COMPACIDAD COMPENSADA APLICADA A LOS SISTEMAS DE LEYES DE CONSERVACIÓN HIPERBÓLICOS DE TIPO CUADRÁTICO Y LE-ROUX

JUAN CARLOS JUAJIBIOY OTERO

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
BOGOTÁ, 2011

COMPACIDAD COMPENSADA APLICADA A LOS SISTEMAS DE LEYES DE CONSERVACIÓN HIPERBÓLICOS DE TIPO CUADRÁTICO Y LE-ROUX

JUAN CARLOS JUAJIBIOY OTERO

Trabajo de Grado presentado para optar al título de Magíster en Ciencias Matemáticas

DIRIGIDO POR: LEONARDO RENDÓN ARBELÁEZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
BOGOTÁ
MAYO 2011

RESUMEN: Se trata de aplicar el método de compacidad compensada a un par de sistemas de leyes de conservación bidimensionales. El método fue aplicado satisfactoriamente a los mismos sistemas pero para el caso no homogéneo. Posteriormente y con el mismo éxito se logró resolver el caso no homogéneo, aquí realizamos una lectura cuidadosa para tratar de modificar algunas demostraciones del caso no homogéneo.

PALABRAS CLAVE: Compacidad compensada, Flujos cuadráticos, Regiones invariantes, Medidas de Young, Principio del Máximo.

ABSTRACT: In this work I do a deep reading of papers CONSERVATION LAWS I: VISCOSITY SOLUTIONS, CONSERVATION LAWS II: WEAK SOLUTIONS, of the following authors: Jin Yan, Zhixin Cheng and Ming Tao, in which is resolved the Cauchy problem for two hyperbolic systems of conservation laws two dimensional. Then I tried to change some results for finally to get some news proof in this papers.

Índice general

Introducción 1

1. Preliminares **3**

1.1. Algunos resultados de Análisis Funcional 3

1.2. Compacidad Compensada 3

1.3. Sistemas Hiperbólicos de Leyes de Conservación 2×2 5

1.3.1. Condición de Entropía 6

2. Soluciones Viscosas y algunos teoremas para ecuaciones Parabólicas **7**

3. Aplicaciones a un Sistema de Leyes de Conservación con Flujo Cuadrático **13**

3.1. Soluciones Viscosas 14

3.2. Soluciones Débiles 15

3.2.1. Construcción de los pares Entropía-Entropía Flujo de tipo Lax 15

3.2.2. Compacidad de $\eta_t + q_x$ en H^{-1}_{Loc} 17

3.2.3. Existencia de Soluciones Débiles 18

4. Aplicaciones a Sistemas de tipo Le Roux **21**

4.1. Soluciones Viscosas 21

4.2. Soluciones Débiles 24

4.2.1. Construcción pares Entropía-Entropía Flujo del tipo de Lax. 24

4.2.2. Compacidad de $\eta_t + q_x$ en H^{-1}_{Loc} 26

4.2.3. Existencia de Soluciones Débiles 28

5. Aplicaciones **30**

Introducción

La ecuación parabólica

$$u_t + uu_x - \epsilon u_{xx} = 0,$$

fue introducida por Burger como el modelo mas simple para el flujo de un fluido. Particularmente, él estudió el comportamiento de esta ecuación para casos limite haciendo tender ϵ a cero. Así se tiene la nueva ecuación

$$u_t + (\frac{1}{2}u)_x = 0$$

llamada la ecuación de Burger. En [8] se prueba que el problema de Cauchy para le ecuación de Burger debería tener solución discontinua aún si el dato inicial es suficientemente suave. Así que surgió el estudio de un tipo más general de ecuaciones de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{0.1}$$

llamadas **ecuaciones escalares de leyes de conservación** en las que persiste la ausencia de soluciones clásicas para el problema de cauchy (ver [1])

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{0.2}$$

Sin embargo, observe que si $\phi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ integrando en (0.1) y usando la formula de Green tenemos

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \{u\phi_t + f(u)\phi_x\} dxdt + \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\phi(x,0)dx. \tag{0.3}$$

Observe que (0.3) se tiene si u es una solución clásica y ϕ era una función arbitraria en $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$. Usando este hecho se define el concepto de solución débil en el siguiente sentido,

Definición 0.1. Sean $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$. Una función $u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ es llamada una solución débil del problema de Cauchy (0.2) si u satisface (0.3) para toda $\phi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$

En ([7],[6]) se prueba que (0.2) tiene soluciones débiles si $u_0 \in \mathbf{H}^2(\mathbb{R})$ y f es continuamente diferenciable. Para ello se introduce un término de viscosidad y se estudia el comportamiento de las soluciones de la ecuación parabólica

$$u_t + f(u)_x = \epsilon u_{xx}. \tag{0.4}$$

Al trabajar con ecuaciones del tipo (0.4), surge el método de compacidad Compensada sobre el cual hablaremos en los preliminares.

El método de compacidad compensada no se limita únicamente a (0.1), ya que si consideramos el sistema de Leyes de Conservación

$$\begin{cases} u_t^1 + f^1(u)_x = 0, \\ \vdots \\ u_t^n + f^n(u)_x = 0, \end{cases} \tag{0.5}$$

podemos razonar de la misma manera como solucionamos (0.1).

En este trabajo estamos interesados sistemas de Leyes de Conservación 2×2 muy particulares. El primero una clase de sistemas de flujo cuadrático

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(3u^2 + v^2)_x = 0, \\ u_t + (uv)_x = 0. \end{cases} \tag{0.6}$$

Y el segundo un sistema del tipo Le Roux

$$\begin{cases} u_t + (u^2 + v)_x = 0, \\ u_t + (uv)_x = 0. \end{cases} \tag{0.7}$$

El caso homogéneo para esta clase de sistemas fue resuelto en [6]. Así que nos ocuparemos del caso no homogéneo siguiendo las líneas de ([2],[3]).

Cápitulo 1

Preliminares

En esta sección introducimos algunas definiciones y teoremas que nos serán útiles en adelante. No se hace la demostración de ninguno de los resultados sino que los remitimos directamente a las referencias ([6],[7],[8],[9]) donde se puede consultar la demostración de cada uno de ellos.

1.1. Algunos resultados de Análisis Funcional

Cuando tenemos una función continua y convexa

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

y una sucesión de funciones $(u_n) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$ el limite de la sucesión y el limite del $(f(u_n))$ no son del todo independientes, por ejemplo si $u_n \rightharpoonup u$ en $\mathbf{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$ débil $*$ y $f(u_n) \rightharpoonup l$ en $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ débil $*$ entonces se tiene que $l \geq f(u)$ a.e x. Además si la sucesión (u_n) es tal que $u_n \rightharpoonup u$ en $\mathbf{L}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$ débil $*$ y $u_n(x) \in K$ a.e, entonces $u(x)$ esta en la envoltura convexa de K para a.e x.([5])

El siguiente teorema dará una respuesta a este problema

Teorema 1.1. *Suponga que K es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^p$, y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto abierto. Si $u_n : \Omega \to \mathbb{R}^p$, $u_n(x) \in K$ a.e x, entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) y una familia de medidas de probabilidad $\{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ con spt $\subset \overline{K}$ tal que si f es una función continua en $\mathbb{R}^p$ y*

$$\overline{f(x)} =< \nu_x, f(\lambda) >= \int_{\mathbb{R}^p} f(\lambda) d\nu_x(\lambda) \tag{1.1}$$

entonces $f(u_n(x)) \rightharpoonup \overline{f(u(x))}$ débil $*$ en $\mathbf{L}^\infty$.

Usaremos la notación de ([6]) para el limite anterior, es decir $f(u_n(x)) \rightharpoonup \overline{f(u(x))}$ débil $\star$ en $\mathbf{L}^\infty$, lo denotaremos como

$$L^\star - \lim f(u_n(x)) = \overline{f(u(x))}$$

1.2. Compacidad Compensada

Empezamos introduciendo un espacio funcional que utilizaremos en adelante. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Para $p \in [1, \infty)$ introducimos el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ definido de la siguiente manera,

$$W^{m,p} = \{u \in \mathbf{L}^p : \mathrm{D}^\alpha \in \mathbf{L}^p \text{para todo } \alpha \leq m\} \tag{1.2}$$

provisto de la norma que denotaremos según ([4])

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \sum_{\alpha \leq m} \|D^\alpha u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}.$$

En particular vamos a usar el espacio $\mathbf{H}^m = W^{m,2}$. El dual de $H_0^1(\Omega)$ es denotado por $H^{-1}(\Omega)$ y puede ser caracterizado como el espacio de las distribuciones de la forma

$$g = g_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}, \ i = 1, \cdots, n, \tag{1.3}$$

y el paréntesis de dualidad entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ es dado por

$$< g, v >= \int_\Omega (g_0 - \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega), g_i \in H^{-1}(\Omega). \tag{1.4}$$

Será útil recordar algunas propiedades de estos espacios:

1. Conjunto acotados en $\mathbf{L}^2_{Loc}(\Omega)$ son relativamente compactos en $H^{-1}(\Omega)$.

2. Si (g_n) es una sucesión que converge fuertemente en $\mathbf{L}^2_{Loc}(\Omega)$ entonces $\frac{\partial g_n}{\partial x_i}$ converge fuertemente en $H^{-1}(\Omega)$.

Lema 1.2 (Lema de Murat)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y sea (g_n) una sucesión de distribuciones tales que:*

1. *(f_n) es acotada en $W^{-1,r}_{Loc}(\Omega)$, para algún $r > 1$,*

2. *$f_n = g_n + h_n$ donde (g_n) es compacta en $H_0^1(\Omega)$ y (h_n) es acotada en (Ω),*

Entonces (f_n) es pre-compacta en $H^{-1}_{Loc}(\Omega)$

Teorema 1.3 (Teorema del Divergente Rotacional)**.** *Sean M una matriz simétrica de tamaño $n \times n$, y*

$$f(u) =< Mu, u >,$$

supongamos que

1. *$u_\epsilon \rightharpoonup u$ en $\mathbf{L}^2(\Omega; \mathbb{R}^m)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*
2. *$f(u) \rightharpoonup l$ en el sentido de las distribuciones,*
3. *$(Au_\epsilon)_i = \sum_{i,j} a_{ijk} \frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_x}$ pertenece a un subconjunto compacto de $H^{-1}(\Omega)$*

y sea

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m : \textit{existe } \xi \in \mathbb{R}^n - 0 \textit{tal que} \sum_{ijk} a_{ijk} \lambda_j \xi_k = 0, \ i = 1, \cdots, q\}, \tag{1.5}$$

entonces

1. *Si* $f(\lambda) \geq 0$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$ *entonces* $l \geq f(u)$

2. *Si* $f(\lambda) = 0$ *para todo* $\lambda \in \Lambda$ *entonces* $l = f(u)$

Corolario 1.4 (Continuidad Débil del Determinante)**.** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R} \times [0, \infty)$ *un conjunto abierto y acotado y sea* (u^ϵ) *una sucesión de funciones* $u^\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}^4$ *tal que*

$$u^\epsilon \rightharpoonup u en\ \mathbf{L}^2(\Omega) \tag{1.6}$$

y tal que $\frac{\partial u_1^\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial u_2^\epsilon}{\partial x}$, $\frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial u_4^\epsilon}{\partial x}$ *están en un conjunto compacto de* $H^{-1}_{Loc}(\Omega)$*, entonces existe una sucesión (que seguiremos denotando de la misma manera) tal que*

$$\begin{vmatrix} u_1^\epsilon & u_2^\epsilon \\ u_3^\epsilon & u_4^\epsilon \end{vmatrix} \rightharpoonup \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{vmatrix}, \textit{en el sentido de las distribuciones} \tag{1.7}$$

1.3. Sistemas Hiperbólicos de Leyes de Conservación 2×2

Un sistema Hiperbólico de Leyes de Conservación 2×2 es un sistema de la forma

$$\begin{cases} u_t + f(u,v)_x = 0, \\ v_t + g(u,v)_x = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

donde $u, v : \Omega \subset \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Haciendo $U = (u, v)$, $F(U) = (f, g)$ entonces podemos escribir (1.8) como

$$U_t + dF(U)U_x = 0, \tag{1.9}$$

donde $dF(U)$ es la matriz Jacobiana de F.

Definición 1.5. Si $dF(U)$ tienes dos valores propios reales entonces decimos que (1.9) es un sistema hiperbólico. Si los dos valores propios son distintos entonces (1.9) es un sistema estrictamente hiperbólico. Si los valores propios coinciden en un punto en en algún dominio D entonces decimos que (1.9) es hiperbólico degenerado

Aunque para el método que vamos a desarrollar no se exige que el sistema (1.9) sea estrictamente hiperbólico nosotros vamos a asumir que (1.9) es estrictamente hiperbólico. Aunque con una característica adicional de estos sistemas podemos usas las mismas ideas.

Definición 1.6. El sistema (1.8) se llama genuinamente lineal en el campo característico λ_i, $i = 1, 2$ si

$$\nabla \lambda_i r_i \neq 0 \tag{1.10}$$

para $i = 1, 2$. Si $\nabla \lambda_i r_i = 0$ para $i = 1$ o $i = 2$ en algún dominio D entonces decimos que el sistema (1.8) es lineal degenerado en el campo característico λ_i, para $i = 1$ o $i = 2$.

1.3.1. Condición de Entropía

Consideramos una aproximación de (1.8) dada por el sistema parabólico

$$U^\epsilon + F(U^\epsilon)_x = \epsilon U^\epsilon_{xx}. \tag{1.11}$$

Definición 1.7. Un par de funciones $\eta, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se llaman un par entropía flujo del sistema (1.8) si satisfacen la ecuación

$$\nabla q = \nabla \eta dF(U). \tag{1.12}$$

Multiplicando (1.11) por $\nabla\eta$ tenemos

$$\underbrace{\eta(U^\epsilon)_t + q(U^\epsilon)_x - \epsilon\eta(U^\epsilon)_{xx}}_{I} + \underbrace{\epsilon U^\epsilon H\eta(U^\epsilon)(U^\epsilon)^T}_{II} = 0. \tag{1.13}$$

Si η es una función convexa, entonces conocemos el signo de (II), si además imponemos las condiciones

$$\begin{cases} U^\epsilon \text{ sea acotada en } \mathbf{L}^\infty(\Omega) \times \mathbf{L}^\infty(\Omega) \\ \sqrt{\epsilon} U^\epsilon_x \text{ sea acotada en } \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega), \end{cases} \tag{1.14}$$

entonces pasando al limite en (I) debemos tener que

$$\eta(U)_t + q(U)_x \leq 0. \tag{1.15}$$

Que constituye una condición de entropía. Queremos usar (3.1) para aplicar el teorema del Divergente Rotacional; por (1.14) tenemos que $\eta(U^\epsilon)$, $q(U^\epsilon)$ son acotadas en $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ y $\epsilon\eta(U^\epsilon)$ converge fuertemente en $H^{-1}_{Loc}(\Omega)$, el termino (II) solo es acotado en en $\mathbf{L}^1(\Omega)$ pero podemos usar el Lema de Murat.(ver [9]) Con estas estimaciones a la mano podemos extraer una subsucesión que converge a una medida de probabilidad $\nu_{x,t}$ y utilizando el corolario (1.4), el teorema (1.1) y haciendo $v_1 = \eta_1(U)$, $v_2 = q_2(U)$, $v_3 = \eta_2(U)$, $v_4 = q_2(U)$ tendríamos que existe una medida de probabilidad $\nu = \nu_{x,t}$ satisfaciendo

$$< \nu, q_1\eta_2 - q_2\eta_1 > = < \nu, q_1 >< \nu, \eta_2 > - < \nu, q_2 >< \nu, \eta_1 >$$

El problema se reduce entonces a mostrar que esta medida de probabilidad es una medida de Dirac.

Si escribimos (1.12) en base a los valores propios de dF obtenemos

$$\nabla q r_2 = \lambda_2 \nabla r_2,$$

y

$$\nabla q r_1 = \lambda_1 \nabla r_1,$$

para un caso 2×2 podríamos pensar hacer un cambio de coordenadas y para eso vamos a utilizar la siguiente definición,

Definición 1.8. Dos funciones $W = W(u, v)$, $Z(u, v)$ son llamadas invariantes de Riemann correspondientes a los valores propio $\lambda 1$, λ_2 si satisfacen las ecuaciones

$$\nabla W \cdot r_1 = 0, \ \nabla Z \cdot r_2 = 0. \tag{1.16}$$

Cápitulo 2

Soluciones Viscosas y algunos teoremas para ecuaciones Parabólicas

Consideramos el problema de Cauchy para el siguiente sistema parabólico

$$\begin{cases} u_t + f_1(u,v) + g_1(u,v) = \epsilon u_{xx}, \\ v_t + f_2(u,v) + g_2(u,v) = \epsilon v_{xx}, \end{cases} \tag{2.1}$$

con dato inicial medible y acotado

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), & |u_0(x)| \leq M, \\ v(x,0) = v_0(x), & |v_0(x)| \leq M. \end{cases} \tag{2.2}$$

Teorema 2.1. *Suponga que $f_i \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^2)$ y que g_i son funciones Localmente Lipschitz Continuas. Entonces el problema de cauchy (2.1), (2.2) tiene solución única $u, v \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R} \times (0, T_0))$ para todo $T_0 > 0$ suficientemente pequeño. Además esta solución depende únicamente en la norma $\mathbf{L}^\infty$ del dato inicial y*

$$|u(x,t)| \leq 2M, \ |v(x,t)| \leq 2M.$$

Para demostrar este teorema vamos a considerar unas definiciones y lemas preliminares. Sea

$$B = \Big\{(u,v) : u, v \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R} \times (0, T_0)) \cap \mathbf{L}^\infty(D)\Big\},$$

donde $D = \mathbb{R} \times [0, T]$ Definimos en B la norma

$$\|(u,v)\|_B = \|u\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} + \|v\|_{\mathbf{L}^\infty(D)}.$$

Observe que si $(u_k, v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en B como

$$\|u\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} \leq \|(u,v)\|$$

entonces $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de cauchy en $\mathbf{L}^\infty(D)$, como este es un espacio de Banach la sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente en $\mathbf{L}^\infty(D)$. Podemos concluir lo mismo de $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y por lo tanto B es un espacio de Banach. Sea

$$B_T = \Big\{(u,v) \in B : \|u\|_{\mathbf{L}^\infty(D)}, \|v\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} \leq 2M\Big\}.$$

Lema 2.2. *B_T es un subconjunto convexo, acotado y cerrado de B.*

Lema 2.3. *Sea*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

una función localmente Lipschitz continua y sean (u, v), (u_1, u_2), (v_1, v_2) *en* B_T *entonces existen constantes* $L > 0$ *y* $L_F > 0$ *tales que*

$$|F(u, v)| \leq L$$

y

$$|F(u_1, u_2) - F(v_1 - v_2)| \leq L_F \|(u_1 - v_1, u_2 - v_2)\|_B.$$

Demostración. La primera desigualdad se tiene gracias a que si $(u, v) \in B_T$ entonces $u(x, t)$, $v(x, t)$ están en el intervalo $[0, 2M]$ para casi todo $(x, t) \in D$, luego F es acotada en este compacto. La segunda desigualdad es por definición. □

Lema 2.4. *Sea* $K(x, t)$ *la solución fundamental del operador* $\frac{\partial}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, *es decir*

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} e^{\frac{-x^2}{4\epsilon t}}$$

entonces,

1.

$$\int_{\mathbb{R}} K(x, t) dx = 1$$

para todo $t > 0$.

2.

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} K(\cdot, t) \right\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R})} \leq \frac{c(k)}{t^{\frac{k}{2}}}.$$

Si (u, v) es una solución de (2.1), (2.2), entonces podemos escribir esta solución como

$$\begin{aligned} u(\cdot, t) &= K(t) * u_0 + \int_0^t \Big\{ K_x(t - s) * f_1(u(s), v(s)) - K(t - s) * g_1(u(s), v(s)) \Big\} ds \\ v(\cdot, t) &= K(t) * v_0 + \int_0^t \Big\{ K_x(t - s) * f_2(u(s), v(s)) - K(t - s) * g_2(u(s), v(s)) \Big\} ds, \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $K(t) * f(u(s), v(s))(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} K(\cdot - y, t) f(u(y, s), v(y, s)) dy$.

Ahora si demostramos el teorema (2.1).

Demostración. Defina la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{S}: & B_T & \to & B \\ & (u, v) & \mapsto & (\mathrm{S}_1(u, v), \mathrm{S}_2(u, v), \end{array} \tag{2.4}$$

donde $\mathrm{S}_1(u, v)(\cdot, t) = u(\cdot, t)$ y $\mathrm{S}_2(u, v)(\cdot, t) = v(\cdot, t)$ definidas como en la ecuación (2.3) donde con $(\cdot, t) \in D$ con

Ahora

$$\begin{aligned}|u(\cdot,t)| &\leq M + \int_0^t \Big\{ |K_x(t-s) f_1(u(s),v(s))| + |K(t-s) g_1(u(s),v(s))| \Big\} \\ &\leq M + 2L_{11} c(1)\sqrt{t} + L_{12} t,\end{aligned}$$

donde L_{11}, L_{12} son las constantes del lema (4.1), de la misma manera tenemos que

$$\begin{aligned}|v(\cdot,t)| &\leq M + \int_0^t \Big\{ |K_x(t-s) f_2(u(s),v(s))| + |K(t-s) g_2(u(s),v(s))| \Big\} \\ &\leq M + 2L_{21} c(1)\sqrt{t} + L_{22} t,\end{aligned}$$

donde L_{21}, L_{22} son las constantes del lema (4.1), si hacemos $L = \text{máx}\{L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}\}$ tenemos

$$\begin{aligned}|\mathrm{S}_1(u,v)(\cdot,t)| &\leq M + 2Lc(1)\sqrt{t} + Lt, \\ |\mathrm{S}_2(u,v)(\cdot,t)| &\leq M + 2Lc(1)\sqrt{t} + Lt.\end{aligned}$$

Si (u_1, v_1), (u_2, v_2) están en B entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(u_1,v_1) - \mathrm{S}(u_2,v_2) &= \Big((\mathrm{S}_1(u_1,v_1), \mathrm{S}_2(u_1,v_1)) - (\mathrm{S}_1(u_2,v_2), \mathrm{S}_2(u_2,v_2)) \Big) \\ &= \Big(\mathrm{S}_1(u_1,v_1) - \mathrm{S}_1(u_2,v_2), \mathrm{S}_2(u_1,v_1) - \mathrm{S}_2(u_2,v_2) \Big).\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}|f_1(u_1,v_1) - f_1(u_2,v_2)| &\leq L_{f_1} \|u_1 - u_2, v_1 - v_2\|_B \\ &\leq L_{f_1} \Big\{ \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} \Big\}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}|g_1(u_1,v_1) - g_1(u_2,v_2)| &\leq L_{g_1} \|u_1 - u_2, v_1 - v_2\|_B \\ &\leq L_{g_1} \Big\{ \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} \Big\},\end{aligned}$$

donde L_{f_1}, L_{g_1} son las constantes del lema (4.1), si tomamos $L_1 = \text{máx}\{L_{f_1}, L_{g_1}\}$ así tenemos que

$$|\mathrm{S}_1(u_1,v_1) - \mathrm{S}_1(u_2,v_2)| \leq \Big(2L_1 c(1)\sqrt{t} + L_1 t \Big) \Big(\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} \Big). \tag{2.5}$$

Haciendo exactamente las misma cuentas también tenemos,

$$|\mathrm{S}_2(u_1,v_1) - \mathrm{S}_2(u_2,v_2)| \leq \Big(2L_2 c(1)\sqrt{t} + L_2 t \Big) \Big(\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} \Big). \tag{2.6}$$

Si hacemos $L = \text{máx}\{L_1, L2\}$ tenemos

$$|\mathrm{S}_1(u_1,v_1) - \mathrm{S}_1(u_2,v_2)| \leq \Big(2Lc(1)\sqrt{t} + Lt \Big) \Big(\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} \Big)$$

y

$$|\mathrm{S}_2(u_1,v_1) - \mathrm{S}_2(u_2,v_2)| \leq \Big(2Lc(1)\sqrt{t} + Lt \Big) \Big(\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} \Big),$$

luego

$$\|\mathrm{S}(u_1,v_1) - \mathrm{S}(u_2,v_2)\|_B \leq 2\Big(2Lc(1)\sqrt{t} + Lt \Big) \Big(\|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} + \|v_1 - v_2\|_{\mathbf{L}^\infty(D)} \Big).$$

Si tomamos $T_0 > 0$ tal que

$$2K\sqrt{T_0} + KT_0 \leq M, \quad 2\Big(2Lc(1)\sqrt{t} + Lt\Big) < 1,$$

tenemos que S es una aplicación contractiva en B_{T_0} y por el teorema del punto fijo de Brouwer-Schauder existe un único punto $(u^\epsilon, v^\epsilon) \in B_{T_0}$ tal que

$$\mathrm{S}(u^\epsilon, v^\epsilon) = (u^\epsilon, v^\epsilon),$$

es decir, el problema de Cauchy (2.1), (2.2) tiene una solución $(u^\epsilon, v^\epsilon) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R} \times (0, T_0))$ y

$$|u^\epsilon| \leq 2M, \ |v^\epsilon| \leq 2M.$$

□

Corolario 2.5. *Si la solución del problema de Cauchy (2.1), (2.2), tiene una estimación a priori*

$$|u^\epsilon(x,t)| \leq M(T),$$
$$|v^\epsilon(x,t)| \leq M(T)$$

para todo $t \in \mathbb{R} \times [0,T]$, entonces la solución existe en $\mathbb{R} \times [0,T]$. En particular, si existe $N > 0$ tal que

$$\|u^\epsilon\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))} \leq N,$$
$$\|v^\epsilon\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))} \leq N,$$

entonces la solución $(u^\epsilon, v^\epsilon) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R} \times (0,\infty))$.

Demostración. Si la solución tiene una estimativa a priori

$$|u(x,t)| \leq M(T), \quad |v(x,t)| \leq M(T)$$

para todo $t \in [0,T]$, entonces

$$|u_0(x)| \leq M(T), \quad |v_0(x)| \leq M(T).$$

Ahora bien, por el teorema (2.1) existe un τ que depende de $M(T)$ tal que el problema de Cauchy (2.1), (2.2) tiene solución única $(u^\epsilon(x,t), v^\epsilon(x,t))$ en $\mathbb{R} \times [0,T]$ y

$$|u^\epsilon(x,t)| \leq 2M(T), \quad |v^\epsilon(x,t)| \leq 2M(T)$$

para todo $t \in [0,\tau]$. Puesto que la solución tiene una estimativa

$$|u^\epsilon(x,\tau)| \leq M(T), \quad |v^\epsilon(x,\tau)| \leq M(T),$$

si consideramos τ como tiempo inicial entonces de la misma manera podemos probar que la solución existe en $\mathbb{R} \times [\tau, 2\tau]$ y

$$|u^\epsilon(x,t)| \leq 2M(T), \quad |v^\epsilon(x,t)| \leq 2M(T)$$

para todo $t \in [\tau, 2\tau]$, luego tenemos

$$|u^\epsilon(x,2\tau)| \leq 2M(T), \quad |v^\epsilon(x,2\tau)| \leq 2M(T)$$

y así podemos extender τ a T paso a paso, donde τ va dependiendo únicamente de $M(T)$. En particular si la solución tiene una estimativa a priori

$$\|u^\epsilon\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty))} \leq N, \quad \|v^\epsilon\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}\times[0,\infty))} \leq N,$$

entonces la solución existe en $\mathbb{R} \times [0,\infty)$. □

Lema 2.6. *Suponga que $v^\epsilon(x,t)$ satisface la siguiente ecuación parabólica*

$$v_t + (vf(u,v))_x + g(u,v) = \epsilon v_{xx}, \tag{2.7}$$

y $v(x,0) = v_0(x) \geq \delta > 0$. Donde $f(u,v) \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R})^2$, $g(u,v)$ es localmente Lipchitz continua y $g(u,v) = vh(u,v)$, $h(u,v) \in \mathbf{C}(\mathbb{R})^2$. Si $|u(x,t)| \leq M(\epsilon,\delta,T)$, $|v^\epsilon(x,t)| \leq M(\epsilon,\delta,T)$ en $R \times T$, entonces la solución $v^\epsilon(x,t)| \geq c(\epsilon,\delta,t) > 0$ en $R \times T$, donde $c(\epsilon,\delta,t)$ tiende a cero cuando δ, ϵ tiende a cero o t tiende al onfinito.

Demostración. Haciendo $w = \log v$ tenemos que la ecuación (3.1) se transforma en

$$w_t = \epsilon w_{xx} + \epsilon\left(w_x - \frac{f(u,v)}{2\epsilon}\right)^2 - f(u,v)_x - \frac{f(u,v)^2}{4\epsilon} - h(u,v), \tag{2.8}$$

entonces la solución puede ser representada por

$$w = I_\epsilon + J_\epsilon,$$

donde

$$\begin{cases} I_\epsilon = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,t)w_0(y), \\ J_\epsilon = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left[\epsilon(w_x - \frac{f(u,v)}{2\epsilon})^2 - f(u,v)_x - h(u,v)\right] K(x-y,t-s)dyds, \end{cases} \tag{2.9}$$

donde $K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} e^{\frac{-x^2}{4\epsilon t}}$.
Como $v_0 \geq \delta$ entonces $\log(v_0(x)) = w_0(x) \geq \delta$; luego $I_\epsilon \geq \delta$. Para J_ϵ tenemos que $(\epsilon(w_x - \frac{f(u,v)}{2\epsilon})) \geq 0$ y

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left[-f(u,v)_x - \frac{f^2(u,v)}{4\epsilon} - h(u,v)\right] K(x-y,t-s)\right) dyds$$

$$=$$

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(u,v)K_x(x-y,t-s) - \left(\frac{f^2(u,v)}{4\epsilon} + h(u,v)\right) K(x-y,t-s)\right) dyds.$$

□

Lema 2.7. *Suponga que $u(x,t)$ satisface la ecuación parabólica*

$$u_t + a(u,x,t)u_x + g(u,x,t) = u_{xx}, \tag{2.10}$$

y $|u(x,0)| \leq M$, $|g(u,x,t)| \leq C|u| + B$, donde C y B son constantes estrictamente positivas y $a(u,x,t)$ es acotada. Entonces para cualquier $T > 0$ existe una constante $M(T) > 0$ tal que $|u(x,t)| \leq M(T)$ en $R \times [0,T]$.

Demostración. Ver ([3]) □

Corolario 2.8. *Suponga que $u(x,t) \geq$, (≤ 0) satisface*

$$u_t + a(u,x,t)u_x + g(u,x,t) \leq (\geq) u_{xx}, \tag{2.11}$$

y $|u(x,0)| \leq M$, $|g(u,x,t)| \leq C|u| + B$ donde C y B son constantes estrictamente positivas y $a(u,x,t)$ es acotada. Entonces para cualquier $T > 0$ existe una constante $M(T) > 0$ tal que $u(x,t) \leq M(T)$ $(u(x,t) \geq -M(T))$ en $R \times [0,T]$.

Demostración. Ver ([3]) □

Lema 2.9. *Sean $\phi_1(r)$, $\phi_2(r)$ soluciones de la ecuación Fuchsiana*

$$\phi^{''}(r) - (1 + \frac{c}{r^2})\phi(r) = 0, \tag{2.12}$$

donde c es una constante. Si $\phi_1(r) > 0$, $\phi_1^{'}(r) > 0$ para $r > 0$ entonces

$$\begin{cases} \frac{\phi_1^{'}(r)}{\phi_1(r)} = 1 + O(\frac{1}{r^2}), \\ c\phi_1(r)e^{-r} = 1 + O(\frac{1}{r}), \end{cases} \tag{2.13}$$

cuando r se aproxima al infinito. Si $\phi_2(r) > 0$, $\phi_2^{'}(r) > 0$ entonces

$$\begin{cases} \frac{\phi_1^{'}(r)}{\phi_1(r)} = -1 + O(\frac{1}{r^2}), \\ c\phi_1(r)e^{r} = 1 + O(\frac{1}{r}), \end{cases} \tag{2.14}$$

cuando r se aproxima al infinito, donde c_1, c_2 son dos constantes positivas adecuadas.

Demostración. Ver [6] □

Cápitulo 3

Aplicaciones a un Sistema de Leyes de Conservación con Flujo Cuadrático

En este capitulo vamos a aplicar el método de Compacidad Compensada a un caso particular de Sistema de Leyes de Conservación llamados Sistemas de Flujo Cuadrático. Dadas $u, v : \Omega \subset \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y dos funciones localmente Lipschitz continuas $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(3u^2 + v^2)_x + g_1(u, v) = 0, \ (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ v_t + (uv)_x + g_2(u, v) = 0 \ (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \end{cases} \tag{3.1}$$

con datos iniciales medibles y acotados

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0. \tag{3.2}$$

Consideramos la aplicación $F(u, v) = (\frac{1}{2}(3u^2 + v^2), uv)$. Entonces

$$dF = \begin{bmatrix} 3u & v \\ v & u \end{bmatrix},$$

así los autovalores con sus respectivos autovectores están dados por

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2u - s^{\frac{1}{2}}, \ r_1 = (s^{\frac{1}{2}} - u, -v)^T, \\ \lambda_2 = 2u + s^{\frac{1}{2}}, \ r_2 = (s^{\frac{1}{2}} + u, v)^T, \end{cases} \tag{3.3}$$

las invariantes de Riemann satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} (s^{\frac{1}{2}} - u)W_u - vW_v = 0, \\ (s^{\frac{1}{2}} + u)W_u + vW_v = 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

resolviendo por el método de las curvas características tenemos

$$W(u, v) = u + s^{\frac{1}{2}}, \ Z(u, v) = u - s^{\frac{1}{2}}; \tag{3.5}$$

observe además que

$$\begin{cases} \nabla\lambda_1 \cdot r_1 = 3(s^{\frac{1}{2}} - u), \\ \nabla\lambda_2 \cdot r_2 = 3(s^{\frac{1}{2}} + u), \end{cases} \tag{3.6}$$

de donde tenemos la siguiente clasificación de este sistema:

1. El sistema es hiperbólico degenerado en $(0, 0)$,
2. El primer campo característico es linear degenerado en $u = 0$, $v \geq 0$,
3. El segundo campo característico es linear degenerado en $u = 0$, $v \geq 0$.

3.1. Soluciones Viscosas

Consideramos el problema de Cauchy para in sistema parabólico relacionado con (3.1), (3.2)

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(3u^2+v^2)_x + g_1(u,v) = \epsilon u_{xx}, \ (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty), \\ v_t + (uv)_x + g_2(u,v) = \epsilon v_{xx} \ (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty), \end{cases} \tag{3.7}$$

con datos iniciales medibles y acotados

$$u^\epsilon(x,0) = u_0^\epsilon(x), \quad v^\epsilon(x,0) = v_0^\epsilon(x). \tag{3.8}$$

Teorema 3.1. *Suponga que g_1, g_2 satisfacen*

$$-\frac{vg_2(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}+u} \leq g_1(u,v) \leq \frac{vg2(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}-u}. \tag{3.9}$$

Entonces el problema de Cauchy (3.7), (3.8) tienes una solución única $(u^\epsilon(x,t), v^\epsilon(x,t))$ en $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ y existe una constante $M>0$ tal que

$$|u^\epsilon(x,t)| \leq M, \quad |v^\epsilon(x,t)| \leq M,$$

para todo $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\infty)$.

Demostración. Derivando las invariantes de Riemann en (3.5) tenemos

$$W_u = 1 + \frac{u}{\sqrt{s}}, \quad W_v = \frac{v}{\sqrt{s}}, \quad W_{uu} = \frac{v^2}{s^{\frac{3}{2}}}, \quad W_{uv} = -\frac{uv}{s^{32}}, \quad W_{vv} = \frac{u^2}{s^{32}} \tag{3.10}$$

y

$$Z_u = 1 - \frac{u}{\sqrt{s}}, \quad Z_v = -\frac{v}{\sqrt{s}}, \quad Z_{uu} = -\frac{v^2}{s^{\frac{3}{2}}}, \quad Z_{uv} = \frac{uv}{s^{\frac{3}{2}}}, \quad Z_{vv} = -\frac{u^2}{s^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.11}$$

Es claro que $W(u,v)$ es convexa y $Z(u,v)$ es cóncava.(ver [6] pag. 45). Multiplicando en (3.7) por W_u y W_v respectivamente obtenemos

$$W_t + \lambda_2 W_x = \epsilon W_{xx} - \Big(W_{uu}(u_x)^2 + 2W_{uv}u_xv_x + W_{vv}(v_x)^2\Big) - (g_1(u,v)W_u + g_2(u,v)W_v) \tag{3.12}$$

y

$$Z_t + \lambda_2 Z_x = \epsilon Z_{xx} - \Big(Z_{uu}(u_x)^2 + 2Z_{uv}u_xv_x + Z_{vv}(v_x)^2\Big) - (g_1(u,v)Z_u + g_2(u,v)Z_v) \tag{3.13}$$

y usando la ecuación (3.9) obtenemos

$$\begin{aligned} g_1(u,v)W_u + g_2(u,v)W_v \geq 0, \\ g_1(u,v)Z_u + g_2(u,v)Z_v \leq 0, \end{aligned}$$

de donde

$$W_t + \lambda_2 W_x \leq \epsilon W_{xx}, \quad Z_t + \lambda_1 Z_x \geq \epsilon Z_{xx}. \tag{3.14}$$

Aplicando el principio del Máximo encontramos una constante $N>0$ tal que $W(u^\epsilon, v^\epsilon) \leq N$, $Z(u^\epsilon, v^\epsilon) \leq -N$, por lo tanto $|u^\epsilon(x,t)| \leq M$, $|v^\epsilon(x,t)| \leq M$ para una constante $M>0$ y aplicando el teorema (2.1) obtenemos el resultado. □

3.2. Soluciones Débiles

Teorema 3.2. *Suponga que $g_1(u,v)$, $g_2(u,v)$ tienen la siguiente propiedad: existen constantes C_1, C_2, C_3, C_4 tales que*

$$\begin{cases} g_1 W_u + g_2 W_v \geq C_1 W + C_2, \\ g_1 Z_u + g_2 Z_v \leq C_1 W + C_2 \end{cases} \tag{3.15}$$

y que $g_2(u,v)0vh(u,v)$ donde $h(u,v)$ es una función continua. Entonces el problema de Cauchy (3.7), (3.8) tiene solución en el sentido de las distribuciones.

Demostración. La demostración de este teorema la vamos a dividir en tres secciones: la primera consiste en construir pares entropía-entropía flujo del tipo Lax, la segundo en mostrar la compacidad de esos pares entropía-entropía flujo y la ultima parte si se enfoca en la existencia de las soluciones débiles. □

3.2.1. Construcción de los pares Entropía-Entropía Flujo de tipo Lax

Multiplicando las ecuaciones de (3.7) por W_u, W_v respectivamente tenemos las desigualdades (3.12), (3.13). Que transcritas en términos de las desigualdades (3.15) nos quedan

$$\begin{aligned} w_t + \lambda_2 w_x + C_1 w + C_2 &\leq \epsilon w_{xx}, \\ z_t + \lambda_2 z_x + C_3 w + C_4 &\geq \epsilon z_{xx}. \end{aligned}$$

(En adelante vamos a denotar a $W = w$ y $Z = z$ para comodidad en la escritura). Aplicando el principio del Máximo podemos encontrar para cualquier $T > 0$,una constante $N(T) > 0$,independiente de ϵ, tal que $W(u^\epsilon, v^\epsilon) \leq N(T)$, $Z(u^\epsilon, v^\epsilon) \leq -N(T)$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$ por lo tanto aplicando el (**??**) y el lema (2.6) tenemos que $|u^\epsilon(x,t)| \leq M(T)$, $0 \leq c(\epsilon, t) \leq v^\epsilon(x,t) \leq M(T)$ por el teorema de las medidas de Young existe una sucesión que seguiremos denotando de la misma manera tal que

$$L^\star - \lim(u^\epsilon(x,t), v^\epsilon(x,t)) = (u(x,t), v(x,t)).$$

Como los pares entropía-entropía flujo del sistema (3.1) entropía flujo satisfacen las ecuaciones

$$\nabla \eta(u,v) dF(u,v) = \nabla q(u,v), \tag{3.16}$$

obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{cases} \bar{q}_u = 3u\eta_u + v\eta_v, \\ \bar{q}_v = v\eta_u + u\eta_v, \end{cases} \tag{3.17}$$

eliminando $\bar{q}$ y haciendo $\bar{\eta}(u,v) = \eta(u,s)$, $\bar{q}(u,v) = q(u,s)$ tenemos que el par entropía flujo satisface la ecuación diferencial parcial

$$\eta_{ss} = \frac{1}{4s}\eta_{uu} \tag{3.18}$$

y la entropía flujo q correspondiente a la entropía η satisface

$$q_u = 2u\eta_u + 2s\eta_s, \tag{3.19}$$

ver [6]. Si k es una constante entonces $\eta(u,s) = h(s)e^{ku}$ resuelve (3.18) si

$$h^{''}(s) - \frac{k^2}{4s}h(s) = 0.$$

Sean

$$\begin{cases} a(s) = s^{\frac{1}{4}}, \\ r = r(s) = ks^{\frac{1}{2}}, \\ h(s) = a(s)\phi(r) \end{cases}$$

entonces $\phi(r)$ es la solución de la ecuación Fuchsiana

$$\phi^{''}(r) - (1 + \frac{3}{4r^2})\phi(r) = 0. \tag{3.20}$$

Aplicando el método de Frobenius encontramos una solución ϕ_1 de la forma

$$\phi_1(r) = r^{\frac{3}{2}}g(r),$$

con

$$g(r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{2n},$$

donde $c_n = \frac{c_{n-1}}{(2n+\frac{3}{2})(2n+\frac{1}{2})-\frac{3}{4}}$ y c_0 es una constante positiva. La segunda solución esta dada por

$$\phi_2(r) = r^{\frac{3}{2}}g(r)\int_r^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^3 g^2(\tau)}.$$

Si $\eta_k = a(s)\phi_1(r)e^{ku}$ entonces por (3.19) tenemos

$$(q_k)_u = 2ku\eta_k + (\frac{1}{2} + r\frac{\phi_1^{''}(r)}{\phi_1(r)})\eta_k \tag{3.21}$$

y una entropía flujo correspondiente a η_k esta dada por

$$q_k = \eta_k\Big(2u + s^{\frac{1}{2}}) + \frac{r}{k}(\frac{\phi_1(r)}{\phi_1(r)} - 1) + \frac{3}{2k}\Big). \tag{3.22}$$

Es claro que ϕ_1, ϕ_2 satisfacen $\phi_1(s) > 0$, $\phi_1'(s) > 0$ y $\phi_2(s) > 0$ para $s \geq 0$. La positividad estricta de $\phi_2^{''}$ da $\phi_2^{'}(s) < 0$ cuando $s > 0$ puesto que

$$\lim_{s\to\infty} \phi_2(s) = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \phi_2'(s) = 0$$

y usando el lema (2.9) obtenemos los siguientes pares entropía-entropía flujo,

$$\begin{cases} \eta_k^1 = e^{kw}\Big(a(s) + O(\frac{1}{k})\Big), \\ q_k^1 = \eta_k^1\Big(\lambda_2 - \frac{3}{2k} + O(\frac{1}{k^2})\Big), \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_k^2 = e^{kz}\Big(a(s) + O(\frac{1}{k})\Big), \\ q_k^2 = \eta_k^2\Big(\lambda_1 - \frac{3}{2k} + O(\frac{1}{k^2})\Big) \end{cases} \tag{3.23}$$

y

$$\begin{cases} \eta_{-k}^1 = e^{-kz}\Big(a(s) + O(\frac{1}{k})\Big) \\ q_{-k}^1 = \eta_{-k}^1\Big(\lambda_1 + \frac{3}{2k} + O(\frac{1}{k^2})\Big), \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_{-k}^2 = e^{-kw}\Big(a(s) + O(\frac{1}{k})\Big) \\ q_{-k}^2 = \eta_{-k}^1\Big(\lambda_2 + \frac{3}{2k} + O(\frac{1}{k^2})\Big), \end{cases} \tag{3.24}$$

en cualquier subconjunto compacto de $s > 0$, y

$$\begin{cases} q_k^1 = \eta_k^1\Big(\lambda_2 + O(\frac{1}{k})\Big) \\ q_{-k}^1 = \eta_{-k}^1\Big(\lambda_1 + O(\frac{1}{k})\Big), \end{cases} \quad \begin{cases} q_k^2 = \eta_k^2\Big(\lambda_1 + O(\frac{1}{k})\Big) \\ q_{-k}^2 = \eta_{-k}^2\Big(\lambda_2 + O(\frac{1}{k})\Big). \end{cases} \tag{3.25}$$

en $s \geq 0$.

3.2.2. Compacidad de $\eta_t + q_x$ en H^{-1}_{Loc}

Ahora veamos que $\eta_t + q_x$ es compacto en $\mathbf{H}^{-1}_{Loc}$. El sistema tiene entropía estrictamente convexa $\eta^* = \frac{u^2+v^2}{2}$ y la correspondiente entropía flujo $q^* = u^3 + uv^2$.

Teorema 3.3. *Para los pares entropía-entropía flujo (η, q) construidos en la sección (3.2.1) tenemos que*

$$\eta(u^\epsilon, v^\epsilon)_t + q(u^\epsilon, v^\epsilon)_x$$

es compacta en $\mathbf{H}^{-1}_{Loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty)$

Demostración. Multiplicando (3.7) por $U = (u, v)$ tenemos

$$\eta^*(u^\epsilon, v^\epsilon)_t + q^*(u^\epsilon, v^\epsilon)_x = \epsilon\eta^*_{xx} - \epsilon((u^\epsilon_x)^2 + (v^\epsilon_x)^2) - \eta^*_u g_1 + \eta^*_v g_2). \tag{3.26}$$

Note que $\eta^*_u g_1 + \eta^*_v g_2) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R} \times [0.T])$ para todo $T > 0$ y por lo tanto es acotado en $\mathbf{L}^1_{Loc}$.
$\epsilon(u^\epsilon_x)^2$ y $\epsilon(v^\epsilon_x)^2$ son acotados en$\mathbf{L}^1_{Loc}$.
Estudiamos la compacidad de la primera clase de entropía-entropía flujo relacionada a la función ϕ_1,

$$\eta^1_{\pm k} = k^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (k^2 s)^n e^{\pm ku}$$

estas funciones de (u, v) suaves, por o tanto $(\eta^1_{\pm k})_t + (q^1_{\pm k})_x$ es compacto en $\mathbf{H}^{-1}_{Loc}$.

Para la segunda clase de entropía-entropía flujo relacionada a la función ϕ_2

$$\eta^2_{\pm k} = k^{-\frac{1}{2}} e^{\pm ku} r^2 g(r) \int_r^\infty \frac{d\tau}{\tau^3 g^2(\tau)},$$

donde $\int_r^\infty \frac{d\tau}{\tau^3 g^2(\tau)} = O(\frac{1}{r^2})$ cuando $r \to 0$, tenemos que las derivadas de segundo orden son singulares en el punto $(0, 0)$, si embargo para una constante $k > 0$ fija $\eta^2_{\pm k}$ y $q^2_{\pm k}$ son uniformemente acotadas y además

$$\eta^2_{\pm k} = k^{\frac{-1}{2}} e^{\pm ku} (\frac{1}{2g(r)} - r^2 g(r) \int_r^\infty \frac{g'(\tau)}{\tau^2 g^3(\tau)} d\tau), \tag{3.27}$$

donde

$$g'(r) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_n r^{2n-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2nc_{n-1} r^{2n-1} = rg(r),$$

así

$$r^2 g(r) \int_r^\infty \frac{g'(\tau)}{\tau^2 g^3(\tau)} d\tau = O(r^2 \log r) \text{ cuando} r \to 0.$$

Esto implica que para cualquier $k > 0$ fijo, las derivadas de primer orden de $\eta^2_{\pm k}$ son uniformemente acotadas.
Sean

$$\begin{cases} I_1 = k^{\frac{-1}{2}} e^{\pm ku} \frac{1}{2g(r)}, \\ I_2 = k^{\frac{-1}{2}} e^{\pm ku} g(r) \int_r^\infty \frac{g'(\tau)}{\tau^2 g^3(\tau)} d\tau. \end{cases} \tag{3.28}$$

La parte I_1 es suave y sus derivadas de segundo orden son acotadas. En la parte $r^2 I_2$ tenemos que las segundas derivadas son singulares en el punto $(0, 0)$. De hecho todas sus derivadas son acotadas

excepto por los términos $(r^2)_{uu}I_2$, $(r^2)_{vv}I_2 = 2k^2 I_2$ pero son positivos. Así que multiplicando por $\eta^2_{\pm k}$ en (3.7) tenemos

$$\begin{aligned}(\eta^2_{\pm k})_t + (q^2_{\pm k})_x &= \epsilon(\eta^2_{\pm k})_x x - \epsilon((u_x, v_x)\begin{vmatrix} (\eta^2_{\pm k})_{uu} & (\eta^2_{\pm k})_{uv} \\ (\eta^2_{\pm k})_{uv} & (\eta^2_{\pm k})_{vv} \end{vmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}) - ((\eta^2_{\pm k})_u g_1 + (\eta^2_{\pm k})_v g_2) \\ &= \epsilon(\eta^2_{\pm k})_x x - \frac{\epsilon}{2}((u_x, v_x)\begin{vmatrix} A(u,v) & B(u,v) \\ B(u,v) & C(u,v) \end{vmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} - 2k^2\epsilon I_2(u_x^2 + v_x^2) - ((\eta^2_{\pm k})_u g_1 + (\eta^2_{\pm k})_v g_2),\end{aligned}$$

donde $A(u,v)$, $B(u,v)$ y $C(u,v)$ son las derivadas regulares de segundo orden de $\eta^2_{\pm k}$).
Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ y escojamos $\phi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ tal que $\phi_K = 0$ y $0 \le \phi \le 1$. Multiplicando (3.7) por ϕ e integrando sobre $\Omega = \mathbb{R} \times [0,\infty)$ tenemos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega 2k^2\epsilon I_2(u_x^2 + x_x^2)\phi dxdt \\ &= \int_\Omega -\epsilon\left\{(u_x, v_x)\begin{vmatrix} A(u,v) & B(u,v) \\ B(u,v) & A(u,v) \end{vmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}\phi + \eta^2_{\pm k}\phi_t + q^2_{\pm k}\phi_x + \epsilon\eta^2_{\pm k}\phi_{xx} - ((\eta^2_{\pm k})_u g_1 + (\eta^2_{\pm k})_v g_2)\phi\right\} dxdt \\ &\le M(\phi),\end{aligned}$$

de donde la última desigualdad se sigue del hecho que las soluciones viscosas son acotadas y las partes regulares $A(u,v)u_x^2 + B(u,v)u_x v_x + C(u,v)v_x^2$ y $(\eta^2_{\pm k})_u g_1 + (\eta^2_{\pm k})_v g_2$ son acotadas en $\mathbf{L}^1_{Loc}$. Las partes $\epsilon((u_x, v_x)\begin{vmatrix} (\eta^2_{\pm k})_{uu} & (\eta^2_{\pm k})_{uv} \\ (\eta^2_{\pm k})_{uv} & (\eta^2_{\pm k})_{vv} \end{vmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix})$ y $(\eta^2_{\pm k})_u g_1 + (\eta^2_{\pm k})_v g_2$ son acotadas en $\mathbf{L}^1_{Loc}$ y por lo tanto son compactas en $W^{-1,\alpha}$ para $\alpha \in (1,2)$. La parte $\epsilon(\eta^2_{\pm k})_{xx}$ es compacta en $\mathbf{H}^{-1}_{Loc}$ pues las derivadas de primer orden son acotadas. Así que $(\eta^2_{\pm k})_t + (q^2_{\pm k})_x$ son acotadas en $W^{-1,\infty}$ y por el lema (1.2) y el teorema (2.3.2) de ([6]) tenemos que $(\eta^2_{\pm k})_t + (q^2_{\pm k})_x$ es compacto en $\mathbf{H}^{-1}_{Loc}$. □

3.2.3. Existencia de Soluciones Débiles

Finalmente probamos que las medidas de Young determinadas por la sucesión de soluciones viscosas $u^{\epsilon(x,t)}$, $v^{\epsilon(x,t)}$ de el problema de Cauchy (3.7), (3.8) se reducen a medidas de Dirac. Puesto que las soluciones viscosas$u^{\epsilon(x,t)}$, $v^{\epsilon(x,t)}$ están acotadas en $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}\times[0,T]$ para cualquier $T > 0$ por el teorema (2,2,1) en [6] consideramos la familia de medidas de probabilidad $\nu_{x,t}$ soportadas en un conjunto compacto. Sin perdida de generalidad podemos fijar $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ y considerar solo la medida ν.
Para cualquier par entropía-entropía flujo que satisfacen la condición $\eta(u^\epsilon, v^\epsilon)_t + q(u^\epsilon, v^\epsilon)_x$ compacto en $\mathbf{H}^{-1}_{Loc}$ tenemos

$$\overline{\eta_1(u^\epsilon, v^\epsilon)q_2(u^\epsilon, v^\epsilon)} - \overline{\eta_2(u^\epsilon, v^\epsilon)q_1(u^\epsilon, v^\epsilon)} = \overline{\eta_1(u^\epsilon, v^\epsilon)q_2(u^\epsilon, v^\epsilon) - \eta_2(u^\epsilon, v^\epsilon)q_1(u^\epsilon, v^\epsilon)},$$

donde$\overline{\eta_1(u^\epsilon, v^\epsilon)} = w* - \lim \eta(u^\epsilon, v^\epsilon)$. Usando la representación de medidas de Young tenemos

$$\langle \nu, \eta_1 \rangle \langle \nu, q_2 \rangle - \langle \nu, \eta_2 \rangle \langle \nu, q_1 \rangle = \langle \nu, \eta_1 q_2 - \eta_2 q_1 \rangle. \tag{3.29}$$

Sea Q el menor rectángulo característico

$$Q = \{(u,v) : w_- \le w \le w_+,\ z_- \le z \le z_+\},$$

donde

$$z_- = \operatorname*{ínf}_{(u,v)\in \mathrm{supp}\nu} z(u,v),\ z_+ = \sup_{(u,v)\in \mathrm{supp}\nu} z(u,v)$$

y

$$w_- = \inf_{(u,v)\in \mathrm{supp}\nu} z(u,v),\ w_+ = \sup_{(u,v)\in \mathrm{supp}\nu} z(u,v).$$

Ahora probamos que suppν se reduce al $(0,0)$ o a otro punto.
Supongamos que suppν no es el punto $(0,0)$ entonces $\langle \nu, \eta_k^1\rangle > 0$ y $\langle \nu, \eta_{-k}^2\rangle > 0$. Introducimos dos nuevas medidas de probabilidad μ_k^+ , μ_k^- en Q definidas por

$$\langle \mu_k^+, h\rangle = \frac{\langle \nu, h\eta_k^1\rangle}{\langle \nu, \eta_k^1\rangle},\ \langle \mu_k^-, h\rangle = \frac{\langle \nu, h\eta_{-k}^2\rangle}{\langle \nu, \eta_{-k}^2\rangle},$$

donde $h = h(u,v)$ es una función continua arbitraria. Observamos que μ_k^+ , μ_k^- son uniformemente acotadas respecto a k y por la compacidad débil $*$ existen una subsucesión(que denotaremos de la misma manera) y dos medidas $\mu^\pm$ en Q definidas por

$$\langle \mu^\pm, h\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \mu_k^\pm, h\rangle.$$

Además,

$$\mathrm{supp}\mu^+ = Q \cap \{w = w_+\},\ \mathrm{supp}\mu^- = Q \cap \{w = w_-\}$$

y si $h(w,z) \in \mathbf{C}_0(Q)$ tal que supp$h(w,z) \subset Q \cap \{(u,v) : w \le w_0\}$, (donde $w_0 < w_+$ es cualquier número) entonces cuando $k \to \infty$ tenemos

$$\frac{|\langle \nu, h\eta_k^1\rangle|}{|\langle \nu, \eta_k^1\rangle|} = \frac{|\langle \nu, he^{kw}(a(s) + O(\frac{1}{k}))\rangle|}{|\langle \nu, e^{kw}(a(s) + O(\frac{1}{k}))\rangle|} \le \frac{c_1 e^{k(w_0+\delta)}}{c_2 e^{k(w_+-\delta)}},$$

donde c_1, c_2 son dos constantes adecuadas y $\delta > 0$ satisface $2\delta < w_+ - w_0$, puesto que Q es el menor rectángulo característico de ν.
Sea $(\eta_1, q_1) = (\eta_k^1, q_k^1)$ en (3.29). Entonces

$$\langle \nu, q_2\rangle - \langle \nu, \eta_2\rangle \frac{\langle \nu, q_k^1\rangle}{\langle \nu, \eta_k^1\rangle} = \frac{\langle \nu, \eta_k^1 q_2 - \eta_2 q_k^1\rangle}{big < \nu, \eta_k^1\rangle}. \tag{3.30}$$

Usando las estimaciones de (*) y (**) y pasando al limite $k \to \infty$ en (3.30) tenemos

$$\langle \nu, q_2\rangle - \langle \nu, \eta_2\rangle\langle \mu^+, \lambda_2\rangle = \langle \mu^+, q_2 - \lambda_2\eta_2\rangle. \tag{3.31}$$

De la misma manera sea $(\eta_1, q_1) = (\eta_{-k}^2, q_{-k}^2)$ entonces tenemos

$$\langle \nu, q_2\rangle - \langle \nu, \eta_2\rangle\langle \mu^-, \lambda_2\rangle = \langle \mu^+, q_2 - \lambda_2\eta_2\rangle. \tag{3.32}$$

Sean $(\eta_1, q_1) = (\eta_k^1, q_k^1)$, $(\eta_2, q_2) = (\eta_{-k}^2, q_{-k}^2)$ entonces en (3.29) tenemos

$$\frac{\langle \nu, q_{-k}^2\rangle}{\langle \nu, \eta_{-k}^2\rangle} - \frac{\langle \nu, q_k^1\rangle}{\langle \nu, \eta_k^1\rangle} = \frac{\langle \nu, \eta_k^1 q_{-k}^2 - \eta_{-k}^2 q_k^1\rangle}{\langle \nu, \eta_{-k}^2\rangle\langle \nu, \eta_k^1\rangle}. \tag{3.33}$$

Afirmamos que $w_- = w_+$. Si no tome $\delta > 0$ tal que $2\delta_0 < w + -w_-$, entonces

$$\langle \nu, \eta_{-k}^2\rangle \ge c_1 e^{-k(w_- - \delta_0)},\ \langle \nu, \eta_k^1\rangle \ge c_2 e^{-k(w_+ - \delta_0)}$$

para dos constantes adecuadas c_1, c_2 y por lo tanto el lado derecho de (3.33) satisface

$$\frac{\langle \nu, \eta_k^1 q_{-k}^2 - \eta_{-k}^2 q_k^1\rangle}{\langle \nu, \eta_{-k}^2\rangle\langle \nu, \eta_k^1\rangle} = O(\frac{1}{k})e^{-k(w_+ - w_- - 2\delta_0)},\ \text{cuando } k \to \infty,$$

como resultado de las estimaciones de (3.23) y (3.24). Pasando al limite $k \to \infty$ en (3.33) tenemos que $\langle \mu^+, \lambda_2 \rangle = \langle \mu^-, \lambda_2 \rangle$, combinando (3.30), (3.32) tenemos que

$$\langle \mu^+, q - \lambda_2 \eta \rangle = \langle \mu^-, q - \lambda_2 \eta \rangle, \tag{3.34}$$

para cualquier (η, q) satisfaciendo $\eta_t + q_x$ compacto en $\mathbf{H}^{-1}_{Loc}$. Sean (η, q) en (3.34). Si $w_+ - w_- > 2\delta_0$ entonces en el lado derecho de (3.34)tenemos que

$$\langle \mu^+, q - \lambda_2 \eta \rangle \geq \frac{c_1}{k} e^{w+-\delta_0},$$

y en el lado izquierdo de (3.34)tenemos que

$$\langle \mu^-, q - \lambda_2 \eta \rangle \leq \frac{c_2}{-k} e^{w+-\delta_0},$$

para dos constantes positivas c_1, c_2. Esto es imposible por lo tanto $w_+ = w_-$. De la misma manera podemos probar que $z_+ = z_-$ usando los pares entropía-entropía flujo (η^2_k, q^2_k), (η^1_{-k}, q^1_{-k}). Así que el soporte de ν es $(0, 0)$ o un punto (u^*, v^*).

Cápitulo 4

Aplicaciones a Sistemas de tipo Le Roux

Ahora vamos a estudiar el problema de Cauchy para el sistema de tipo Le Roux no homogéneo.

$$\begin{cases} u_t + (u^2+v)_x + f(u,v) = 0, \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ v_t + (uv)_x + g(u,v) = 0 \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \end{cases} \tag{4.1}$$

con datos iniciales medibles y acotados

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) \geq 0. \tag{4.2}$$

Sea $F(u,v) = (u^2+v, uv)$, entonces

$$dF = \begin{bmatrix} 2u & 1 \\ v & u \end{bmatrix},$$

la ecuación característica esta dada por $\lambda^2 - 3u\lambda + 2u^2 - v = 0$ de donde los valores propios con sus respectivos espacios propios son

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{3u}{2} - \frac{D}{2}, \ r_1 = (-1, \frac{u+D}{2})^T, \\ \lambda_2 = \frac{3u}{2} + \frac{D}{2}, \ r_2 = (1, \frac{-u+D}{2})^T, \end{cases} \tag{4.3}$$

donde $D = \sqrt{u^2+4v}$. Las invariantes de Riemann deben satisfacer las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} -w_u + (\frac{u+D}{2})w_v = 0, \\ z_u + (\frac{-u+D}{2})z_v = 0, \end{cases}$$

resolviendo por el método de las curvas características tenemos que

$$\begin{aligned} w(u,v) &= u + D, \\ z(u,v) &= u - D. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Para encontrarlas soluciones débiles vamos a hacer uso de los siguientes resultados:

4.1. Soluciones Viscosas

Consideramos el sistema parabólico relacionado con el sistema de tipo Le Roux (4.1).

$$\begin{cases} u_t + (u^2+v)_x + f(u,v) = \epsilon u_{xx}, \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ v_t + (uv)_x + g(u,v) = \epsilon v_{xx} \ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty), \end{cases} \tag{4.5}$$

con datos iniciales

$$u^\epsilon(x,0) = u_0^\epsilon(x), \quad v^\epsilon(x,0) = v_0^\epsilon(x) \geq 0. \tag{4.6}$$

donde

$$(u_0^\epsilon(x), v_0^\epsilon(x)) = (u_0(x), v_0(x) + \epsilon) * G^\epsilon \tag{4.7}$$

Donde G^ϵ es un mollifier.

Lema 4.1. *Sean $(u(x,t), v(x,t))$ soluciones locales del problema de Cauchy (4.5), (4.6). Entonces $u_x(x,t)$, $v_x(x,t)$ son acotadas en $\mathbb{R} \times [0,T]$.*

Demostración. ver ([2]) □

Lema 4.2. *Suponga que $g(u,v) = vh(u,v)$ y $h(u,v)$ e continua. Si $(u(x,t), v(x,t)) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R} \times [0,T])$ son soluciones del problema de Cauchy (4.5), (4.6) entonces $v(x,t) \geq 0$ en $\mathbb{R} \times [0,T]$.*

Demostración. Sea $D = [-R,R] \times [0,T]$, entonces existen un par de constantes $N(T)$ y α tal que

$$|u(x,t)| \leq N(T), \quad |v(x,t)| \leq N(T), \tag{4.8}$$

y

$$|u_x(x,t) + h(u,v)| \leq \alpha,$$

para todo $(x,t) \in D$. Sea

$$v(x,t) = \Big\{ w(x,t) - \frac{N(T)(x^2 + CRt)}{R^2} \Big\} e^{\alpha t} \tag{4.9}$$

entonces,

$$v(x,0) = \Big\{ w(x,0) - \frac{N(T)(x^2)}{R^2} \Big\},$$

luego $w(x,0) = v_0(x) + N(T)(\frac{x}{R})^2 \geq 0$.

$$v(R,t) = \Big\{ w(R,t) - \frac{N(T)(R^2 + CRt)}{R^2} \Big\},$$

usando las ecuaciones (4.8), tenemos que $w(R,t) = v(R,t) + N(T) + (\frac{CN(T)Rt}{R})^2 \geq 0$, y de la misma manera podemos probar que $w(-R,t) = v(-R,t) + N(T) + (\frac{CN(T)Rt}{R})^2 \geq 0$. derivando en (4.9) tenemos

$$v_t = \Big\{ w_t - \frac{N(T)C}{R} \Big\} e^\alpha + \alpha v e^{\alpha t},$$

$$uv_x = \Big\{ uw_t - \frac{2xuN(T)}{R^2} \Big\} e^\alpha,$$

$$\epsilon v_x x = \Big\{ \epsilon w_{xx} - \frac{2\epsilon N(T)}{R} \Big\} e^{\alpha t},$$

reemplazando en (4.5) tenemos

$$w_t - uw_x - w_{xx} = \frac{N(t)}{R^2} \Big(CR + 2xu - 2\epsilon \Big) + \Big[-w(x,t) + \frac{N(T)(x^2 + CRt)}{R^2} \Big] [\alpha + u_x + h(u,v)]. \tag{4.10}$$

Ahora bien, si no se tiene que

$$w(x,t) \leq 0, \quad \forall (x,t) \in D,$$

entonces su valor mínimo se alcanza en $(-R,R)\times(0,T)$, sea (x_0,t_0) el punto donde se alcanza este mínimo. Por las consideraciones anteriores $w(x_0,t_0)<0$, además $w_t(x_0,t_0)\leq 0$, $w_x(x_0,t_0)=0$ y $w_{xx}(x_0,t_0)\geq 0$ de donde tenemos que

$$w_t(x_0,t_0)+u(x_0,t_0)w_x(x_0,t_0)-w_{xx}(x_0,t_0)\leq 0.$$

Pero observe que si reemplazamos (x_0,t_0) en (4.10) si tomamos C suficientemente grande tenemos que $w(x_0,t_0)>0$ y esto es una contradicción. Por lo tanto $w(x,t)\geq 0$ en D de donde podemos concluir que $v(x,t)\geq 0$ en D, haciendo tender $R\to\infty$ tenemos que $v(x,t)\geq 0$ en $\mathbb{R}\times[0,T]$. □

Proposición 4.3. *Suponga que $f(u,v)$, $g(u,v)$ satisfacen*

$$g(u,v)\geq\frac{-u-\sqrt{u^2+4v}}{2}f(u,v),\quad g(u,v)\leq\frac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2}f(u,v) \tag{4.11}$$

y $g(u,v)=vh(u,v)$, donde $h(u,v)$ es una función continua. Entonces el problema de cauchy (4.5), (4.6) tiene una solución única $(u^\epsilon(x,t),v^\epsilon(x,t))$ en $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ y existe una constante $M>0$ tal que

$$|u^\epsilon(x,t)|\leq M,\quad |v^\epsilon(x,t)|\leq M, \textit{para todo}(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty). \tag{4.12}$$

Demostración. Derivando las invariantes de Riemann en (4.4) tenemos

$$W_u=1+\frac{1}{D},\quad W_v=\frac{2}{D},\quad W_{uu}=\frac{4v}{D^3},\quad W_{uv}=-\frac{2u}{D^3},\quad W_{vv}=\frac{-4}{D^3} \tag{4.13}$$

y

$$Z_u=1-\frac{1}{D},\quad Z_v=-\frac{2}{D},\quad Z_{uu}=-\frac{4v}{D^3},\quad Z_{uv}=\frac{2u}{D^3},\quad Z_{vv}=\frac{4}{D^3} \tag{4.14}$$

multiplicando en (4.1) por $\nabla W(u,v)$, y por $\nabla Z(u,v)$ respectivamente tenemos

$$\begin{aligned}W(x,t)_t+\lambda_2W(u,v)_x&=\epsilon W(u,v)_{xx}-\epsilon\Big(W_{uu}(u_x)^2+2W_{uv}u_xv_x+W_{vv}(v_x)^2\Big)\\&\quad-(f(u,v)W_u+g(u,v)W_v)\\&=\epsilon W_{xx}-\epsilon\frac{1}{\sqrt{u^2+4v}W(u,v)_xZ(u,v)_x}\\&\quad-(f(u,v)W_u+g(u,v)W_v)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}Z(x,t)_t+\lambda_1W(u,v)_x&=\epsilon Z(u,v)_{xx}-\epsilon\Big(Z_{uu}(u_x)^2+2Z_{uv}u_xv_x+Z_{vv}(v_x)^2\Big)\\&\quad-(f(u,v)Z_u+g(u,v)Z_v)\\&=\epsilon Z_{xx}-\epsilon\frac{1}{\sqrt{u^2+4v}W(u,v)_xZ(u,v)_x}\\&\quad-(f(u,v)Z_u+g(u,v)Z_v).\end{aligned}$$

En vista de (4.11) tenemos

$$f(u,v)W_u+g(u,v)W_v\geq 0,\quad f(u,v)Z_u+g(u,v)Z_v\leq 0,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}W(u,v)_t+\lambda_2W(u,v)_x&\leq\epsilon W(u,v)_{xx}-\epsilon\frac{1}{\sqrt{u^2+4v}}W(u,v)_xZ(u,v)_x,\\Z(u,v)_t+\lambda_1Z(u,v)_x&\leq\epsilon Z(u,v)_{xx}-\epsilon\frac{1}{\sqrt{u^2+4v}}W(u,v)_xZ(u,v)_x.\end{aligned} \tag{4.15}$$

□

Aplicando el principio del Máximo a (4.15) y los lemas (4.1, 4.2) tenemos que $W(u^\epsilon, v^\epsilon) \leq N$, $Z(u^\epsilon, v^\epsilon) \leq N$ y por lo tanto $|u^\epsilon(x,t)| \leq M$, $0 \leq v^\epsilon \leq M$ para dos constantes positivas M, N que dependen únicamente en la norma $\mathbf{L}^\infty$ del dato inicial $u_0(x)$, v_0.

4.2. Soluciones Débiles

Teorema 4.4. *Suponga que $f(u,v)$, $g(u,v)$ satisfacen la siguiente propiedad: existen constantes c_1, c_2, c_3, c_4, tales que*

$$\begin{cases} w_u f + w_v g \geq c_1 w + c_2, \\ z_u f + z_v g \leq c_3 w + c_4, \end{cases} \tag{4.16}$$

y $g(u,v) = vh(u,v)$, donde $h(u,v)$ es una función continua.Entonces el problema de Cauchy (4.1), (4.2) tiene una solución débil en el sentido de las distribuciones.

Demostración. La demostración de este teorema la vamos a dividir en tres secciones: la primera consiste en construir pares entropía-entropía flujo del tipo Lax, la segundo en mostrar la compacidad de esos pares entropía-entropía flujo y la ultima parte si se enfoca en la existencia de las soluciones débiles. □

4.2.1. Construcción pares Entropía-Entropía Flujo del tipo de Lax.

Multiplicando 4,5 por (W_u, W_v), (Z_u, Z_v) y usando las ecuaciones (4.13),(4.14) tenemos

$$\begin{aligned} W(u,v)_t + \lambda_2 W(u,v)_x + (W_u g_1 + W_v g_2) \\ &= \epsilon W(u,v)_{xx} - \epsilon\Big(W_{uu}(u_x)^2 + 2W_{uv}u_x v_x + W_{vv}(v_x)^2\Big) \\ &= \epsilon W(u,v)_{xx} - \frac{\epsilon}{D} w(u,v)_x Z(u,v)_x \end{aligned}$$

y de la misma manera

$$\begin{aligned} Z(u,v)_t + \lambda_2 Z(u,v)_x + (Z_u g_1 + Z_v g_2) \\ &= \epsilon Z(u,v)_{xx} + \frac{\epsilon}{D} w(u,v)_x Z(u,v)_x. \end{aligned}$$

Ahora usando las desigualdades (4.16) tenemos

$$\begin{aligned} W_t + \Big(\lambda_2 + \frac{\epsilon}{D} Z_x\Big) W_x + C_1 W + C_2 \leq \epsilon W_{xx}; \\ Z_t + \Big(\lambda_1 - \frac{\epsilon}{D} W_x\Big) Z_x + C_3 Z + C_4 \leq \epsilon W_{xx}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

aplicando el corolario (que no se donde esta) a las ecuaciones (4.17) obtenemos, para cualquier $T > 0$, $W(u^\epsilon, v^\epsilon) \leq N(T)$ $Z(u^\epsilon, v^\epsilon) \geq -N(T)$ en $\mathbb{R} \times [0,T]$ donde $N(T)$ es independiente de ϵ. Por el lema (4.2) tenemos que $|u^\epsilon(x,t)| \leq M(t)$, $0 \leq C(\epsilon, t) \leq v^\epsilon(x,t) \leq M(T)$. Usando el teorema de las medidas de young tenemos que existe una subsucesión, que seguiremos denotando de la misma manera, tal que

$$L^\star - \lim(u^\epsilon(x,t), v^\epsilon(x,t)) = (u(x,t), v(x,t)).$$

Ahora construimos dos pares entropía-entropía flujo del tipo Lax, del sistema (4.1). Sea $\rho = D^3$, $\theta = \frac{3}{2}u$. Para una solución suave el sistema Leroux es equivalente al sistema

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho\theta)_x = 0, \\ \theta_t + (\frac{\theta^2}{2} + \frac{3}{8}\rho^{\frac{2}{3}})_x = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Cualquier par entropía-entropía flujo satisface las ecuaciones

$$q_\rho = \theta\eta_\rho + \frac{1}{4}\rho^{-\frac{1}{3}}\eta_\theta,$$
$$q_\theta = \rho\eta_\rho + \eta_\theta.$$

Volviendo a derivar tenemos $q_{\rho\theta} = \eta_\rho + \frac{1}{4}\rho^{-\frac{1}{3}}\eta_{\theta\theta}$ y $q_{\theta\rho} = \eta_\rho + \rho\eta_{\rho\rho}$. y eliminando q tenemos

$$\eta_{\rho\rho} = \frac{1}{4}\rho^{-\frac{4}{3}}\eta_{\theta\theta}. \tag{4.19}$$

Ahora bien, si k es una constante entonces la función $\eta = h(\rho)e^{k\theta}$ resuelve (4.19) si satisface la relación

$$h'' = \frac{1}{4}k^2\rho^{-\frac{4}{3}}h(\rho).$$

Sea $h(\rho) = \rho\phi(s)$, $s = \frac{3}{2}k\rho^{\frac{1}{3}}$. Entonces ϕ resuelve la ecuación Fuchsiana

$$\phi'' - \Big(1\frac{2}{s^2}\Big)\phi = 0. \tag{4.20}$$

Utilizando el método de Frobenius podemos encontrar una solución dada por

$$\phi_1 = s^2\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}s^{2n} = s^2 g(s), \tag{4.21}$$

donde $g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}s^{2n}$ y $c_{2n} = \frac{c_{2(n-1)}}{(2+2n)(1+2n)+2}$ y c_0 es una constante positiva y arbitraria. La segunda solución esta dada por

$$\phi_2 = s^2 g(s)\int_s^{\infty} \frac{1}{s^4 g^2(s)}ds. \tag{4.22}$$

Es claro que ϕ_1, ϕ_2 satisfacen $\phi_1(s) > 0$, $\phi_1'(s) > 0$ y $\phi_2(s) > 0$ para $s \geq 0$. La positividad estricta de ϕ_2'' da $\phi_2'(s) < 0$ cuando $s > 0$ puesto que

$$\lim_{s\to\infty} \phi_2(s) = 0, \quad \lim_{s\to\infty} \phi_2'(s) = 0.$$

Los valores propios de (4.18) están dados por

$$\lambda_1 = \theta - \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{2},$$
$$\lambda_2 = \theta + \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{2}$$

y las correspondientes invariantes de Riemann son

$$z = \theta - \frac{3}{2}\rho^{\frac{1}{3}},$$
$$w = \theta + \frac{3}{2}\rho^{\frac{1}{3}}.$$

Así que

$$\theta_w = \theta_z = \frac{1}{2}, \qquad \rho_z = \rho^{\frac{2}{3}}, \qquad \rho_w = -\rho^{\frac{2}{3}}$$

y

$$\begin{cases} q_w = \frac{1}{2}q_\theta + \rho^{\frac{2}{3}}q_\rho, \\ q_z = \frac{1}{2}q_\theta - \rho^{\frac{2}{3}}q_\rho \end{cases} \quad \begin{cases} \eta_w = \frac{1}{2}\eta_\theta + \rho^{\frac{2}{3}}\eta_\rho, \\ \eta_w = \frac{1}{2}\eta_\theta - \rho^{\frac{2}{3}}\eta_\rho. \end{cases} \tag{4.23}$$

Puesto que $q_w = \lambda_2\eta_w$, $q_z = \lambda_1\eta_z$, de la definición de entropía tenemos

$$q_\theta = q_w + q_z = \theta\eta_\theta + \rho\eta_\rho. \tag{4.24}$$

Sea $\eta_k = \rho^{\frac{1}{3}}\phi(s)e^{k\theta}$,$\eta_{-k} = \rho^{\frac{1}{3}}\phi(s)e^{-k\theta}$ de la ecuación (4.24) obtenemos

$$\begin{cases} q_k = \eta_k\Big(\theta - \frac{2}{3k} + \frac{\rho^{\frac{1}{3}}\phi'(s)}{2\phi(s)}\Big), \\ q_{-k} = \eta_{-k}\Big(\theta + \frac{2}{3k} - \frac{\rho^{\frac{1}{3}}\phi'(s)}{2\phi(s)}\Big). \end{cases} \tag{4.25}$$

Sea $\eta^i_{\pm k} = \rho^{\frac{1}{3}}\phi_i(s)e^{\pm k\theta}$, entonces las estimaciones del lema (Fuch) dan

$$* \quad \begin{array}{ll} \eta^1_k = \rho^{\frac{1}{3}}e^{kw}(1+O(\frac{1}{k})), & q^1_k = \eta^1_k(\lambda_2 - \frac{2}{3k} + O(\frac{1}{k^2})), \\ \eta^1_{-k} = \rho^{\frac{1}{3}}e^{-kz}(1+O(\frac{1}{k})) & q^1_{-k} = \eta^1_{-k}(\lambda_1 + \frac{2}{3k} + O(\frac{1}{k^2})), \\ \eta^2_k = \rho^{\frac{1}{3}}e^{kz}(1+O(\frac{1}{k})), & q^2_k = \eta^2_k(\lambda_1 - \frac{2}{3k} + O(\frac{1}{k^2})), \\ \eta^2_{-k} = \rho^{\frac{1}{3}}e^{-kw}(1+O(\frac{1}{k})) & q^2_{-k} = \eta^2_k(\lambda_2 + \frac{3}{2k} + O(\frac{1}{k^2})), \end{array}$$

en cualquier subconjunto compacto de $s > 0$ y

$$\begin{cases} q^1_k = \eta^1_k(\lambda_2 + O(\frac{1}{k})), \\ q^1_{-k} = \eta^1_{-k}(\lambda_1 + O(\frac{1}{k})) \end{cases} \quad \begin{cases} q^2_k = \eta^2_k(\lambda_1 + O(\frac{1}{k})), \\ q^2_{-k} = \eta^2_{-k}(\lambda_2 + O(\frac{1}{k})), \end{cases} \tag{4.26}$$

en $s \geq 0$.

4.2.2. Compacidad de $\eta_t + q_x$ en H^{-1}_{Loc}

Ahora verificamos la compacidad de $\eta_t + q_x$ en $\mathbf{H}^{-1}_{Loc}$ para los pares entropía-entropía flujo que acabamos de construir. Vamos a demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4.5. *Para los pares entropía-entropía flujo (η, q) construidos en la sección (4.2.1) tenemos que*

$$\eta(u^\epsilon, v^\epsilon)_t + q(u^\epsilon, v^\epsilon)_x$$

es compacta en $\mathbf{H}^{-1}_{Loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

Demostración. El sistema tiene entropía convexa $\eta^\star = \frac{u^2}{2} + \int_0^v \log v dv$ y la correspondiente entropía flujo $q^\star = \frac{2u^3}{3} + uv\log v$.

$$(\sqrt{\epsilon}u^\epsilon_x)^2, \quad \frac{(\sqrt{\epsilon v^\epsilon_x})^2}{v^\epsilon_x}. \tag{4.27}$$

son uniformemente acotadas en $\mathbf{L}^2_{Loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$. Demostramos el teorema para el par entropía-entropía flujo para el par (η_k^2, q_k^2) ya que para las otros pares se procede de la misma manera.

Multiplicando el sistema (4.5) por (η_u, η_v) y despejando tenemos

$$\eta_t + q_x + \Big(\eta_u f + \eta_v g\Big) = \epsilon\eta_{xx} - \epsilon\Big(\eta_{uu}(u_x)^2 + 2\eta_{uv}u_xv_x + \eta_{vv}(v_x)^2\Big), \tag{4.28}$$

puesto que

$$\int_s^\infty \frac{ds}{s^4g^2s} = O(\frac{1}{s^3}),$$

cuando s tiende a cero, entonces para cualquier $k>0$ fijo tenemos que

$$\eta_k^2 = \frac{2}{3k}s^3g(s)\int_s^\infty \frac{ds}{s^4g^2s}e^{k\theta}$$

y q_k^2 son uniformemente acotadas en $\mathbb{R}\times[0,\infty)$, así que

$$\partial_t\eta_k^2(u,v) + \partial_x q_k^2(u,v))$$

es acotado en $\mathbf{W}^{-1,\infty}$, $\eta_u f + \eta_v g$ es acotado en $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ para todo $T>0$ y por lo tanto es acotado en $\mathbf{L}^1_{Loc}$. Ahora bien, como

$$\eta_k^2 = \frac{2e^{k\theta}}{k}\Big(\frac{1}{g(s)} - 2s^3g(s)\int_s^\infty \frac{g'(s)ds}{s^3g^3(s)}\Big)$$

y $\frac{g'(s)}{s} \le g(s)$ tenemos

$$\int_s^\infty \frac{g'(s)ds}{s^3g^3(s)} = O(\frac{1}{s})$$

cuando s tiende a cero. Así que $(\eta_k^2)_s$, $(\eta_k^2)_\theta$ son acotados en en $\mathbb{R}\times[0,T]$ para todo $T>0$ y $(\eta_k^2)_s = O(s)$ cuando s tiende a cero. Puesto que

$$s_u = \frac{3ku}{2}(u^2+4v)^{-\frac{1}{2}}, \quad s_v = 3k(u^2+4v)^{-\frac{1}{2}},$$

entonces $\epsilon(\eta_k^2)_x = O(\epsilon(|u_x|+|v_x|))$ y usando (4.27) podemos concluir que $\epsilon(\eta_k^2)_{xx}$ es compacto en $\mathbf{H}^{-1}_{Loc}$.
Sean $I_1 = \frac{2e^{k\theta}}{kg(s)}$, $I = s^3g(s)\int_s^\infty \frac{g'(s)ds}{s^3g^3(s)}$ entonces

$$\eta_k^2 = I_1 - \frac{4}{k}e^{k\theta}I.$$

Como I_1 es es uniformemente acotada en $\mathbf{C}^2$ entonces probaremos el teorema si logramos mostrar que L, donde

$$L = \epsilon\Big(I_{uu}(u_x)^2 + 2I_{uv}u_xv_x + I_{vv}(v_x)^2\Big),$$

es acotada en $\mathbf{L}_{Loc}(\mathbb{R}\times[0,\infty))$. Sea $L = L_1 + L_2$, donde

$$L_1 = \epsilon I_{ss}\Big((s_u)^2(u_x)^2 + 2s_us_vu_xv_x + (s_v)^2(v_x)^2\Big),$$
$$L_2 = \epsilon\Big(s_{uu}(u_x)^2 + 2s_{uv}u_xv_x + s_{vv}(v_x)^2\Big)$$

Como $\frac{g'(s)}{s} \le g(s)$, $I_s = 0$ cuando s tiende a cero e I_{ss} es acotado tenemos que L_1, L_2 se pueden controlar por $\epsilon\Big(O(\frac{(v_x)^2}{|v|}) + O((u_x)^2))\Big)$ y por lo tanto son acotados en $\mathbf{L}^{-1}_{Loc}$. Aplicando el Lema (1.2) concluimos la demostración del teorema (4.5). □

4.2.3. Existencia de Soluciones Débiles

Para mostrar la existencia de las soluciones débiles tendríamos que mostrar que la medida de probabilidad se reduce a una medida de Dirac y estas cuentas las tomamos de ([6]).

Considere una medida de probabilidad con soporte compacto ν en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$\langle \nu, \eta^1 \rangle \langle \nu, q^2 \rangle - \langle \nu, \eta^2 \rangle \langle \nu, q^1 \rangle = \langle \nu, \eta^1 q^2 - \eta^2 q^1 \rangle,$$

para los pares entropía-entropía flujo del sistema (4.1) satisfaciendo la condición

$$\eta^i(u^\epsilon, v^\epsilon)_t + q^i(u^\epsilon, v^\epsilon)_x, \text{ compacto en } \mathbf{H}^{-1}(\Omega),$$

para $i = 1, 2$. Sean $\left(\eta^i_{\pm k}, q^i_{\pm k}\right)$ los pares entropía flujo construidos en la sección anterior y sea Q el menor rectángulo característico

$$Q = \{(u, v) : w_- \leq w \leq w_+, \ z_- \leq z \leq z_+\},$$

como en (3.2.3). Entonces w^+, w^- son no negativos y z^+, z^- son no positivas. Si el soporte de ν consiste del punto $(0, 0)$ entonces ya terminamos la prueba, así que supongamos que ν no esta concentrada en $(u, v) = (0, 0)$ así que

$$\langle \nu, \eta^1_k \rangle > 0,$$

y

$$\langle \nu, \eta^2_{-k} \rangle > 0.$$

Introducimos las medidas de probabilidad $\mu^\pm$ en Q definidas por

$$\langle \mu^+_k, h \rangle = \frac{\langle \nu, h\eta^1_k \rangle}{\langle \nu, \eta^1_k \rangle},$$
$$\langle \mu^-_k, h \rangle = \frac{\langle \nu, h\eta^1_{-k} \rangle}{\langle \nu, \eta^1_{-k} \rangle},$$

donde $h = h(u, v)$ es una función continua arbitraria. Como consecuencia de la compacidad débil $\star$ existen medidas de probabilidad $\mu^\pm$ en Q tales que

$$\langle \mu^\pm, h \rangle = \lim_{k \to \infty} \langle \mu^\pm_k, h \rangle,$$

tomando una subsucesión μ^+, μ^- son respectivamente concentradas en las concentradas de Q asociadas con w, es decir en

$$Q \cap \left\{(u, v) : w = w_+\right\} \text{ y } Q \cap \left\{(u, v) : w = w_-\right\}.$$

Puesto que

$$\eta^1_k = \rho^{\frac{1}{3}} e^{kw}(1 + O(\frac{1}{k})),$$
$$\eta^2_{-k} = \rho^{\frac{1}{3}} e^{-kw}(1 + O(\frac{1}{k})),$$

para cualquier compacto $s > 0$ y por hipótesis, el soporte de ν no esta contenido en $s = 0$. Similar a (3.34) tenemos

$$\langle \mu^+, \lambda_2 \eta - q \rangle = \langle \mu^-, \lambda_2 \eta - q \rangle \tag{4.29}$$

para cualquier (η, q) satisfaciendo $\eta_t + q_x$ compacto en $\mathbf{H}^{-1}_{Loc}\Big(\mathbb{R} \times [0, \infty)\Big)$ sustituyendo (η_k^1, q_k^1) en (4.29) tenemos

$$\left\langle \mu^-, \lambda_2 \eta_k^1 - q_k^1 \right\rangle \leq \frac{c_1 e^{kw}}{k}, \tag{4.30}$$

y

$$\left\langle \mu^+, \lambda_2 \eta_k^1 - q_k^1 \right\rangle \geq \frac{c_1 e^{kw}}{k}, \tag{4.31}$$

donde c_1, c_2 son constantes positivas por (4.29), (4.30),(4.31) podemos concluir $w_- = w_+$. De la misma manera podemos concluir $z_- = z_+$.

Cápitulo 5

Aplicaciones

Ahora mostramos algunas funciones que satisfacen las condiciones de los teoremas (3.2), (4.4). Para el teorema (3.2) las funciones

$$g_1(u,v) = \alpha\sqrt{u^2+v^2} + \beta,$$
$$g_2(u,v) = \frac{v}{v+1}\Big(\theta(\sqrt{u^2+v^2} - |u|) + \gamma\Big),$$

donde α, β, θ y γ son numeros reales. De hecho, $|W_u| = 1 + \frac{u}{\sqrt{s}} \leq 2$, $|W_v| = \frac{u}{\sqrt{s}} \leq 1$ y $\sqrt{s} - |u| \leq W$, así que

$$g_1(u,v)W_u = \alpha W + (1 + \frac{u}{\sqrt{s}})\beta \geq \alpha W - 2|\beta|.$$
$$g_2(u,v)W_u = \frac{v}{v+1}\Big(\theta(\sqrt{s} - |u|) + \gamma\Big)\frac{v}{\sqrt{s}} \geq -|\theta|W - |\gamma|,$$

de donde

$$g_1W_u + g_2W_v \geq \Big((\alpha - |\theta|)W - (2|\beta| + |\gamma|)\Big).$$

De la misma manera tenemos

$$g_1Z_u + g_2Z_v \geq \Big((-\alpha - |\theta|)Z + (2|\beta| + |\gamma|)\Big).$$

Observe que $(g_1)_u = \alpha\frac{u}{\sqrt{s}}$ y $(g_1)_v = \alpha\frac{v}{\sqrt{s}}$ son acotadas y por lo tanto g_1 es localmente Lipschitz, de la misma manera podemos ver que g_2 es localmente Lipschitz.

Para el teorema (4.4) considere las funciones

$$f(u,v) = a\sqrt{u^2+4v+1} + b,$$
$$g(u,v) = \frac{v}{v+1}\Big(c(\sqrt{u^2+4v} - |u|) + d\Big),$$

donde a, b, c, d son numeros reales. Observe que $|w_u| = 1 + \frac{1}{D} \leq 2$, $w_v = \frac{2}{D}$ y $D - |u| \leq \text{mín}\{w, -z\}$ así que

$$w_uf \geq -|a|(D+1)(1+\frac{1}{D}) - 2|b| \leq -|a|w - 2(|a|+|b|), \quad w_vg \geq -2|c|w - 2|d|,$$

de donde

$$w_uf + w_vg \leq (-|a| - 2|c|)w - 2(|a| + |b| + |d|).$$

De la misma manera tenemos

$$z_uf + z_vg \leq -(|a| + 2|c|)z + 2(|a| + |b| + |c|).$$

Como la función $v\sqrt{u^2+4v}$ es localmente Lipschitz, se sigue que f y g son localmente Lipschitz.

Bibliografía

[1] Pierre-Arnaud Raviart Edwige Godlewski, *Hyperbolic sistems of conservation laws*, 1991.

[2] Ming Tao Jin Yan, Zhixin Cheng, *Conservation laws i: Viscosity solution*, Revista Colombiana de Matemáticas **41** (2001), 81–90.

[3] _____, *Conservation laws ii: Weak solution*, Revista Colombiana de Matemáticas **41** (2001), 91–106.

[4] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications.*, Jhon Wiley & Sons., 1989.

[5] Yan Xioping Lin Fanghua, *Geometric measure theory- an introduction*, Beijing, Newyor, 2002.

[6] Yunguan Lu, *Hyperbolic conservation laws and the compensated compactness method*, Boca Raton, London, New York, Washington D.C, 2003.

[7] Hermano Frid Neto, *Compacidade compensada aplicada ás leies de conservação*, Colóquio Brasileiro de Matemática, 1991.

[8] Joel Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equation*, 2 ed., Springer Verlag, 1994.

[9] Luc Tartar, *The compensated method applied to systems or conservation laws*, Sistems on Nonlinear Partial Differential Equation (1982), 263–285.