = 1$, que impone una restricción sobre el tipo de línea de universo que puede seguir la partícula, por lo tanto, debido al principio de causalidad esta línea de universo debe ser de tipo tiempo[2]. Fig 3.2.

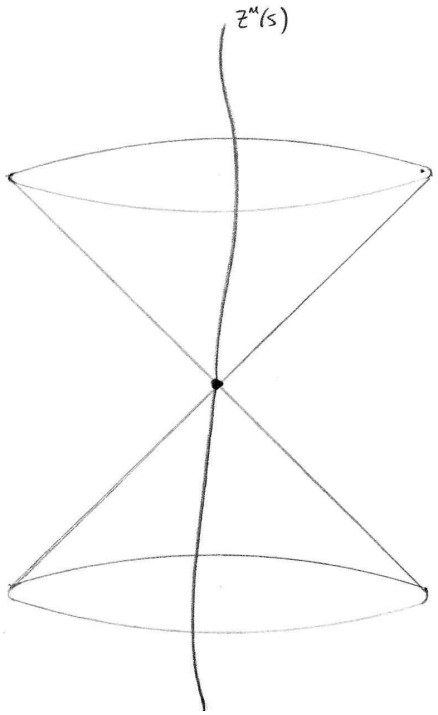

Fig.3.2.Línea de Universo Tipo Tiempo.

Como se mencionó anteriormente, las ecuaciones del campo son

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} j^{\mu}(x) \tag{3.6}$$

Al reemplazar (3.5) en la ecuación anterior, resulta que

[1] Si quiere tener una teoría completa, es necesario que esta corriente se conserve (Ver apéndice E), y que además cumpla conjuntamente con las ecuaciones de maxwell con fuentes y con la ecuación de movimiento de la partícula, como se demostrará más adelante.

[2] Aunque más adelante, parecería violarse "aparentemente" el principio de causalidad, cuando se estudie la solución avanzada del potencial de Liénard-Wiechert, se verá que este tipo de solución es necesaria para que se cumpla una ley de conservación.

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} = -e \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \dot{z}^\mu(s)\delta(x - z(s)) \tag{3.7}$$

Cuando se analizó las simetrías espacio-temporales, se observó que la carga conservada era el tensor momento-energía. Para este caso, del lagrangiano (3.1) se puede derivar el tensor momento-energía[8]

$$\Theta^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{c}(A_\sigma j^\sigma \eta^{\mu\nu} - A^\nu j^\mu) \tag{3.8}$$

donde $T^{\mu\nu} = F^{\mu\sigma} F_\sigma{}^\nu - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}_o^C$ es el tensor momento energía del campo electromagnético libre.

Dado que el lagrangiano (3.8) no es invariante ante traslaciones, se puede comprobar fácilmente que $\Theta^{\mu\nu}$ no satisface la ecuación de continuidad. Esto se puede ver como una consecuencia directa de la dependencia explícita del lagrangiano $\mathcal{L}$ de las coordenadas x^ν, es decir

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{c} A_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} j^\mu \tag{3.9}$$

En otro sentido, si se parte de la ecuación (3.8) y se deriva con respecto a x_μ, se observa que

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\sigma j^\sigma + A_\sigma \frac{\partial}{\partial x_\nu} j^\sigma - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} A^\nu j^\sigma - A^\nu \frac{\partial}{\partial x^\sigma} j^\sigma\right) \tag{3.10}$$

Comparando (3.9) con (3.10) se llega a que

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\mu \tag{3.11}$$

en este caso

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{\mu\nu} &= eF^{\mu\nu} \int_{-\infty}^{\infty} ds\ \dot{z}^\mu(s)\delta(x - z(s)) \\ &= eF^{\mu\nu}(z)\ \dot{z}^\mu(s)|_{z(s)=x} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Analizando un poco mas la ecuación anterior, se puede observar que la divergencia del tensor momento-energía del campo en el punto x no es más que la fuerza de Lorentz que actúa sobre la partícula en el punto $x = z(s)$. Es más, para una partícula libre con el lagrangiano

$$\mathcal{L}_o^P = m_o c \left[(\dot{z}^\mu(\tau))^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.13}$$

donde, realizando la variación

$$\delta\mathcal{L}_o^P = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_o^P}{\partial\dot{z}^\mu}\delta z^\mu\right) = \frac{\partial}{\partial z^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_o^P}{\partial\dot{z}^\mu}\delta z^\mu\right)\frac{dz^\nu}{d\tau} \tag{3.14}$$

y teniendo en cuenta que al realizar traslaciones espacio-temporales $\delta z^\nu = a^\mu = cte$ y $\delta\mathcal{L}_o^P$, la ecuación de continuidad que resulta es

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(m_o c\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu\right) = 0 \tag{3.15}$$

con esto, se puede definir entonces la carga conservada con respecto a esta simetría como

$$\Upsilon^{\mu\nu} = -m_o c^2\int ds\ \dot{z}^\mu\dot{z}^\nu\delta(x - z(s)) \tag{3.16}$$

donde $\Upsilon^\mu{}_\mu = -m_o c^2$.

Ahora, calculando la divergencia del tensor momento energía de la partícula

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Upsilon^{\mu\nu} &= -m_o c^2\int ds\ \dot{z}^\mu\dot{z}^\nu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta(x - z) = m_o c^2\int ds\ \dot{z}^\nu\frac{d}{ds}\delta(x - z) \\ &= m_o c^2\int ds\frac{d}{ds}\left[\dot{z}^\nu\delta(x - z)\right] - m_o c^2\int ds\ \dot{z}^\nu\delta(x - z)\end{aligned} \tag{3.17}$$

se puede observar que el primer término se anula, por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Upsilon^{\mu\nu} = -m_o c^2\int ds\ \dot{z}^\nu\delta(x - z) \tag{3.18}$$

Como se mostró anteriormente, el tensor momento energía obtenido de $\mathcal{L}$ no era invariante ante traslaciones, por lo tanto no se conservaba, pero dado que se pudo comprobar que $\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{\mu\nu} = \frac{1}{c}F^{\mu\nu}j_\mu$ y además, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Upsilon^{\mu\nu} = -\frac{1}{c}F^{\mu\nu}j_\mu$ (que es una consecuencia directa de las ecuaciones $m_0 c\ddot{z}^\mu = K^\mu(\varphi^\alpha)$ y $\Xi_\alpha = f_\alpha(z^\mu)$); se puede expresar la ley de conservación para este sistema en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(T^{\mu\nu} + \Upsilon^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{3.19}$$

que no es mas que la ecuación de continuidad para el sistema de Campo-Partícula, la cual reproduce las leyes de movimiento para ambos sistemas.

Se ha llegado entonces a una conclusión muy importante. Cuando se introducen interacciones entre el campo y la partícula, el sistema ya no es invariante ante traslaciones espacio-temporales a diferencia de como lo hacían los sistemas aislados. Por lo tanto, se necesitó recurrir a una nueva definición de tensor momento-energía que correspondía a la suma de los tensores correspondientes al campo y a la partícula, y de esta manera, al hallar la divergencia, se comprobó que se cumplía la ley de conservación para este nuevo tensor. En consecuencia,

el campo y la partícula se vuelven un sólo sistema, intercambiando energía y momento entre ellos.

De acuerdo al proceso lógico de pensamiento que se ha venido trabajando, estamos en un estado crucial de la primera parte de la investigación. Desde un punto de vista formal, se ha podido deducir la existencia del campo electromagnético a partir de el principio de invarianza de la carga eléctrica, posteriormente, a partir de esto, las ecuaciones de Maxwell fueron deducidas de forma natural. Entonces, sólo resta ahora encontrar las soluciones a éstas ecuaciones.

7.1. Solución a las Ecuaciones de Maxwell

Como es demostrado en [8] y en [10] los tipos de solución a la ecuación de onda inhomogénea[3]

$$\Box A^{\mu} = 4\pi j^{\mu} \tag{3.20}$$

en términos del método de las funciones de Green,

$$\Box G(x) = \delta^4(x) \tag{3.21}$$

$$j^{\mu}(x) = \int d^4y \; \delta^4(y-x) j^{\mu}(y) \tag{3.22}$$

$$A^{\mu}(y) = 4\pi \int d^4y \; G(y-x) j^{\mu}(x) \tag{3.23}$$

pueden ser expresadas en forma covariante como[10]

$$G_{ret}(x) = \frac{1}{2\pi}\theta(x^0)\delta(x^2) \tag{3.24}$$

$$G_{ava}(x) = \frac{1}{2\pi}\theta(-x^0)\delta(x^2) \tag{3.25}$$

donde claramente se puede ver que

$$G_{ret}(-x) = G_{ava}(x) \tag{3.26}$$

Independientemente del sistema de referencia inercial que se escoja, el tiempo juega un papel crucial en la descripción de los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza. Debido a la gran unificación de conceptos realizada en la relatividad especial, se podría decir que el tiempo perdió su caracter absoluto, pero ganó un carácter dinámico mucho mas importante del que tenía antes, esto es, más que nada, en razón a la dependencia explícita con las variables

[3] Para la solución en forma no covariante de las ecuaciones de Maxwell, se hace referencia a los excelentes libros [18][19].

espaciales. Pero, habría que preguntarse por las propiedades mas intrínsecas del tiempo, como: si es lineal, si cumple estrictamente los principios de causalidad, o si verdaderamente existe[14]. La respuesta a estas preguntas mas que referir un sistema lógico de pensamiento, radican en el hecho de su existencia misma independiente de las concepciones que se tengan, es decir, sin tener en cuenta las referencias más próximas vistas en la naturaleza como lo es el cambio. Si se tiene en cuenta el punto de vista cosmológico mas moderno, la existencia del tiempo mismo se creó con la gran explosión, y debido a esto, sus propiedades se determinan en una flecha unidireccional que recorre el origen hasta el infinito. Por lo tanto, la relación (3.26) que permite conectar la solución avanzada con la solución retardada, tiene mucha relevancia en el sentido anteriormente explicado.

Para calcular el campo electromagnético debido a una carga puntual e que se mueve en una línea de universo arbitraria de tipo tiempo $z^\mu(s)$, se debe definir un punto fuera de la línea de universo x^μ; la distancia entre este punto y un punto sobre la trayectoria de la partícula se expresará por la relación:

$$D^\mu = x^\mu - z^\mu(s) \tag{3.27}$$

en este sentido, la señal es emitida en el punto $z^\mu(s)$, y es recibido en el punto x^μ. Reemplazando el potencial de Green retardado (3.24) y la cuadri-corriente

$$j^\mu(x) = e\int_{-\infty}^{\infty} ds\ v^\mu(s)\delta^4[x - z(s)] \tag{3.28}$$

en (3.23), y realizando la integral se obtiene

$$A^\mu(x) = 2e\int_{-\infty}^{\infty} ds\ v^\mu(s)\theta(D_0)\delta(D^2) \tag{3.29}$$

La expresión $D^2 = [x - z(s)]^2 = 0$ tiene dos raíces con respecto a s, que son $z^\mu(s_{ret})$ y $z^\mu(s_{ava})$. Debido a la función escalón $\theta(x^0)$, sólo queda la raíz $z^\mu(s_{ret})$ correspondiente a la intersección de la línea de universo con la parte del pasado del cono de luz situado en x^μ. Fig. 3.3.

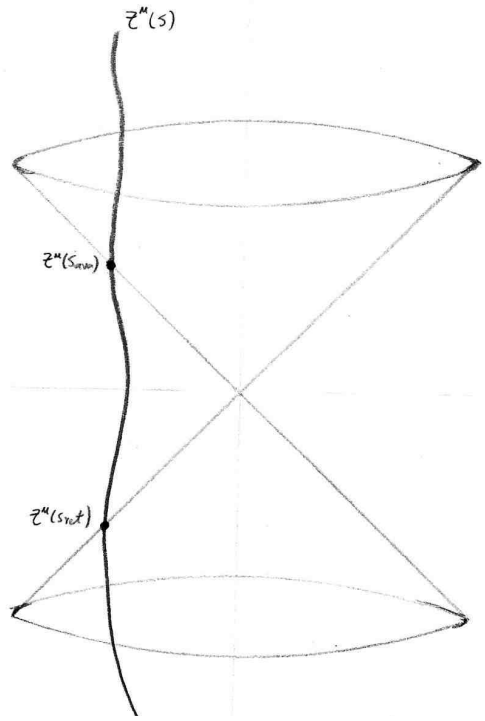

Fig.3.3.Raíces de la Ecuación $D^2 = [x - z(s)]^2 = 0$.

Utilizando la relación

$$\delta\left[f(a)\right] = \sum_k \frac{\delta(a - a_k)}{|f'(a_k)|} \tag{3.30}$$

donde a_k son las raíces de la ecuación $f(a) = 0$ y que

$$\frac{dD^2}{ds} = -2D_\mu \frac{dz^\mu}{ds} = -2D \cdot v \tag{3.30}$$

la ecuación (3.29) puede ser expresada como

$$A^\mu = e\left.\frac{v^\mu}{D \cdot v}\right|_{s=s_{ret}} \tag{3.31}$$

Si se define a $D^\mu = x^\mu - z^\mu(s_{ret})$ [10]como el vector tipo nulo que va del punto donde la señal es emitida hasta donde se recibe, y además, v^μ representa el vector tangente unitario a la línea de universo en el punto $z^\mu(s_{ret})$, se puede definir un nuevo vector u^μ de tipo espacio, que será ortogonal a v^μ y a un vector tipo nulo c^μ

$$c^\mu = v^\mu + u^\mu \tag{3.32}$$

donde esquemáticamente se puede ver expresado por la Fig 3.4. Debido a sus propiedades, se pueden expresar las relaciones $v^2 = -u^2 = 1, \quad u \cdot v = 0$, $c^2 = 0$ y finalmente $c \cdot v = -c \cdot u = 1$.

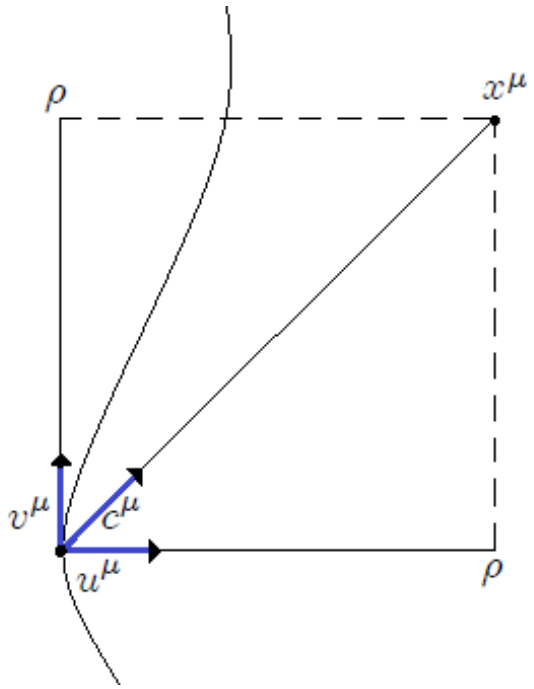

Fig.3.4.Descripción Esquemática de la Distancia Retardada Invariante $D^\mu = \rho$ c^μ.

De la figura 3.4, se puede definir la *distancia retardada invariante* ρ entre los puntos x^μ y $z^\mu(s_{ret})$ como

$$\rho = -D \cdot u = D \cdot v \tag{3.33}$$

donde se puede observar que también se cumple

$$D^\mu = \rho \; c^\mu \tag{3.34}$$

La distancia ρ puede ser interpretada como la distancia espacial entre el punto del campo y el punto retardado en el sistema instantáneo comóvil en el cual la carga está en reposo en el instante retardado s_{ret} y u^μ es la proyección espacial de c^μ.

Con todo esto a la mano, se está ya en disposición de definir el potencial debido a una carga arbitraria que se mueve sobre una línea de universo en la forma

$$A^\mu(x) = e\frac{v^\mu}{\rho} \tag{3.35}$$

y se conoce como el *Potencial de Liénard-Wiechert* [3,8,10].

7.2. Campo Electromagnético producido por una carga puntual

Cuando analizaba el caso de una partícula que entra en interacción con un campo electromagnético, cuya acción se encuentra representada por[10]

$$S = -m_0 \int d\tau \sqrt{\dot{z} \cdot \dot{z}} - \int d^4x \left(A_\mu j^\mu + \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \tag{3.36}$$

se llegó a la consclusión que los dos sitemas se hacían uno sólo, y que además había una transferencia de energía, esto debido necesariamente a las leyes de conservación que se debía cumplir. De la forma mas simple, y a través de las ecuaciones de movimiento acopladas,

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} + 4\pi \; j_\mu = 0 \tag{3.37}$$

$$m_0 a^\lambda - e v_\mu F^{\lambda\mu} = 0 \tag{3.38}$$

junto con la identidad de Bianchi[10]

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0 \tag{3.39}$$

la manifestación de este hecho es clara. Si se tiene en cuenta el tipo de solución del potencial retardado, de acuerdo a (3.35), se puede encontrar la intensidad de campo electromagnético.

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.40}$$

Primero, como

$$\partial^\mu A^\nu = e \left[\frac{a^\mu c^\nu}{\rho} - \frac{v^\nu \left(v^\mu + \lambda c^\mu \right)}{\rho^2} \right] \tag{3.41}$$

donde se ha definido $\lambda = a \cdot D - 1$ como una variable retardada invariante; resulta que

$$F^{\mu\nu} = c^\mu U^\nu - c^\nu U^\mu \tag{3.42}$$

donde se ha definido

$$U^\mu = e \left(-\lambda \frac{v^\mu}{\rho^2} + \frac{a^\mu}{\rho} \right) \tag{3.43}$$

Se puede comprobar que la ecuación (3.42) permanece invariante ante la transformación

$$U^\mu \to U^\mu + \kappa c^\mu \tag{3.44}$$

donde κ es una constante arbitraria. Si por ejemplo, se define $\kappa = e\frac{a\cdot u}{\rho}$, se puede expresar (3.42) en la forma

$$F^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2}\left(c^\mu V^\nu - c^\nu V^\mu\right) \tag{3.45}$$

donde se ha definido $V^\mu = v^\mu + \rho\ (\overset{u}{\perp} a)^\mu$, y siendo $\perp_{u^\mu}$ el operador que proyecta vectores sobre el hiperplano con vector normal u^μ, que en componentes toma la forma

$$(\overset{u}{\perp})_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu \tag{3.46}$$

Sustituyendo la solución retardada de las ecuaciones de Maxwell en la ecuación de movimiento de la partícula, resulta en una expresión divergente, siendo esto una consecuencia directa de la infinita auto-interacción en el sistema, es decir, la partícula experimenta su propio campo electromagnético que se hace infinito en el origen. ¿Qué hacer entonces?.

Se necesitó otra vez del "genio" de Dirac para resolver este problema[20] (o en una notación más moderna se hace referencia por ejemplo [21]), culminando su estudio en la famosa ecuación

$$ma^\mu = \frac{2}{3}e^2(\dot{a}^\mu - a^2 v^\mu) + F^\mu_{ext} \tag{3.47}$$

denominada la *Ecuación de Lorentz-Dirac, q*ue describe la evolución dinámica de una partícula sujeta a su propio campo electromagnético, y a una fuerza externa F^μ_{ext}. Las características no lineales(debidas a la auto-interacción) serán estudiadas mas a fondo en el último capítulo En [10] se explica un método de continuación analítica utilizado por Azim Barut para encontrar la ecuación de movimiento de una partícula cargada *Auto-interactuante.*

La derivación más reciente de la ecuación de Lorentz-Dirac, se hace en la referencia [22]. En ésta, se analiza el problema tratando a la partícula en el límite en el que ésta y sus propiedades tienden a cero sobre la línea de universo. Además, también se resuelven muchos problemas de (3.47), que anteriormente presentaban tanta dificultad.

En 1970, el físico Chileno Claudio Teiteilboim en un artículo magistral[24] y en otro donde analizaba las fuentes que producían el campo fuera sobre la línea de universo[25], analizó este problema desde un punto de vista muy diferente. Dado que el campo electromagnético producido por una carga, , puede ser dividido como[10]

$$F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}_I + F^{\mu\nu}_{II} \tag{3.48}$$

donde

$$F^{\mu\nu}_I = \frac{e}{\rho^2}\left(c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu\right) \tag{3.49}$$

$$F_{II}^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho}\left(c^{\mu}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} - c^{\nu}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu}\right) \tag{3.50}$$

Esto claramente como consecuencia de que $V^{\mu} = v^{\mu} + \rho\ (\overset{u}{\perp}a)^{\mu}$.

Se puede demostrar fácilmente que los campos $F_{I}^{\mu\nu}$ y $F_{II}^{\mu\nu}$ pueden ser derivados de los potenciales

$$A_{I}^{\mu} = \frac{e}{\rho}c^{\mu} \tag{3.51}$$

y

$$A_{II}^{\mu} = -\frac{e}{\rho}u^{\mu} \tag{3.52}$$

a través de la relación usual (3.40). Es obvio entonces, que esta descomposición se deduce fácilmente de reemplazar la forma explícita del vector $v^{\mu} = c^{\mu} - u^{\mu}$ en la definición del potencial de Lienerd Wiechert (3.35).

Fuera de la línea de universo, se debe cumplir para las ecuaciones de Maxwell de los dos campos

$$\partial_{\mu}F_{I}^{\mu\nu} = -\partial_{\mu}F_{II}^{\mu\nu} = \frac{2e(a\cdot c)}{\rho^{2}}c^{\nu} \tag{3.53}$$

$$\partial^{\lambda}F_{I,II}^{\mu\nu} + \partial^{\mu}F_{I,II}^{\nu\lambda} + \partial^{\nu}F_{I,II}^{\lambda\mu} = 0 \tag{3.54}$$

Ahora, debido a la transferencia de energía entre la partícula y el campo electromagnético dado por la expresión (3.36), se podrá analizar entonces a la partícula a partir del tensor momento energía del campo. De acuerdo a lo anterior, se puede construir el tensor momento energía del campo según la prescripción de Belifante[8,10,3], garantizando así la simetría de éste y sus propiedades básicas en la forma usual

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{\ \nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{3.55}$$

Insertando (3.48) en la ecuación anterior, y realizando las contracciones de los índices, se llega a

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{e^{2}}{4\pi\rho^{4}}\left(c^{\mu}V^{\nu} + c^{\nu}V^{\mu} - V^{2}c^{\mu}c^{\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{3.56}$$

como

$$V^{2} = 1 + \rho^{2}(\overset{u}{\perp}a)^{2} \tag{3.57}$$

el tensor momento energía se decompone en dos partes[4]

$$\theta^{\mu\nu} = \theta_I^{\mu\nu} + \theta_{II}^{\mu\nu} \tag{3.58}$$

donde

$$\theta_I^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(c^\mu V^\nu + c^\nu V^\mu - c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{3.59}$$

$$\theta_{II}^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{4\pi\rho^2}(\overset{u}{\perp} a)^2 c^\mu c^\nu \tag{3.60}$$

Se puede demostrar que los tensores de momento energía $\theta_I^{\mu\nu}$ y $\theta_{II}^{\mu\nu}$ se conservan fuera de la línea de universo que traza la partícula, es decir, son dinámicamente independientes, reflejándose esto en las relaciones

$$\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0 \tag{3.61}$$

$$\partial_\mu \theta_I^{\mu\nu} = 0 \qquad \text{y} \qquad \partial_\mu \theta_{II}^{\mu\nu} = 0 \tag{3.62}$$

De la misma forma, se podrían comprobar las relaciones para la conservación del Momentum Angular y su descomposición covariante según.

$$M^{\lambda\mu\nu} = M_I^{\lambda\mu\nu} + M_{II}^{\lambda\mu\nu} \tag{3.63}$$

donde

$$M_I^{\lambda\mu\nu} = z^\lambda \Theta_I^{\mu\nu} - z^\mu \Theta_I^{\lambda\nu} + D^\lambda \Sigma^{\mu\nu} - D^\mu \Sigma^{\lambda\nu} \tag{3.64}$$

Es el Tensor Momento Angular ligado a la partícula y

$$M_{II}^{\lambda\mu\nu} = z^\lambda \Theta_{II}^{\mu\nu} - z^\mu \Theta_{II}^{\lambda\nu} + D^\lambda \Phi^{\mu\nu} - D^\mu \Phi^{\lambda\nu} \tag{3.65}$$

es el Tensor Momento Angular irradiado, en la que se define

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(-c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu + c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{3.66}$$

y

$$\Phi^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^3}\left[c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu + c^\nu (\overset{u}{\perp} a)^\mu\right] \tag{3.67}$$

Otra excelente referencia es por ejemplo [26], donde se analiza también partículas con momentos dipolares.

---

[4]Para ser estrictos, debido a que el vector $V^\mu = v^\mu + \rho\left(\overset{u}{\perp} a\right)^\mu$ tiene dos términos, el tensor momento energía se descompondría en tres partes y no dos.

Parte IV

Formalismo Cuántico de la Interacción del Electrón con el Campo Electromagnético

Para no hacer la discusión muy extensa, en esta parte se introducirán los conceptos "más" básicos, necesarios para el desarrollo de la Electrodinámica Cuántica, esto es, la definición de los propagadores del Campo de Dirac y del Campo Electromagnético, el análisis de la interacción entre estos campos (Expansión Perturbativa), el formalismo de los Diagramas de Feynman, para llegar por último a las Correciones Radiativas, en especial a la Auto-Energía del Electrón.

Cuando se pretende construir una teoría que describa completamente la interacción del Campo del Electrón con el Campo Electromagnético, hay que tener en cuenta ciertas consideraciones sobre el tipo de simetrías que la teoría debe poseer (Simetrías Espacio-temporales y Simetrías Internas). Como se describió en la primera parte, el formalismo Lagrangiano tiene la facilidad de hacer explícita el tipo de simetrías que posee una teoría, por lo tanto, el único lagrangiano que serviría para es este caso sería el Lagrangiano de la QED[5][17].

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{Interacción} \\ &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J^{\mu}A_{\mu} \end{aligned} \tag{4.1}$$

o en términos de la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x)$

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(iD\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.2}$$

donde se ha utilizado la notación $D\!\!\!/ = \gamma^\mu D_\mu$.

Es posbible según la introducción anterior, demostrar que éste es en realidad el único lagrangiano posible, ya que posee todas las características dinámicas de la teoría, esto es, los términos cinéticos y de potencial para cada campo compatibles con las simetría espacio-temporales, además de la invarianza Gauge del término de interacción[1].

Si se realiza la variación de éste Lagrangiano con respecto a cada campo, se debe obtener las ecuaciones de movimiento para el electrón, esto es, la ecuación de Dirac, y las ecuaciones de Maxwell con fuentes. Para el caso que interesa en este momento, es decir, el formalismo cuántico de la teoría, se necesita cuantizar los campos clásicos definidos anteriormente y encontrar las funciones de Green o propagadores asociados a los operadores que actúan sobre los campos.

[5] QED: Quantum Electrodynamics

Capítulo 8

Esquema General de Cuantización

Para tener una teoría invariante de Poincaré, se debe requerir que la interacción sea de la forma[5]

$$V(t) = \int d^3x \; H(\vec{x}, t) \tag{4.3}$$

donde H es un escalar, es decir, tenga la regla de transformación

$$\hat{U}(\Lambda, a) H \hat{U}^{-1}(\Lambda, a) = H(\Lambda x + a) \tag{4.4}$$

y satisfaga la condición de *Causalidad*[5]

$$[H(x), H(x')] = 0 \qquad \text{para } (x - x')^2 < 0 \tag{4.5}$$

es decir, la medición de dos eventos separados por un intervalo de tipo espacio no deben interferir entre sí.

¿Cómo se puede construir el hamiltoniano de interacción para que sea un escalar?. La solución es entonces construir $H(x)$ a partir de campos, que a su vez dependerán de los operadores de creación y destrucción, que permitan la transición de estados de multipartículas(espacio de Fock) [5]. Definiendo los *Campos de Aniquilación* $\Psi_n^+(x)$ y los *Campos de Creación* $\Psi_n^-(x)$ como

$$\Psi_l^+(x) \equiv \sum_{\lambda,n} \int d^3p \; u_l(x; \vec{p}, \lambda, n) \; a(\vec{p}, \lambda, n) \tag{4.6}$$

$$\Psi_l^-(x) \equiv \sum_{\lambda,n} \int d^3p \; v_l(x; \vec{p}, \lambda, n) \; a^\dagger(\vec{p}, \lambda, n) \tag{4.7}$$

donde $a(\vec{p}, \lambda, n)$ y $a^\dagger(\vec{p}, \lambda, n)$ son los operadores de destrucción y creación respectivamente[5], y la etiqueta l indica el tipo de partícula correspondiente

a la representación irreducible. Los coeficientes $u_l(x;\vec{p},\lambda,n)$ y $v_l(x;\vec{p},\lambda,n)$ se escogen de tal forma que los campos puedan transformar en la forma deseada. Para mirar cómo, se debe revisar la forma en la que transforman los operadores de creación y destrucción[5].

$$\hat{U}(\Lambda,b)a(\vec{p},\lambda,n)\hat{U}^{-1}(\Lambda,b) = e^{-i[(\Lambda p)\cdot b]}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\times\sum_{\bar{\lambda}} D^{(j_n)}_{\lambda\bar{\lambda}}(W^{-1}(\Lambda,p))a(\overrightarrow{\Lambda p},\bar{\lambda},n) \tag{4.8}$$

$$\hat{U}(\Lambda,b)a^\dagger(\vec{p},\lambda,n)\hat{U}^{-1}(\Lambda,b) = e^{i[(\Lambda p)\cdot b]}\sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\times\sum_{\bar{\lambda}} D^{(j_n)*}_{\lambda\bar{\lambda}}(W^{-1}(\Lambda,p))a^\dagger(\overrightarrow{\Lambda p},\bar{\lambda},n) \tag{4.9}$$

donde $\overrightarrow{\Lambda p}$ es la parte tri-vectorial de Λp. Dado que se puede demostrar que el elemento de volumen $\frac{d^3p}{p^0}$es invariante ante una transformación de Lorentz, puede ser reemplazado por $\frac{d^3(\Lambda p)p^0}{(\Lambda p)^0}$, y resulta entonces que

$$\hat{U}(\Lambda,b)\Psi^+_l(x)\hat{U}^{-1}(\Lambda,b) = \sum_{\lambda\bar{\lambda}n}\int d^3(\Lambda p)\ u_l(x;\vec{p},\lambda,n)e^{-i[(\Lambda p)\cdot b]}D^{(j_n)}_{\lambda\bar{\lambda}}(W^{-1}(\Lambda,p))\sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}a(\overrightarrow{\Lambda p},\bar{\lambda},n) \tag{4.10}$$

$$\hat{U}(\Lambda,b)\Psi^-_l(x)\hat{U}^{-1}(\Lambda,b) = \sum_{\lambda\bar{\lambda}n}\int d^3(\Lambda p)\ v_l(x;\vec{p},\lambda,n)e^{i[(\Lambda p)\cdot b]}D^{(j_n)*}_{\lambda\bar{\lambda}}(W^{-1}(\Lambda,p))\sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}a^\dagger(\overrightarrow{\Lambda p},\bar{\lambda},n) \tag{4.11}$$

Para que los campos puedan cumplir las reglas de transformación (4.10) y (4.11), se debe cumplir entonces que

$$\sum_{\bar{\lambda}} u_{\bar{l}}(\Lambda x+b;\overrightarrow{\Lambda p},\bar{\lambda})D^{(j_n)}_{\lambda\bar{\lambda}}(W(\Lambda,p)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(\Lambda)e^{-i[(\Lambda p)\cdot b]}u_l(x;\vec{p},\lambda,n) \tag{4.12}$$

$$\sum_{\bar{\lambda}} v_{\bar{l}}(\Lambda x+b;\overrightarrow{\Lambda p},\bar{\lambda})D^{(j_n)*}_{\lambda\bar{\lambda}}(W(\Lambda,p)) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_{\bar{l}} D_{\bar{l}l}(\Lambda)e^{i[(\Lambda p)\cdot b]}v_l(x;\vec{p},\lambda,n) \tag{4.13}$$

Si se desea encontrar la forma explícita de u_l y v_l, es necesario tener en cuenta la forma de la transformación ante el Grupo de Poincaré. Considérese primero el caso de las translaciones. Claramente, se debe tener que $\Lambda = 1$ y b arbitrario; entonces, se tiene que

$$u_l(x;\vec{p},\lambda,n) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{-ip\cdot x}u_l(\vec{p},\lambda,n) \tag{4.14}$$

$$v_l(x;\vec{p},\lambda,n) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip\cdot x} v_l(\vec{p},\lambda,n) \tag{4.15}$$

Lo que equivale a hacer una transformada de Fourier como cambio de base del espacio de los momentos al de las posiciones en los campos, esto es

$$\Psi_l^+(x) = \sum_{\lambda n} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3p \; u_l(\vec{p},\lambda,n) e^{-ip\cdot x} a(\vec{p},\bar{\lambda},n) \tag{4.16}$$

$$\Psi_l^-(x) = \sum_{\lambda n} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^3p \; v_l(\vec{p},\lambda,n) e^{ip\cdot x} a^\dagger(\vec{p},\bar{\lambda},n) \tag{4.17}$$

Para los otros dos casos más importantes (sin tener en cuenta las transformaciones discretas de paridad e inversión temporal), las rotaciones y los Boost, es claro decir que simplemente las relaciones (4.16) y (4.17) se satisfacen dependiendo de la representación irreducible del grupo de Lorentz.

Como se había mencionado anteriormente, debido a que se necesita construir una densidad de interacción escalar, y que también se cumpla la condición de microcausalidad, la forma de combinar los campos no es tan sencilla. Por ejemplo, se puede verificar que la forma más simple

$$[\Psi_l^+(x), \Psi_{\bar{l}}^-(y)]_\mp = (2\pi)^{-3} \sum_{\lambda n} \int d^3p d^3p \; u_l(\vec{p},\lambda,n) v_{\bar{l}}(\vec{p},\lambda,n) e^{ip\cdot(x-y)} \tag{4.18}$$

en general no se hace cero para intervalos de tipo espacio, donde la escogencia del signo $\mp$ depende si las partículas destruídas y creadas por Ψ_l^+ y Ψ_l^- son bosones o fermiones.

Afortunadamente hay una solución a este problema, en lugar de utilizar sólamente los campos Ψ_l^+ y Ψ_l^- que no necesariamente conmutan (o anticonmutan) para intervalos tipo espacio, se puede construir una superposición en la forma[5]

$$\Psi_l(x) = \alpha_l \Psi_l^+(x) + \beta_l \Psi_l^-(x) \tag{4.19}$$

$$\Psi_l^\dagger(x) = \alpha_l^* \Psi_l^-(x) + \beta_l^* \Psi_l^+(x) \tag{4.20}$$

donde las constantes α y β se escogen de tal forma que los campos conmuten (o anticonmuten) para intervalos tipo espacio, es decir

$$[\Psi_l(x), \Psi_{\bar{l}}(y)]_\mp = [\Psi_l(x), \Psi_{\bar{l}}^\dagger(y)]_\mp = 0 \tag{4.21}$$

Según la forma en la que se ha construído los campos cuánticos, y de la necesidad de utilizar la superposición de la forma (4.19) y (4.20), se pensaría que en realidad la condición de microcausalidad impuesta desde el principio no contiene en sí misma ninguna información relevante, pero como se verá ahora, es un elemento crucial en la descripción de los fenómenos físicos.

Definiendo cierto tipo de operador hermítico $\hat{Q}$ asociado a la carga(en este momento no nos interesará que tipo de carga), cúya acción sobre los estados de una partícula es de la forma

$$\hat{Q}\,|p,\lambda\rangle = q_n\,|p,\lambda\rangle \tag{4.22}$$

Con respecto a este operador, se puede definir un conjunto de operadores unitarios $\hat{U}_Q(\theta) = e^{i\theta\hat{Q}}$, que actuando sobre un estado multipartícula, resulta en

$$\hat{U}_Q(\theta)\,|p_1n_1;p_2n_2;\cdots;p_Nn_N\rangle = e^{i\theta(q_{n_1}+\cdots q_{n_N})}\,|p_1n_1;p_2n_2;\cdots;p_Nn_N\rangle \tag{4.23}$$

es decir, los operadores $\hat{U}_Q(\theta)$ forman una representación del grupo de Lie abeliano $U(1)$. De acuerdo a esto, si una partícula de cierto tipo tiene un valor q_n para la carga $\hat{Q}$, entonces

$$[\hat{Q}, a(\vec{p},\lambda,n)] = -q_n a(\vec{p},\lambda,n) \tag{4.24}$$

$$[\hat{Q}, a^\dagger(\vec{p},\lambda,n)] = q_n a^\dagger(\vec{p},\lambda,n) \tag{4.25}$$

De la misma forma, se tiene la regla de transformación para los campos

$$[\hat{Q}, \Psi_l(x)] = -q_l\Psi_l(x) \tag{4.26}$$

Para que $\hat{H}(x)$ conmute con $\hat{Q}$, es decir $[\hat{Q},\hat{H}] = 0$ debe ser construído como una suma de productos de campos $\Psi_{l_1}\Psi_{l_2}\cdots$ y sus adjuntos $\Psi^\dagger_{m_1}\Psi^\dagger_{m_2}\cdots$, tal que

$$q_{l_1} + q_{l_2} + \cdots - q_{m_1} - q_{m_2} - \cdots = 0 \tag{4.27}$$

Como se puede ver entonces, la ecuación (4.27) será satisfecha en particular para la parte del campo $\Psi^+_l(x)$ sí y sólo si las partículas de tipo n que son aniquiladas por este poseen la misma carga $q(n) = q_l$, y además, también para la parte del campo $\Psi^-_l(x)$ sí y sólo si las partículas de tipo $\bar{n}$ que son creadas por este campo poseen la misma carga $q(\bar{n}) = -q_l$. Debido a lo anterior, se puede inferir que si una componente particular del campo de aniquilación destruye una partícula de especie n y masa m, entonces la misma componente del campo de creación, debe crear una partícula de especie $\bar{n}$ y masa m que posea una carga opuesta a la partícula de tipo n, que es conocida como su *Antipartícula*.

Se ha llegado a una de las conclusiones más importantes de la teoría cuántica relativista. Debido a la imposición de la ley de causalidad, se hizo necesaria la introdución de un cierto tipo nuevo de elemento en la descripción del campo, esto es, la introducción de las antipartículas. Aunque en la teoría original de Dirac su interpretación no fuera tan clara debido a las energías negativas que se producían de la solución de la ecuación cuántica relativista; ahora en el lenguaje de campos es un elemento crucial en la descripción de los procesos físicos causales, ya que como se puede ver en el apéndice 2, en el que se desarrolla el propagador de una partícula libre , el efecto de la propagación de una partícula fuera del cono de luz de un punto x a un punto y, ahora es cancelado por la propagación de una antipartícula del punto y al punto x, preservándose la causalidad.

Capítulo 9

Cuantización del Campo de Dirac y Propagador del Electrón

Como se había deducido del capítulo anterior, la única manera en la que podíamos construir un hamiltoniano de interacción a partir de los operadores de campo

$$\Psi_l^+(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\ u_l(\vec{p},\lambda)e^{-ip\cdot x}a(\vec{p},\lambda) \quad \text{Operador de Aniquilación} \tag{4.28}$$

$$\Psi_l^-(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\ v_l(\vec{p},\lambda)e^{ip\cdot x}b^\dagger(\vec{p},\lambda) \quad \text{Operador de Creación} \tag{4.29}$$

era de la forma:

$$\Psi(x) = \alpha\Psi^+(x) + \beta\Psi^-(x) \tag{4.30}$$

tal que, para $(x-y)^2 < 0$ se cumplen las relaciones de conmutación(anticonmutación) $[\Psi_l(x), \Psi_{\bar{l}}(y)]_\mp = [\Psi_l(x), \Psi_l^\dagger(y)]_\mp = 0$[1]. Reemplazando (4.28) y (4.29) en (4.30), se tiene[5]

$$\Psi(x) = \alpha\sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\ u_l(\vec{p},\lambda)e^{-ip\cdot x}a(\vec{p},\lambda) + \beta\sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\ v_l(\vec{p},\lambda)e^{ip\cdot x}b^\dagger(\vec{p},\lambda) \tag{4.31}$$

[1] En este momento, no se debe confundir el símbolo + con con el símbolo †, el operador $\Psi^\dagger$ es el adjunto de Ψ.

$$\Psi^\dagger(x) = \alpha^* \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\ u_l^*(\vec{p},\lambda) e^{ip\cdot x} a^\dagger(\vec{p},\lambda) + \beta^* \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\ v_l^*(\vec{p},\lambda) e^{-ip\cdot x} b(\vec{p},\lambda) \tag{4.32}$$

Ahora, realizando el conmutador(anticonmutador)

$$[\Psi_l(x), \Psi_{\bar{l}}(y)]_\mp = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\ \left[|\alpha|^2 N_{l\bar{l}}(\vec{p}) e^{-ip\cdot(x-y)} \mp |\beta|^2 M_{l\bar{l}}(\vec{p}) e^{ip\cdot(x-y)} \right] \tag{4.33}$$

donde por simplicidad se definen las sumas de espín

$$N_{l\bar{l}}(\vec{p}) = \sum_\lambda u_l(\vec{p},\lambda) u_{\bar{l}}^*(\vec{p},\lambda) \tag{4.34}$$

$$M_{l\bar{l}}(\vec{p}) = \sum_\lambda v_l(\vec{p},\lambda) v_{\bar{l}}^*(\vec{p},\lambda) \tag{4.35}$$

Se puede demostrar, que para que los campos conmuten para una separación de tipo espacio $(x-y)^2 < 0$, se debe cumplir[5] que

$$|\alpha|^2 = |\beta|^2 \tag{4.36}$$

es decir, las partículas descritas por este campo deben ser fermiones.

Escogiendo por conveniencia $\alpha = \beta = 1$, se tiene finalmente que el campo de Dirac toma la forma

$$\Psi_l(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[u_l(\vec{p},\lambda) e^{-ip\cdot x} a(\vec{p},\lambda) + v_l(\vec{p},\lambda) e^{ip\cdot x} b^\dagger(\vec{p},\lambda) \right] \tag{4.37}$$

Después de haber cuantizado el Campo de Dirac, se necesita ahora encontrar la función de Green que cumpla la Ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \tag{4.38}$$

como se puede ver en las referencias [17][5], este propagador está definido por

$$D_F(x'-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(p^\mu \gamma_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip\cdot(x'-x)} \tag{4.39}$$

donde se ha introducido el término $+i\epsilon$ por conveniencia para que la integral pueda resolverse sobre el plano complejo. Esta expresión representa la "propagación" de un fermión, en este caso un electrón de un punto x' a un punto x.

Capítulo 10

Cuantización del Campo Electromagnético y Propagador del Fotón

De acuerdo a las propiedades del campo Electromagnético analizadas anteriormente, su cuantización se hace un poco más difícil que la de los otros campos. Esto como consecuencia de los siguientes factores:

Debido a que los fotones son particulas no masivas, no es posible costruir un campo $A^\mu(x)$ que transforme como un vector ante transformaciones espacio-temporales. Se puede demostrar que este campo, transforma como[1]

$$\hat{U}(\Lambda)A^\mu(x)\hat{U}(\Lambda)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \quad \left[A^\nu(x') - \partial^\nu\hat{\Theta}(x',\Lambda)\right] \tag{4.40}$$

siendo $\hat{\Theta}(x',\Lambda)$, una consecuencia directa de la promoción de la fase global a una local, es decir, poder redefinir el campo en cada punto del espacio. Como consecuencia de esto, se tiene una descripción redudante de este fenómeno físico, como consecuencia, hay mas variables que grados de libertad física. ¿Qué se debe hacer entonces?.

Se pueden seguir dos caminos[1]

1. Eliminar la redundancia escogiendo un "Gauge", y luego cuantizar. Por este método se va a tener sólamente variables físicas, pero a cambio de esto, se obtendrá una teoría que no es covariante bajo Lorentz.

2. Cuantizar y luego eliminar la redundancia. En este caso, se tendrá una teoría covariante bajo Lorentz, pero apareceran en el espacio de Fock estados no físicos.

Para evitar ahondar mucho en la construcción completa de la cuantización del Campo Electromagnético se refiere a la excelente bibliografía en este tema como lo son [5] donde se construye el formalismo de manera análoga al Campo de Dirac, o en las notas de clase[1], o si se quiere[9].

Sólo se limitará el estudio a mostrar la forma más general del campo, la cual es una superposición de modos de Fourier en la forma[1]

$$\hat{A}^{\mu}(x) = \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[e^{-ip\cdot x} \epsilon^{\mu}(\vec{p},\lambda) a(\vec{p},\lambda) + e^{ip\cdot x} \epsilon^{\mu *}(\vec{p},\lambda) a^{\dagger}(\vec{p},\lambda) \right] \quad (4.41)$$

donde $\epsilon^{\mu}(\vec{p},\lambda)$ y $\epsilon^{\mu *}(\vec{p},\lambda)$ son dos *Vectores de Polarización* independientes y la suma $\sum_{\lambda}$ se hace sobre los estados de helicidad.

Similarmente a lo que se hace con el Campo de Dirac, se puede definir el Propagador del Fotón como[1]

$$M_F(x'-x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon} e^{-ip\cdot(x'-x)} \quad (4.42)$$

Capítulo 11

Interacciones y Expansión Perturbativa

A diferencia de la Mecánica Clásica, en Mecánica Cuántica interesan otro tipo de elementos que tienen relevancia física, como por ejemplo las probabilidades de transición entre estados cuánticos. Al analizar la teoría no interactuante, debe ser lógico, dado el desarrollo hecho en capítulos anteriores, que este producto interno debe estar representado por[17]

$$\langle 0| \Psi(x)\Psi(y) |0\rangle \tag{4.43}$$

esto es, la probabilidad de transición(o de propagación como se verá adelante) de un estado arbitrario a otro.

En el caso libre, se comienza desde el estado vacío $|0\rangle$, y por la acción de los operadores de creación y destrucción, se puede llegar a cualquier otro estado del espacio de Hilbert. Ahora, como se está analizando la interacción del electrón con el campo electromagnético, el vacío libre deja de existir como el estado de mínima energía. Lo que hay que hacer entonces, es redefinir el estado vacío como consecuencia de la interacción de los campos tal que el propagador sea ahora de la forma[17]

$$\langle \Omega| \Psi(x)\Psi(y) |\Omega\rangle \tag{4.44}$$

donde $|\Omega\rangle$ es el nuevo vacío de la teoría interactuante. Es muy importante aclarar en este momento que el hecho mismo de la interacción de los campos, no sólo redefine el estado vacío de la teoría, sino que tiene unas implicaciones de enorme interés físico para la descripción del fenómeno, las cuales son para nuestro caso la *Autoenergía del Electrón* y en general las *Correcciones Radiativas.*

De acuerdo al trabajo realizado por Dyson, Tomonaga, entre otros[5], debido a las interacciones, se hace conveniente utilizar un nuevo marco que defina la

evolución de los estados(y de los generadores) en el espacio de Hilbert, es decir, en lugar de representar la evolución de los estados en el *Cuadro de Schrödinger*[1]

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-i\hat{H}t}|\Psi(0)\rangle_S \tag{4.45}$$

donde los estados evolucionan con el Hamiltoniano libre, o el *Cuadro de Heisenberg*

$$|\Psi\rangle_H = e^{i\hat{H}t}|\Psi(t)\rangle_S = |\Psi(0)\rangle_S \tag{4.46}$$

$$\hat{O}_H(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{O}_S e^{-i\hat{H}t} \tag{4.47}$$

donde ahora son los operadores los que evolucionan temporalmente con el Hamiltoniano libre[1], se utiliza el *Cuadro de Interacción*, donde, dada la descomposición $H = H_0 + H_{int}$, puede realizar la evolución del sistema no con el Hamiltoniano completo como se hacía en el caso no interactuante(que era el Hamiltoniano libre), sino, y en el mismo sentido, con el Hamiltoniano libre[2]. De acuerdo a lo anterior, la evolución del sistema(Estados y Operadores) será de la forma[1]

$$|\Psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0^S t}|\Psi(t)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^S t}e^{-i\hat{H}t}|\Psi(0)\rangle_S = e^{i\hat{H}_0^S t}e^{-i\hat{H}t}|\Psi\rangle_H \tag{4.48}$$

$$\hat{O}_I(t) = e^{i\hat{H}_0^S t}\hat{O}_S e^{-i\hat{H}_0^S t} = e^{i\hat{H}_0^S t}e^{-i\hat{H}t}\hat{O}_H(t)e^{i\hat{H}t}e^{-i\hat{H}_0^S t} \tag{4.49}$$

¿Cuál será la evolución temporal de los estados?. Es fácil ver que, el efecto de las interacciones se ve ahora reflejado en

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle_I &= e^{i\hat{H}_0^S t}|\Psi(t)\rangle_S = |\Psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0^S t}e^{-i\hat{H}(t-t')}|\Psi(t')\rangle_S \\ &= e^{i\hat{H}_0^S t}e^{-i\hat{H}(t-t')}e^{-i\hat{H}_0^S t'}|\Psi(t')\rangle_I \end{aligned} \tag{4.50}$$

Debido al teorema de Wigner[5,38], el *Operador de Evolución Temporal* en el Cuadro de Interacción debe ser unitario, para que se conserven las amplitudes de propagación(ya que debe ser una simetría del sistema). De acuerdo a esto, se puede definir este operador en la forma

$$\hat{U}_I(t,t') = e^{i\hat{H}_0^S t}e^{-i\hat{H}(t-t')}e^{-i\hat{H}_0^S t'} \tag{4.51}$$

y debe satisfacer

[1] La conexión entre los dos cuadros es simplemente la misma relación que existe entre las transformaciones Activas y Pasivas en un espacio vectorial[37], donde el producto interno entre estados

$$\langle\Psi|e^{i\hat{H}t}\hat{O}e^{-i\hat{H}t}|\Psi\rangle$$

puede ser interpretado en el sentido anteriormente citado.

[2] Más adelante se explicará la razón de esta escogencia.

$$\hat{U}_I(t,t')^\dagger = e^{i\hat{H}_0^S t'} e^{i\hat{H}(t-t')} e^{-i\hat{H}_0^S t} = \hat{U}_I(t',t) = \hat{U}_I(t,t')^{-1} \tag{4.52}$$

Dado que el conjunto de traslaciones temporales forman un grupo, es claro entonces que la representación de este grupo caracterizada por el conjunto de operadores $\hat{U}_I(t,t')$ debe cumplir[3]

$$\hat{U}_I(t,t')\hat{U}_I(t',t'') = \hat{U}_I(t,t'') \tag{4.53}$$

adicionalmente, debe existir el operador identidad

$$\hat{U}_I(t',t') = \mathbf{1} \tag{4.54}$$

Se puede demostrar que debido a las reglas de conmutación del álgebra del subgrupo de traslaciones del Grupo de Poincaré (1.34), concretamente, el subgrupo de traslaciones temporales, forman un grupo Abeliano; debido a esto[5], o a la solución de la ecuación de Schrödinger en el cuadro de interacción

$$i\partial_t \hat{U}_I(t,t') = \hat{H}_{int}\hat{U}_I(t,t') \tag{4.55}$$

se puede expresar al operador $\hat{U}_I(t,t')$ como[1][17]

$$\hat{U}_I(t,t') \sim \exp\left[-i\int_{t'}^{t} d\tau \hat{H}_{int}^I(\tau)\right] \tag{4.56}$$

o expandiéndo en una serie de potencias en la constante de acoplamiento

$$\hat{U}_I(t,t') = \mathbf{1} - i\int_{t'}^{t} dt_1\ \hat{H}_{int}^I(t_1) + (-i)^2\int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2\ \hat{H}_{int}^I(t_1)\hat{H}_{int}^I(t_2) + \cdots \tag{4.57}$$

A esta expansión perturbativa del operador $\hat{U}_I(t,t')$ se le conoce como *Serie de Dyson*[17].

Es bueno notar en este momento, que esta expansión perturbativa, a pesar de ser una excelente aproximación sólo tiene validez física en un rango limitado de la teoría, esto es, cuando la constante de acoplamineto es muy débil, y además, a pesar que es un elemento crucial en el cálculo de secciones eficaces y tiempos de decaimiento, existen efectos que no pueden ser descritos por esta expansión.

También en este momento es necesaria la introducción de otro concepto muy importante. Dado que en teoría cuántica relativista, el número de partículas puede cambiar en un proceso, el hamiltoniano de interaracción al ser expandido en la serie de Dyson, lleva consigo un ordenamiento arbitrario, pero, para facilitar el análisis se hace conveniente restringir el momento en el que los operadores

[3] Esto es cierto, en el caso en el que la representación sea no proyectiva, en otro caso, aparecería una fase adicional[5]

actúan de acuerdo a la flecha de tiempo establecida en la teoría, por lo tanto, se define el *Orden Temporal* como el ordenamiento del hamiltoniano de interacción en la forma

$$T\{\hat{H}^I_{int}(t_1)\hat{H}^I_{int}(t_2)\hat{H}^I_{int}(t_3)\hat{H}^I_{int}(t_4)\cdots\} = \hat{H}^I_{int}(t_1)\hat{H}^I_{int}(t_2)\hat{H}^I_{int}(t_3)\hat{H}^I_{int}(t_4)\cdots \tag{4.58}$$

si el ordenamiento temporal es de la forma

$$t_1 > t_2 > t_3 > \cdots$$

De acuerdo a lo anterior, es fácil comprobar que[17]

$$\int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t'}^{t_1} dt_2 \ \cdots \int_{t'}^{t_{n-1}} t_n \ \hat{H}^I_{int}(t_1)\cdots\hat{H}^I_{int}(t_n) = \frac{1}{n!}\int_{t'}^{t} dt_1\cdots dt_n T\{\hat{H}^I_{int}(t_1)\cdots\hat{H}^I_{int}(t_n)\} \tag{4.59}$$

De esto, se puede expresar la Serie de Dyson en una forma más compacta

$$\begin{aligned} \hat{U}_I(t,t') &= \mathbf{1} + (-i)\int_{t'}^{t} dt_1 \ \hat{H}^I_{int}(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!}\int_{t'}^{t} dt_1 dt_2 T\{ \ \hat{H}^I_{int}(t_1)\hat{H}^I_{int}(t_2)\} \\ &\equiv T\left\{\exp\left[-i\int_{t'}^{t} d\tau \ \hat{H}^I_{int}(\tau)\right]\right\} \qquad \text{con} \qquad t > t' \end{aligned} \tag{4.60}$$

Se puede comprobar que la conexión que existe entre el estado vacío $|0\rangle$ de la teoría no-interactuante, con el estado vacío $|\Omega\rangle$ cuando se adicionan interacciones es en la forma[17]

$$\langle\Omega| = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{e^{-iE_\Omega T}\langle\Omega\ |0\rangle}\langle\Omega| e^{-i\hat{H}T} \tag{4.61}$$

De la expresión anterior, se deduce que existe una relación entre el estado vacío libre $|0\rangle$ con el estado vacío $|\Omega\rangle$ de la teoría interactuante; por tal motivo, se debe encontrar la relación existente entre las amplitudes de propagación[17]

$$\langle 0| T\{\hat{\varphi}_H(x)\hat{\varphi}_H(x')\}|0\rangle \tag{4.62}$$

con

$$\langle\Omega| T\{\hat{\varphi}_H(x)\hat{\varphi}_H(x')\}|\Omega\rangle \tag{4.63}$$

Como se observa en las referencias [1],[17], para el caso general de N puntos,

$$\langle\Omega| T\left\{\hat{\varphi}_H(x_1)\cdots\hat{\varphi}_H(x_N)\right\}|\Omega\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0| T\left\{\hat{\varphi}_I(x_1)\cdots\hat{\varphi}_I(x_N)\exp\left[-i\int_{-T}^{T} dt\ \hat{H}^I_{int}(t)\right]\right\}|0\rangle}{\langle 0| T\left\{\exp\left[-i\int_{-T}^{T} dt\ \hat{H}^I_{int}(t)\right]\right\}|0\rangle} \tag{4.64}$$

El resultado anterior, tiene una gran importancia en el desarrollo de la Teoría Cuántica de Campos, ya que a partir de éste, se pueden deducir las propiedades más importantes de la teoría interactuante a partir de la teoría libre. Para el caso que interesa en esta tesis, esto es, la autoenergía del electrón, vamos se verá como a partir de la serie de Dyson y el resultado anterior, hay necesidad de redefinir tanto los propagadores del electrón y del fotón, debido a su auto-interacción.

Capítulo 12

Formalismo Cuántico de la Auto-Energía del Electrón

Con los trabajos iniciales de Dirac, sobre Radiación Electromagnética, y otros grandes físicos de la época[28], la teoría de la interacción entre el electrón y el campo electromagnético se hizo cada vez más completa. Con la llegada del nuevo formalismo de la teoría Cuántica de Campos, se resolvieron grandes problemas y paradojas que la mecánica cuántica no-relativista presentaba. En este capítulo se desarrollará la teoría de la Auto-Energía del Electrón desde el punto de vista de la teoría Cuántica de Campos, en la forma mas breve posible, y se analizarán sus mas claras implicaciones, para ser comparadas en el capítulo final con la teoría clásica.

Cuando se analiza la Serie de Dyson, se pueden encontrar varios Problemas[1, 17]:

1. Esta serie no converge, esto es, la expansión perturbativa sólo es válida para valores muy pequeños de la constante de acople del campo λ; además, siendo una serie asintótica, sólo se pueden obtener respuestas aproximadas a un número proprocional de términos al valor $\exp(-\frac{1}{\lambda})$[1].

2. Al hacer interactuar Campos, y describir estas interacciones por medio de la serie, existen efectos que no poseen interpretación física clara, además de expresiones divergentes, como son las *Divergencias Infrarrojas* y las *Divergencias Ultravioleta(*Energía infinita a distancias muy pequeñas*)*.

Conviene en este momento realizar la descomposición del operador de campo $\hat{\varphi}_I(x)$ en sus partes correspondientes a energías positivas y negativas[17]

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_I(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} e^{-ip\cdot x}\hat{a}_p + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} e^{ip\cdot x} a_p^\dagger \\ &\equiv \hat{\varphi}_I^+(x) + \hat{\varphi}_I^-(x)\end{aligned} \tag{4.65}$$

donde $\hat{\varphi}_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} e^{-ip\cdot x}\hat{a}_p$ y $\hat{\varphi}_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} e^{ip\cdot x} a_p^\dagger$. Por construcción $\hat{\varphi}_I^+(x)\,|0\rangle = 0$ y $\langle 0|\,\hat{\varphi}_I^-(x) = 0,\ \forall x$.

Para el caso de la propagación entre dos puntos del espacio-tiempo[1] [17],

$$T\left\{\hat{\varphi}_{I1}(x)\hat{\varphi}_{I2}(x)\right\} = \ :\hat{\varphi}_{I1}(x)\hat{\varphi}_{I2}(x): + \theta(x_1^0 - x_2^0)\left[\hat{\varphi}_{I1}^+(x), \hat{\varphi}_{I2}^-(x)\right] + \theta(x_2^0 - x_1^0)\left[\hat{\varphi}_{I2}^+(x), \hat{\varphi}_{I1}^-(x)\right] \tag{4.66}$$

donde se define en general el propagador de Feynman o *Contracción*, anteriormente visto para cada partícula como:

$$K_F(x_1 - x_2) = \underbrace{\hat{\varphi}_{I1}(x)\hat{\varphi}_{I2}(x)} = \theta(x_1^0 - x_2^0)\left[\hat{\varphi}_{I1}^+(x), \hat{\varphi}_{I2}^-(x)\right] + \theta(x_2^0 - x_1^0)\left[\hat{\varphi}_{I2}^+(x), \hat{\varphi}_{I1}^-(x)\right] \tag{4.67}$$

Se puede generalizar el resultado anterior, para una función de correlación de N puntos y se conoce como el *Teorema de Wick*. En este momento, no entraremos en detalle sobre este importante teorema, para más referencias ver[17].

Volviendo a la expresión (4.64), que describe el proceso de interacción entre distintos tipos de partículas, es conveniente en, analizar el caso más sencillo, esto es, la propagación de una partícula en el espacio-tiempo. Según se pudo determinar anteriormente, la descripción completa del fenómeno debería ser contenida en el propagador de la teoría libre, ya que como sólo se está analizando una partícula en el universo, no habría que agregar interacciones; pero, dada la estructura del resultado (4.64), el análisis, ya no parece tan sencillo.Analizando primero el numerador de esta expresión

$$N(x_1, x_2) = \langle 0|\, T\left\{\hat{\varphi}_{I1}(x_1)\hat{\varphi}_{I2}(x_2)\exp\left[-i\int_{-T}^{T} dt\ \hat{H}_{int}^I(t)\right]\right\}|0\rangle \tag{4.68}$$

Se puede observar que al orden más bajo de la expansión, esto es $O(\lambda^0)$, (donde λ es la constante de acople), la expresión se reduce al propagador libre de la partícula, como se esperaría, ya que no hay en este sentido auto-interacción, por lo tanto:

[1] La notación : : , se define como *Orden Normal*[1, 17], y consiste en escribir productos de operadores, en donde los operadores $\hat{a}_p$ están siempre a la derecha de los $\hat{a}_p^\dagger$. Esto se hace, para garantizar que el valor esperado en el vacío sea siempre cero.

$$N^{(0)}(x_1,x_2) = \langle 0| T\left\{\hat{\varphi}_I(x_1)\hat{\varphi}_I(x_2)\right\}|0\rangle = K_F(x_1-x_2) = \underbrace{\hat{\varphi}_{I1}(x)\hat{\varphi}_{I2}(x)} \quad (4.69)$$

A la expresión anterior se le puede asociar una representación diagramática conocida como *Diagrama de Feynman.* Fig 4.1, que permite describir los fenómenos en una forma esquemática y más intuitiva que la formal.

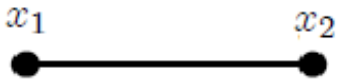

Fig.4.1.Propagador de Feynman de una Partícula Libre.

Para el orden $O(\lambda^1)$ de la constante de acople, aparecen vértices internos, siendo esto la primera inferencia directa de las auto-interacciones de las partículas, esto es, además de tener propagadores libres, existen otros términos denominados *Burbujas de Vacío* [1]que expresan la forma en que la teoría libre difiere de la teoría interactuante. Como en el caso anterior, el numerador quedaría

$$N^{(1)}(x_1,x_2) = \langle 0| T\left\{\hat{\varphi}_I(x_1)\hat{\varphi}_I(x_2)\left(-i\frac{\lambda}{4!}\right)\int d^4y\ \hat{\varphi}_I(y)^4\right\}|0\rangle \qquad (4.70)$$

Debido a que aparecen vértices internos, se debe adicionar a la teoría un diagrama que representa el punto de auto-interacción. Fig 4.2.

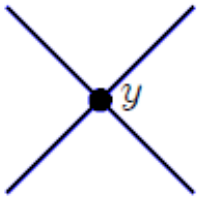

Fig. 4.2.Vértice Interno.

En el caso más general, esto es, en órdenes perturbativos mas altos, se puede resumir la teoría interactuante como una parte proporcianal a la suma de los diagramas conexos a todos los órdenes perturbativos, con vértices de auto-interacción internos, multiplicado por un término exponencial que contiene las burbujas de vacío.

Para el caso que interesa en esta tesis, esto es, la electrodinámica cuántica, para la teoría libre, se definieron ya la forma de los propagadores. De acuerdo a la relación (4.68), hace falta entonces, adicionar la forma en la que las partículas interactúan consigo mismas ¿Cómo se re-definen los parámetros físicos en términos de los parámetros intrínsecos de las partículas?.

En la teoría libre, los propagadores de Feynman para el electrón y el fotón están determinados por las expresiones (4.39) y (4.42) respectivamente, y pueden ser representados esquemáticamente por los diagramas de Feynman Fig 4.3 y Fig 4.4.

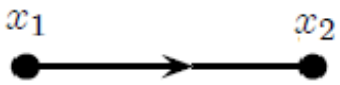

Fig. 4.3.Diagrama de Feynman del Electrón.

Fig. 4.4.Diagrama de Feynman del Fotón.

Cuando se analiza la teoría en órdenenes perturbativos más altos de la serie de Dyson, para la electrodinámica cuántica aparecen lazos cerrados sobre los diagramas de Feynman que adicionan a los propagadores una contribución infinita, siendo esto reflejo de la existencia de partículas virtuales que cumplen el principio de incertidumbre para el tiempo y la energía y que adicionan a las partículas una energía infinita[28].

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{4.71}$$

Por lo tanto, el propagador del fotón tendrian realmente las contribuciones en el espacio de momentos.Fig 4.5.

Fig. 4.5.Propagador del Fotón al Primer Orden Perturbativo.

$$iM'_F(q) = iM_F(q) + iM_F(q)\frac{i\Pi(q)}{4\pi}iM_F(q) \tag{4.72}$$

donde $\frac{i\Pi(q)}{4\pi}$ se denomina *Tensor de Polarización* y es el término responsable de la contribución infinita.

Para el electrón, el propagador se escribe[5]

$$iD'_F(q) = iD_F(q) + iD_F(q)\left(-i\Sigma(q)\right)iD_F(q) \tag{4.73}$$

y su respectivo diagrama de Feynman. Fig. 4.6.

Fig. 4.6. Propagador del Electrón al Primer Orden Perturbativo.

Parte V

Desarrollo Formal de la Auto-Energía Clásica del Electrón

Yo, por mi parte, a causa de la naturaleza de mi existencia, avanzaba, infaliblemente, en una única dirección. Fue en el aspecto moral, y en mí mismo, donde aprendí a conocer la total y primitiva dualidad humana; vi que había dos naturalezas que contendían en el campo de mi conciencia; sin faltar a la verdad, podía asegurarse que cualquiera de las dos era la mía propia, ya que, en realidad, aunque fuesen contradictorias, ambas eran mías .....

El Extraño Caso del DR. Jekill y MR. Hyde. Robert Louis Stevenson.

En esta parte del trabajo, se presentarán los cálculos originales(realizados por el estudiante), tendientes a demostrar que la solución avanzada del potencial de Liénard-Wiechert, cumple las mismas propiedades que la solución retardada. Estos cálculos fueron desarrollados en analogía a lo presentado en el libro [10] y el artículo [24], para la solución retardada.

Cuando se analizaba el formalismo clásico de la interacción del electrón con el campo electromagnético, sólo se tuvo en cuenta la solución *Retardada*, es decir, partiendo del potencial de Liénard-Wiechert

$$A^{\mu}(x) = e\frac{v^{\mu}}{\rho} \tag{5.1}$$

En este caso, únicamente se tomaba una de las raíces de la ecuación $D^2 = [x^{\mu} - z^{\mu}(s_{ret})][x_{\mu} - z_{\mu}(s_{ava})] = 0$, es decir $z^{\mu}(s_{ret})$; ya que, sólo este tipo de solución tenía interpretación física, esto es, el campo producido por un electrón que recorre una línea de universo $z(s)$, llega al punto x, en un tiempo posterior al ser producido. El otro tipo de solución, la solución *Avanzada,* donde se toma $z^{\mu}(s_{ava})$, no tiene interpretación física aparente, pues en este caso, el campo llega al punto x en un tiempo anterior a que la carga se haya situado en $z^{\mu}(s_{ava})$. Como consecuencia, hay campo antes de que exista la fuente que lo produce.

Comencemos ahora el análisis de la solución avanzada. Para esto, se define un nuevo vector análogo a (3.27) para la solución retardada [21].

$$D^{\mu} = z^{\mu}(s_{ava}) - x^{\mu} \tag{5.2}$$

Esta definición, se basa en el hecho, que para la solución avanzada x antecede a $z(s_{ava})$. Ahora, se deben definir algunas relaciones análogas a lo que se hace en [10] para la solución retardada. Introduciendo el vector tipo nulo

$$c^{\mu} = -v^{\mu} + u^{\mu} \tag{5.3}$$

donde v es un vector tipo tiempo correspondiente a la velocidad de la partícula, y u es un vector tipo espacio. Comparando (5.3) con la expresión (3.32), se puede ver que el vector cuadri-velocidad ha cambiado de signo; esto refleja el

hecho que según la escogencia de (5.2), se ha revertido el sentido de éste cuadrivector, pues en este caso, el campo precede a la fuente que lo produce. Fig.5.1.

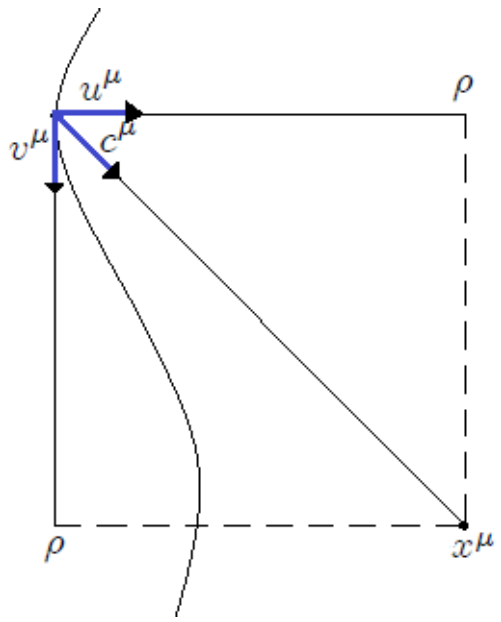

Fig.5.1.Representación Esquemática de la Distancia Avanzada Invariante $D^\mu = \rho\ c^\mu$.

De acuerdo a las propiedades del vector c, se cumplen las relaciones análogas a la solución retardada

$$c^2 = 0 \tag{5.4}$$

$$v^2 = -u^2 = 1 \tag{5.5}$$

$$u \cdot v = 0 \tag{5.6}$$

$$-\,c \cdot v = -c \cdot u = 1 \tag{5.7}$$

De la figura , se puede definir la *distancia avanzada invariante* ρ entre los puntos x^μ y $z^\mu(s_{ava})$ como

$$\rho = -D \cdot u = -D \cdot v \tag{5.8}$$

Es claro, que se puede expresar a D^μ en la forma:

$$D^\mu = \rho\ c^\mu \tag{5.9}$$

Con todo esto, se define el *Potencial Avanzado de Liénerd-Wiechert* como:

$$A^\mu(x) = (-e)\frac{v^\mu}{\rho} \tag{5.10}$$

donde la factorización $(-e)$ quedará clara más adelante.

Para la continuación del análisis, se deberá construir los componentes básicos del campo, cruciales en el análisis de las características principales de este tipo de solución. Se empezará construyendo el tensor de *Campo Electromagnético*(o *Tensor de Faraday*) según la relación

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{5.11}$$

Para hacer esto, se debe hallar $\partial^\mu A^\nu$, $\partial^\nu A^\mu$. Comenzando con la segunda expresión, se tiene

$$\partial^\nu A^\mu = \partial^\nu \left[(-e) \frac{v^\mu}{\rho} \right] \tag{5.12}$$

Aplicando la regla de Leibniz[11]

$$\partial^\nu A^\mu = (-e) \left[\frac{\rho\, \partial^\nu v^\mu - v^\mu \partial^\nu \rho}{\rho^2} \right] \tag{5.13}$$

y teniendo en cuenta las relaciones del apéndice[2], se llega a

$$\partial^\nu A^\mu = (-e) \left[\frac{c^\nu a^\mu}{\rho} - \frac{v^\nu (v^\mu - \lambda c^\mu)}{\rho^2} \right] \tag{5.14}$$

Ahora, intercambiando índices $\mu \leftrightarrow \nu$, se tiene

$$\partial^\mu A^\nu = (-e) \left[\frac{c^\mu a^\nu}{\rho} - \frac{v^\mu (v^\nu - \lambda c^\nu)}{\rho^2} \right] \tag{5.15}$$

Reemplazando (5.14) y (5.15) en (5.11) resulta

$$F^{\mu\nu} = (-e) \left[c^\mu \left(\frac{a^\nu}{\rho} + \frac{\lambda v^\nu}{\rho^2} \right) - c^\nu \left(\frac{a^\mu}{\rho} + \frac{\lambda v^\mu}{\rho^2} \right) \right] \tag{5.16}$$

Definiendo

$$U^\mu = (-e) \left(\frac{a^\mu}{\rho} + \frac{\lambda v^\mu}{\rho^2} \right) \tag{5.17}$$

se puede re-expresar (5.11) como:

$$F^{\mu\nu} = c^\mu U^\nu - c^\nu U^\mu \tag{5.18}$$

De la misma forma en la que se hace en [10], para el caso retardado, se puede realizar la transformación

$$U^\mu \longrightarrow U^\mu + \kappa c^\mu \tag{5.19}$$

[2] Para el anális posterior se hace necesario la demostración de ciertas identidades que estarán desarrolladas en el apéndice

donde se ha definido

$$\kappa = (-e)\frac{(a.u)}{\rho} \tag{5.20}$$

Debido a esto, el tensor de campo electromagnético puede ser expresado como

$$F^{\mu\nu} = (-e)\left[c^{\mu}\left(\frac{a^{\nu}}{\rho} + \frac{\lambda v^{\nu}}{\rho^2} + \frac{(a.u)c^{\nu}}{\rho}\right) - c^{\nu}\left(\frac{a^{\mu}}{\rho} + \frac{\lambda v^{\mu}}{\rho^2} + \frac{(a.u)c^{\mu}}{\rho}\right)\right] \tag{5.21}$$

Teniendo en cuenta las relaciones

$$\frac{(a.u)}{\rho} = \frac{(a.c)}{\rho} = \frac{(a.D)}{\rho^2} = \frac{\lambda + 1}{\rho} \tag{5.22}$$

y

$$(\overset{u}{\perp} a)^{\mu} = a^{\mu} + (a.u)u^{\mu} \tag{5.23}$$

la expresión (5.21) se escribe como:

$$F^{\mu\nu} = (-e)\left[c^{\mu}\left(\frac{a^{\nu}}{\rho} - \frac{v^{\nu}}{\rho^2} + \frac{(a.u)u^{\nu}}{\rho}\right) - c^{\nu}\left(\frac{a^{\mu}}{\rho} - \frac{v^{\mu}}{\rho^2} + \frac{(a.u)c^{\mu}}{\rho}\right)\right] \tag{5.24}$$

Por último, y por simplicidad, se define

$$V^{\mu} = v^{\mu} - \rho(\overset{u}{\perp} a)^{\mu} \tag{5.25}$$

Debido a esto, el tensor de Campo Electromagnético toma la forma final

$$F^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2}\left[c^{\mu}V^{\nu} - c^{\nu}V^{\mu}\right] \tag{5.26}$$

Es claro, que debido a la descomposición del vector $V^{\mu} = v^{\mu} - \rho(\overset{u}{\perp} a)^{\mu}$, en una parte proporcional a la velocidad, y otra dependiente de la aceleración, igualmente se tendrá una descomposición del tensor de Campo Electromagnético en dos partes, cada una de ellas con propiedades físicas totalmente definidas como $F^{\mu\nu} = F_{I}^{\mu\nu} + F_{II}^{\mu\nu}$, donde

$$F_{I}^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2}\left[c^{\mu}v^{\nu} - c^{\nu}v^{\mu}\right] \tag{5.27}$$

$$F_{II}^{\mu\nu} = -\frac{e}{\rho}\left[c^{\mu}(\overset{u}{\perp} a)^{\nu} - c^{\nu}(\overset{u}{\perp} a)^{\mu}\right] \tag{5.28}$$

Más adelante, se explicará el significado físico de cada término. Como se demuestra en el apéndice B, es posible construir los tensores de campo electromagnético $F_{I}^{\mu\nu}$ y $F_{II}^{\mu\nu}$ a partir de la descomposición del vector velocidad en el potencial de Liénard-Wiechert (5.10) según la relación $v^{\mu} = -c^{\mu} + u^{\mu}$, dados los potenciales

$$A_I^\mu(x) = (e)\frac{c^\mu}{\rho} \tag{5.29}$$

$$A_{II}^\mu(x) = (-e)\frac{u^\mu}{\rho} \tag{5.30}$$

utilizando la relación (5.11). Donde $F_I^{\mu\nu} \overset{\text{Pr}\,oviene\ de}{\longrightarrow} A_I^\mu$ y $F_{II}^{\mu\nu} \overset{\text{Pr}\,oviene\ de}{\longrightarrow} A_{II}^\mu$.

Después de haber encontrado los potenciales, y los respectivos campos producidos por éstos, es necesario(más que importante) ahora, comprobar que realmente este tipo de soluciones cumplen las ecuaciones de Maxwell[3].

Para encontrar el primer par de ecuaciones de Maxwell, se aplica la divergencia a las expresiones (5.27) y (5.28). Como se demuestra en el apéndice B, finalmente se llega a

$$\partial_\mu F_I^{\mu\nu} = \frac{2e(a.c)}{\rho^2}c^\nu \tag{5.31}$$

$$\partial_\mu F_{II}^{\mu\nu} = -\frac{2e(a.c)}{\rho^2}c^\nu \tag{5.32}$$

De los resultados (5.31) y (5.32), se puede ver claramente que

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F_I^{\mu\nu} + \partial_\mu F_{II}^{\mu\nu} = \frac{2e(a.c)}{\rho^2}c^\nu - \frac{2e(a.c)}{\rho^2}c^\nu = 0 \tag{5.33}$$

Es decir, fuera de la línea de universo que recorre la "Antipartícula"[4] no existen cargas que produzcan el campo electromagnético.

Para encontrar el segundo par de ecuaciones de Maxwell, se hace uso de la Identidad de Bianchi. Como también es demostrado en el apéndice B. Finalmente se llega a la relación

$$\partial^\lambda F_{I,II}^{\mu\nu} + \partial^\nu F_{I,II}^{\lambda\mu} + \partial^\mu F_{I,II}^{\nu\lambda} = 0 \tag{5.34}$$

Dado que la carga conservada relacionada con las simetría traslacional, esto es, el tensor Momento-Energía va a ser un elemento crucial del análisis, se construirá en este momento a partir de relación usual.

Partiendo de la expresión de Belifante, para la construcción del tensor simétrico de Momento-Energía(ver apéndice B) , representado en la expresión

[3] Dada la construcción hecha para los potenciales avanzados, este tipo de prueba, puede parecer algo trivial; pero, ya que lo que estamos haciendo ahora es analizar la solución avanzada que no tiene explicación física aparente, es "necesaria" esta comprobación.

[4] Aunque en este momento, el término "Antipartícula" no quede claro, las conclusiones a las que se llegará al final de la tesis, estarán a favor de la existencia de las mismas.

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F_{\alpha}{}^{\nu} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\ \eta^{\mu\nu}\right) \tag{5.35}$$

donde

$$F^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2}\left[c^{\mu}V^{\nu} - c^{\nu}V^{\mu}\right] \tag{5.36}$$

El tensor Momento se expresa por la relación:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(-c^{\mu}V^{\nu} - V^{\mu}c^{\nu} - V^2c^{\mu}c^{\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{5.37}$$

Dado que

$$\begin{aligned} V^2 &= V_{\alpha}V^{\alpha} = \left(v_{\alpha} - \rho(\overset{u}{\perp}a)_{\alpha}\right)\left(v^{\alpha} - \rho(\overset{u}{\perp}a)^{\alpha}\right) \\ &= 1 - \rho v_{\alpha}(\overset{u}{\perp}a)^{\alpha} - \rho(\overset{u}{\perp}a)_{\alpha}v^{\alpha} + \rho^2(\overset{u}{\perp}a)^2 \\ &= 1 + \rho^2(\overset{u}{\perp}a)^2 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Se induce naturalmente la descomposición del Tensor Momento-Energía en la forma

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta_{I}^{\mu\nu} + \Theta_{II}^{\mu\nu} \tag{5.39}$$

donde

$$\Theta_{I}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(-c^{\mu}V^{\nu} - V^{\mu}c^{\nu} - c^{\mu}c^{\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{5.40}$$

y

$$\Theta_{II}^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{4\pi\rho^2}(\overset{u}{\perp}a)^2c^{\mu}c^{\nu} \tag{5.41}$$

La interpretación realizada por Claudio Teiteilboim en 1970[24], basado en el trabajo anterior de Fritz Rohrilch (1964), fue que el tensor $\Theta_{II}^{\mu\nu}$, dada la dependencia explíctica con ρ^2, debía coresponder al Momento-Energía irradiado por la partícula, que se propaga en forma de ondas emitidas por la carga y viajan a la velocidad de la luz. Dado que los frentes de ondas son esféricos, y viajan a la velocidad de la luz[24], el sistema de referencia inercial no juega un papel privilegiado en la descripción del fenómeno, y además no existen efectos de interferencia entre los diferentes frentes de onda, pues la partícula al tener una velocidad finita menor que la de la luz, nunca podrá alcanzar un frente de onda emitido en un tiempo anterior.

El tensor $\Theta_{I}^{\mu\nu}$, fue interpretado como el Momento-Energía ligado a la partícula, es decir, se podría ver como si la partícula cargara con una nube rígida

electromagnética[24], y viajara con ella sobre la línea de universo. Como se demuestra en el apéndice B, el tensor $\Theta_I^{\mu\nu}$ puede ser descompuesto en la suma de otros dos tensores, debido a la dependencia de la distancia avanzada invariante ρ, como sigue:

$$\Theta_I^{\mu\nu} = \Theta_{I1}^{\mu\nu} + \Theta_{I2}^{\mu\nu} \tag{5.42}$$

donde

$$\Theta_{I1}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(-c^\mu v^\nu - v^\mu c^\nu - c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{5.43}$$

y

$$\Theta_{I2}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^3}\left[c^\mu(\overset{u}{\perp}a)^\nu + c^\nu(\overset{u}{\perp}a)^\mu\right] \tag{5.44}$$

Como se demuestra(ver apéndice B), el tensor de Momento-Energía $\Theta_{I1}^{\mu\nu}$, puede ser construído explícitamente sólo a partir del tensor de campo electromagnético $F_I^{\mu\nu}$, mientras que $\Theta_{I2}^{\mu\nu}$, se construye a partir de la composición de los tensores de campo $F_I^{\mu\nu}$ y $F_{II}^{\mu\nu}$, resultado que refleja el hecho, que éste tensor de Momento-Energía se puede interpretar como la interferencia entre los campos. Finalmente es bueno hacer notar que el tensor $\Theta_{II}^{\mu\nu}$ se construye sólo a partir del tensor de campo $F_{II}^{\mu\nu}$, que a su vez fue construído del cuadrivector tipo nulo c^μ, debido a esto, el momento energía que es representado por éste escapa hacia el infinito a la velocidad de la luz.

Partiendo la construcción de la acción de una partícula interactuando con el campo electromagnético:

$$S = -m_0\int d\tau\sqrt{\dot{z}\cdot\dot{z}} - \int d^4x\left(A_\mu j^\mu + \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \tag{5.45}$$

se observa que debido a que la partícula(antipartícula) se tomaba como una caga puntual, las variables dinámicas que representaban su estructura se hacían infinitas sobre la línea de universo, por lo tanto, y dada la simplicidad del análisis que se ha venido trabajando, el tensor de campo electromagnético puede ofrecer toda la información necesaria acerca de la estructura del problema. Después de haber realizado un análisis exhaustivo para el Campo electromagnético, sólo falta comprobar la divergencia del tensor Momento Energía fuera de la línea de universo, y la divergencia del tensor Momento Angular.

Encontrando la divergencia del tensor momento energía (ver apéndice B), se puede demostrar que:

$$\partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = \partial_\mu\left(\Theta_I^{\mu\nu} + \Theta_{II}^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{5.46}$$

Esto implica una de las principales características representadas por el campo electromagnético, el "Momento-Energía de la partícula se conserva fuera de la

línea de universo". También, como es comprobado en el apéndice, se encuentran dos relaciones de gran importancia

$$\partial_\mu \Theta_I^{\mu\nu} = 0 \tag{5.47}$$

y

$$\partial_\mu \Theta_{II}^{\mu\nu} = 0 \tag{5.48}$$

De (5.47) y (5.48), se puede observar que los tensores $\Theta_I^{\mu\nu}$ y $\Theta_{II}^{\mu\nu}$ son dinámicamnte independientes, pues ambos se conservan fuera de la línea de universo sin necesidad que haya transferencia de energía entre ellos, es decir, la conversión de energía y momento del tipo I en el tipo II está prohibida en todo el espacio[24]. Para $\Theta_I^{\mu\nu}$ ocurre un fenómeno particular. Dada la relación (5.47), se puede observar(ver apéndice B), que dado que este tensor pudo ser construído a partir de $\Theta_{I1}^{\mu\nu}$ y $\Theta_{I2}^{\mu\nu}$ en la forma $\Theta_I^{\mu\nu} = \Theta_{I1}^{\mu\nu} + \Theta_{I2}^{\mu\nu}$, al calcular la divergencia, se llega a que

$$\partial_\mu \Theta_{I1}^{\mu\nu} = -\partial_\mu \Theta_{I2}^{\mu\nu} = \left(\frac{e^2}{2\pi}\right) \frac{(a \cdot c)}{\rho^4} c^\nu \tag{5.49}$$

Es decir, hay transferencia de momento energía entre el Momento-Energía ligado a la partícula y el campo de interferencia. Más adelante, cuando se haga el análsis final, se hará un gran uso de las relaciones de conservación para la solución Avanzada.

Finalmente, es necesario comprobar una de las últimas características que debe cumplir el tipo de solución Avanzada, esto es, la conservación del Momentum Angular. Como ya se ha mostrado, una de las propiedades más importantes de los sistemas dinámicos es la transformación de energía; para este caso de los campos interactuando con las partículas, la transferencia de energía entre los dos sistemas. Aunque aún no se ha llegado a una conclusión que especifíque el hecho crucial de esta observación, en este momento, se analizará otro tipo de simetría que debe poseer la teoría, esto es, la invarianza rotacional.

En otro excelente artículo publicado en 1975 por Carlos López y Danilo Villarroel[29], y otro posterior[30], se estableció que, debido a la descomposición covariante realizada en el tensor momento energía en una parte $\Theta_I^{\mu\nu}$ ligada a la partícula, y otra parte $\Theta_{II}^{\mu\nu}$, irradiada; el tensor Momento Angular podía cumplir relaciones análogas a las descritas para el tensor momento energía. Esto se podría esperar naturalmente, ya que el tensor Momento Angular es construído a partir del tensor Momento Energía; pero lo que se encontró, fue que para que se cumplieran las propiedades de Momento Angular ligado a la partícula e irradiado debía ser en la forma[10][5].

[5] En este punto no se ahondará en la forma de este tipo de descomposición, ya que las referencias son excelentes, en cambio, y para un propósito meno riguroso, sólo se comprobarán sus propiedades.

$$M^{\lambda\mu\nu} = M_I^{\lambda\mu\nu} + M_{II}^{\lambda\mu\nu} \tag{5.50}$$

donde

$$M_I^{\lambda\mu\nu} = z^\lambda \Theta_I^{\mu\nu} - z^\mu \Theta_I^{\lambda\nu} - D^\lambda \Theta_{I1}^{\mu\nu} + D^\mu \Theta_{I1}^{\lambda\nu} \tag{5.51}$$

y

$$M_{II}^{\lambda\mu\nu} = z^\lambda \Theta_{II}^{\mu\nu} - z^\mu \Theta_{II}^{\lambda\nu} - D^\lambda \Theta_{I2}^{\mu\nu} + D^\mu \Theta_{I2}^{\lambda\nu} \tag{5.52}$$

En analogía con el desarrollo realizado para el tensor Momento-Energía, finalmente se comprueba que(ver apéndice B)

$$\partial_\nu M^{\lambda\mu\nu} = \partial_\nu \left(M_I^{\lambda\mu\nu} + M_{II}^{\lambda\mu\nu} \right) = 0 \tag{5.53}$$

además de las relaciones

$$\partial_\nu M_I^{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{5.54}$$

y

$$\partial_\nu M_{II}^{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{5.55}$$

resultados que demuestran la invarianza rotacional en el espacio-tiempo.

Habiendo descrito las características principales de la solución Avanzada del potencial de Liénard-Wiechert, análogas a la solución Retardada, hace falta lo más importante, darle una interpretación física. Como se puede ver en [23][20][24], el tipo de solución avanzada, no tenía interpretación física, ya que este tipo de solución supondría la existencia del campo electromagnético antes de que la fuente lo hubiese producido. Todo esto, obviamente entra en contradicción con lo conocido en la física clásica, para la cual existe un flecha del tiempo(caracterizando la evolución temporal del sistema) fluyendo en una sola dirección. Feynman[31], con el gran genio que lo caracterizó, dió una posible solución a la paradoja de las antipartículas[6], proponiendo que éstas, tenían las mismas propiedades intrínsecas de las partículas, pero con la carga opuesta, y fluyendo en la dirección temporal contraria a la que lo harían las partículas. Veámoslo desde la perspectiva de la mecánica cuántica.

De acuerdo a la amplitud de propagación (D.18), cuando $\sqrt{-(x\prime - x)^2} << \frac{1}{m} \longrightarrow \frac{m}{(2\pi)^2\sqrt{-(x\prime-x)^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2m\sqrt{-(x\prime-x)^2}}}e^{(-m\sqrt{-(x\prime-x)^2})}$ se pude notar que hay propagación aún fuera del cono de luz, lo que se podría suponer como una violación a las leyes de la naturaleza, pero como se vio al cuantizar el Campo de

[6] Es importante, hacer notar que el dilema de las Antipartículas tuvo su origen a partir de la conjunción de la Mecánica Cuántica con la relatividad especial, esto es la Teoría Cuántica de Campos. Clasicamente, pareciera que este tipo de "ente" físico estuviera prohibido, pero como veremos adelante, las conclusiones a las que llegaremos al final de la tesis hrán ver lo contrario.

Dirac, al ser la carga un observable, deberá estar representada por un operador hermítico $\hat{Q}$ en el espacio de Hilbert y si además, se desea que se conserve, se debe cumplir

$$\left[\hat{Q}, \hat{H}\right] = 0 \tag{5.56}$$

Por lo tanto, el campo debe estar descrito tanto *"Partículas"* que posean carga q etiquetadas con el índice n, como *"Antipartículas"* etiquetadas con el índice $\bar{n}$ que posean carga $-q$. En conclusión, y como se había supuesto en la construcción del Campo de Dirac, y en general para cualquier Campo Complejo (Cargado), con simetría interna $U(1)$ [7], la condición de Microcausalidad implica que

$$\left[\hat{\varphi}_n(x'), \hat{\varphi}^\dagger_{\bar{n}}(x)\right] = \left[\hat{\varphi}_n(x'), \hat{\varphi}^\dagger_n(x)\right] - \left[\hat{\varphi}_{\bar{n}}(x), \hat{\varphi}^\dagger_{\bar{n}}(x')\right] = 0 \tag{5.57}$$

donde

$$\left[\hat{\varphi}_n(x'), \hat{\varphi}^\dagger_n(x)\right] = \langle 0| \hat{\varphi}_n(x')\hat{\varphi}^\dagger_n(x) |0\rangle = \langle x'n \, |xn\rangle \tag{5.58}$$

y

$$\left[\hat{\varphi}_{\bar{n}}(x), \hat{\varphi}^\dagger_{\bar{n}}(x')\right] = \langle 0| \hat{\varphi}_{\bar{n}}(x)\hat{\varphi}^\dagger_{\bar{n}}(x') |0\rangle = \langle x\bar{n} \, |x'\bar{n}\rangle \tag{5.59}$$

es decir, la amplitud de propagación fuera del cono de luz de la partícula que viaja de x' a x, es cancelada por la amplitud de propagación de una antipartícula que viaja fuera del cono de luz de x a x', conservándose así, la causalidad que parecía violarse en (D.18).

Es importante, hacer notar en este momento, que dada la flecha de propagación en el tiempo de la partícula del punto x' al punto x en un marco de referencia O, es consistente con la interpretación en un marco de referencia O' que la partícula se desplaza hacia atrás en el tiempo del punto x al punto x'[31].

Desde el formalismo clásico, la idea de las "Antipartículas" tiene un significado aún oscuro, ya que debido a las leyes causales clásicas, no puede haber procesos de creación o aniquilación de partículas que violen las leyes fundamentales de la física. Como ha sido trabajado en [32], la idea de las antipartículas clásicas aparecen de forma necesaria, debido a la invarianza del intervalo espacio-temporal

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{5.60}$$

puesto que, al ser esta expresión la norma de un cuadri-vector al cuadrado, se puede escoger el origen de coordenadas exactamente en la partícula , y hallar el intervalo temporal en la forma

$$ds = \pm dt \tag{5.61}$$

[7] En este trabajo, sólo tuvimos en cuenta el grupo $U(1)$ como simetría interna, pero se puede hacer la generalización a simetría internas no Abelianas, como es el caso de la Cromodinámica Cuántica[weinberg 2].

De la relación anterior, se puede deducir que existen dos soluciones al mismo problema, y como ha sido perfectamente explicado en [32], la solución $ds = -dt$, ha sido identificada con las Antipartículas Clásicas, donde utilizando las reglas de transformación de los estados ante los elementos del subconjunto discreto del grupo de Poincaré $\mathbf{P}$ y $\mathbf{T}$, se llega a la conclusión que las antipartículas deben tener las mismas propiedades de las partículas (masa y valor absoluto de la carga), pero con el signo contrario en la carga eléctrica; además de estar en completo acuerdo con la interpretación de Feynman para las antipartículas. Para no hacer muy exstensa la discusión, se hace referencia al artículo original[32].

En esta tesis, ha sido demostrado que la solución avanzada del Potencial de Liénerd-Wiechert, cumplía con todas las propiedades correspondientes a una Partícula Clásica, pero con la carga opuesta, es decir, en líneas generales, concuerda con la definición de las Antipartículas Clásicas. Lo que sigue por ser demostrado desde un punto de vista diferente (aunque similar en escencia) a[32], es que la introducción de las antipartículas clásicas se hace necesaria para la conservación de una simetría espacio-temporal(tensor Momento-Energía), similarmente a como las antipartículas cuánticas son necesarias para la conservación de las amplitudes de propagación de estados. Comencemos con un ejemplo sencillo que pueda mostrar más fácilmente el punto al que se quiere llegar.

Cuando se analiza uno de los sitema físicos más básicos como el Oscilador Armónico, se puede comprobar que partiendo de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{5.62}$$

que describe la dinámica del sistema, se puede encontrar la solución en la forma[42]

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\ sen(\omega t) \tag{5.63}$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, y A, B, son constantes que se pueden hallar de las condiciones iniciales.

$$A = x(0) \quad \text{y} \quad B = \frac{v(0)}{\omega} \tag{5.64}$$

Es posible llevar esta ecuación a una de la forma [10][42]

$$x(t) = D\cos(\omega t - \varphi) \tag{5.65}$$

donde $D = \sqrt{[x(0)]^2 + \left(\frac{v(0)}{\omega}\right)^2}$ y $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$. A partir de la ecuación (5.65), se puede hallar la energía del sistema, y dado que las amplitudes son independientes del tiempo, la energía se conserva, es decir

$$\frac{d}{dt}E = 0 \tag{5.66}$$

Cuando se introducen interacciones(fricción), la ecuación de movimento del sistema amortiguado es de la forma,

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{5.67}$$

donde ahora, el término adicional resulta de la introducción de un potencial dependiente de la velocidad. Es sencillo verificar que la solución a esta ecuación diferencial es[10]

$$x(t) = Ce^{\frac{-\beta t}{2}} sen\ (\Omega t + \phi_0) \tag{5.68}$$

donde,

$$\Omega^2 = \omega^2 - \frac{\beta^2}{4} \tag{5.68}$$

A diferencia del oscilador armónico libre, el oscilador armónico amortiguado posee una amplitud que varía con el tiempo de acuerdo a la relación $A = Ce^{\frac{-\beta t}{2}}$. Debido a esto, es posible demostrar que la energía del sistema no se conserva a causa del término de disipación, y como consecuencia[42]

$$\frac{d}{dt}E \neq 0 \tag{5.69}$$

Lo anterior implica que el sistema es *Irreversible*[10], esto es, la ecuación de movimiento, solución a (5.67), no es invariante ante la transformación de reversión en el tiempo $t \longrightarrow -t$.

Existe una forma de convertir este sistema amortiguado no conservativo, en uno conservativo. La primera forma, sería realizar un cambio de coordenadas

$$X(t) = e^{\frac{\beta t}{2}} x(t) \tag{5.70}$$

correspondiente a un cambio en la acción de

$$S = \int dt\ \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) e^{\beta t} \tag{5.71}$$

a

$$S = \int dt\ \left(\frac{1}{2}\dot{X}^2 - \frac{1}{2}\Omega^2 X^2 - \frac{\beta}{4}\frac{d}{dt}X^2\right) \tag{5.72}$$

La segunda forma, consiste en representar al sistema con el doble de grados de libertad a lo que se hacía con el oscilador amortigüado[33][34],esto es, adicionando una "imagen especular" del oscilador amortigüado La nueva acción sería de la forma[10][33][34]

$$S = \int dt\ \left[\dot{x}^*\dot{x} + \frac{\beta}{2}\left(\dot{x}^* x - x^*\dot{x}\right) - \omega^2 x^* x\right] \tag{5.73}$$

El lagrangiano $L = \dot{x}^*\dot{x} + \frac{\beta}{2}\left(\dot{x}^*x - x^*\dot{x}\right) - \omega^2 x^* x$, es conocido como el *Lagrangiano de Bateman(-Morse-Feshbach)*[34][35][36]

Es sencillo demostrar que las ecuaciones de movimiento, y las respectivas soluciones para los dos sistemas son(ver apéndice C)

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{5.74}$$

$$x(t) = Ce^{\frac{-\beta t}{2}} sen\ (\Omega t + \phi_0) \tag{5.75}$$

y

$$\ddot{x}^* - \beta\dot{x}^* + \omega^2 x^* = 0 \tag{5.76}$$

$$x^*(t) = C^* e^{\frac{\beta t}{2}} sen\ (\Omega t + \phi_0) \tag{5.77}$$

De acuerdo a lo anterior, se puede demostrar fácilmente que la energía del sistema se conserva. También se hubiese podido llegar a la conservación de la energía a partir de la definición del hamiltoniano del sistema $H = p\dot{x} + p^*\dot{x}^* - L$, donde $p = \dot{x}^* - \beta\frac{x^*}{2}$ y $p^* = \dot{x} - \beta\frac{x}{2}$ (ver apéndice C). El resultado anterior, tiene grandes implicaciones físicas, ya que la energía perdida por el sistema disipativo representado por el oscilador armónico amortigüado con constante de amortigüamiento β es contrarrestada por la acción de otro sistema(imagen especular)con constante de amortigüamiento $-\beta$ que absorbe esta energía; de este modo, los dos sistemas se convierten en uno solo, donde la evolución dinámica del mismo esta caracterizada por la interacción entre los mismos a tarvés de otro sistema que permite el intercambio de energía .

En la siguiente sección, se mostrará un comportamiento similar al descrito anteriormente, donde se puede establecer la analogía entre las partículas representadas por A^{μ}_{ret} y las variables $x(t)$ del sistema, y entre A^{μ}_{ava} con $x^*(t)$, además de postular la necesidad de las antipartículas clásicas.

Capítulo 13

Análisis Final. Demostración de la Necesidad de las "Antipartículas" Clásicas

En esta parte final de la tesis, se demostrará la necesidad de las antipartículas clásicas utilizando un enfoque sistemático. Primero se descompondrá el potencial retardado de Liénard-Wiechert en términos de la superposición de potenciales avanzados y retardados, para luego encontrar su incidencia física. Luego, a partir del proceso de deducción de la ecuación de Dirac-Lorentz y la comparación de las relaciones demostradas para la solución retardada y avanzada, se llegará a la conclusión de las antipartículas.

Cuando Dirac en 1938, desarrolló formalmente la teoría clásica de la interacción de los electrones con el campo electromagnético[20], dando como resultado la famosa ecuación de Dirac-Lorentz[21]

$$ma^{\mu} = F^{\mu}_{ext} + \frac{2}{3}e^2 \left(\delta^{\mu}{}_{\nu} + v^{\mu}v_{\nu}\right)\dot{a}^{\nu} \tag{5.78}$$

En el centro de su desarrollo se encontraba un paso crucial, el cual era la descomposición del potencial de Liénard-Wiechert en términos de la superposición de soluciones avanzadas y retardadas en la forma[20][21][41]:

$$A^{\mu}_{ret} = \frac{1}{2}\left(A^{\mu}_{ret} - A^{\mu}_{ava}\right) + \frac{1}{2}\left(A^{\mu}_{ret} + A^{\mu}_{ava}\right) \tag{5.79}$$

Debido al problema de la interpretación de la solución avanzada de los potenciales de Liénard-Wiechert, Dirac sólo hizo uso de ellos en ciertos pasos de la derivación de la ecuación de movimiento de una partícula sujeta a su autointeracción; en el resto del proceso utilizó únicamente la solución retardada.

Como va a ser comprobado en lo que sigue, a pesar de que esta descomposición pueda no parecer relevante desde el punto de vista formal del desarrollo de la teoría, dado que se está introduciendo al sistema nuevas variables no adicionadas cuando sólo se tenía en cuenta una de las soluciones, se mostrará que en realidad la descomposición (5.79), es el único tipo de posibilidad que se debe tener en cuenta; ya que además de que captura intrínsecamente el fenómeno de interacción del campo electromagnético con los electrones, revela nuevamente el hecho ya mostrado en el capítulo de QED acerca de la ley de conservación de la carga eléctrica, esto es, la introducción de antipartículas en la teoría, además del restablecimiento de la simetría discreta de inversión temporal

Definiendo dos nuevos potenciales[10][23]

$$A^{\mu}_{(-)} = \frac{1}{2}\left(A^{\mu}_{ret} - A^{\mu}_{ava}\right) \tag{5.80}$$

$$A^{\mu}_{(+)} = \frac{1}{2}\left(A^{\mu}_{ret} + A^{\mu}_{ava}\right) \tag{5.81}$$

y teniendo en cuenta que

$$A^{\mu}_{ava} = (-e)\,\frac{v^{\mu}}{\rho_{ava}} \tag{5.82}$$

$$D^{\mu}_{ava} = z^{\mu}(s_{ava}) - x^{\mu} \tag{5.83}$$

además de

$$\rho_{ava} = -D \cdot v \tag{5.84}$$

se puede analizar como se comportan los potenciales en un entorno infinitesimalmente pequeño uno de otro. Definiendo

$$\Delta s = s_{ava} - s_{ret} \tag{5.85}$$

y teniendo en cuenta las relaciones para las expansiones en series de Taylor de las variables físicas en términos del parámetro s_{ret}, se puede llegar a que la distancia avanzada invariante puede ser expresada como[21]

$$\rho_{ava} = -\rho + \frac{2}{3}\left(a^2 + (\dot{a}\cdot c)\right)\rho^3 + O(\rho^4) \tag{5.86}$$

Debido a la expresión (5.86), el potencial avanzado queda

$$A^{\mu}_{ava} = e\frac{v^{\mu}}{\rho} + 2ea^{\mu} + 2e\left[\dot{a}^{\mu} - (a\cdot c)a^{\mu} - \frac{1}{3}\left(a^2 + (\dot{a}\cdot c)\right)v^{\mu}\right]\rho + O(\rho^2) \tag{5.87}$$

donde todas las cantidades a la derecha son evaluadas en el tiempo retardado s_{ret}.

El resultado anterior es de gran importancia, ya que además de permitir la expresión del potencial avanzado en términos del potencial retardado, es crucial en la interpretación física de los potenciales $(A^{\mu}_{ret} - A^{\mu}_{ava})$ y $(A^{\mu}_{ret} + A^{\mu}_{ava})$ como se verá a continuación.

Ya que el potencial de Liénard-Wiechert se hace infinito sobre la línea de universo de la partícula cuando se hace tender la distancia retardada invariante $\rho \longrightarrow 0$, los problemas físicos de la teoría se hacen aparentes. Esto debido a la forma de la cuadricorriente producida por la carga puntual. Haciendo la descomposición

$$A^{\mu}_{ret} = \frac{1}{2}\left(A^{\mu}_{ret} - A^{\mu}_{ava}\right) + \frac{1}{2}\left(A^{\mu}_{ret} + A^{\mu}_{ava}\right) \tag{5.88}$$

y reemplazando (5.87), en la expresión anterior, se puede ver que

1) La parte $(A^{\mu}_{ret} - A^{\mu}_{ava})$, es libre de divergencias, y por lo tanto de infinitos. [21]

$$\begin{aligned} A^{\mu}_{(-)} &= \frac{1}{2}\left(A^{\mu}_{ret} - A^{\mu}_{ava}\right) \qquad (5.89) \\ &= \frac{1}{2}\left\{e\frac{v^{\mu}}{\rho} - \left[e\frac{v^{\mu}}{\rho} + 2ea^{\mu} + 2e\left[\dot{a}^{\mu} - (a\cdot c)a^{\mu} - \frac{1}{3}\left(a^2 + (\dot{a}\cdot c)\right)v^{\mu}\right]\rho + O(\rho^2)\right]\right\} \\ &= -\left\{2ea^{\mu} + 2e\left[\dot{a}^{\mu} - (a\cdot c)a^{\mu} - \frac{1}{3}\left(a^2 + (\dot{a}\cdot c)\right)v^{\mu}\right]\rho + O(\rho^2)\right\} \end{aligned}$$

Aplicando la relación usual $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$, para la construcción del tensor de Faraday a partir del potencial electromagnético $A^{\mu}_{(-)}$, se puede demostrar que[10]

$$F^{\mu\nu}_{(-)} = \frac{2}{3}e\left(\dot{a}^{\mu}v^{\nu} - \dot{a}^{\nu}v^{\mu}\right) \tag{5.90}$$

Ahora, aplicando la definición de la fuerza de Lorentz

$$ev_{\nu}F^{\mu\nu}_{(-)} = \frac{2}{3}e^2\left(\dot{a}^{\mu} + a^2v^{\mu}\right) \tag{5.91}$$

se llega finalmente a la conclusión, que el tensor $F^{\mu\nu}_{(-)}$ construído a partir del potencial $A^{\mu}_{(-)}$, es el responsable de la llamada "*Radiation Reaction*", o *Reacción a la Radiación* que sufre la partícula debida a su propio campo electromagnético. Debido a que $A^{\mu}_{(-)}$ es libre de infinitos, a éste tipo de potencial se le denomina *Potencial Regular*. Al término definido como

$$\Gamma^{\mu} = \frac{2}{3}e^2\left(\dot{a}^{\mu} + a^2v^{\mu}\right) \tag{5.92}$$

se le conoce como *el Término de Abraham*, que equivale a la generalización covariante relativista del *Término de Schott*[3][1].

2) La interpretación física de la otra parte del potencial, es decir, $(A^{\mu}_{ret} + A^{\mu}_{ava})$, es la que conlleva a la contradicción intuitiva de lo que se podría pensar como "Partícula Clásica", ya que presenta varias dificultades; la más importante de ellas es la contribución infinita a la masa del electrón. Similarmente a lo que se hizo con la parte regular del potencial de Lienard-Wiechert, se puede observar que

$$\begin{aligned} A^{\mu}_{(+)} &= \frac{1}{2}\left(A^{\mu}_{ret} + A^{\mu}_{ava}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{e\frac{v^{\mu}}{\rho} + \left[e\frac{v^{\mu}}{\rho} + 2ea^{\mu} + 2e\left[\dot{a}^{\mu} - (a\cdot c)a^{\mu} - \frac{1}{3}\left(a^2 + (\dot{a}\cdot c)\right)v^{\mu}\right]\rho + O(\rho^2)\right]\right\} \end{aligned} \tag{5.93}$$

Analizando (5.93) se puede observar la dependencia explícita del potencial $A^{\mu}_{(+)}$ de ρ; debido a esto, cuando se hace tender la distancia retardada invariante a cero, el potencial se hace infinito. Por lo tanto a $A^{\mu}_{(+)}$ se le denomina *Potencial Singular*.

De la misma forma a como se demuestra en [10], el tensor de Faraday singular puede ser derivado del potencial vectorial $A^{\mu}_{(+)}$,

$$F^{\mu\nu}_{(+)}(z) = \frac{e}{2\epsilon}\left(v^{\mu}a^{\nu} - v^{\nu}a^{\mu}\right) \tag{5.94}$$

pero a diferencia del potencial regular $A^{\mu}_{(-)}$, éste posee un término divergente $\frac{1}{2\epsilon}$. Aplicando la definición de fuerza de Minkowski[10][21]

$$ev_{\nu}F^{\mu\nu}_{(+)} = -\frac{e^2}{2\epsilon}a^{\mu} \tag{5.95}$$

En resumen, el potencial $A^{\mu}_{(-)}$ es el único responsable de la reacción a la radiación, o sea, la fuerza que sufre la partícula debida a su propio campo, y $A^{\mu}_{(+)}$ es el causante de que la partícula posea energía infinita siendo necesario el proceso de renormalización de la masa para la auto-consistencia de la teoría. Se puede verificar que esta forma de descomponer el potencial que produce el campo electromagnético en una parte proporcional a $(A^{\mu}_{ret} - A^{\mu}_{ava})$, y otra proporcional a $(A^{\mu}_{ret} + A^{\mu}_{ava})$ trae muchas ventajas desde el punto de vista físico, ya que las mismas conclusiones no hubiesen podido deducirse a partir de la otra descomposición $A^{\mu}_{ret} = A^{\mu}_{I} + A^{\mu}_{II} = \frac{e}{\rho}c^{\mu} - \frac{e}{\rho}u^{\mu}$, debido a la forma en la que los campos producidos por estos dos potenciales interactúan.

Después de haber mostrado las características básicas que llevaron al tipo de descomposición realizado inicialmente por Dirac en el desarrollo de la teoría

[1] A pesar de que no hay todavía un consenso general sobre la interpretación física de este término, debido al término $\frac{2}{3}e^2\dot{a}^{\mu}$, en este trabajo, nos apegaremos a lo descrito anteriormente.

que explica la interacción del electrón con su propio campo electromegnético, y culminado con la famosa ecuación de Abraham-Dirac-Lorentz, se hace necesario explicar las implicaciones físicas más directas de la necesidad de los potenciales avanzados.

Como anteriormente fue descrito, al tener una teoría invariante ante traslaciones espacio-temporales, y en general, si se quiere se más estricto ante transformaciones de Lorentz ortócronas propias, se puede construir un tensor simétrico denominado Tensor Momento-Energía, que corresponde a la carga conservada correspondiente a la simetría ya mencionada. Este tensor tiene mucha información valiosa acerca de como el sistema conjunto de partícula y campo se transfieren energía uno al otro, siendo evidente este hecho en la forma explícita de la fuerza de Lorentz que actúa sobre la partícula. Como pudo ser comprobado, para la solución retardada y avanzada por aparte, este tensor se conserva en el espacio-tiempo fuera de la línea de universo que recorre la carga, resultado fascinante si tenemos en cuenta la forma de la escogencia de la corriente como distribución espacio-temporal proporcional al delta de Dirac. Ahora, la implicación directa de este resultado, parecería contradecir la idea de un sistema que irradia energía, ya que si se hace depender la energía de un parámetro intrínseco a la partícula como el tiempo propio, que codifica la evolución temporal, es necesario que la energía no se conserve. Este hecho se manifiesta al realizar la descomposición del tensor momento energía ya sea de la partícula o la "antipartícula" en $\theta^{\mu\nu} = \theta_I^{\mu\nu} + \theta_{II}^{\mu\nu}$. Dadas las propiedades que cumple $\theta_{II}^{\mu\nu}$; de ser el tensor de Momento-Energía que irradia la partícula en forma de ondas esféricas que viajan a la velocidad de la luz[24], y debido a la relación (3.62) o (5.47) y (5.48), que indica el hecho que los tensores de Momento-Energía son dinámicamente independientes, no habría razón alguna para que se cumpliera la propiedad (5.46), ya que si la partícula está perdiendo energía cuando la irradia en forma de ondas que se desplazan a la velocidad de la luz, éste tipo de energía nunca se puede recuperar pues se pierde en el infinito, además de tampoco provenir del tensor de Momento-Energía $\theta_I^{\mu\nu}$, puesto la transferencia de energía entre ambos está prohibida fuera de la línea de universo. La posible solución a este dilema prodría provenir del ejemplo del oscilador armónico amortiguado. Si un sistema irradia energía(pierde energía), es necesario para que el sistema se convierta en conservativo, que se le adicione otro sistema que reciba la energía que el primero pierde, y viceversa; por lo tanto el sistema completo estaría compuesto de un oscilador y su imagen especular. En este sentido, si existe una partícula cargada que pierde energía en forma de radiación, "debería" existir una "antipartícula", que recibiera ésta energía y permitiera que realmente se cumpla $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$, es decir la energía total se conserve. Además, como puede ser comprobado para el sistema doble de oscliadores armónicos amortiguados (oscilador e imagen especular), sólo es posible recuperar la simetría de reversión temporal si se adiciona la imagen especular al sistema, pués al sólo tener uno de los dos osciladores, habría una flecha preferencial en el tiempo que indica la evolución dinámica del sistema. Para el sistema Partícula "Antipartícula " existe un proceso similar; sólo es posible restablecer la invarianza ante la trans-

formación discreta de inversión temporal si se introduce en el modelo la idea de "Antipartícula.

Desde otro punto de vista, y a partir de las relaciones que permiten deteminar las ecuaciones de Dirac-Lorentz para la partícula y la "antipartícula", se puede obsevar que, partiendo de las definiciones realizadas en [32], una partícula en movimiento de antipartícula(hacia atrás en el tiempo), es lo mismo que una partícula en movimiento de partícula, pero con carga opuesta y al aplicar el operador conjugación de carga [32], la definición del momento canónico para la partícula toma la forma:

$$\mathcal{C} : p^{\mu} \longrightarrow -p^{\mu} \tag{5.96}$$

es decir, la antipartícula tiene momento y energía negativo con respecto a la partícula. Partiendo de este supuesto, si se aplican las definiciones realizadas en [25], para encontrar la ecuación de Dirac-Lorentz y las fuentes que producen el tensor de Momento-Energía, se observa que fuera de la línea de universo para la partícula se cumpla

$$\frac{d}{d\tau}P_{II} = -\frac{2}{3}e^2a^2(s)v^{\mu}(s) \tag{5.97}$$

y

$$\frac{d}{d\tau}P_{I} = \frac{e^2}{2\epsilon}a^{\mu} - \frac{2}{3}e^2\dot{a}^{\mu} \tag{5.98}$$

Mientras que sobre la línea de universo

$$\partial_{\nu}\Theta^{\mu\nu}_{II}(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} ds\delta^{(4)}(x - z(s))\frac{2}{3}a^2(s)v^{\mu}(s) \tag{5.99}$$

y

$$\partial_{\nu}\Theta^{\mu\nu}_{I}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\delta^{(4)}(x - z(s))\left[m_{coul}\ a^{\mu}(s) - \frac{2}{3}e^2\dot{a}^{\mu}(s)\right] \tag{5.100}$$

Relaciones análogas pueden ser demostradas para la antipartícula a partir de la derivación de la ecuación de Dirac-Lorentz en el apéndice F, en la forma:
Sobre la línea de universo

$$\frac{d}{d\tau}P_{II} = \frac{2}{3}e^2a^2(s)v^{\mu}(s) \tag{5.101}$$

y

$$\frac{d}{d\tau}P_I = -\frac{e^2}{2\epsilon}a^\mu + \frac{2}{3}e^2\dot{a}^\mu \tag{5.102}$$

Sobre la línea de universo

$$\partial_\nu \Theta^{\mu\nu}_{II}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\delta^{(4)}(x - z(s))\frac{2}{3}a^2(s)v^\mu(s) \tag{5.103}$$

y

$$\partial_\nu \Theta^{\mu\nu}_{I}(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} ds\delta^{(4)}(x - z(s))\left[m_{coul}\ a^\mu(s) - \frac{2}{3}e^2\dot{a}^\mu(s)\right] \tag{5.104}$$

Comparando las expresiones (5.97-5-100) para la partícula, con las expresiones (5.101-5.104) para las antipartículas, se demuestra el supuesto anteriormente formulado, acerca de la transferencia de energía entre los dos sistemas partícula-antipartícula; es decir, mientras una emite, la otra absorbe y visceversa. Además, claramente de las expresiones (5.97-5.104) y de la relación $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$ para la partícula y la antipartícula se puede ver que debido a la independencia dinámica de los tensores $\Theta^{\mu\nu}_I$ y $\Theta^{\mu\nu}_{II}$ sobre la línea de universo y fuera de ésta para cada caso, es necesario que por las condiciones explicadas anteriormente la transferencia de energía se realice entre la partícula y la "antipartícula" *sobre la línea de universo*, es decir, la conjunción de las relaciones (5.99) con (5.103) y las relaciones (5.100) con (5.104).

Finalmente, es bueno recalcar el hecho que para deducir la ecuación de Dirac-Lorentz para la partícula, el proceso de la renormalización de la masa para la partícula se realiza con la expresión

$$m = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0}[m_0(\epsilon) + \delta m] \qquad \text{Masa Renormalizada} \tag{5.105}$$

mientras que para la antipartícula se realiza mediante(ver apéndice F)

$$m = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0}[m_0(\epsilon) - \delta m] \qquad \text{Masa Renormalizada} \tag{5.106}$$

donde

$$\delta m = \frac{e^2}{2\epsilon} \tag{5.107}$$

es la masa de origen electromagnético.

Experimentalmene, la masa renormalizada m, tiene un valor de $m = 9,11 \times 10^{-31} Kg$.

En las tablas 5.1 y 5.2 se realiza un resumen completo de las propiedas fundamentales de la solucion Retardada y la solución Avanzada.

Solución Retardada	Solución Avanzada
$A^\mu(x) = e\frac{v^\mu}{\rho}$	$A^\mu(x) = (-e)\frac{v^\mu}{\rho}$
$c^\mu = v^\mu + u^\mu$	$c^\mu = -v^\mu + u^\mu$
$v^2 = -u^2 = 1;\ u \cdot v = 0;\ c^2 = 0$	$v^2 = -u^2 = 1;\ u \cdot v = 0;\ c^2 = 0$
$c \cdot v = -c \cdot u = 1$	$-c \cdot v = -c \cdot u = 1$
$\rho = -D \cdot u = D \cdot v$	$\rho = -D \cdot u = -D \cdot v$
$D^\mu = \rho c^\mu;$ donde $D^\mu = x^\mu - z^\mu(s_{ret})$	$D^\mu = \rho c^\mu;$ donde $D^\mu = z^\mu(s_{avan}) - x^\mu$
Como $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$	Como $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$
$F^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2}[c^\mu V^\nu - c^\nu V^\mu]$	$F^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2}[c^\mu V^\nu - c^\nu V^\mu]$
Donde $V^\mu = v^\mu + \rho(\overset{u}{\perp} a)^\mu$	Donde $V^\mu = v^\mu - \rho(\overset{u}{\perp} a)^\mu$
A^μ se descompone como:	A^μ se descompone como:
$A_I^\mu(x) = e\frac{c^\mu}{\rho};\ A_{II}^\mu(x) = -e\frac{u^\mu}{\rho}$	$A_I^\mu(x) = e\frac{c^\mu}{\rho};\ A_{II}^\mu(x) = -e\frac{u^\mu}{\rho}$
$F_I^{\mu\nu}$ se deriva de A_I^μ	$F_I^{\mu\nu}$ se deriva de A_I^μ
$F_I^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2}[c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu]$	$F_I^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2}[c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu]$
$F_{II}^{\mu\nu}$ se deriva de A_{II}^μ	$F_{II}^{\mu\nu}$ se deriva de A_{II}^μ
$F_{II}^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho}\left[c^\mu(\overset{u}{\perp} a)^\nu - c^\nu(\overset{u}{\perp} a)^\mu\right]$	$F_{II}^{\mu\nu} = -\frac{e}{\rho}\left[c^\mu(\overset{u}{\perp} a)^\nu - c^\nu(\overset{u}{\perp} a)^\mu\right]$
Como $F^{\mu\nu} = F_I^{\mu\nu} + F_{II}^{\mu\nu}$	Como $F^{\mu\nu} = F_I^{\mu\nu} + F_{II}^{\mu\nu}$
$\partial_\mu F_I^{\mu\nu} = \frac{2e(a \cdot c)}{\rho^2}c^\nu$	$\partial_\mu F_I^{\mu\nu} = \frac{2e(a \cdot c)}{\rho^2}c^\nu$
$\partial_\mu F_{II}^{\mu\nu} = -\frac{2e(a \cdot c)}{\rho^2}c^\nu$	$\partial_\mu F_{II}^{\mu\nu} = -\frac{2e(a \cdot c)}{\rho^2}c^\nu$
$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(F_I^{\mu\nu} + F_{II}^{\mu\nu}) = 0$	$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(F_I^{\mu\nu} + F_{II}^{\mu\nu}) = 0$
$\partial^\lambda F_{I,II}^{\mu\nu} + \partial^\nu F_{I,II}^{\lambda\mu} + \partial^\mu F_{I,II}^{\nu\lambda} = 0$	$\partial^\lambda F_{I,II}^{\mu\nu} + \partial^\nu F_{I,II}^{\lambda\mu} + \partial^\mu F_{I,II}^{\nu\lambda} = 0$
$\Theta^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(c^\mu V^\nu + V^\mu c^\nu - V^2 c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right)$	$\Theta^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(-c^\mu V^\nu - V^\mu c^\nu - V^2 c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right)$
Donde $V^2 = 1 + \rho^2(\overset{u}{\perp} a)^2$	Donde $V^2 = 1 + \rho^2(\overset{u}{\perp} a)^2$
Realizando la descomposición $\Theta^{\mu\nu} = \Theta_{I1}^{\mu\nu} + \Theta_{I2}^{\mu\nu} + \Theta_{II}^{\mu\nu}$	Realizando la descomposición $\Theta^{\mu\nu} = \Theta_{I1}^{\mu\nu} + \Theta_{I2}^{\mu\nu} + \Theta_{II}^{\mu\nu}$
$\Theta_{I1}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(c^\mu v^\nu + v^\mu c^\nu - c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right)$	$\Theta_{I1}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(-c^\mu v^\nu - v^\mu c^\nu - c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right)$
$\Theta_{I2}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^3}\left[c^\mu(\overset{u}{\perp} a)^\nu + c^\nu(\overset{u}{\perp} a)^\mu\right]$	$\Theta_{I2}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^3}\left[c^\mu(\overset{u}{\perp} a)^\nu + c^\nu(\overset{u}{\perp} a)^\mu\right]$
$\Theta_{II}^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{4\pi\rho^2}(\overset{u}{\perp} a)^2 c^\mu c^\nu$	$\Theta_{II}^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{4\pi\rho^2}(\overset{u}{\perp} a)^2 c^\mu c^\nu$
Fuera de la línea de universo $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$	Fuera de la línea de universo $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$

Tabla.5.1. Comparación de las Características Principales entre la Solución Retardada y Avanzada.

Solución Retardada	**Solución Avanzada**
Ecuación Dirac-Lorentz	Ecuación Dirac-Lorentz
$ma^\mu = F_{ext}^\mu + \frac{2}{3}e^2\left(\dot{a}^\mu + a^2 v^\mu\right)$	$ma^\mu = F_{ext}^\mu - \frac{2}{3}e^2\left(\dot{a}^\mu + a^2 v^\mu\right)$
donde	donde
$F_{ext}^\mu =$ Fuerza externa	$F_{ext}^\mu =$ Fuerza externa
$m = \lim_{\epsilon \to 0}\ [m_0(\epsilon) + \delta m]$	$m = \lim_{\epsilon \to 0}\ [m_0(\epsilon) - \delta m]$
$\delta m = \frac{e^2}{2\epsilon}$	$\delta m = \frac{e^2}{2\epsilon}$
Fuera de la línea de universo	Fuera de la línea de universo
$\frac{d}{d\tau}P_{II} = -\frac{2}{3}e^2 a^2(s)v^\mu(s)$	$\frac{d}{d\tau}P_{II} = \frac{2}{3}e^2 a^2(s)v^\mu(s)$
$\frac{d}{d\tau}P_I = \frac{e^2}{2\epsilon}a^\mu - \frac{2}{3}e^2\dot{a}^\mu$	$\frac{d}{d\tau}P_I = -\frac{e^2}{2\epsilon}a^\mu + \frac{2}{3}e^2\dot{a}^\mu$
Sobre la línea de universo	Sobre la línea de universo
$\partial_\nu \Theta_{II}^{\mu\nu}(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \delta^{(4)}(x - z(s))\frac{2}{3}a^2(s)v^\mu(s)$	$\partial_\nu \Theta_{II}^{\mu\nu}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \delta^{(4)}(x - z(s))\frac{2}{3}a^2(s)v^\mu(s)$
$\partial_\nu \Theta_I^{\mu\nu}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \delta^{(4)}(x - z(s))\left[m_{coul}\, a^\mu(s) - \frac{2}{3}e^2\dot{a}^\mu(s)\right]$	$\partial_\nu \Theta_I^{\mu\nu}(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \delta^{(4)}(x - z(s))\left[m_{coul}\, a^\mu(s) - \frac{2}{3}e^2\dot{a}^\mu(s)\right]$

Tabla.5.2. Comparación de las Características Principales entre la Solución Retardada y Avanzada.

Capítulo 14

Conclusiones

1. Se demostró, que aunque la solución avanzada del potencial de Liénard-Wiechert correspondiente a las antipartículas clásicas no tenga interpretación física clara, cumple exactamente las mismas propiedades que la solución retardada asociada a las partículas ordinarias, esto es, la generación de Campo Electromagnético.

2. Se analizó la necesidad de la existencia natural de las antipartículas clásicas en analogía con el sistema de dos osciladores armónicos amortiguados acoplados con constantes de amortiguamiento de valor opuesto que transfieren energía entre ellos, y la similitud con la transferencia de energía a partir de las relaciones básicas de la derivación de la ecuación de Dirac-Lorentz para la partícula y antipartícula.

3. Se analizó el origen de la autoenergía del electrón desde el formalismo clásico, y desde el formalismo cuántico.

4. Se analizó el papel crucial que juegan las simetrías en cualquier teoría física, ya sea desde el punto de vista clásico (conservación tensor momento energía), o desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos(construcción de los estados, leyes de conservación, entre otros).

Capítulo 15

Perspectivas

Entre las perspectivas de estre trabajo se encuentran:

1. Construir un Lagrangiano completo que tenga en cuenta al sistema partícula y "antipartícula"., es decir, que tenga en cuenta explícitamente la solución retardada y avanzada; o simplemente postulando un tipo especial de campo cargado (como el de Dirac o el de Klein-Gordon).

2. Realizar la generalización de la teoría sobre un espacio-tiempo curvo[1].

3. Encontrar la conexión entre el formalismo clásico estudiado en esta tesis, con el formalismo cuántico relativista desarrollado por A.O. Barut, et al[2].

[1] Inspirado en el artículo *The Motion of Point Particles in Curved Space-Time* de Eric Poisson, Adam Pound e Ian Vega (arXiv:1102.0529v3[gr-gc] 26 sep 2011), se puede realizar el análisis de la interacción de una partícula cargada interactuando con su propia campo electromagnético sobre un fondo curvo.

[2] asd

Parte VI

Apéndice

15.1. A) Relaciones básicas Solución Avanzada

En este apéndice, se deducirán ciertas relaciones muy importantes para el análisis de la solución Avanzada del potencial de Liénard-Wiechert.

Como

$$D^\mu = z^\mu(s_{ava}) - x^\mu \tag{A.1}$$

por construcción, y ya que

$$D^\mu = \rho c^\mu \tag{A.2}$$

se satisface que

$$D_\lambda D^\lambda = D^2 = 0 \tag{A.3}$$

ya que $D^\mu = z^\mu(s_{ava}) - x^\mu$ es un vector tipo nulo[3].
Derivando la expresión anterior con respecto a las coordenadas se obtiene:

$$\partial_\mu D^2 = 2D_\lambda \partial_\mu D^\lambda = 0 \tag{A.4}$$

, pero

$$\begin{aligned} \partial_\mu D^\lambda &= \partial_\mu \left[z^\lambda(s_{ava}) - x^\lambda \right] \\ &= \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu} \end{aligned} \tag{A.5}$$

Aplicando la regla de la cadena se llega a:

$$\partial_\mu D^\lambda = \frac{\partial z^\lambda}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x^\mu} - \delta^\lambda{}_\mu \tag{A.6}$$

Según la definición

$$\rho = (-D \cdot v) \tag{A.7}$$

Reemplazando (A.2) y (A.7) en (A.4), y teniendo en cuenta que $\frac{\partial z^\lambda}{\partial s} = v^\lambda$, se llega a

$$2\rho c_\lambda \left(v^\lambda \frac{\partial s}{\partial x^\mu} - \delta^\lambda{}_\mu \right) = 0$$

$$2\rho \left(c_\lambda v^\lambda \right) \frac{\partial s}{\partial x^\mu} - 2\rho c_\mu = 0$$

dado que $\left(v^\lambda c_\lambda \right) = (v \cdot c) = -1$, se tiene

[3] Por abuso de notación, en este caso se está representando al cuadrivector D en sus componentes D^μ.

$$-2\rho\frac{\partial s}{\partial x^\mu} = 2\rho c_\mu$$

por lo tanto

$$\frac{\partial s}{\partial x^\mu} = -c_\mu \tag{A.8}$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, (A.6) puede ser expresada finalmente como:

$$\partial_\mu D^\lambda = -\delta^\lambda{}_\mu - c_\mu v^\lambda \tag{A.9}$$

Debido a la relación anterior, se puede definir la derivada de cualquier variable dinámica como

$$\partial_\mu v^\nu = c_\mu a^\nu \tag{A.10}$$

$$\partial_\mu a^\nu = c_\mu \dot{a}^\nu \tag{A.11}$$

$$\partial_\mu \dot{a}^\nu = c_\mu \ddot{a}^\nu \tag{A.12}$$

y así sucesivamente.

Ahora, debido a la relación (A.7), se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \rho &= \partial_\mu \left(-D \cdot v\right) \\
&= -\partial_\mu \left(\rho c^\lambda v_\lambda\right) \\
&= -\left[\left(-\delta^\lambda{}_\mu - c_\mu v^\lambda\right) + \rho c^\lambda \left(c_\mu a^\lambda\right)\right] \\
&= v_\mu + c_\mu - \left(a \cdot D\right) c_\mu \\
&= v_\mu - c_\mu \left[\left(a \cdot D\right) - 1\right]
\end{aligned}$$

definiendo la variable[4]

$$\lambda = (a \cdot D) - 1 \tag{A.13}$$

Entonces, $\partial_\mu \rho$ puede ser escrita como

$$\partial_\mu \rho = v_\mu - \lambda c_\mu \tag{A.14}$$

Ahora, contrayendo índices en (A.10)

$$\partial_\mu v^\mu = c_\mu a^\mu = (a \cdot c)$$

[4] No confundir la variable λ con el índice $\lambda = 0, 1, 2, 3$.

y teniendo en cuenta la relación (A.2)

$$\partial_\mu v^\mu = \frac{(a \cdot D)}{\rho}$$

Donde, con ayuda de (A.13), $\partial_\mu v^\mu$ resulta en

$$\partial_\mu v^\mu = \frac{\lambda + 1}{\rho} \tag{A.15}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \partial_\mu c_\nu &= \partial_\mu \left(\frac{D_\nu}{\rho} \right) = \frac{\rho \partial_\mu D_\nu - D_\nu \partial_\mu \rho}{\rho^2} \\ &= \frac{\rho \left(-\eta_{\mu\nu} - c_\mu v_\nu \right) - \rho \left(v_\mu - \lambda c_\mu \right)}{\rho^2} \end{aligned}$$

finalmente se obtiene

$$\partial_\mu c_\nu = \frac{1}{\rho} \left(-\eta_{\mu\nu} + \lambda c_\mu c_\nu - c_\mu v_\nu - v_\mu c_\nu \right) \tag{A.16}$$

Similarmente al proceso para derivar a (A.15), se puede contraer los índices en

$$\partial_\mu c^\mu = \frac{1}{\rho} \left(-\eta_\mu{}^\mu + \lambda c_\mu c^\mu - c_\mu v^\mu - v_\mu c^\mu \right)$$

Teniendo en cuenta la traza del tensor métrico

$$\partial_\mu c^\mu = -\frac{2}{\rho} \tag{A.17}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \partial_\mu \lambda &= \partial_\mu \left[(a \cdot D) - 1 \right] \\ &= D_\lambda \partial_\mu a^\lambda + a^\lambda \partial_\mu D_\lambda \\ &= D_\lambda c_\mu \dot{a}^\lambda + a^\lambda \left(-\delta_{\lambda\mu} - c_\mu v_\lambda \right) \end{aligned}$$

Resultando en

$$\partial_\mu \lambda = \rho \left(\dot{a} \cdot c \right) c_\mu - a_\mu \tag{A.18}$$

15.2. B) Demostración de algunas relaciones importantes

15.2.1. Construcción del tensor de Faraday a partir de la descomposición del potencial avanzado de Liénard-Wiechert

Partiendo de la definición del potencial avanzado de Liénard-Wiechert

$$A^{\mu}(x) = (-e)\frac{v^{\mu}}{\rho} \tag{B.1}$$

y debido a la descomposición del vector velocidad $v^{\mu} = -c^{\mu} + u^{\mu}$, como

$$A_{I}^{\mu}(x) = e\frac{c^{\mu}}{\rho} \tag{B.2}$$

$$A_{II}^{\mu}(x) = (-e)\frac{u^{\mu}}{\rho} \tag{B.3}$$

se va a demostrar que el tensor de Faraday (5.26), se puede escribir como la suma de dos tensores (5.27) y (5.28), que a su vez pueden ser derivados de los potenciales (B.2) y (B.3) respectivamente.

Aplicando la relación $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}$, para A_{I}^{μ} se obtiene, que el primer término puede ser escrito como:

$$\partial^{\mu}A_{I}^{\nu} = \partial^{\mu}\left(e\frac{c^{\nu}}{\rho}\right) = e\ \frac{\rho\ \partial^{\mu}c^{\nu} - c^{\nu}\ \partial^{\mu}\rho}{\rho^{2}} \tag{B.4}$$

a razón de las propiedades del apéndice A, resulta que

$$\partial^{\mu}A_{I}^{\nu} = e\ \frac{-\eta^{\mu\nu} + 2\lambda c^{\mu}c^{\nu} - c^{\mu}v^{\nu} - 2v^{\mu}c^{\nu}}{\rho^{2}} \tag{B.5}$$

haciendo lo mismo para el segundo término, o intercambiando índices $\mu \longleftrightarrow \nu$, la expresión $\partial^{\nu}A_{I}^{\mu}$ se expresa como

$$\partial^{\nu}A_{I}^{\mu} = e\ \frac{-\eta^{\nu\mu} + 2\lambda c^{\nu}c^{\mu} - v^{\mu}c^{\nu} - 2c^{\mu}v^{\nu}}{\rho^{2}} \tag{B.6}$$

Sumando (B.5) y (B.6), simplificando y teniendo en cuenta que $\eta^{\mu\nu}$ es un tensor simétrico se obtiene:

$$F_{I}^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^{2}}\left[c^{\mu}v^{\nu} - c^{\nu}v^{\mu}\right] \tag{B.7}$$

Para el potencial A_{II}^{μ},

$$\partial^{\mu}A_{II}^{\nu} = \partial^{\mu}\left((-e)\frac{u^{\nu}}{\rho}\right) = (-e)\ \frac{\rho\ \partial^{\mu}u^{\nu} - u^{\nu}\ \partial^{\mu}\rho}{\rho^{2}} \tag{B.8}$$

debido a que $\partial^{\mu}u^{\nu} = \partial^{\mu}(c^{\nu} + v^{\nu}) = \partial^{\mu}c^{\nu} + \partial^{\mu}v^{\nu}$, se tiene que

$$\partial^\mu A^\nu_{II} = (-e)\frac{-\eta^{\mu\nu} + (\lambda-1)c^\mu v^\nu + \rho c^\mu a^\nu - v^\mu v^\nu - 2v^\mu c^\nu + 2\lambda c^\mu c^\nu}{\rho^2} \tag{B.9}$$

haciendo el intercambio de índices $\mu \longleftrightarrow \nu$

$$\partial^\nu A^\mu_{II} = (-e)\frac{-\eta^{\nu\mu} + (\lambda-1)c^\nu v^\mu + \rho c^\nu a^\mu - v^\nu v^\mu - 2v^\nu c^\mu + 2\lambda c^\nu c^\mu}{\rho^2} \tag{B.10}$$

Sumando las expresiones (B.9) y (B.10), resulta finalmente

$$F^{\mu\nu}_{II} = \frac{(-e)}{\rho}\left[\frac{(\lambda+1)}{\rho}\left(c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu\right) + \rho(c^\mu a^\nu - c^\nu a^\mu)\right] \tag{B.11}$$

donde, simplificando

$$F^{\mu\nu}_{II} = -\frac{e}{\rho}\left[c^\mu(\overset{u}{\perp}a)^\nu - c^\nu(\overset{u}{\perp}a)^\mu\right] \tag{B.12}$$

15.2.2. Derivación de las ecuaciones de Maxwell con fuentes, a partir de los tensores $F^{\mu\nu}_I$ y $F^{\mu\nu}_{II}$.

Después de haber encontrado los potenciales A^μ_I y A^μ_{II}, y los respectivos campos producidos por éstos, $F^{\mu\nu}_I$ y $F^{\mu\nu}_{II}$, es necesario(más que importante) ahora, comprobar que realmente este tipo de soluciones cumplen las ecuaciones de Maxwell.

Comenzando al análisis para el tensor $F^{\mu\nu}_I$, se obtiene.

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu}_I &= \partial_\mu\left[\frac{e}{\rho^2}\left(c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu\right)\right] \\ &= e\frac{\rho^2\partial_\mu\left(c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu\right) - \left(c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu\right)\partial_\mu\rho^2}{\rho^4}\end{aligned} \tag{B.13}$$

como

$$\partial_\mu\left(c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu\right) = \partial_\mu\left(c^\mu v^\nu\right) - \partial_\mu(c^\nu v^\mu) \tag{B.14}$$

se puede expresar el primer término de la derecha en la forma

$$\begin{aligned}\partial_\mu(c^\mu v^\nu) &= c^\mu\partial_\mu v^\nu + v^\nu\partial_\mu c^\mu \\ &= -\frac{2v^\nu}{\rho}\end{aligned} \tag{B.15}$$

Para el segundo término se tiene

$$\begin{aligned}\partial_\mu(c^\nu v^\mu) &= c^\nu \partial_\mu v^\mu + v^\mu \partial_\mu c^\nu \\ &= \frac{\lambda+1}{\rho} c^\nu - \frac{\lambda+1}{\rho} c^\nu = 0\end{aligned} \tag{B.16}$$

además

$$\partial_\mu \rho^2 = 2\rho\ \partial_\mu \rho = 2\rho(v_\mu - \lambda c_\mu) \tag{B.17}$$

y como

$$(c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu)\,(v_\mu - \lambda c_\mu) = -v^\nu - (\lambda+1)c^\nu \tag{B.18}$$

se llega a que finalmente, reemplazando los resultados anteriores en (B.13), el primer par de ecuaciones de Maxwell para el tensor $F_I^{\mu\nu}$ se escribe como

$$\partial_\mu F_I^{\mu\nu} = \frac{2e}{\rho^2}\frac{\lambda+1}{\rho} c^\nu = \frac{2e(a.c)}{\rho^2} c^\nu \tag{B.19}$$

Para $F_{II}^{\mu\nu}$ resulta

$$\begin{aligned}\partial_\mu F_{II}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left\{ \frac{(-e)}{\rho} \left[c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu - c^\nu (\overset{u}{\perp} a)^\mu \right] \right\} \\ &= (-e) \left\{ \frac{1}{\rho} \partial_\mu \left[c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu - c^\nu (\overset{u}{\perp} a)^\mu \right] + \left[c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu - c^\nu (\overset{u}{\perp} a)^\mu \right] \partial_\mu \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\}\end{aligned} \tag{B.20}$$

como

$$\partial_\mu \left[c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu - c^\nu (\overset{u}{\perp} a)^\mu \right] = \partial_\mu \left[c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu \right] - \partial_\mu \left[c^\nu (\overset{u}{\perp} a)^\mu \right] \tag{B.21}$$

y

$$\partial_\mu \left[c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu \right] = c^\mu \partial_\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu + (\overset{u}{\perp} a)^\nu \partial_\mu c^\mu \tag{B.22}$$

donde, realizando primero

$$\begin{aligned}\partial_\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu &= \partial_\mu \left[a^\nu + (a \cdot u) u^\nu \right] \\ &= \partial_\mu a^\nu + \partial_\mu \left[(a \cdot u) u^\nu \right]\end{aligned} \tag{B.23}$$

y teniendo en cuenta que

$$\partial_\mu \left[(a \cdot u) u^\nu \right] = (a \cdot u) \partial_\mu u^\nu + u^\nu \partial_\mu (a \cdot u) \tag{B.24}$$

además de la relación

$$\partial_\mu(a\cdot u) = (\dot{a}\cdot c)c_\mu - \frac{a_\mu}{\rho} - (a\cdot c)\frac{(v_\mu - \lambda c_\mu)}{\rho} \tag{B.25}$$

se obtiene finalmente, después de realizar los cálculos pertinentes y reemplazando estos valores en (B.22), que

$$\partial_\mu\left[c^\mu(\overset{u}{\perp}a)^\nu\right] = -\frac{2}{\rho}(\overset{u}{\perp}a)^\nu \tag{B.26}$$

Similarmente

$$\partial_\mu\left[c^\nu(\overset{u}{\perp}a)^\mu\right] = c^\nu\partial_\mu(\overset{u}{\perp}a)^\mu + (\overset{u}{\perp}a)^\mu\partial_\mu c^\nu \tag{B.27}$$

donde

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\overset{u}{\perp}a)^\mu &= \partial_\mu\left[a^\mu + (a\cdot u)u^\mu\right] \\ &= \partial_\mu a^\mu + \partial_\mu\left[(a\cdot u)u^\mu\right]\end{aligned} \tag{B.28}$$

además, como

$$\partial_\mu\left[(a\cdot u)u^\mu\right] = (a\cdot u)\partial_\mu u^\mu + u^\mu\partial_\mu(a\cdot u) \tag{B.29}$$

y

$$\partial_\mu u^\mu = \frac{\lambda - 1}{\rho} \tag{B.30}$$

el segundo término de (B.29) se expresa en la forma:

$$u^\mu\partial_\mu(a\cdot u) = -(\dot{a}\cdot c) - \frac{(a\cdot c)}{\rho}(\lambda + 1) \tag{B.31}$$

Con todo esto a la mano, resulta que

$$\partial_\mu(\overset{u}{\perp}a)^\mu = -\frac{2}{\rho}(a\cdot c) \tag{B.32}$$

Finalmente, y realizando los cálculos necesarios, se tiene que la divergencia del tensor $F^{\mu\nu}_{II}$ puede ser expresada como:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}_{II} = -\frac{2e(a.c)}{\rho^2}c^\nu \tag{B.33}$$

De los resultados (B.19) y (B.33) se puede ver claramente que

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu}_{I} + \partial_\mu F^{\mu\nu}_{II} = \frac{2e(a.c)}{\rho^2}c^\nu - \frac{2e(a.c)}{\rho^2}c^\nu = 0 \tag{B.34}$$

15.2.3. Derivación del segundo par de ecuaciones de Maxwell, a partir de los tensores $F_I^{\mu\nu}$ y $F_{II}^{\mu\nu}$.

En esta parte del apéndice, se derivará el segundo par de ecuaciones de Maxwell, es decir, comprobará que los campos $F_I^{\mu\nu}$ y $F_{II}^{\mu\nu}$, cumplen *Identidad de Bianchi:*

$$\partial^\lambda F_{I,II}^{\mu\nu} + \partial^\nu F_{I,II}^{\lambda\mu} + \partial^\mu F_{I,II}^{\nu\lambda} = 0 \tag{B.35}$$

Comenzando para

$$F_I^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2}\left[c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu\right] \tag{B.36}$$

se tiene que, para el primer término

$$\begin{aligned} \partial^\lambda F_I^{\mu\nu} &= \partial^\lambda\left[\frac{e}{\rho^2}\left(c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu\right)\right] \\ &= e\frac{\rho^2\partial^\lambda\left(c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu\right) - \left(c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu\right)\partial^\lambda\rho^2}{\rho^4} \end{aligned} \tag{B.37}$$

haciendo las correspondientes derivadas

$$\partial^\lambda\left(c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu\right) = \partial^\lambda\left(c^\mu v^\nu\right) - \partial^\lambda\left(c^\nu v^\mu\right) \tag{B.38}$$

donde

$$\partial^\lambda\left(c^\mu v^\nu\right) = c^\mu\partial^\lambda v^\nu + v^\nu\partial^\lambda c^\mu \tag{B.39}$$

y

$$\partial^\lambda\left(c^\nu v^\mu\right) = c^\nu\partial^\lambda v^\mu + v^\mu\partial^\lambda c^\nu \tag{B.40}$$

Aplicando las propiedades desarrolladas en el apéndice A, se obtiene finalmente que

$$\partial^\lambda F_I^{\mu\nu} = e\left[\frac{c^\lambda c^\mu a^\nu - c^\lambda c^\nu a^\mu}{\rho^2} + \frac{\eta^{\lambda\nu}v^\mu - \eta^{\lambda\mu}v^\nu + 3\lambda c^\lambda c^\mu v^\nu - 3v^\lambda c^\mu v^\nu + 3v^\lambda c^\nu v^\mu - 3\lambda c^\lambda c^\nu v^\mu}{\rho^3}\right] \tag{B.41}$$

Realizando el mismo proceso para los dos términos restantes, o haciendo la permutación cíclica de índices $\lambda \longleftrightarrow \nu$, $\mu \longleftrightarrow \lambda$ y $\nu \longleftrightarrow \mu$ para el segundo término, y $\lambda \longleftrightarrow \mu$, $\mu \longleftrightarrow \nu$ y $\nu \longleftrightarrow \lambda$ para el tercer término; y reemplazando en la identidad de Bianchi, resulta

$$\partial^\lambda F_I^{\mu\nu} + \partial^\nu F_I^{\lambda\mu} + \partial^\mu F_I^{\nu\lambda} = 0 \tag{B.42}$$

Ahora, para

$$F_{II}^{\mu\nu} = \frac{(-e)}{\rho}\left[c^{\mu}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} - c^{\nu}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu}\right] \tag{B.43}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\partial^{\lambda}F_{II}^{\mu\nu} &= \partial^{\lambda}\left\{\frac{(-e)}{\rho}\left[c^{\mu}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} - c^{\nu}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu}\right]\right\} \qquad (B.44)\\ &= (-e)\frac{\rho\partial^{\lambda}\left[c^{\mu}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} - c^{\nu}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu}\right] - \left[c^{\mu}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} - c^{\nu}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu}\right]\partial^{\lambda}\rho}{\rho^{2}}\end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned}\partial^{\lambda}\left[c^{\mu}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} - c^{\nu}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu}\right] &= \partial^{\lambda}\left[c^{\mu}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu}\right] - \partial^{\lambda}\left[c^{\nu}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu}\right] \qquad (B.45)\\ &= c^{\mu}\partial^{\lambda}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} + (\overset{u}{\perp}a)^{\nu}\partial^{\lambda}c^{\mu} - c^{\nu}\partial^{\lambda}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu} - (\overset{u}{\perp}a)^{\mu}\partial^{\lambda}c^{\nu}\end{aligned}$$

y

$$\left[c^{\mu}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} - c^{\nu}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu}\right]\left(v^{\lambda} - \lambda c^{\lambda}\right) = v^{\lambda}c^{\mu}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} - \lambda c^{\lambda}c^{\mu}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} - v^{\lambda}c^{\nu}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu} + \lambda c^{\lambda}c^{\nu}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu} \tag{B.46}$$

se obtiene finalmente la relación:

$$\begin{aligned}\partial^{\lambda}F_{II}^{\mu\nu} &= (-e)\left[\frac{c^{\mu}\partial^{\lambda}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} - c^{\nu}\partial^{\lambda}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu} + (\overset{u}{\perp}a)^{\nu}\partial^{\lambda}c^{\mu} - (\overset{u}{\perp}a)^{\mu}\partial^{\lambda}c^{\nu}}{\rho}\right] \qquad (B.46)\\ &\left[\frac{v^{\lambda}c^{\mu}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} - v^{\lambda}c^{\nu}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu} - \lambda c^{\lambda}c^{\mu}(\overset{u}{\perp}a)^{\nu} + \lambda c^{\lambda}c^{\nu}(\overset{u}{\perp}a)^{\mu}}{\rho^{2}}\right]\end{aligned}$$

Ahora, como en el caso anterior, haciendo la permutación cíclica de índices $\lambda \longleftrightarrow \nu$, $\mu \longleftrightarrow \lambda$ y $\nu \longleftrightarrow \mu$, se halla $\partial^{\nu}F_{II}^{\lambda\mu}$ y nuevamente haciendo la permutación $\lambda \longleftrightarrow \mu$, $\mu \longleftrightarrow \nu$ y $\nu \longleftrightarrow \lambda$, se obtiene $\partial^{\mu}F_{II}^{\nu\lambda}$. Sumando estas tres expresiones, se llega finalmente a

$$\partial^{\lambda}F_{II}^{\mu\nu} + \partial^{\nu}F_{II}^{\lambda\mu} + \partial^{\mu}F_{II}^{\nu\lambda} = 0 \tag{B.47}$$

15.2.4. Construcción del tensor Momento-Energía

De la forma usual del tensor Momento-Energía hallado anteriormente, representado en la expresión

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F_{\alpha}{}^{\nu} + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\ \eta^{\mu\nu}\right) \tag{B.48}$$

se puede construir éste tensor de dos formas diferentes. La primera, es a partir de la expresión general para el tensor de Campo Electromagnético

$$F^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2}\left[c^{\mu}V^{\nu} - c^{\nu}V^{\mu}\right] \tag{B.49}$$

donde $V^{\mu} = v^{\mu} - \rho(\overset{u}{\perp}a)^{\mu}$. La otra forma se obtiene partiendo de la descomposición del tensor de campo electromagnético en la forma $F^{\mu\nu} = F_{I}^{\mu\nu} + F_{II}^{\mu\nu}$. Aunque las dos formas son equivalentes en esencia, la segunda permite encontrar la correspondencia explícita de la forma en la que los dos campos interactúan entre sí transfiriendo energía y momento uno al otro. Para ver esto, se comienza con:

Primera Forma.

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} &= \frac{e^2}{\rho^4}\left(c_{\alpha}V_{\beta} - c_{\beta}V_{\alpha}\right)\left(c^{\alpha}V^{\beta} - c^{\beta}V^{\alpha}\right) \\ &= \frac{e^2}{\rho^4}\left(-c_{\alpha}V^{\alpha}V_{\beta}c^{\beta} - c_{\beta}V^{\beta}V_{\alpha}c^{\alpha}\right) \\ &= \frac{e^2}{\rho^4}\left[-2\left(c_{\alpha}V^{\alpha}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{B.50}$$

dada la relación

$$c_{\alpha}V^{\alpha} = c_{\alpha}\left(v^{\alpha} - \rho(\overset{u}{\perp}a)^{\alpha}\right) = -1 \tag{B.51}$$

se tiene que

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -\frac{2e^2}{\rho^4} \tag{B.52}$$

Ahora, para el primer término de (B.48)

$$\begin{aligned} F^{\mu\alpha}F_{\alpha}{}^{\nu} &= \frac{e^2}{\rho^4}\left(c^{\mu}V^{\alpha} - c^{\alpha}V^{\mu}\right)\left(c_{\alpha}V^{\nu} - c^{\nu}V_{\alpha}\right) \\ &= \frac{e^2}{\rho^4}\left(-c^{\mu}V^{\nu} - V^2c^{\mu}c^{\nu} - V^{\mu}c^{\nu}\right) \end{aligned} \tag{B.53}$$

Reemplazando las expresiones(B.52) y (B.53) en (B.48), se llega finalmente a

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(-c^{\mu}V^{\nu} - V^{\mu}c^{\nu} - V^2c^{\mu}c^{\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{B.54}$$

Dado que

$$\begin{aligned} V^2 &= V_\alpha V^\alpha = \left(v_\alpha - \rho(\overset{u}{\perp}a)_\alpha\right)\left(v^\alpha - \rho(\overset{u}{\perp}a)^\alpha\right) \\ &= 1 - \rho v_\alpha(\overset{u}{\perp}a)^\alpha - \rho(\overset{u}{\perp}a)_\alpha v^\alpha + \rho^2(\overset{u}{\perp}a)^2 \\ &= 1 + \rho^2(\overset{u}{\perp}a)^2 \end{aligned} \tag{B.55}$$

Se induce naturalmente la descomposición del Tensor Momento-Energía en la forma

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta_I^{\mu\nu} + \Theta_{II}^{\mu\nu} \tag{B.56}$$

donde

$$\Theta_I^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(-c^\mu V^\nu - V^\mu c^\nu - c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{B.57}$$

y

$$\Theta_{II}^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{4\pi\rho^2}(\overset{u}{\perp}a)^2 c^\mu c^\nu \tag{B.58}$$

Segunda Forma

Nuevamente, a partir de las definiciones de

$$F_I^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2}\left[c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu\right] \tag{B.59}$$

y

$$F_{II}^{\mu\nu} = \frac{(-e)}{\rho}\left[c^\mu(\overset{u}{\perp}a)^\nu - c^\nu(\overset{u}{\perp}a)^\mu\right] \tag{B.60}$$

se tiene

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} &= \left(F_I + F_{II}\right)_{\alpha\beta}\left(F_I + F_{II}\right)^{\alpha\beta} \\ &= F_{I\ \alpha\beta}F_I^{\alpha\beta} + 2F_{I\ \alpha\beta}F_{II}^{\alpha\beta} + F_{II\ \alpha\beta}F_{II}^{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{B.61}$$

donde

$$\begin{aligned} F_{I\ \alpha\beta}F_I^{\alpha\beta} &= \frac{e^2}{\rho^4}\left(c_\alpha v_\beta - c_\beta v_\alpha\right)\left(c^\alpha v^\beta - c^\beta v^\alpha\right) \\ &= \frac{e^2}{\rho^4}\left(-c_\alpha v^\alpha v_\beta c^\beta - c_\beta v^\beta v_\alpha c^\alpha\right) \\ &= \frac{e^2}{\rho^4}\left[-2\left(c_\alpha v^\alpha\right)^2\right] = -\frac{2e^2}{\rho^4} \end{aligned} \tag{B.62}$$

y

$$
\begin{aligned}
F_{II\ \alpha\beta}F_{II}^{\alpha\beta} &= \frac{e^2}{\rho^2}\left[c_\alpha(\overset{u}{\perp}a)_\beta - c_\beta(\overset{u}{\perp}a)_\alpha\right]\left[c^\alpha(\overset{u}{\perp}a)^\beta - c^\beta(\overset{u}{\perp}a)^\alpha\right] \\
&= \frac{e^2}{\rho^2}\left[-c_\alpha(\overset{u}{\perp}a)^\alpha c^\beta(\overset{u}{\perp}a)_\beta - c^\alpha(\overset{u}{\perp}a)_\alpha c_\beta(\overset{u}{\perp}a)^\beta\right] \\
&= -\frac{2e^2}{\rho^2}\left[c_\alpha(\overset{u}{\perp}a)^\alpha\right]^2
\end{aligned}
\tag{B.63}
$$

pero, debido a la relación $c_\alpha(\overset{u}{\perp}a)^\alpha = 0$, se cumple que:

$$
F_{II\ \alpha\beta}F_{II}^{\alpha\beta} = 0 \tag{B.64}
$$

Finalmente, es fácil ver que

$$
F_{I\ \alpha\beta}F_{II}^{\alpha\beta} = \frac{e^2}{\rho^3}\left(c_\alpha v_\beta - c_\beta v_\alpha\right)\left[c^\alpha(\overset{u}{\perp}a)^\beta - c^\beta(\overset{u}{\perp}a)^\alpha\right] = 0 \tag{B.65}
$$

Ahora, calculando los términos

$$
\begin{aligned}
F^{\mu\alpha}F_\alpha{}^\nu &= (F_I + F_{II})^{\mu\alpha}\left(F_I + F_{II}\right)_\alpha{}^\nu \\
&= F_I^{\mu\alpha}F_{I\ \alpha}^{\ \nu} + F_I^{\mu\alpha}F_{II\ \alpha}^{\ \nu} + F_{II}^{\mu\alpha}F_{I\ \alpha}^{\ \nu} + F_{II}^{\mu\alpha}F_{II\ \alpha}^{\ \nu}
\end{aligned}
\tag{B.66}
$$

donde $F_I^{\mu\alpha}F_{I\ \alpha}^{\ \nu}$ se expresa como:

$$
\begin{aligned}
F_I^{\mu\alpha}F_{I\ \alpha}^{\ \nu} &= \frac{e^2}{\rho^4}\left(c^\mu v^\alpha - c^\alpha v^\mu\right)\left(c_\alpha v^\nu - c^\nu v_\alpha\right) \\
&= \frac{e^2}{\rho^4}\left(-c^\mu v^\nu - c^\mu c^\nu - v^\mu c^\nu\right)
\end{aligned}
\tag{B.67}
$$

y $F_{II}^{\mu\alpha}F_{II\ \alpha}^{\ \nu}$ toma la forma:

$$
\begin{aligned}
F_{II}^{\mu\alpha}F_{II\ \alpha}^{\ \nu} &= \frac{e^2}{\rho^2}\left[c^\mu(\overset{u}{\perp}a)^\alpha - c^\alpha(\overset{u}{\perp}a)^\mu\right]\left[c_\alpha(\overset{u}{\perp}a)^\nu - c^\nu(\overset{u}{\perp}a)_\alpha\right] \\
&= \frac{e^2}{\rho^2}\left[-(\overset{u}{\perp}a)^2 c^\mu c^\nu\right]
\end{aligned}
\tag{B.68}
$$

Por último

$$
F_I^{\mu\alpha}F_{II\ \alpha}^{\ \nu} = -\frac{e^2}{\rho^3}\left(c^\mu v^\alpha - c^\alpha v^\mu\right)\left[c_\alpha(\overset{u}{\perp}a)^\nu - c^\nu(\overset{u}{\perp}a)_\alpha\right] = \frac{e^2}{\rho^3}c^\mu(\overset{u}{\perp}a)^\nu \tag{B.69}
$$

$$F_{II}^{\mu\alpha} F_{I\ \alpha}^{\ \nu} = -\frac{e^2}{\rho^3}\left[c^\mu(\overset{u}{\perp}a)^\alpha - c^\alpha(\overset{u}{\perp}a)^\mu\right](c_\alpha v^\nu - c^\nu v_\alpha) = \frac{e^2}{\rho^3}c^\nu(\overset{u}{\perp}a)^\mu \tag{B.70}$$

Con todo esto, la descomposición natural del tensor momento energía sería

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta_{I1}^{\mu\nu} + \Theta_{I2}^{\mu\nu} + \Theta_{II}^{\mu\nu} \tag{B.71}$$

donde

$$\Theta_{I1}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^4}\left(-c^\mu v^\nu - v^\mu c^\nu - c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{B.72}$$

,

$$\Theta_{I2}^{\mu\nu} = \frac{e^2}{4\pi\rho^3}\left[c^\mu(\overset{u}{\perp}a)^\nu + c^\nu(\overset{u}{\perp}a)^\mu\right] \tag{B.73}$$

y

$$\Theta_{II}^{\mu\nu} = -\frac{e^2}{4\pi\rho^2}(\overset{u}{\perp}a)^2 c^\mu c^\nu \tag{B.74}$$

Como se podrá observar, el tensor

$$\Theta_{I}^{\mu\nu} = \Theta_{I1}^{\mu\nu} + \Theta_{I2}^{\mu\nu} \tag{B.75}$$

15.2.5. Demostración de la conservación del Tensor Momento-Energía

Dada la descomposición (B.71) realizada en el apéndice anterior , al calcular su devergencia se encuentra que:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = \partial_\mu\left(\Theta_{I1}^{\mu\nu} + \Theta_{I2}^{\mu\nu} + \Theta_{II}^{\mu\nu}\right) \tag{B.76}$$

Analizando primero la expresión $\partial_\mu \Theta_{I1}^{\mu\nu}$, teniendo en cuenta la froma explícita de $\Theta_{I1}^{\mu\nu}$ en la ecuación (B.72)

$$\partial_\mu \Theta_{I1}^{\mu\nu} = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)\left[\frac{\rho^4\partial_\mu\left(-c^\mu v^\nu - c^\nu v^\mu - c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right) - \left(-c^\mu v^\nu - v^\mu c^\nu - c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right)\partial_\mu \rho^4}{\rho^8}\right] \tag{B.77}$$

Realizando la derivada término a término, se tiene

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left(-c^\mu v^\nu\right) &= -\left(c^\mu \partial_\mu v^\nu + v^\nu \partial_\mu c^\mu\right) \\ &= -\left[c^\mu\left(c_\mu a^\nu\right) + v^\nu\left(-\frac{2}{\rho}\right)\right] \\ &= \frac{2v^\nu}{\rho}\end{aligned} \tag{B.78}$$

ahora,

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\left(-c^\nu v^\mu\right) &= -\left(c^\nu\partial_\mu v^\mu + v^\mu\partial_\mu c^\nu\right) \\
&= -\left[c^\nu\frac{(\lambda+1)}{\rho} + v^\mu\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(-\eta_{\ \mu}^{\ \nu} + \lambda c_\mu c^\nu - c_\mu v^\nu - v_\mu c^\nu\right)\right] \\
&= -\frac{(\lambda+1)}{\rho}c^\nu + \frac{(\lambda+1)}{\rho}c^\nu = 0
\end{aligned} \tag{B.79}$$

por último,

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\left(-c^\mu c^\nu\right) &= -\left(c^\mu\partial_\mu c^\nu + c^\nu\partial_\mu c^\mu\right) \\
&= -\left[c^\mu\left(\frac{1}{\rho}\right)\left(-\eta_{\ \mu}^{\ \nu} + \lambda c_\mu c^\nu - c_\mu v^\nu - v_\mu c^\nu\right) + c^\nu\left(-\frac{2}{\rho}\right)\right] \\
&= \frac{2c^\nu}{\rho}
\end{aligned} \tag{B.80}$$

Dada la relación:

$$\partial_\mu\rho^4 = 4\rho^3\partial_\mu\rho = 4\rho^3(v_\mu - \lambda c_\mu) \tag{B.81}$$

y teniendo en cuenta que

$$\left(-c^\mu v^\nu - v^\mu c^\nu - c^\mu c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right)(v_\mu - \lambda c_\mu) = \frac{1}{2}v^\nu - \frac{1}{2}\lambda c^\nu \tag{B.82}$$

se pueden reemplazar las expresiones anteriores en la ecuación (B.77) para obtener finalmente que

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\Theta_{I1}^{\mu\nu} &= \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)\left[\frac{2v^\nu + 2c^\nu - 2v^\nu + 2\lambda c^\nu}{\rho^5}\right] \\
&= \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)\left(\frac{2(\lambda+1)}{\rho^5}c^\nu\right) \\
&= \left(\frac{e^2}{2\pi}\right)\frac{(a\cdot c)}{\rho^4}c^\nu
\end{aligned} \tag{B.83}$$

Haciendo lo mismo para el tensor $\Theta_{I2}^{\mu\nu}$, se tiene

$$\partial_\mu\Theta_{I2}^{\mu\nu} = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)\left\{\frac{\rho^3\partial_\mu\left[c^\mu(\overset{u}{\perp}a)^\nu + c^\nu(\overset{u}{\perp}a)^\mu\right] - \left[c^\mu(\overset{u}{\perp}a)^\nu + c^\nu(\overset{u}{\perp}a)^\mu\right]\partial_\mu\rho^3}{\rho^6}\right\} \tag{B.84}$$

Derivando término a término la expresión $\partial_\mu \left[c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu + c^\nu (\overset{u}{\perp} a)^\mu \right]$ resulta:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu \right] &= c^\mu \partial_\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu + (\overset{u}{\perp} a)^\nu \partial_\mu c^\mu \\ &= -\frac{2}{\rho} (\overset{u}{\perp} a)^\nu \end{aligned} \tag{B.85}$$

y

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[c^\nu (\overset{u}{\perp} a)^\mu \right] &= c^\nu \partial_\mu (\overset{u}{\perp} a)^\mu + (\overset{u}{\perp} a)^\mu \partial_\mu c^\nu \\ &= -\frac{2}{\rho} (a \cdot c) c^\nu - \frac{1}{\rho} (\overset{u}{\perp} a)^\nu \end{aligned} \tag{B.86}$$

Por otra parte,

$$\left[c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu + c^\nu (\overset{u}{\perp} a)^\mu \right] (v_\mu - \lambda c_\mu) = -(\overset{u}{\perp} a)^\nu \tag{B.87}$$

Finalmente, reemplazando (B.85), (B.86) y (B.87) en (B.84) se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Theta_{I2}^{\mu\nu} &= \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \left[\frac{-2(a \cdot c) c^\nu - 3(\overset{u}{\perp} a)^\nu + 3(\overset{u}{\perp} a)^\nu}{\rho^4} \right] \\ &= -\left(\frac{e^2}{2\pi} \right) \frac{(a \cdot c) c^\nu}{\rho^4} \end{aligned} \tag{B.88}$$

Haciendo la suma de los términos $\partial_\mu \Theta_{I1}^{\mu\nu}$ y $\partial_\mu \Theta_{I2}^{\mu\nu}$, se llega a la conservación del tensor momento-energía $\Theta_I^{\mu\nu}$ como

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Theta_I^{\mu\nu} &= \partial_\mu \Theta_{I1}^{\mu\nu} + \partial_\mu \Theta_{I2}^{\mu\nu} \\ &= \left(\frac{e^2}{2\pi} \right) \frac{(a \cdot c) c^\nu}{\rho^4} - \left(\frac{e^2}{2\pi} \right) \frac{(a \cdot c) c^\nu}{\rho^4} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{B.89}$$

Para calcular la divergencia del tensor $\Theta_{II}^{\mu\nu}$, se parte de la relación

$$\partial_\mu \Theta_{II}^{\mu\nu} = \left(-\frac{e^2}{4\pi} \right) \frac{\rho^2 \partial_\mu \left[(\overset{u}{\perp} a)^2 c^\mu c^\nu \right] - \left[(\overset{u}{\perp} a)^2 c^\mu c^\nu \right] \partial_\mu \rho^2}{\rho^4} \tag{B.90}$$

Haciendo los cálculos pertinentes

$$\partial_\mu \left[(\overset{u}{\perp} a)^2 c^\mu c^\nu \right] = (\overset{u}{\perp} a)^2 \partial_\mu \left(c^\mu c^\nu \right) + \left(c^\mu c^\nu \right) \partial_\mu \left[(\overset{u}{\perp} a)^2 \right] \tag{B.91}$$

donde

$$\partial_\mu \left[(\overset{u}{\perp} a)^2 \right] = \partial_\mu \left[a^2 + (a \cdot c)^2 \right] = \partial_\mu a^2 + \partial_\mu (a \cdot c)^2 \tag{B.92}$$

pero además

$$\partial_\mu a^2 = 2 a_\alpha \partial_\mu a^\alpha = 2 a_\alpha c_\mu \dot{a}^\alpha = 0 \tag{B.93}$$

y

$$\begin{aligned} \partial_\mu (a \cdot c)^2 &= 2(a \cdot c) \partial_\mu (a \cdot c) \\ &= 2(a \cdot c) \left[(\dot{a} \cdot c) c_\mu - \frac{a_\mu}{\rho} - (a \cdot c) \frac{(v_\mu - \lambda c_\mu)}{\rho} \right] \end{aligned} \tag{B.94}$$

teniendo en cuenta las relaciones anteriores

$$\left(c^\mu c^\nu \right) \partial_\mu \left[(\overset{u}{\perp} a)^2 \right] = 2(a \cdot c) \left[-\frac{(a \cdot c)}{\rho} c^\nu + \frac{(a \cdot c)}{\rho} c^\nu \right] = 0 \tag{B.95}$$

y la relación

$$\left[(\overset{u}{\perp} a)^2 c^\mu c^\nu \right] (v_\mu - \lambda c_\mu) = -(\overset{u}{\perp} a)^2 c^\nu \tag{B.96}$$

Y reemplazando estas expresiones en (B.90), se llega a

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}_{II} = \left(-\frac{e^2}{4\pi} \right) \frac{-2(\overset{u}{\perp} a)^2 c^\nu + 2(\overset{u}{\perp} a)^2 c^\nu}{\rho^3} = 0 \tag{B.97}$$

En conclusión, se ha encontrado dos relaciones de gran importancia

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}_{I} = 0 \tag{B.98}$$

y

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}_{II} = 0 \tag{B.99}$$

Es decir, los dos tensores $\Theta^{\mu\nu}_{I}$ y $\Theta^{\mu\nu}_{II}$ se conservan fuera de la línea de universo que recorre la carga.

15.2.6. Demostración de la conservación del Tensor Momento-Angular

Comenzando por la relación[10] [29,30]

$$M^{\lambda\mu\nu} = M_I^{\lambda\mu\nu} + M_{II}^{\lambda\mu\nu} \tag{B.100}$$

donde

$$M_I^{\lambda\mu\nu} = z^\lambda \Theta_I^{\mu\nu} - z^\mu \Theta_I^{\lambda\nu} - D^\lambda \Theta_{I1}^{\mu\nu} + D^\mu \Theta_{I1}^{\lambda\nu} \tag{B.101}$$

y

$$M_{II}^{\lambda\mu\nu} = z^\lambda \Theta_{II}^{\mu\nu} - z^\mu \Theta_{II}^{\lambda\nu} - D^\lambda \Theta_{I2}^{\mu\nu} + D^\mu \Theta_{I2}^{\lambda\nu} \tag{B.102}$$

Se pueden demostrar las propiedades $\partial_\nu M_I^{\lambda\mu\nu} = 0$ y $\partial_\nu M_{II}^{\lambda\mu\nu} = 0$, análogas a las del tensor Momento-Energía.

Comenzando por $M_{II}^{\lambda\mu\nu}$, se tiene:

$$\partial_\nu M_{II}^{\lambda\mu\nu} = \partial_\nu \left(z^\lambda \Theta_{II}^{\mu\nu} - z^\mu \Theta_{II}^{\lambda\nu} \right) + \partial_\nu \left(-D^\lambda \Theta_{I2}^{\mu\nu} + D^\mu \Theta_{I2}^{\lambda\nu} \right) \tag{B.103}$$

Ahora, como

$$\partial_\nu \left(D^\lambda \Theta_{I2}^{\mu\nu} \right) = D^\lambda \partial_\nu \Theta_{I2}^{\mu\nu} + \Theta_{I2}^{\mu\nu} \partial_\nu D^\lambda \tag{B.104}$$

, pero $\partial_\nu \Theta_{I2}^{\mu\nu} = -\left(\frac{e^2}{2\pi}\right) \frac{(a\cdot c)}{\rho^4} c^\nu$, entonces

$$\partial_\nu \left(D^\lambda \Theta_{I2}^{\mu\nu} \right) = D^\lambda \left[-\left(\frac{e^2}{2\pi}\right) \frac{(a\cdot c)}{\rho^4} c^\nu \right] + \partial_\nu D^\lambda \Theta_{I2}^{\mu\nu} \tag{B.105}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left(D^\mu \Theta_{I2}^{\lambda\nu} \right) &= D^\mu \partial_\nu \Theta_{I2}^{\lambda\nu} + \Theta_{I2}^{\lambda\nu} \partial_\nu D^\mu \\ &= D^\mu \left[-\left(\frac{e^2}{2\pi}\right) \frac{(a\cdot c)}{\rho^4} c^\nu \right] + \partial_\nu D^\mu \Theta_{I2}^{\lambda\nu} \end{aligned} \tag{B.106}$$

como

$$\left(-\delta^\lambda{}_\nu - c_\nu v^\lambda \right) \left[c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\nu + c^\nu (\overset{u}{\perp} a)^\mu \right] = -\left[c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\lambda + c^\lambda (\overset{u}{\perp} a)^\mu \right] \tag{B.107}$$

y

$$\left(-\delta^\mu{}_\nu - c_\nu v^\mu \right) \left[c^\lambda (\overset{u}{\perp} a)^\nu + c^\nu (\overset{u}{\perp} a)^\lambda \right] = -\left[c^\lambda (\overset{u}{\perp} a)^\mu + c^\mu (\overset{u}{\perp} a)^\lambda \right] \tag{B.108}$$

se tiene que

$$\partial_\nu \left(-D^\lambda \Theta_{I2}^{\mu\nu} + D^\mu \Theta_{I2}^{\lambda\nu}\right) = 0 \tag{B.109}$$

Para la primera parte de (B.103) se tiene

$$\partial_\nu \left(z^\lambda \Theta_{II}^{\mu\nu} - z^\mu \Theta_{II}^{\lambda\nu}\right) = z^\lambda \partial_\nu \Theta_{II}^{\mu\nu} + \Theta_{II}^{\mu\nu} \partial_\nu z^\lambda - z^\mu \partial_\nu \Theta_{II}^{\lambda\nu} - \Theta_{II}^{\lambda\nu} \partial_\nu z^\mu \tag{B.110}$$

los términos $\partial_\nu \Theta_{II}^{\mu\nu}$ y $\partial_\nu \Theta_{II}^{\lambda\nu}$, son cero, debido a las relaciones (B.98) y (B.99), y como

$$\partial_\nu z^\lambda = -c_\nu v^\lambda \tag{B.111}$$

y

$$\partial_\nu z^\mu = -c_\nu v^\mu \tag{B.112}$$

se tiene que

$$\left[\left(-\frac{e^2}{4\pi\rho^2}\right) (\overset{u}{\perp} a)^2 c^\mu c^\nu\right] \left(-c_\nu v^\lambda\right) = 0 \tag{B.113}$$

De la misma forma

$$\left[\left(-\frac{e^2}{4\pi\rho^2}\right) (\overset{u}{\perp} a)^2 c^\lambda c^\nu\right] \left(-c_\nu v^\mu\right) = 0 \tag{B.114}$$

Por lo tanto

$$\partial_\nu \left(z^\lambda \Theta_{II}^{\mu\nu} - z^\mu \Theta_{II}^{\lambda\nu}\right) = 0 \tag{B.115}$$

Finalmente, juntando los resultados, se llega a que

$$\partial_\nu M_{II}^{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{B.116}$$

Para $M_I^{\lambda\mu\nu}$, se tiene

$$\partial_\nu M_I^{\lambda\mu\nu} = \partial_\nu \left(z^\lambda \Theta_I^{\mu\nu} - z^\mu \Theta_I^{\lambda\nu}\right) + \partial_\nu \left(-D^\lambda \Theta_{I1}^{\mu\nu} + D^\mu \Theta_{I1}^{\lambda\nu}\right) \tag{B.117}$$

Comenzando con

$$\partial_\nu \left(-D^\lambda \Theta_{I1}^{\mu\nu} + D^\mu \Theta_{I1}^{\lambda\nu}\right) = -D^\lambda \partial_\nu \Theta_{I1}^{\mu\nu} - \Theta_{I1}^{\mu\nu} \partial_\nu D^\lambda + D^\mu \partial_\nu \Theta_{I1}^{\lambda\nu} + \Theta_{I1}^{\lambda\nu} \partial_\nu D^\mu \tag{B.118}$$

y debido a las relaciones

$$D^{\lambda}\partial_{\nu}\Theta_{I1}^{\mu\nu} = \left(\frac{e^2}{2\pi}\right)\frac{(a\cdot c)c^{\mu}c^{\lambda}}{\rho^3} \tag{B.119}$$

,

$$D^{\mu}\partial_{\nu}\Theta_{I1}^{\lambda\nu} = \left(\frac{e^2}{2\pi}\right)\frac{(a\cdot c)c^{\lambda}c^{\mu}}{\rho^3} \tag{B.120}$$

que junto con

$$\begin{aligned}\partial_{\nu}D^{\lambda}\Theta_{I1}^{\mu\nu} &= \left(-\delta^{\lambda}{}_{\nu} - c_{\nu}v^{\lambda}\right)\left(\frac{e^2}{4\pi\rho^4}\right)\left(-c^{\mu}v^{\nu} - c^{\nu}v^{\mu} - c^{\mu}c^{\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right) \\ &= \left(\frac{e^2}{4\pi\rho^4}\right)\left(\frac{1}{2}c^{\mu}v^{\lambda} + c^{\lambda}v^{\mu} + c^{\mu}c^{\lambda}\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right)\end{aligned} \tag{B.121}$$

además de la expresión,

$$\begin{aligned}\partial_{\nu}D^{\lambda}\Theta_{I1}^{\mu\nu} &= \left(-\delta^{\mu}{}_{\nu} - c_{\nu}v^{\mu}\right)\left(\frac{e^2}{4\pi\rho^4}\right)\left(-c^{\lambda}v^{\nu} - c^{\nu}v^{\lambda} - c^{\lambda}c^{\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\nu}\right) \\ &= \left(\frac{e^2}{4\pi\rho^4}\right)\left(\frac{1}{2}c^{\lambda}v^{\mu} + c^{\mu}v^{\lambda} + c^{\lambda}c^{\mu} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right)\end{aligned} \tag{B.122}$$

se puede ver claramente que después de reemplazar estos valores en (B.118), se tiene

$$\partial_{\nu}\left(-D^{\lambda}\Theta_{I1}^{\mu\nu} + D^{\mu}\Theta_{I1}^{\lambda\nu}\right) = \left(\frac{e^2}{8\pi\rho^4}\right)\left(-c^{\lambda}v^{\mu} + c^{\mu}v^{\lambda}\right) \tag{B.123}$$

Ahora, teniendo en cuenta el primer término de (B.117)

$$\partial_{\nu}\left(z^{\lambda}\Theta_{I}^{\mu\nu} - z^{\mu}\Theta_{I}^{\lambda\nu}\right) = z^{\lambda}\partial_{\nu}\Theta_{I}^{\mu\nu} + \Theta_{I}^{\mu\nu}\partial_{\nu}z^{\lambda} - z^{\mu}\partial_{\nu}\Theta_{I}^{\lambda\nu} - \Theta_{I}^{\lambda\nu}\partial_{\nu}z^{\mu} \tag{B.124}$$

y como $\partial_{\nu}\Theta_{I}^{\mu\nu} = 0$ y $\partial_{\nu}\Theta_{I}^{\lambda\nu} = 0$, sólo hace falta calcular

$$\partial_{\nu}z^{\lambda}\Theta_{I}^{\mu\nu} = \left(-c_{\nu}v^{\lambda}\right)\left(\frac{e^2}{4\pi\rho^4}\right)\left(-c^{\mu}V^{\nu} - c^{\nu}V^{\mu} - c^{\mu}c^{\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\right) \tag{B.125}$$

Como $V\cdot c = -1$, resulta que

$$\begin{aligned}\partial_{\nu}z^{\lambda}\Theta_{I}^{\mu\nu} &= \left(\frac{e^2}{4\pi\rho^4}\right)\left(-c^{\mu}v^{\lambda} + \frac{1}{2}c^{\mu}v^{\lambda}\right) \\ &= \left(\frac{e^2}{8\pi\rho^4}\right)\left(-c^{\mu}v^{\lambda}\right)\end{aligned} \tag{B.126}$$

, entonces

$$\begin{aligned}\partial_\nu z^\mu \Theta_I^{\lambda\nu} &= (-c_\nu v^\mu)\left(\frac{e^2}{4\pi\rho^4}\right)\left(-c^\lambda V^\nu - c^\nu V^\lambda - c^\lambda c^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\nu}\right) \\ &= \left(\frac{e^2}{8\pi\rho^4}\right)\left(-c^\lambda v^\mu\right)\end{aligned} \tag{B.127}$$

Juntando los resultados de (B.125) y (B.127), e insertándolos en (B.124), se llega a que

$$\partial_\nu\left(z^\lambda \Theta_I^{\mu\nu} - z^\mu \Theta_I^{\lambda\nu}\right) = \left(\frac{e^2}{8\pi\rho^4}\right)\left(c^\lambda v^\mu - c^\mu v^\lambda\right) \tag{B.128}$$

Por último, se llega finalmente a que

$$\partial_\nu M_I^{\lambda\mu\nu} = \left(\frac{e^2}{8\pi\rho^4}\right)\left(c^\lambda v^\mu - c^\mu v^\lambda\right) - \left(\frac{e^2}{8\pi\rho^4}\right)\left(-c^\lambda v^\mu + c^\mu v^\lambda\right) = 0 \tag{B.129}$$

En resumen, se cumple que

$$\partial_\nu M_I^{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{B.130}$$

y

$$\partial_\nu M_{II}^{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{B.131}$$

Resultado que indica la conservación del Tensor Momento-Angular

$$\partial_\nu M^{\lambda\mu\nu} = 0 \tag{B.132}$$

fuera de la línea de universo de la partícula.

15.3. C) Propiedades fundamentales sistema oscilador armónico amortiguado e imagne especular.

En esta parte del apéndice, se demostrarán las propiedades básicas del sistema oscilador armónico amortigüado que interactúa con su imagen especular.

Partiendo de la acción[10]

$$S = \int dt\ \left[\dot{x}^*\dot{x} + \frac{\beta}{2}\left(\dot{x}^* x - x^*\dot{x}\right) - \omega^2 x^* x\right] \tag{C.1}$$

se puede aplicar la definición usual de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \tag{C.2}$$

y

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^*} = 0 \tag{C.3}$$

para encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema conjunto.

Para el primer sistema se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x}^* + \frac{\beta}{2}\left(-x^*\right) \tag{C.4}$$

,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \ddot{x}^* - \frac{\beta}{2}\left(\dot{x}^*\right) \tag{C.5}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\beta}{2}\left(\dot{x}^*\right) - \omega^2 x^* \tag{C.6}$$

Lo cual conduce a la ecuación de movimiento

$$\ddot{x}^* - \beta\dot{x}^* + \omega^2 x^* = 0 \tag{C.7}$$

Cúya solución puede ser expresada como

$$x^*(t) = C^* \; e^{\frac{\beta}{2}} \; sen(\Omega t + \phi) \tag{C.8}$$

donde $\Omega^2 = \omega^2 - \frac{\beta^2}{4}$
El momento generalizado correspondiente es

$$p^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dot{x}^* - \frac{\beta}{2}(x^*) \tag{C.9}$$

Para el segundo sistema se verifica

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*} = \dot{x} + \frac{\beta}{2}\left(x\right) \tag{C.10}$$

,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*} = \ddot{x} + \frac{\beta}{2}\left(\dot{x}\right) \tag{C.11}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^*} = -\frac{\beta}{2}\left(\dot{x}\right) - \omega^2 x \tag{C.12}$$

Por tanto, la ecuación de movimiento quedaría

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{C.13}$$

Cúya solución es en la forma

$$x(t) = C\ e^{-\frac{\beta}{2}}\ sen(\Omega t + \phi) \tag{C.14}$$

Donde su correspondiente momento generalizado puede ser expresado como

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^*} = \dot{x} + \frac{\beta}{2}\,(x) \tag{C.15}$$

Teniendo en cuenta la definición del Hamiltoniano para los dos sistemas[10]

$$H = p\dot{x} + p^*\dot{x}^* - \mathcal{L} \tag{C.16}$$

Reemplazando (C.15), (C.9) y $\mathcal{L} = \dot{x}^*\dot{x} + \frac{\beta}{2}\left(\dot{x}^*x - x^*\dot{x}\right) - \omega^2 x^* x$ en la expresión (C.16), se llega a que finalmente el Hamiltoniano se expresa como

$$H = \dot{x}\dot{x}^* + \omega^2 x^* x \tag{C.17}$$

Sólo falta comprobar ahora que el sistema es conservativo. Para esto, se deriva el hamiltoniano con respecto al tiempo como sigue

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\dot{x}^* + \omega^2 x^* x\right) \\ &= \dot{x}\ddot{x}^* + \dot{x}^*\ddot{x} + \omega^2 x\dot{x}^* + \omega^2 x^*\dot{x} \end{aligned} \tag{C.18}$$

Sumando y restando la expresión $\beta\dot{x}\dot{x}^*$ a (C.18), se tiene que

$$\frac{dH}{dt} = \dot{x}\left(\ddot{x}^* - \beta\dot{x}^* + \omega^2 x^*\right) + \dot{x}^*\left(\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega^2 x\right) \tag{C.19}$$

Debido a las ecuaciones de movimiento (C.7) y (C.13), finalmente se comprueba que

$$\frac{dH}{dt} = 0 \tag{C.20}$$

es decir, el Hamiltoniano se conserva.

15.4. D) Propagador partícula libre relativista.

Considérese el caso de una partícula cuántica libre no relativista cúyo Hamiltoniano es de la forma [1]

$$\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{D.1}$$

de modo que la amplitud de propagación se describe como :

$$\langle \vec{x}\prime, t\prime \mid \vec{x}, t\rangle = \left\langle \vec{x}\prime \mid e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}(t\prime - t)} \mid \vec{x} \right\rangle \tag{D.2}$$

Insertando $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |\vec{p}\rangle \langle\vec{p}|$ en (D.2), se tiene:

$$\langle \vec{x}\prime, t\prime \mid \vec{x}, t\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle \vec{x}\prime \mid \vec{p}\rangle\, e^{-i\frac{\vec{p}^2}{2m}(t\prime - t)} \langle \vec{p} \mid \vec{x}\rangle \tag{D.3}$$

Como $\langle \vec{x}\prime \mid \vec{p}\rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}\prime}$ y $\langle \vec{p} \mid \vec{x}\rangle = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

Resulta que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}\prime, t\prime \mid \vec{x}, t\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}\prime - \vec{x}) - \frac{i\vec{p}^2(t\prime - t)}{2m}} \\ &= \left[\frac{m}{2\pi i(t\prime - t)}\right]^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{m}{2(t\prime - t)}(\vec{x}\prime - \vec{x})^2} \end{aligned} \tag{D.4}$$

De la expresión (D.4) se puede notar que en un intervalo de tiempo $t\prime - t$ dado, la partícula puede moverse una distancia $|\vec{x}\prime - \vec{x}|$ arbitrariamente grande. En el caso no relativista, no es preocupante, pero para el caso relativista hay ciertos inconvenientes.

Es conocido que para el caso relativista $\hat{H} = \sqrt{(\vec{p}c)^2 + (m^2c^4)}$, entonces trabajando en unidades naturales, o sea c=1, se tiene[1].

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}\prime, t\prime \mid \vec{x}, t\rangle &= \left\langle \vec{x}\prime \mid e^{-i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}(t\prime - t)} \mid \vec{x} \right\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}(t\prime - t) + i\vec{p}\cdot(\vec{x}\prime - \vec{x})} \end{aligned} \tag{D.5}$$

Este propagador se puede escribir de la forma invariante de Lorentz:

$$\langle \vec{x}\prime, t\prime \mid \vec{x}, t\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2)\theta(p^0) e^{-ip\cdot(x\prime - x)} \tag{D.6}$$

Donde,

$$p^\mu \equiv (p^0, \vec{p}) \tag{D.7}$$

$$x^\mu \equiv (t, \vec{x}) \tag{D.8}$$

$$d^4p \equiv dp^0 d^3p \tag{D.9}$$

$$p \cdot x \equiv p^0x^0 - \vec{p}\vec{x} \tag{D.10}$$

$$p^2 \equiv p \cdot p = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 \tag{D.11}$$

, y por último:

$$\theta(p^0) = \begin{cases} 1 & \text{si } p^0 > 0 \\ 0 & \text{si } p^0 < 0 \end{cases} \tag{D.12}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^\infty dp^0 \delta((p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2)\theta(p^0) f(p^0) = \int_0^\infty \frac{d(p^0)^2}{2p^0} \delta((p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2)\theta(p^0) f(p^0) \tag{D.13}$$

En este caso se tiene que:

$$f(p^0) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-ip\cdot(x\prime - x)} \tag{D.14}$$

Así que :

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - m^2)\theta(p^0) e^{-ip\cdot(x\prime - x)} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{-i\sqrt{\vec{p}^2+m^2}(t\prime - t) + i\vec{p}\cdot(\vec{x}\prime - \vec{x})} \tag{D.15}$$

Como el producto $\langle \vec{x}\prime, t\prime \mid \vec{x}, t\rangle$ es un invariante relativista, sólo puede depender entonces del intervalo $(x\prime - x)^2 = (t\prime - t))^2 - (\vec{x}\prime - \vec{x})^2$.

Cabe entonces preguntarse, si la partícula pude viajar más rápido que la luz, o sea, determinar el propagador fuera del cono de luz, es decir, donde $(x\prime - x)^2 < 0$.

Por invarianza de Lorentz:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}\prime, t\prime \mid \vec{x}, t\rangle &= \left\langle \sqrt{-(x\prime - x)^2}, 0, 0, 0 \mid 0, 0, 0, 0 \right\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} e^{-ip\prime\sqrt{-(x\prime - x)^2}} \end{aligned} \tag{D.16}$$

Como $e^{-ip\prime\sqrt{-(x\prime-x)^2}} = \cos(p\prime\sqrt{-(x\prime - x)^2}) + i\ sen(p\prime\sqrt{-(x\prime - x)^2})$; pero dadas las propiedades de la función $sen(x)$ que es impar, el segundo término se anula. Por lo tanto, teniendo esto en cuenta y cambiando a coordenandas esféricas donde se define :

$$\begin{aligned} d^3p &= |\vec{p}|^2\, d\,|\vec{p}|\, d\Omega\ , \quad \text{donde } d\Omega = sen\theta d\theta d\varphi \\ p\prime &= |\vec{p}| \cos\theta \end{aligned} \tag{D.17}$$

Resulta que finalmente el propagador puede ser expresado por:

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}\prime, t\prime \mid \vec{x}, t\rangle &= 2\pi \int \frac{|\vec{p}|^2\, d\,|\vec{p}|}{(2\pi)^3 2\sqrt{\vec{p}^2+m^2}} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\cos(|\vec{p}|\,\sqrt{-(x\prime-x)^2}\,\cos\theta) \\ &= \frac{m}{(2\pi)^2}\frac{K_1(m\sqrt{-(x\prime-x)^2})}{\sqrt{-(x\prime-x)^2}}\end{aligned} \tag{D.18}$$

Donde K_1 es la función de Bessel modificada.

15.5. E) Demostración conservación del vector Cuadri-Corriente

Para calcular la divergencia del vector cuadri-corriente [20]

$$j^\mu(x) = e\int_{-\infty}^{\infty} ds\ \dot{z}^\mu(s)\delta(x-z(s)) \tag{E.1}$$

se aplica el operador ∂_μ en la forma :

$$\partial_\mu\ j^\mu(x) = e\int_{-\infty}^{\infty} ds\ \dot{z}^\mu(s)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\delta(x-z(s))\right] \tag{E.2}$$

Como se puede comprobar que para cualquier función $f(x-z)$, se cumple que [8]

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}f(x-z) = -\frac{\partial}{\partial z^\mu}f(x-z) \tag{E.3}$$

Y además

$$\frac{\partial f}{\partial z^\mu}\frac{\partial z^\mu}{\partial s} = \frac{df}{ds} \tag{E.4}$$

Se puede expresar (E.2) como

$$\begin{aligned}\partial_\mu\ j^\mu(x) &= -e\int_{-\infty}^{\infty} ds\ \frac{d}{ds}\left[\delta(x-z(s))\right] \\ &= -e\ \ \delta(x-z(s))|_{-\infty}^{\infty} = 0\end{aligned} \tag{E.5}$$

Es decir, $\partial_\mu\ j^\mu(x) = 0$, por lo tanto, la cuadri-corriente se conserva.

15.6. F) Derivación de la Ecuación de Dirac-Lorentz para la solución Avanzada

De acuerdo al modelo de continuación analítica desarrollado por Asim Barut en 1974[10], en esta sección del apéndice, se hara la derivación de la ecuación de Dirac-Lorentz para el caso de la solución Avanzada del potencial de Liénard-Wiechert.

Para aplicar este método, se tratará de regularizar el tensor de campo electromagnético $F^{\mu\nu}$ en una vecindad de la fuente[10], colocando el punto de observación una distancia infinitesimalmente pequeña del punto donde se sitúa la fuente, para luego realizar la continuación analítica del campo. Es decir, el punto de observación, será definido como:

$$x^\mu = z^\mu(s+\epsilon) \tag{F.1}$$

donde ϵ es un parámetro infinitesimal. Luego se realiza la continuación analítica de la ecuación de movimiento de la partícula en la forma:

$$m_0 a^\mu(s+\epsilon) = e v_\nu(s+\epsilon) F^{\mu\nu}(z(s+\epsilon); z(s)) + f^\mu \tag{F.2}$$

Dado que el tensor de campo electromagnético tiene la forma

$$F^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^2}\left[c^\mu V^\nu - c^\nu V^\mu\right] \tag{F.3}$$

Y además, de (5.9) $c^\mu = \frac{D^\mu}{\rho}$, por lo tanto, la expresión anterior toma la forma:

$$F^{\mu\nu} = \frac{e}{\rho^3}\left[R^\mu V^\nu - R^\nu V^\mu\right] \tag{F.4}$$

Realizando las expansiones:

$$z^\mu(s+\epsilon) = z^\mu + \epsilon v^\mu + \frac{\epsilon^2}{2} a^\mu + \frac{\epsilon^3}{6}\dot{a}^\mu + \cdots \tag{F.5}$$

$$v^\mu(s+\epsilon) = v^\mu + \epsilon a^\mu + \frac{\epsilon^2}{2}\dot{a}^\mu + \cdots \tag{F.6}$$

$$a^\mu(s+\epsilon) = a^\mu + \epsilon \dot{a}^\mu + \cdots \tag{F.7}$$

Donde las expresiones de la derecha se evalúan en el instante retardado s. Debido a las relaciones anteriores, se sigue que:

$$D^\mu = z^\mu(s) - z^\mu(s+\epsilon) \tag{F.8}$$

$$\begin{aligned} D^\mu &= z^\mu(s) - \left[z^\mu + \epsilon v^\mu + \frac{\epsilon^2}{2}a^\mu + \frac{\epsilon^3}{6}\dot{a}^\mu\right] \\ &= (-\epsilon)\left(v^\mu + \frac{\epsilon}{2}a^\mu + \frac{\epsilon^2}{6}\dot{a}^\mu\right) + O(\epsilon^4) \end{aligned} \tag{F.9}$$

Además,

$$\begin{aligned} \rho &= -D\cdot v = (\epsilon)\left(v^\mu + \frac{\epsilon}{2}a^\mu + \frac{\epsilon^2}{6}\dot{a}^\mu\right)\left(v^\mu + \epsilon a^\mu + \frac{\epsilon^2}{2}\dot{a}^\mu\right) \\ &= (\epsilon)\left(1 - \frac{\epsilon^2}{6}a^2\right) \end{aligned} \tag{F.10}$$

y

$$\begin{aligned} a\cdot D &= (a^\mu + \epsilon\dot{a}^\mu)(\epsilon)\left(v^\mu + \frac{\epsilon}{2}a^\mu + \frac{\epsilon^2}{6}\dot{a}^\mu\right) \\ &= -\frac{\epsilon^2}{2}a^2 + O(\epsilon^3) \end{aligned} \tag{F.11}$$

Como $V^\mu = v^\mu - \rho(\overset{u}{\perp}a)^\mu$ y $(\overset{u}{\perp}a)^\mu = a^\mu + (a\cdot D)\,v^\mu$, se tiene que

$$\begin{aligned} V^\mu &= v^\mu - \rho a^\mu - (a\cdot D)\left(\frac{D^\mu}{\rho} + v^\mu\right) \\ &\approx v^\mu - \epsilon a^\mu \end{aligned} \tag{F.12}$$

Con todo esto, resulta que

$$(v_\nu + \epsilon a_\nu)(D^\mu V^\nu) = (-\epsilon)\left(v^\mu + \frac{\epsilon}{2}a^\mu + \frac{\epsilon^2}{6}\dot{a}^\mu\right)\left(1 + \epsilon^2 a^\mu\right) \tag{F.13}$$

$$(v_\nu + \epsilon a_\nu)(D^\nu V^\mu) = (-\epsilon)\left(1 + \frac{\epsilon^2}{3}a^2\right)(v^\mu + \epsilon a^\mu) \tag{F.14}$$

Finalmente, después de realizar algunos cálculos:

$$v_\nu F^{\mu\nu} = (-e)\left[-\frac{1}{2\epsilon}a^\mu + \frac{2}{3}a^2 v^\mu + \frac{1}{6}\dot{a}^\mu\right] \tag{F.15}$$

Sumando y restando $\frac{1}{2}\dot{a}^\mu$, resulta que

$$v_\nu F^{\mu\nu} = -(e^2)\left\{-\frac{1}{2\epsilon}(a^\mu + \epsilon\dot{a}^\mu) + \frac{2}{3}(\dot{a}^\mu + a^2 v^\mu)\right\} \tag{F.16}$$

como $a^\mu(s+\epsilon) = (a^\mu + \epsilon\dot{a}^\mu)$

$$v_\nu F^{\mu\nu} = -(e^2)\left\{-\frac{1}{2\epsilon}a^\mu(s+\epsilon) + \frac{2}{3}(\dot{a}^\mu + a^2 v^\mu)\right\} \tag{F.17}$$

Como resultado, se tiene que la ecuación de movimiento (F.2) toma finalmente la forma:

$$m_0 a^\mu(s+\epsilon) = -(e^2)\left\{-\frac{1}{2\epsilon}a^\mu(s+\epsilon) + \frac{2}{3}(\dot{a}^\mu + a^2 v^\mu)\right\} + f^\mu \tag{F.18}$$

Haciendo la sustitución,

$$(m_0 - \delta m)\, a^\mu(s+\epsilon) = -\frac{2}{3}(e^2)(\dot{a}^\mu + a^2 v^\mu) + f^\mu \tag{F.19}$$

donde $\delta m = \frac{e^2}{2\epsilon}$ se le denomina *Autoenergía* o masa de origen electromagnético. Haciendo el proceso de renormalización de la masa, esto es tomar el límite cuando $\epsilon \longrightarrow 0$, se tiene la forma final de la ecuación de Dirac-Lorentz:

$$ma^\mu = -\frac{2}{3}(e^2)(\dot{a}^\mu + a^2 v^\mu) + f^\mu \tag{F.20}$$

15.7. G) Partículas cargadas con estructura

Después de haber analizado la interacción de las partículas (puntuales) cargadas con el campo electromagnético, se considerará ahora el caso en el que la carga de la partícula se encuentra uniformemente distribuída sobre un volumen. Para realizar esto, hay que tener en cuenta ciertas consideraciones adicionales a las impuestas sobre las cargas puntuales[41].

1) Dada la cción de una partícula cargada interactuando con el campo electromagnético

$$S = -m_0 \int d\tau \sqrt{\dot{z}\cdot\dot{z}} - \int d^4x \left(A_\mu j^\mu + \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) \tag{G.1}$$

se deben seguir cumpliendo conjuntamente las ecuaciones acopladas para el campo y la partícula

$$\partial^\nu F_{\mu\nu} + 4\pi\ j_\mu = 0 \tag{G.2}$$

$$m_0 a^\lambda - e v_\mu F^{\lambda\mu} = 0 \tag{G.3}$$

junto con la identidad de Bianchi[10]

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0 \tag{G.4}$$

además de la conservación de la cuadri-corriente $\partial_\mu j^\mu = 0$.

2) Se debe mantener la invarianza de Lorentz.

Para poder cumplir con estos dos requerimientos, se debe postular una distribución de corriente j^μ, que transforme de una manera definida bajo las transformaciones de Lorentz, ya que como se sabe, según los efectos de contracción del espacio predichos por la relatividad especial, en el sentido estricto no existirían cuerpos rígidos; por lo tanto, y desde el punto de vista más formal, cuando se pretende construir una teoría basada en partículas cargadas que poseen estructura interna, se hace mas díficil el análsis que en el caso en el que la partícula sea puntual, debido a que hay que introducir nuevas relaciones que permitan cancelar los efectos ya descritos.

En 1905-1906 [3], Poincaré propuso un modelo que permitiera describir partículas cargadas con distribuciones de cargas definidas sobre un volumen, postulando un nuevo tensor de campo $P^{\mu\nu}$ llamado *Tensor de Poincaré*, de origen no electromagnético(fuerzas internas), y que permitiera proporcionar estabilidad a la partícula, manteniendo su estructura. Debido a esto, el tensor para la partícula y el campo, estaría determinado por la relación[3]:

$$S^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + P^{\mu\nu} \tag{G.5}$$

Más tarde, Schwinger (1983) propuso que éste nuevo tensor debía tener la forma:

$$P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} t(z) \tag{G.6}$$

donde $t(z)$ es una función que puede ser construída a partir de los supuestos determinados anteriormente sobre las transformaciones de Lorentz. De acuerdo a como se explica en [3], la introducción del tensor de Poincaré en el modelo, induce sobre la partícula un nuevo tipo de fuerzas de cohesión que permitan balancear la fuerza de Lorentz, y por lo tanto obtener la estabilidad deseada. Debido a lo anterior, se debe cumplir que:

$$\partial_\mu(\Theta^{\mu\nu} + P^{\mu\nu}) = 0 \tag{G.7}$$

Para el caso en el que el potencial sea avanzado, se deberá escoger $P^{\mu\nu}$, de tal forma que se cumpla la igualdad (G.7).

Bibliografía

[1] A. Guijosa, *Notas curso Teoría Cuántica de Campos* (Universidad Autónoma de México).

[2] J.M. Tejeiro, *Sobre la teoría especial de la Relatividad,* Primera edición (Panamericana Formas e Impresos S.A. Bogotá, Colombia, 2005).

[3] J. Jackson, *Classical Electrodynamics, Third Edition* (Wiley, New York, NY, U.S.A., 1999).

[4] L.W. Tu, *An Introduction to Manifolds, Second Edition* (Universitext. Springer, New York, 2011).

[5] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields - Volume I: Foundations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

[6] E.P. Wigner, *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group,* Ann. Math. **40**, 149 (1939).

[7] G. Costa and G. Fogli, *Symmetries and Group Theory in Particle Physics: An Introduction to Space-time and Internal Symmetries* (Springer-Verlag, 2011)

[8] A.O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover Publications, Inc. New York, 1980)

[9] J. Polonyi, *Elements of Quantum Field Theory* (Course Notes, University of Strasbourg, France, 2012).

[10] B.P. Kosyakov, *Introduction to the Classical Theory of Particles and Fields* (Springer Science+Busines Media, 2006)

[11] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley and Sons, Inc. U.S.A., 1972).

[12] H. Goldstein, C.P. Poole and J.L. Safko, *Classical Mechanics, Third Edition* (Pearson Education Limited, 2013).

[13] B. Thaller, *The Dirac Equation* (Springer-Verlag, 1991).

[14] J. M. Muñoz, *El Tiempo y la Teoría de Conjuntos*, Universidad Nacional de Colombia. Ideas y Valores No. 92-93, Diciembre 1993, Bogotá Colombia.

[15] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (Taylor and Francis Group, LLC, Great Britain, 2003).

[16] P.G. Frè, *Gravity, a Geometrical Course - Volume 1: Development of the Theory and Basic Physical Applications* (Springer Science+Busines Media Dordrecht, 20013).

[17] M.E. Peskin and D.V Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, 1995).

[18] L. Debnath, *Nonlinear Partial Differential Equations, Third Edition* (Springer Science+Busines Media, 2012).

[19] A.N. Tikhonov and A.A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics* (Dover Publications, Inc. New York, 1990).

[20] P.A. Dirac, *Classical Theory of Radiating Electrons*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **167**, 148 (1938).

[21] E. Poison, *An Introduction to the Lorentz-Dirac Equation,* Department of Physics, University of Guelph, Guelph, Ontario, Canada. http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9912045.pdf.

[22] S. E. Gralla, A. I. Harte and R. M. Wald, *A rigorous derivation of electromagnetic self-force,* Phys. Rev. **D80**, 024031 (2009).

[23] F. Rohrlich, *Classical charged particles* (Addison-Wesley, Redwood City, CA, U.S.A., 1990).

[24] C.Teitelboim, *Splitting of the Maxwell Tensor: Radiation Reaction Without Advanced Fields,* Phys. Rev. **D1**, 1572 (1970); **2**, 1763(E) (1970).

[25] C.Teitelboim, *Splitting of the Maxwell Tensor. II. Sources,* Phys. Rev. D, 3, 297 (1971).

[26] C. Teitelboim, D. Villarroel, and C. van Weert, *Classical electrodynamics of retarded fields and point particles,* Riv. Nuovo Cimento **3**, 9 (1980).

[27] R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics, Second Edition* (Plenum Press, New York, 1994).

[28] Edited By: A.O. Barut, *Foundations Of Radiation Theory and Quantum Electrodynamics* (Plenum Press, New York, 1980).

[29] C. A. López and D. Villarroel, *Bound and Emitted Angular Momenta of a Classical Accelerated Point Charge,* Phys. Rev. **D11,** 2724 (1975).

[30] C. A. López, *Splitting in Energy and Splitting in Angular Momentum of the Classical Field of a Radiating Point Charge,* Phys. Rev. **D17**, 2004 (1978).

[31] R.P. Feynman, *The Theory of Positrons,* Phys. Rev. **76**, 749 (1949).

[32] J.P. Costella, B.H.J. McKellar and A.A. Rawlinson, *Classical Antiparticles*, The University of Melbourne, Australia. http://arxiv.org/abs/hep-ph/9704210.

[33] T. Luob, Y. Guob, *Infinite-dimensional Hamiltonian description of a class of dissipative mechanical systems*, Institute of Applied Mechanics, Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou, Zhejiang, 310027, P.R.China. http://arxiv.org/abs/0906.3062.

[34] M. Blasone , E. Graziano , O.K. Pashaev and G. Vitiello, *Dissipation and Topologically Massive Gauge Theories in Pseudoeuclidean Plane,* Dipartimento di Fisica Universit'a di Salerno, 84100 Salerno, Italy and INFN Gruppo Collegato Salerno, Joint Institute for Nuclear Research Dubna (Moscow) 141980, Russian Federation. http://arxiv.org/abs/hep-th/9603092.

[35] H. Bateman (1931), *On dissipative systems and related variational principles*. Phys Rev 38(4):815–819, DOI 10.1103/PhysRev.38.815.

[36] P. Morse, H. Feshbach (1953), *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill,New York.