UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA DESARROLLAR PROCESOS DE ABSTRACCIÓN Y GENERALIZACIÓN EN EL ESTUDIO DE ALGUNAS NOCIONES DE TEORÍA DE GRUPOS A TRAVÉS DEL TRABAJO DE LAS SIMETRÍAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Andrés Camilo Flórez Segura

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2023

PROPUESTA DE ENSEÑANZA PARA DESARROLLAR PROCESOS DE ABSTRACCIÓN Y GENERALIZACIÓN EN EL ESTUDIO DE ALGUNAS NOCIONES DE TEORÍA DE GRUPOS A TRAVÉS DEL TRABAJO DE LAS SIMETRÍAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Andrés Camilo Flórez Segura

Trabajo final presentado como requisito parcial para optar al título de: **Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**

Director (a)

Msc. Martha Cecilia Moreno Penagos

Línea de investigación: **Procesos en la enseñanza de las ciencias**

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Bogotá, Colombia
2023

Dedicatoria

A mi madre, hermanos, familia y amigos porque sin ustedes nada de este proceso sería posible. Gracias a Dios y al acompañamiento de ellos actualmente soy docente de matemáticas.

"La matemática es el trabajo del espíritu humano que está destinado tanto a estudiar como a conocer, tanto a buscar la verdad como a encontrarla."

Évariste Galois

Agradecimientos

Agradezco inmensamente a la profesora Martha Moreno por el acompañamiento en todo el proceso del trabajo de grado, por su empatía, paciencia, dedicación, ayuda, creatividad y amor por su profesión docente. También agradezco por las primeras asesorías del profesor Humberto Sarria, a mi colega Pablo Beltrán por su ayuda, recomendaciones y ánimo en momentos difíciles, a Daniela por su apoyo emocional, su ayuda en la logística y sus conocimientos en los materiales didácticos. Asimismo, agradezco a la Universidad Pedagógica Nacional por su trabajo en la licenciatura en matemáticas y el proceso que viví allí, siempre estaré orgulloso de ser egresado de la educadora de educadores. También gracias a la Universidad Nacional de Colombia por permitirme seguir avanzando en mi educación formal con el objetivo de ser cada día un mejor docente y finalmente le agradezco a la I.E.D Escuela Normal Superior Santa Teresita de Quetame por los espacios de investigación en el aula, por irradiar pedagogía y estar comprometida con la profesionalización docente.

Resumen

Propuesta de enseñanza para desarrollar procesos de abstracción y generalización en el estudio de algunas nociones de teoría de grupos a través del trabajo de las simetrías de figuras geométricas.

El proyecto se desarrolló fundamentalmente pensando en potenciar los procesos de abstracción y generalización en un grupo de estudiantes del Ciclo IV (grado Undécimo) del colegio IED Escuela Normal Superior. Como temática se seleccionó la idea geométrica de simetría y el concepto de grupo como estructura algebraica, y se materializó en una propuesta didáctica para estudiar las propiedades y la noción de grupo y relacionarla con los movimientos rígidos del plano: traslación, rotación y reflexión y la idea de simetría. La propuesta consta de una prueba diagnóstica y cuatro talleres introductorios de conceptualización, el primero para movimientos rígidos en el plano, el segundo para la idea de simetría y el tercero para operaciones binarias, propiedades de los conjuntos numéricos y el cuarto para la noción de grupo y sus propiedades.

Palabras clave: Movimientos rígidos del plano, traslación, rotación, reflexión, simetría, operación binaria y estructura algebraica de grupo.

Abstract

Teaching proposal to develop abstraction and generalization processes in the study of some notions of group theory through the work on the symmetries of geometric figures.

The dissertation was developed fundamentally thinking about enhancing the processes of abstraction and generalization in a group of students from Cycle IV (Eleventh grade) of the IED Escuela Normal Superior school. The geometric idea of symmetry and the concept of group as an algebraic structure were selected as the theme and materialized in a didactic proposal to study the properties and notion of group and relate it to the rigid movements of the plane: translation, rotation and reflection and the symmetry idea. The proposal consists of a diagnostic test and four introductory conceptualization activities, the first for rigid movements in the plane, the second for the symmetry idea, the third for binary operations, properties of numerical sets and the fourth for the notion of group and its properties.

Keywords: Rigid movements of the plane, translation, rotation, reflection, symmetry, binary operation, and group algebraic structure.

Contenido

1. Introducción 1

2. Objetivos 7

2.1 Objetivo general 7

2.2 Objetivos específicos 7

3. Marco Teórico 9

3.1 Marco histórico 9

3.2 Marco disciplinar 14

3.2.1 Operación binaria 15
3.2.2 Grupo (Estructura algebraica) 15
3.2.3 Grupos Finitos 20
3.2.4 Transformaciones 23
3.2.5 Clases de transformaciones 26
3.2.6 Traslación 27
3.2.7 Rotación 28
3.2.8 Reflexión 32
3.2.9 Composición de transformaciones 38
3.2.10 Grupos de Transformaciones 39

3.3 Marco didáctico 45

3.3.1 Abstracción 45
3.3.2 Proceso de Abstracción 45
3.3.3 Generalización 46
3.3.4 Proceso de abstracción 47
3.3.5 Niveles de razonamiento en geometría 50
3.3.6 Niveles de razonamiento Algebraico 51
3.3.7 Modelo pedagógico 53

4. Marco metodológico 55

4.1.1 Tipo de investigación 55
4.1.2 Propuesta didáctica 56
4.1.3 Estructura de los talleres 57
4.1.4 Secuencia didáctica 64

5. Análisis de los resultados 103

5.1 Prueba diagnóstica 103

5.1.1 Análisis prueba diagnóstica 106

5.2 Secuencia didáctica (Talleres) 121

5.2.1 Análisis de la aplicación de la secuencia didáctica (Talleres) 123

5.3 Prueba o test final 135
5.3.1 Análisis Prueba o test final 135
6. Conclusiones y recomendaciones 143
6.1 Conclusiones 143
6.2 Recomendaciones 146
Bibliografía 149

Lista de figuras

Pág.

Figura 3.1: Mosaicos en Alhambra 11
Figura 3.2: Esgrafiado Catalán 13
Figura 3.3:Clasificación de los grupos cristalográficos planos 13
Figura 3.4: Representación Traslación, Reflexión y Rotación 26
Figura 3.5: Transformación Isomórfica 27
Figura 3.6: Traslación de un punto 27
Figura 3.7: Traslación de un polígono dado un vector de 4 unidades 28
Figura 3.8: Rotación de un punto 29
Figura 3.9: Rotación completa de un punto 30
Figura 3.10: Rotación de un polígono en sentido antihorario con un ángulo de 180º con respecto al punto P 31
Figura 3.11: Reflexión Central 32
Figura 3.12: Simetría Central 33
Figura 3.13: Reflexión respecto a una recta 35
Figura 3.14: Reflexión respecto a los ejes 35
Figura 3.15: Simetría axial 37
Figura 3.16: Composición de transformaciones 38
Figura 3.17: Triángulo equilátero 41
Figura 3.18: Medianas del triángulo 42
Figura 3.19:Simetría de rotación de 120° 42
Figura 3.20: Simetría de rotación de 240° 43
Figura 3.21: Simetría de reflexión 43
Figura 3.22: Simetría de reflexión 44
Figura 3.23:Simetría de reflexión 44
Figura 5.1: Evidencias aplicación 103
Figura 5.2: Solución punto 3 prueba diagnóstica 106
Figura 5.3: Solución del punto 6 prueba diagnóstica 107
Figura 5.4: Solución punto 8 prueba diagnóstica 107
Figura 5.5: Solución punto 9 prueba diagnóstica 108
Figura 5.6:Solución punto 9 prueba diagnóstica 108
Figura 5.7: Triángulo isósceles 109

Lista de tablas

Pág.

Tabla 3-1: Tabla resultados (G,*) 20
Tabla 3-2: Tabla con resultados (G, X)..... 22
Tabla 3-3.2.10.1 Composición de simetrías del triángulo equilátero..... 40
Tabla 4-1.1.3.1: Coordenadas del barco 60
Tabla 4-2.1.4: Movimientos de los asientos rueda de chicago 68
Tabla 4-3.1: Características de los movimientos 76
Tabla 4-4.3 Conjuntos numéricos..... 91
Tabla 4-5.1: Tabla de operaciones..... 94
Tabla 4-6.1Composición de simetrías del triángulo equilátero 97
Tabla 4-7.1 Composición de horas en el reloj 98
Tabla 4-8.1: Composición de funciones 99
Tabla 4-9.1: Tabla composición de movimientos..... 102
Tabla 5-1.1: Clasificación de las preguntas según el tipo de razonamiento geométrico y según los procesos de generalización y abstracción..... 105
Tabla 5-2.1: Clasificación de las preguntas según el tipo de razonamiento algebraico y según los procesos de generalización y abstracción..... 106
Tabla 5-3.1: Porcentajes desempeño en la solución de las preguntas y situaciones por parte de los estudiantes. 112
Tabla 5-4.1: Clasificación de las actividades taller 1 según los procesos de generalización y abstracción..... 122
Tabla 5-5.1: Clasificación de las actividades taller 2 según los procesos de generalización y abstracción..... 122
Tabla 5-6.1: Clasificación de las actividades taller 3 según los procesos de generalización y abstracción..... 122
Tabla 5-7.1: Clasificación de las actividades taller 4 según los procesos de generalización y abstracción..... 123
Tabla 5-8.1: Composición de movimientos..... 136
Tabla 5-9.1: Porcentajes desempeño en la solución de las preguntas y situaciones del juego o test final por parte de los estudiantes. 138
Tabla 5-10.1: Clasificación de las preguntas y situaciones del juego o test final según los procesos de generalización y abstracción..... 138

1. Introducción

La presente propuesta de enseñanza se desarrolló en la I.E.D Escuela Normal Superior Santa Teresita, ubicada en el municipio de Quetame en Cundinamarca, su población se sitúa en los estratos socioeconómicos 1 y 2. El enfoque de la institución es pedagógico, su proyecto educativo institucional está encaminado a la formación de docentes normalistas superiores que hacen sus prácticas de aula en grupos de básica primaria en centros educativos rurales o urbanos. El proyecto curricular del área de matemáticas se organiza alrededor de los contenidos temáticos y se plantean como ejes los conocimientos y las competencias.

Desafortunadamente, en la práctica de aula se ha evidenciado un descuido respecto al desarrollo de competencias, y en la práctica pedagógica se ha podido observar que los estudiantes presentan dificultades en diversos aspectos de la matemática básica, particularmente las relativas al pensamiento espacial y geométrico; algunos desconocen conceptos y relaciones básicas de la geometría plana y del espacio, hay deficiencias manifiestas en el análisis de las transformaciones y sus efectos sobre figuras planas. Se observa que no se han incorporado algunas de las formas de razonamiento en geometría acorde al nivel esperado para este grado de escolaridad.

Las carencias detectadas en los estudiantes de grado once, con los que se desarrolla la práctica de aula, les dificulta la interpretación de enunciados, identificación de condiciones y por lo tanto se les presentan obstáculos para hacer inferencias, abstraer y generalizar.

Las dificultades mencionadas se evidencian en los escritos de los estudiantes, en la forma de comunicarse verbalmente, cuando participan en clase, explican y presentan argumentos, plantean y resuelven problemas, también se encuentran inconvenientes si se debe o se quiere hacer relaciones con otras áreas del conocimiento o con las diferentes ramas o campos dentro de las matemáticas para abordar un mismo objeto matemático.

Incluso en las evaluaciones escritas y orales que se realizan dentro del aula o las pruebas externas estandarizadas como el examen saber 11, muestran estas falencias.

Por lo tanto, se evidencia una importancia de estos procesos en matemáticas con el propósito de tener un trabajo colaborativo entre los diferentes campos de las matemáticas. "*En este sentido, el estudio de las propiedades de los números y sus operaciones y de la manera como varían sus resultados con el cambio de los argumentos u operando, o de los objetos de la geometría con sus características y de la manera cómo cambian las medidas de las cantidades asociadas con las transformaciones de esos objetos, se proponen como procesos de abstracción y generalización a partir del análisis de lo que es invariante, en medio de los aspectos variables de un conjunto de situaciones."* (MEN, 2006, p.69). En el presente caso, una relación entre la geometría y el álgebra puede ser el vehículo para desarrollar procesos de abstracción y generalización que les permita mejorar en el aprendizaje de las matemáticas.

Lastimosamente, en muchos casos se ha dejado relegado el proceso de abstracción en la enseñanza de las matemáticas a una escueta repetición de leyes y aplicación de fórmulas. Difícilmente se construye el conocimiento o se redescubre. Esta tarea es esencial en los procesos de aprendizaje de las matemáticas, debido a que uno de los resultados que se quiere con su trabajo es la resolución de problemas. A través de procesos de abstracción y de generalización se construyen y se desarrollan diferentes campos de las matemáticas, pues algunos problemas, que surgieron a partir de simplemente observar lo que se encuentra a nuestro alrededor y percibir algunos patrones de comportamiento entre los elementos y las relaciones entre estos, ayudaron a construir objetos y relaciones en matemáticas.

Sin embargo, *"Está claro que, la generalización y formalización de patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas al igual que el análisis de situaciones con la ayuda de símbolos, constituyen una de las áreas que mayor predomina en los estudios sobre errores en matemáticas escolares."* (Castellanos y Obando, 2009, p.3). Razonando de esta manera se puede notar que para las matemáticas es sustancial el hallar patrones, usar símbolos para referirse a objetos, abstraer y generalizar; pues estos dos últimos procesos, permiten entender y estudiar relaciones y propiedades de estructuras, conjuntos y operaciones que se realizan en el trabajo con las matemáticas escolares estando estos

dos procesos inmersos en el aprendizaje y enseñanza de las diferentes áreas o campos de las matemáticas escolares.

La propuesta responde y está enmarcada en los siguientes dos estándares básicos de competencias de matemáticas planteados para grado décimo y undécimo por parte del ministerio de educación nacional de Colombia (MEN): *"Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos."* (MEN,2006, p. 88). Para poder estudiar nociones de grupo para el desarrollo de los procesos de abstracción y generalización se reforzará y usará como vehículo el siguiente estándar en el área de geometría: *"Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte",* (MEN,2006). Estándar que esta propuesto para ciclo III y se espera que sea de los prerrequisitos que los estudiantes de grado once ya manejan o han desarrollado.

De la situación descrita anteriormente surge la siguiente pregunta:

¿Qué tipo de estrategia didáctica permite mejorar los procesos de abstracción y generalización en matemáticas de los estudiantes de grado once?

Aun cuando se pueden diseñar una cantidad muy variada de estrategias didácticas que permitan desarrollar y reforzar los procesos de abstracción y generalización de los estudiantes, se ha escogido como marco de referencia la Teoría de Grupos en particular la estructura de grupo y algunas propiedades y los movimientos rígidos del plano para diseñar una colección de talleres que estimulen al estudiante a mejorar y desarrollar estas habilidades.

Pretendemos motivar al estudiante a través del estudio de las simetrías de figuras planas con el fin de vincular la geometría y el álgebra como herramientas que permitan: clasificar, ordenar, analizar y describir patrones, para que posteriormente intenten inducir o deducir propiedades inherentes o invariantes de las formas geométricas consideradas.

Para responder a esta pregunta, se propone construir una secuencia didáctica que aparte de profundizar en un concepto específico de la geometría de transformaciones y del estudio de una estructura algebraica que se encuentra en el trabajo con los sistemas numéricos que los estudiantes han manipulado, se reafirme en los estudiantes de grado

once los procesos de abstracción y generalización en matemáticas, mediante un vínculo entre geometría y álgebra, ya que se inicia estudiando situaciones de la geometría para hallar patrones y relaciones que se establecen entre las simetrías de algunas figuras, y como estas pueden ser un potente insumo para estudiar nociones de Teoría de Grupos. Esta propuesta apoya la siguiente idea "*La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se debe permear del tipo de condiciones que establece la naturaleza de la disciplina, y especialmente ajustarse y construir pedagógicamente la abstracción, pero no para evadirla, sino para comprenderla mejor. En un marco teórico que establece vasos comunicantes con la realidad física y social, la Educación Matemática debe fortalecer las diferentes formas de abstracción y operación mental que constituye esta ciencia. La abstracción es importante, es fundamental."* (Ruiz, 2001, p. 5).

Teniendo en cuenta la importancia en apoyar y desarrollar los procesos de abstracción y generalización en los estudiantes, el presente trabajo se compone de seis capítulos. En el primero se presentó una introducción y justificación para definir la pregunta de investigación que surge del planteamiento del problema. En el capítulo dos se encuentra el objetivo general y los objetivos específicos del trabajo. Seguidamente en el capítulo tres se realiza un marco teórico compuesto por un marco histórico y epistemológico, donde se muestra el surgimiento y el desarrollo del concepto de la estructura algebraica de grupo y la geometría detrás de los movimientos rígidos en el plano. Un marco disciplinar donde se estudian los aspectos conceptuales asociados a la estructura de grupo y de los movimientos rígidos en el plano (reflexión, traslación y rotación) y también la noción de simetría. Posteriormente se encuentra un marco didáctico donde se presentan y analizan los aspectos pedagógicos y didácticos inmersos en los conceptos a trabajar a partir de los niveles de razonamiento de Van Hiele, en los cuales se observan los procesos de abstracción y generalización en geometría y los niveles de razonamiento en álgebra para la educación escolar propuestos por Godino, J. Aké, L. Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014) y Godino, J. Neto T. Aké, L. Etchegaray, S y Wilhelmi, M. (2015). Además de los tipos de generalización propuestos por Radford, L. (2003) y la investigación realizada por Moreno, P. (2014) y Mason (1985) y los procesos de abstracción propuestos por Castro, Cañadas y Molina (2010).

El cuarto capítulo contiene el marco metodológico y la propuesta de enseñanza, en la cual se presenta el tipo de investigación, la secuencia didáctica detallando una prueba diagnóstica, cuatro talleres y la prueba final, que se propone como un juego. En el capítulo cinco se presenta un análisis de la prueba diagnóstica, los cuatro talleres con sus respectivas actividades y la prueba final, con la cual se evalúa el impacto de la secuencia didáctica usando las categorías y niveles planteados en el marco didáctico. Posteriormente, en el capítulo seis se encontrarán las conclusiones encontradas en todo el proceso de aprendizaje y recomendaciones para posteriores intervenciones en el aula y propuestas de enseñanza. Finalmente se encuentra la bibliografía usada para realizar el presente trabajo de grado.

2. Objetivos

2.1 Objetivo general

Diseñar una secuencia didáctica para el grado once, que le permita al estudiante desarrollar procesos de abstracción y generalización a través del estudio de la noción de grupo. Se pretende llegar a este objetivo mediante la visualización y estudio de las simetrías de figuras planas en particular se usarán los movimientos rígidos del plano con el fin de detectar propiedades invariantes en las figuras.

2.2 Objetivos específicos

1. Identificar conceptos previos de los estudiantes respecto a las transformaciones geométricas en el plano (rotaciones, traslaciones, reflexiones, simetrías) y propiedades de los sistemas numéricos que utilizan.
2. Analizar conceptos básicos de las transformaciones geométricas y teoría de grupos y su desarrollo histórico para establecer un marco teórico.
3. Seleccionar tópicos de la geometría de transformaciones y estructuras algebraicas pertinentes a la secuencia desde el contexto curricular.
4. Estructurar una secuencia didáctica.
5. Implementar una secuencia didáctica con estudiantes del grado once.
6. Evaluar la implementación de la secuencia didáctica.

3. Marco Teórico

3.1 Marco histórico

Actualmente existe una fuerte relación de las diferentes áreas del conocimiento con las matemáticas modernas. Pues se consigue observar algunos beneficios o aplicaciones en sectores como la química, la biología, la física, la arquitectura; incluso encontramos relaciones en el arte y la música. En este apartado se quiere esbozar el cómo se fue involucrando la teoría de grupos, teoría que es objeto de estudio dentro las matemáticas modernas. También se trazará una línea histórica sobre el estudio de los movimientos rígidos en el plano en geometría, lo referente a la noción de simetría. Pues estas áreas tuvieron desarrollo en diferentes contextos históricos.

En el transcurso de la historia de las matemáticas se evidencia que hubo varios intentos por resolver ecuaciones algebraicas de diferentes grados. Un problema que muchos querían resolver, permitiendo así la construcción de los cimientos para el desarrollarlo de lo que hoy se conoce como el concepto de grupo en estructuras algebraicas. Inicialmente, los árabes propusieron expresiones radicales para solucionar estas ecuaciones, también lo intentaron los italianos en el siglo XVI, aunque solo consiguieron obtener expresiones para ecuaciones de grado 2, 3 y 4. Dentro de ellos se destacó el trabajo de Ferro, Tartaglia y Cardano. Con este trabajo se comenzó un camino hacia la generalización de los resultados que se habían encontrado a través de la historia de las ecuaciones, François Vieta y Rene Descartes, establecieron un lenguaje, un simbolismo y una notación para poder manipular de mejor manera estas ecuaciones.

En el siglo XIX, aparece un matemático noruego quien pudo resolver el misterio de las soluciones para ecuaciones de quinto o mayor grado, Niels Abel, basado en trabajos de Ruffini, demostró que no había soluciones radicales para estas ecuaciones, aunque demostraron el cómo obtenerlas, no su existencia. Estos estudios hacen parte del concepto

de grupo, concepto que es la base fundamental en el álgebra abstracta, propuesta por Galois; la teoría de grupos. En este camino se estudian propiedades en determinados conjuntos que no eran consistentes en otros; así se dio una gran diversidad de operaciones y relaciones no vistas antes, que dan como resultado el origen de otro tipo de álgebras.

Específicamente Lagrange, Cauchy y Gauss, fueron los antecesores en las ideas primarias para la construcción de la teoría de grupos, pues está implícito este concepto en sus investigaciones, pero Galois, fue quien propuso formalmente esta idea de grupo, subgrupo e isomorfismo, después creo la teoría que lleva su nombre, teoría de Galois, posteriormente personajes como Cayley, Jordán proporcionan definiciones y trabajos que muestran el concepto de grupo de manera más abstracta. A comienzos del siglo XX se axiomatiza el álgebra, algo que se estaba buscando hacer, de la misma manera que buscaban axiomatizar la geometría. Trabajo que podemos observar en los trece libros de Euclides.

Cabe resaltar que previo a este trabajo de consolidar el álgebra de manera más formal o abstracta, se estudiaron los trabajos de algunas comunidades previas como las civilizaciones egipcias en el año 3000 a.C. y la cultura mesopotámica en el siglo XVII a.C., ya que estas civilizaciones lograron encontrar soluciones a ecuaciones de primer y de segundo grado, usándolas en diferentes situaciones problema de su entorno. Además, en el siglo I d.C. en la cultura china, inventaron métodos para obtener raíces a las ecuaciones con números racionales.

Posteriormente en Grecia, hubo un desarrollo de una temática que se conocía como álgebra geométrica, obteniendo soluciones a ecuaciones cúbicas y de grado cuatro, esta época fue importante para las matemáticas debido a la aparición de un método axiomático que serviría para posteriores generaciones en el descubrimiento de las matemáticas. En la cultura hindú se descubrió y se empezaron a manipular números negativos, y cómo estos podían ser raíces de ecuaciones. Para terminar esta etapa, los musulmanes tuvieron algunos trabajos para dar soluciones a ecuaciones de primer, segundo y tercer grado.

Dentro del trabajo mencionado anteriormente se puede decir que, existe una relación dentro del desarrollo del concepto de grupo, esta relación se da con la idea de simetría, algo que le permitió a Galois resolver el problema de las soluciones para ecuaciones de quinto o mayor grado. Pues los sistemas numéricos poseen en general simetrías

compatibles con las operaciones suma, resta, multiplicación y división. Las simetrías de un sistema numérico específico se pueden aplicar una tras otra, compuestas entre sí, al igual que las simetrías de un objeto geométrico.

La noción de simetría es una relación que dentro de la geometría ha estado presente desde los comienzos de las primeras civilizaciones de la humanidad. Esta relación se refleja en los primeros escritos en piedras o en papiros en los sistemas pictóricos de estas comunidades. También se ha podido observar de manera intuitiva en la observación de la naturaleza y el mundo que nos rodea. Esta idea de simetría se empezó a plasmar en la arquitectura, en la observación de rocas y cristales, en la necesidad de compactar objetos, en las herramientas que usaban para trabajar y en el arte. La simetría empieza a jugar un papel importante dentro de las matemáticas por sus aplicaciones en diferentes áreas, incluso algunos matemáticos la reconocen como una característica de belleza en los objetos de estudio y en el mundo que nos rodea.

Por ejemplo, en el museo de Alhambra en España, en la arquitectura hispanomusulmana, se aprecian diferentes mosaicos o embaldosinados que recubren todas las paredes y pisos de ese lugar. Tienen la característica de contener los 17 grupos de simetrías descubiertos y estudiados por Evgraf Fedorov en el año 1891.

Figura 3.1: Mosaicos en Alhambra

Esta edificación es un gran referente para la cultura mundial y fue declarado patrimonio de la humanidad en 1984. Lo curioso es que el museo alberga por lo menos un ejemplo de

cada uno de estos 17 grupos antes de ser descubiertos o formalizados por Evgraft Fedorov y George Pólya, quien los estudió de manera independiente en 1924. Fedorov encontró que las 17 formas de teselar un plano se pueden organizar u agrupar dependiendo del número máximo de giros. Existen cuatro grupos de simetría sin giros, cinco grupos de simetría con giros de $180°$, tres grupos de simetría con giros de $120°$, tres grupos de simetría con giros de $90°$ y dos grupos de simetría con giros de $60°$.

Los 17 grupos de simetría son los siguientes: Sin giros $p1$, pm, pg y cm, de orden 2 $p2$, pmm, pmg, cmm y pgg de orden 3 $p3$, $p3m1$ y $p31m$ de orden 4 $p4$, $p4m$ y $p4g$ y finalmente de orden 6 $p6$ y $p6m$.

Tipos	Notación
Sin giros	$p1, pm, pg$ y cm
Giros de orden 2 (180°)	$p2$, pmm, pmg, cmm y pgg
Giros de orden 3 (120°)	$p3$, $p3m1$ y $p31m$
Giros de orden 4 (90°)	4 $p4$, $p4m$ y $p4g$
Giros de orden 6 (60°)	$p6$ y $p6m$

Tabla 3.1.1: Tipo de grupos de simetría

Esta notación para los grupos de simetría está compuesta a lo más por cuatro símbolos, por ejemplo, en el grupo de simetría de giro de 120° llamado $p3m1$ el símbolo p hace referencia al paralelogramo fundamental, el segundo símbolo 3 depende del orden máximo de rotación, el tercer símbolo indica si el mosaico tiene una simetría, en este caso es la letra m significa que tiene una simetría de reflexión, si tuviera una g tendría una simetría de traslación o deslizamiento y si sale un 1 no tiene ninguna de las anteriores. El ultimo símbolo hace referencia a lo mismo del símbolo anterior dependiendo o no de la presencia de un segundo orden. El siguiente mosaico es de simetría $p3m1$, ya que posee giros de orden 3 y por todo centro de giro pasan ejes de reflexión.

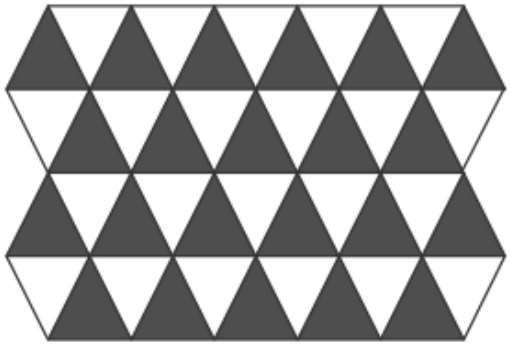


Figura 3.2: Esgrafiado Catalán

Los profesores Joaquín Valderrama, Francisco Fernández y Antonio Fernández presentan la siguiente tabla como algoritmo de reconocimiento de los grupos de simetría llamados también grupos cristalográficos planos:

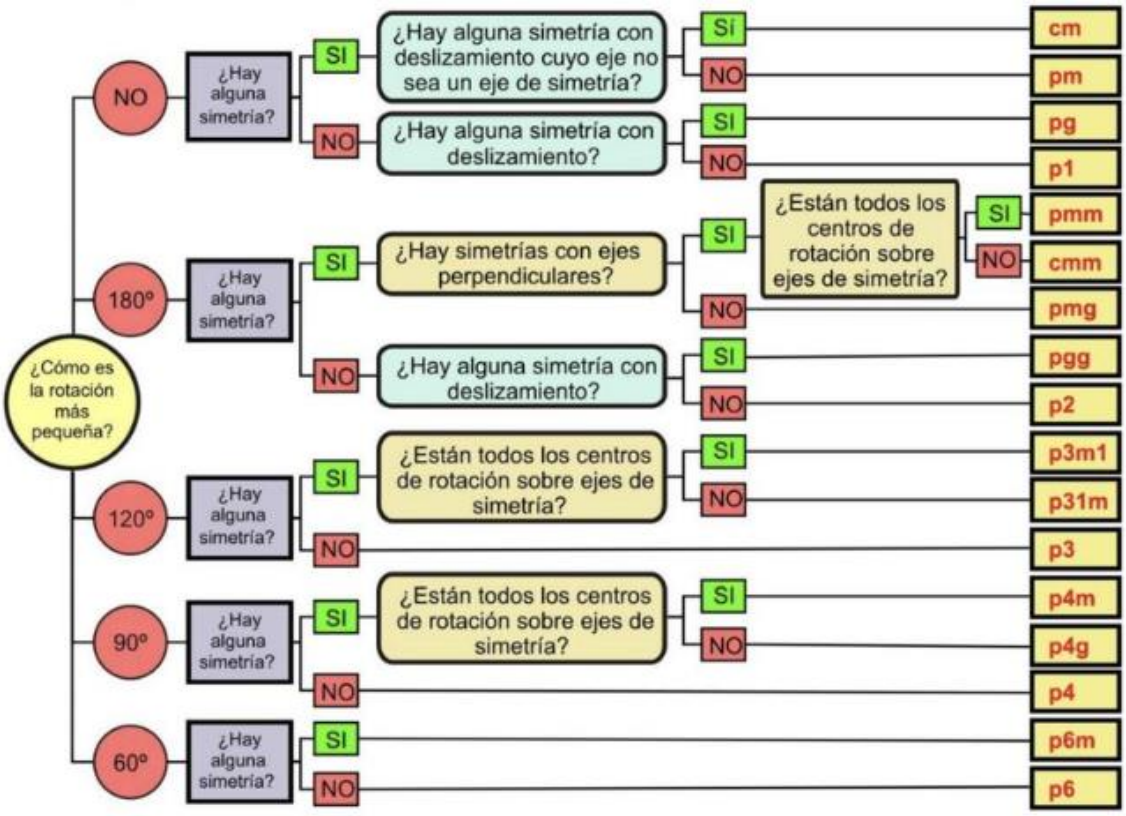


Figura 3.3:Clasificación de los grupos cristalográficos planos

Estas simetrías se presentan como combinaciones de movimientos en el plano (traslaciones, rotaciones y reflexiones). Movimientos que podemos ver reflejados y estudiados de manera más organizada y formal en el libro los elementos de Euclides.

Estas simetrías numéricas forman una estructura de grupo; a este grupo se le llamo grupo de Galois del cuerpo numérico. Lo que Galois intento fue llevar la idea de simetría, que entendemos de manera intuitiva en la geometría, al campo de la teoría de números.

Galois pudo demostrar que una fórmula en términos de radicales es decir en raíces cuadradas, cubicas etc, existe si y solo si el correspondiente grupo de Galois es resoluble, para ecuaciones cuadráticas, cubicas y de grado cuarto, los Grupos de Galois son siempre resolubles. Pero Galios demostró que el grupo de simetrías de una ecuación típica de grado quinto o superior no es resoluble, por tanto, no existe fórmula para las soluciones de esas ecuaciones en términos de radicales. *"Hará falta esperar a los trabajos de Jordán para ver prolongarse de manera significativa los trabajos de Galois. Mientras tanto, varios matemáticos explicitarán ciertos razonamientos de su teoría o considerarán aplicaciones a diversos campos de las matemáticas"* (Collette, J. 1985, 394).

Es importante tener en cuenta, *"Por lo tanto, el desarrollo de un área necesariamente marca su impacto en las otras y todas se retroalimentan entre sí. En particular, el álgebra no es ajena a esta tendencia y a lo largo de su desarrollo es posible observar su influencia en otras ramas de la matemática y cómo se ha visto beneficiada por los desarrollos de éstas"* Rascón, G. (2003). Pues esta rama de la matemática no se desarrolló o no tuvo impacto de manera aislada de las demás ramas de la matemática, ya que fue un motor del cual se beneficiaron las matemáticas en general en cada momento histórico.

3.2 Marco disciplinar

En este capítulo se llevará a cabo una presentación formal de los conceptos matemáticos que están involucrados en la propuesta de enseñanza. Para ello tendremos en cuenta los libros *Álgebra Abstracta* (Fraleigh,1998) y *Geometría* (Samper, 2008).

3.2.1 Operación binaria

Definición 3.2.1.1: Dado un conjunto no vacío C, se denomina ley de composición interna (u operación binaria) en C a toda función que asigna a cada pareja ordenada de elementos del conjunto otro elemento del mismo conjunto, es decir:

$f: C \times C \rightarrow C$, tal que $f(a,b) = c, \quad , c \in C$

$f(a,b)$ se denomina el compuesto de a con b, y se acostumbra a notarlo como:
$f(a,b) = afb = a * b$

Ejemplos 3.2.1.1: La adición de números naturales N es una ley de composición interna:

$$+: \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}$$

$$(a,b) \rightarrow a + b.$$

Ejemplo 3.2.1.2: En el conjunto de los números naturales N, se puede definir la función:

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \rightarrow \boldsymbol{N}$$

$(a,b) \rightarrow \boldsymbol{f}(a,b) = min(a,b)$ es una operación binaria.

por ejemplo: $f(5,6) = 5f6 = 5$, $f(8,3) = 8f3 = 3$,

Y $f(4,4) = 4f4 = 4$

3.2.2 Grupo (Estructura algebraica)

Para mayor practicidad, de ahora en adelante cuando se defina un conjunto con una operación se usará la notación $(A,*)$, donde A es el conjunto y * la operación.

Definición 3.2.2.1: Sea G un conjunto no vacío provisto de una operación binaria *, se dice que el par $(G,*)$ es un grupo si cumple:

$\boldsymbol{G_1}$: Dados $a,b,c \in G, a*(b*c) = (a*b)*c$, es decir, $*$ es asociativa.

$\boldsymbol{G_2}$: Existe un elemento $e \in G$ tal que $e*a = a*e = a$ para todo $a \in G$, e se denomina elemento neutro o módulo.

$\boldsymbol{G_3}$**:** Para cada $a \in G$ existe un elemento $a' \in G$ tal que $a' * a = a * a' = e$

a' se denomina el inverso de $a\ en\ G$. Se acostumbra a denotar el inverso de a

como $a' = a^{-1}$.

Si además cumple que para a, b en G,

$a * b = b * a$, es decir, $*$ es conmutativa, entonces se dice que $(G,*)$, es un **grupo abeliano**.

Ejemplo 3.2.2.1: Los números enteros con la suma: ($\mathbb{Z}$,+) tienen estructura de grupo abeliano con módulo $e = 0$ y elemento inverso $a' = a^{-1} = -a$

Ejemplo 3.2.2.2: Si se define la operación $*$ en el conjunto de los números enteros de forma que

$$a * b = a + b + 5$$

Entonces ($\mathbb{Z}$,*) es un grupo abeliano, veamos

- * es una operación binaria ya que si $a, b \in \mathbb{Z}$, la suma $a + b + 5 \in \mathbb{Z}$

- Se cumple G_1 es decir la operación $*$ es asociativa dado que para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

En la siguiente tabla se demuestra la propiedad

$(a * b) * c = (a + b + 5) * c$	Definición de * para $(a * b)$
$(a + b + 5) * c = (a + b + 5) + c + 5$	Definición de * para (c)
$(a + b + 5) + c + 5 = a + (b + c + 5) + 5$	Asociativa de la suma en $\mathbb{Z}$
$a + (b + c + 5) + 5 = a + (b * c) + 5$	Definición de * $(b * c)$
$a + (b * c) + 5 = a * (b * c)$	Definición de * (a)

- Se cumple G_2, es decir en $\mathbb{Z}$ para la operación * existe elemento neutro e

$\forall a \in \mathbb{Z},\ a * e = a$ y $e * a = a$	
$a * e = a + e + 5 = a$	Definición de *
$a + e + 5 = a \rightarrow a + (-a) + e + 5 = a + (-a)$	Inverso aditivo en $\mathbb{Z}$
$\big(a + (-a)\big) + e + 5 = a + (-a)$	Asociativa de la + en $\mathbb{Z}$
$0 + e + 5 = a + (-a) = 0$	Inverso aditivo de + en $\mathbb{Z}$
$e + 5 = 0$	Módulo de la + en $\mathbb{Z}$
$e + 5 + (-5) = 0 + (-5)$	Inverso aditivo en $\mathbb{Z}$
$e + \big(5 + (-5)\big) = 0 + (-5) = -5$	Asociativa de la + en $\mathbb{Z}$
$e = -5$	Módulo de la + en $\mathbb{Z}$

Para $e * a = a$ se desarrolla de forma análoga.

- G_3 se cumple, es decir, para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe un

$a^{-1} \in \mathbb{Z}$ tal que $a * a^{-1} = e$ y $a^{-1} * a = e$ con $e = -5$

$a * a^{-1} = e\ \ y\ \ a^{-1} * a = e$	
$a * a^{-1} = a + a^{-1} + 5 = e = -5$	Definición de *
$a + a^{-1} + 5 + (-5) = -5 + (-5)$	Inverso aditivo en $\mathbb{Z}$
$a + a^{-1} + \big(5 + (-5)\big) = -5 + (-5)$	Asociativa de la + en $\mathbb{Z}$
$a + a^{-1} + 0 = -10$	Inverso aditivo de + en $\mathbb{Z}$
$a + a^{-1} = -10$	Módulo de la + en $\mathbb{Z}$
$a + a^{-1} + (-a) = -10 + (-a)$	Inverso aditivo en $\mathbb{Z}$
$a^{-1} + \big(a + (-a)\big) = -10 + (-a)$	Asociativa y conmutativa de la + en $\mathbb{Z}$
$a^{-1} + 0 = -10 + (-a)$	Módulo de la + en $\mathbb{Z}$
$a^{-1} = -10 - a$	

Para $a^{-1} * a = e$ procedimiento análogo que también conduce a $a^{-1} = -10 - a$

Adicionalmente se puede verificar que ($\mathbb{Z}$,*) es un grupo abeliano

$a * b = a + b + 5$	Definición de * para $(a * b)$
$a + b + 5 = b + a + 5$	Conmutativa de + en $\mathbb{Z}$
$b + a + 5 = b * a$	Definición de * para $(b * a)$

Ahora es fundamental comentar algunos resultados útiles.

Teorema 3.2.2.1: Si (G, *) es un grupo, entonces

1. El módulo e y el inverso aditivo a^{-1} son únicos
2. Para todo $a \in G, (a^{-1})^{-1} = a$
3. Para todos $a, b, c \in G, \quad a * b = a * c \rightarrow b = c$

Demostración:

1. Para demostrar la primera propiedad se usa contradicción.

1. suponemos que existen por lo menos dos elementos e y e' en G, con $e \neq e'$ y tales que para todo $a \in G$ $a * e = e * a = a \quad y \quad a * e' = e' * a = a$	Hipótesis
2. Con $a = e'$ se tiene $e' * e = e * e' = e'$ y con $a = e$ se tiene $e' * e = e * e' = e$	Propiedad G_2
3. $e' = e$	Propiedad transitiva
4. $e' = e$ y $e \neq e'$	Negación de la hipótesis
5. e es único.	Conclusión

De manera análoga se puede demostrar la unicidad del inverso.

2.

1. Si $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$	Hipótesis
2. $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$	Propiedad G_3
3. a^{-1} es único	Propiedad 1, Teorema 3.1
4. $(a^{-1})^{-1} = a$	Por paso 1,2 y 3

3. Propiedad conocida como cancelativa.

1. Supongamos que $a * b = a * c$	Hipótesis
2. $a^{-1} \in G$	Propiedad G_3
3. $a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$	Uniformidad de las igualdades
4. $(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$	Propiedad G_1
5. $e * b = e * c$	Propiedad G_3 y G_2
6. $b = c$	Uniformidad de la igualdad

Teorema 3.2.2.2: Si $(G,*)$ es un grupo, entonces las ecuaciones $a * x = b$ y $y * a = b$ tienen única solución.

Demostración:

Para la siguiente demostración se usará contradicción

1. Supongamos que la ecuación $a * x = b$ tiene dos soluciones, es decir, que existen x_1 y $x_2 \in G$ con $x_1 \neq x_2$ tales que $a * x_1 = b$ y $a * x_2 = b$,	Hipótesis
2. $a^{-1} \in G$	Propiedad G_3
3. $a^{-1} * (a * x_1) = a^{-1} * b$ y $a^{-1} * (a * x_2) = a^{-1} * b$	Uniformidad de las igualdades
4. $(a^{-1} * a) * x_1 = a^{-1} * b$ y	Propiedad G_1

$(a^{-1} * a) * x_2 = a^{-1} * b$	
5. $x_1 = a^{-1} * b$ y $x_2 = a^{-1} * b$	Propiedad G_2
6. $x_1 = x_2$	transitividad
7. $x_1 = x_2$ y $x_1 \neq x_2$	Contradicción
8. x_1 es único	Conclusión

Análogamente para $y * a = b$ se demuestra la unicidad de su solución.

3.2.3 Grupos Finitos

Sea $(G, *)$ un grupo. Se denomina orden del grupo $\big(o(G)\big)$ al cardinal de $(G, (\#(G))$, es decir, el número de elementos del conjunto G.Si $o(G)$ es finito, se dice que G es un grupo finito.

Para representar las operaciones binarias definidas sobre conjuntos finitos es adecuado el uso de tablas. A continuación, se presentan dos ejemplos de operaciones binarias definidas en un conjunto finito. La primera define un grupo mientras la segunda no.

Ejemplos 3.2.3.1: Sea $G = \{a, b, c, d\}$, se define sobre G la operación binaria * como:

$*$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$
$\boldsymbol{a}$	a	b	c	d
$\boldsymbol{b}$	b	a	d	c
$\boldsymbol{c}$	c	d	a	b
$\boldsymbol{d}$	d	c	b	a

Tabla 3-1: Tabla resultados (G, *)

La lectura de la tabla 3-1 es muy simple, por ejemplo:

$$a * a = a; \quad b * c = d; \quad d * c = b$$

Ahora, se verifica que G es un grupo

Demostración.

1. Propiedad G_1

1. $a * (b * c)$	
2. $a * d$	Resultado $(b * c)$ tabla 3-1
3. d	Resultado $a * d$ tabla 3-1
4. $(a * b) * c$	
5. $b * c$	Resultado $(a * b)$ tabla 3-1
6. d	Resultado b$* c$ tabla 3-1
7. $a * (b * c) = (a * b) * c$	Pasos 6 y 3

Análogamente se hace para $a * (b * d) = (a * b) * d$, $b * (c * d) = (b * c) * d$ y para $b * (c * a) = (b * c) * a$

2. Propiedad G_2

La tabla 3.2.3.1 muestra que el módulo o neutro es a, puesto que

1. $a * a = a$	Resultado $(a * a)$ tabla 3-1
2. $a * b = b * a = b$	Resultado $(a * b)$ tabla 3-1
3. $a * c = c * a = c$	Resultado $(a * c)$ tabla 3-1
4. $a * d = d * a = d$	Resultado $(a * d)$ tabla 3-1
5. a es módulo	Pasos 1, 2, 3 y 4

3. Propiedad G_3

Se puede observar que en la tabla 3.2.3.1, que el elemento inverso de cada elemento es él mismo, puesto que

1. $a * a = a \longrightarrow a^{-1} = a$	Resultado $(a * a)$ tabla 3-1
2. $b * b = a \longrightarrow b^{-1} = b$	Resultado $(b * b)$ tabla 3-1
3. $c * c = a \longrightarrow c^{-1} = c$	Resultado $(c * c)$ tabla 3-1
4. $d * d = a \longrightarrow d^{-1} = d$	Resultado $(d * d)$ tabla 3-1
5. $el\ inverso\ de\ cada\ elemento\ es\ el\ mismo$	Pasos 1, 2, 3 y 4

Además de cumplir las tres propiedades de grupo, también es conmutativo porque

1. $a * b = b * a = b$	Resultado $(a * b)$ tabla 3-1
2. $a * c = c * a = c$	Resultado $(a * c)$ tabla 3-1
3. $a * d = d * a = d$	Resultado $(a * d)$ tabla 3-1
4. $b * c = c * b = d$	Resultado $(b * c)$ tabla 3-1
5. $b * d = d * b = c$	Resultado $(b * d)$ tabla 3-1
6. $c * d = d * c = b$	Resultado $(c * d)$ tabla 3-1
7. $(G,*)$ es conmutativo	Pasos 1, 2, 3, 4, 5 y 6

Es decir que $(G,*)$ es un grupo abeliano y además $o(G) = 4$.

Es importante establecer que algunas operaciones binarias no son grupos, observe el siguiente ejemplo

Ejemplo 3.2.3.2: Sea $G = \{a, b, c, d\}$ y X la operación binaria definida de la siguiente forma

$\times$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$
$\boldsymbol{a}$	b	c	d	a
$\boldsymbol{b}$	a	d	c	b
$\boldsymbol{c}$	d	a	b	c
$\boldsymbol{d}$	a	b	c	d

Tabla 3-2: Tabla con resultados (G, X)

Se puede observar que esta operación no cumple con la propiedad G_1, ya que

$$(b \times a) \times c = a \times c = d$$

Mientras que

$$b \times (a \times c) = b \times d = b$$

Con esto $d \neq b$, por tanto $(b \times a) \times c \neq b \times (a \times c)$,

Por lo tanto (G, X) no tiene estructura de grupo.

3.2.4 Transformaciones

Definición 3.2.4.1: Una transformación T, de un conjunto G en un conjunto G' es una función que asigna a cada elemento de G un único elemento del conjunto G', es decir

$$T: G \to G'$$
$$G \to T(G) = G'$$

Ejemplo 3.2.4.1: Sea $G = \{1,2,3\}$, consideremos la transformación $\sigma: G \to G$, definida por:

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 1, \quad \sigma(3) = 2.$$

Esta transformación corresponde a una permutación de los elementos del conjunto $G = \{1,2,3\}$ que se suele escribir de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Otras transformaciones similares que pueden definirse de manera similar son las permutaciones de los elementos del conjunto, en total $3! = 6$, las cuales listamos a continuación:$123, 132, 213, 231, 312, 321$

En general de forma sencilla se define una permutación de un conjunto de n elementos diferentes, como cualquier disposición o arreglo lineal de estos.

Definición 3.2.4.3 (Tipos de transformaciones):

La transformación T de G en G'

1. Es **uno a uno** si cada elemento de G' es imagen de a lo más un elemento de G, esto equivalente a que si

$$T(a) = T(b) \to a = b$$

2. *Es* ***sobre*** si cada elemento de G' es imagen de al menos un elemento de G**,** esto equivalente a que si para todo $a' \in G'$, existe $a \in G$ tal que $T(a) = a'$
3. Una transformación que es uno a uno y sobre es una ***biyección***

En adelante el presente trabajo se referirá particularmente a las transformaciones biyectivas del plano en sí mismo dado que la propuesta didáctica se centra en la relación de estas con la teoría de grupos, es decir, que se trabajará en adelante con trasformaciones en las que $G = G' = \mathbb{R}^2$, de forma que

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \to T(x, y) = (x', y').$$

Lo anterior permite establecer que para cada punto $P = (x, y) \in G$, existe un único punto $Q(x', y') \in G'$, tal que

$$T(P) = T\big((x, y)\big) = (x', y') = Q.$$

Y para cada punto $Q(x', y')$ del plano, existe un único punto $P(x, y)$ tal que

$$T(P) = T\big((x, y)\big) = (x', y') = Q.$$

Ahora si $T(P) = Q$,al punto P se le denomina preimagen y a Q imagen y si $T(P) = P$ se dice que P es un punto fijo.

Ejemplo 3.2.4.3: La transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$, es una transformación biyectiva.

Demostración:

1. Es inyectiva

1. *Supongamos que:* $T(x,y) = T(x',y') \to (x+y, x-y) = (x'+y', x'-y')$	Suposición
2. $x+y = x'+y'$ $x-y = x'-y'$	Definición de igualdad en $\mathbb{R}^2$
3. $2x = 2x' \to x = x'$	Sumando ecuaciones del paso 2
4. $y = y'$	Reemplazando resultado del paso 3, en la primera ecuación del paso 2
5. T es inyectiva	Definición 3.2.4.1

2. Es sobreyectiva

1. Sea $(x',y') \in \mathbb{R}^2$	Dado
2. $T(x,y) = (x',y')$	Hipótesis
3. $T(x,y) = (x+y, x-y) = (x',y')$	Definición de la transformación
4. $x+y = x'$ $\quad y \quad$ $x-y = y'$	Igualar componentes
5. $2x = x' + y' \to x = \frac{x'+y'}{2}$	Sumando las ecuaciones paso 4 y despejando x
6. $x+y = \frac{x'+y'}{2} + y = x' \to \quad y = x' - \frac{x'+y'}{2} = \frac{x'-y'}{2}$	Reemplazando x del paso 5. En las ecuaciones del paso 4
7. T es sobreyectiva	Por paso 6

Como T es inyectiva y sobreyectiva, en consecuencia, es biyectiva. Otros ejemplos:

Ejemplo 3.2.4.4: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; tal que $T(x,y) = (y,x)$

Ejemplo 3.2.4.5: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; tal que $T(x, y) = (-x, -y)$

Ejemplo 3.2.4.6: $i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; tal que $i(x, y) = (x, y)$ transformación idéntica o identidad

3.2.5 Clases de transformaciones

Dentro de las transformaciones del plano en sí mismo se encuentran dos grandes grupos que se detallan a continuación

3.2.5.1 Transformaciones Isométricas: Son aquellas transformaciones que conservan las distancias. Si denotamos por PQ la distancia entre los puntos P y Q, es decir $PQ = d(P, Q)$, entonces la transformación T es una isometría si $PQ = P'Q'$, para todos los puntos del plano $P\ y\ Q$, para los cuales $T(P) = P'$ y $T(Q) = Q'$.

Las isometrías no cambian el tamaño o forma de la figura, de estas se destacan, por ejemplo: las traslaciones, las reflexiones y las rotaciones ejemplificadas respectivamente en las siguientes figuras:

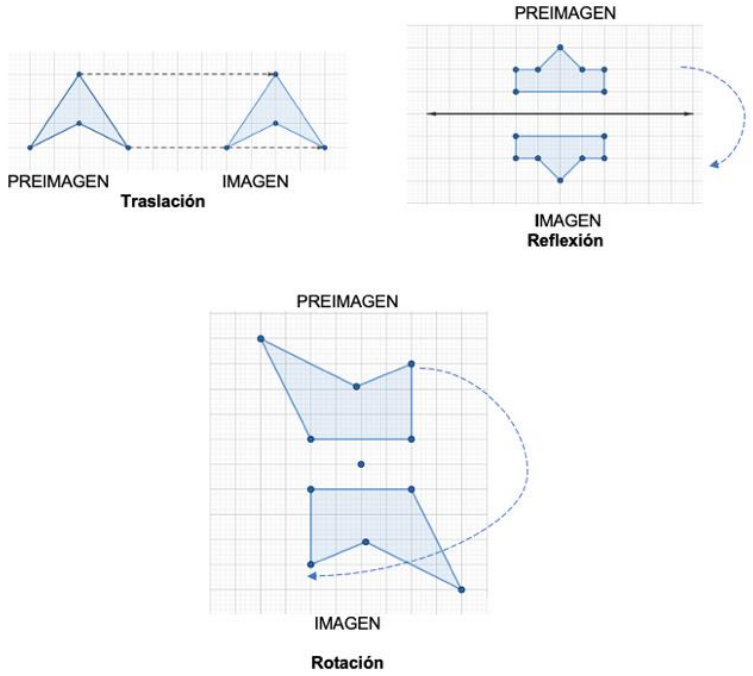


Figura 3.4: Representación Traslación, Reflexión y Rotación

3.2.5.2 Transformación Isomórficas: Son aquellas transformaciones que conservan la forma de la figura, pero no necesariamente el tamaño (existe una proporcionalidad entre las medidas de las figuras involucradas) entre ellas se tienen las homotecias y las semejanzas, como se muestra en la siguiente figura

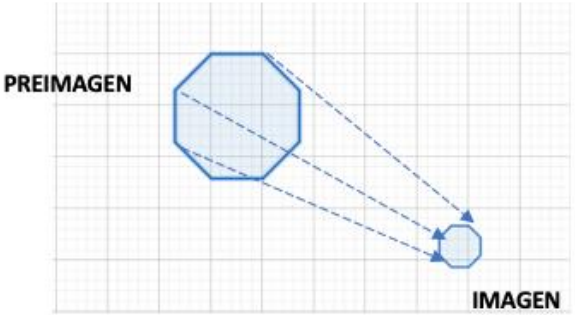


Figura 3.5: Transformación Isomórfica

Dentro de las transformaciones isométricas, serán de gran interés las transformaciones geométricas, estas se dan a continuación.

3.2.6 Traslación

3.2.6.1: Traslación de un punto: Una traslación T_u de un punto P de coordenadas (x, y) es una transformación que, modifica la posición de éste siguiendo una trayectoria recta, hasta convertirse en el punto P' de coordenadas (x', y')

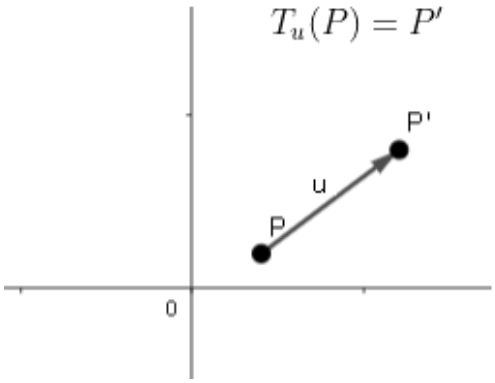


Figura 3.6: Traslación de un punto

Para trasladar el punto inicial P a la posición final P', se deben sumar las respectivas distancias de traslación, u_x y u_y a las coordenadas iniciales, es decir:

$$x' = x + u_x \quad \text{y} \quad y' = y + u_y.$$

Equivalente a

$$(x', y') = (x, y) + (u_x, u_y) = (x, y) + u$$

$$T_u(P) = P' = P + u.$$

El vector $u = (u_x, u_y)$ se llama **vector de traslación**.

3.2.6.2 Traslación de una figura plana: Una traslación de una figura plana es una transformación que desplaza cada punto de la figura inicial la misma distancia en la misma dirección según un vector de traslación $u = (u_x, u_y)$ dado.

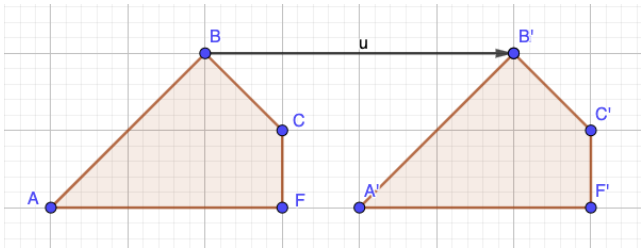


Figura 3.7: Traslación de un polígono dado un vector de 4 unidades

Las traslaciones se caracterizan porque la figura final es idéntica a la figura inicial, es decir, es una isometría, además la figura final conserva la orientación de la figura inicial.

3.2.7 Rotación

Una rotación es una transformación que gira un objeto alrededor de un punto fijo llamado centro de rotación.

3.2.7.1 Rotación de un punto: Una rotación $\boldsymbol{R_{\theta,C}}$ de un punto $\boldsymbol{P}$ de coordenadas $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ es una transformación que, modifica la posición de éste siguiendo una trayectoria circular en el plano, hasta convertirse en el punto $\boldsymbol{P'}$ de coordenadas $(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'})$

Para efectuar la rotación, se debe especificar el ángulo de rotación θ y seleccionar el punto de rotación o centro de rotación C, a partir del cual el punto P es rotado.

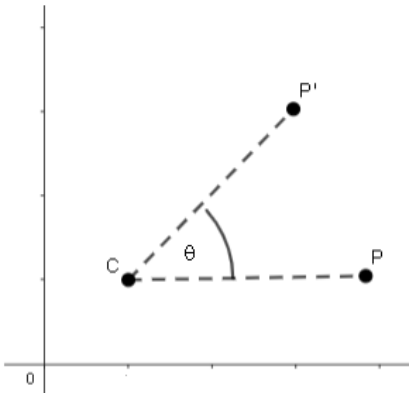


Figura 3.8: Rotación de un punto

El ángulo de rotación, θ, puede tomar valores reales tanto positivos como negativos. Cuando θ es positivo, la rotación se produce en dirección opuesta al movimiento de las manecillas del reloj (antihoraria); por el contrario, cuando θ es negativo, la rotación se produce en el sentido de las manecillas del reloj.

Es importante resaltar que la distancia del centro de rotación C al punto inicial P se conserva al hacer la rotación, es decir, es igual a la distancia del centro de rotación C al punto rotado P'

$$d(C,P) = d(C,P').$$

Sin pérdida de generalidad, para determinar las coordenadas del punto rotado, tomaremos como centro de rotación el origen del sistema coordenado $C(0,0)$.

El ángulo de rotación es θ, el ángulo de posición inicial con respecto al eje y es ϕ, la distancias de C a P y de C a P' es, r $(d\big((0,0),P\big) = d\big((0,0),P'\big) = r)$.

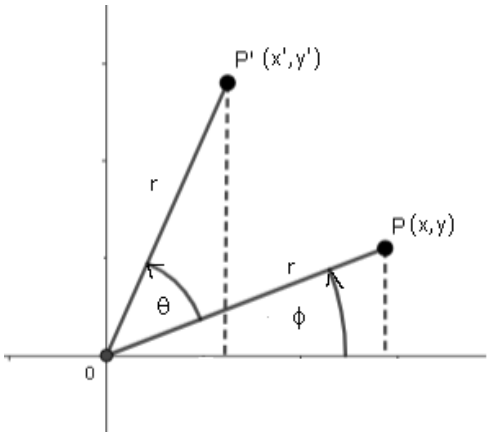


Figura 3.9: Rotación completa de un punto

Usando coordenadas polares e identidades trigonométricas:

$$x = rcos\phi \quad \text{y} \quad y = rsen\phi$$

$$x' = rcos(\phi + \theta) \quad \text{y} \quad y' = rsen(\phi + \theta)$$

$x' = rcos(\phi + \theta) = rcos\phi cos\theta - rsen\phi sen\theta = xcos\theta - ysen\theta$
$y' = rsen(\phi + \theta) = rcos\phi sen\theta + rsen\phi cos\theta = xsen\theta + ycos\theta$
Es decir, las coordenadas del punto P' rotado a partir de las coordenadas del punto inicial P y del ángulo de rotación θ son:

$$R_\theta(P) = R_\theta(x, y) = P'(x', y') = (xcos\theta - ysen\theta\ ,\ xsen\theta + ycos\theta\ ).$$

3.2.7.1 Rotación de una figura plana alrededor de un centro C: Una rotación de una figura plana alrededor de un centro **C** con un ángulo de rotación θ es una transformación que modifica la posición de cada punto de la figura siguiendo una trayectoria circular en el plano.

Se caracteriza porque mueve la figura sin deformarla, dado que cada uno de los puntos es rotado en un mismo ángulo θ.

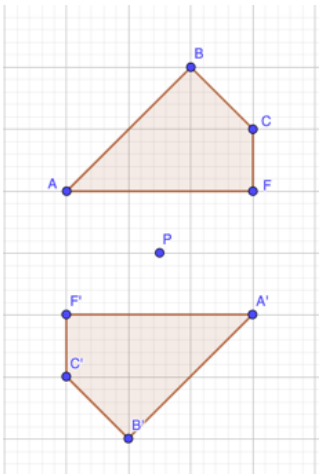


Figura 3.10: Rotación de un polígono en sentido antihorario con un ángulo de 180º con respecto al punto P

Si el procedimiento se hiciera con regla y compás se deben seguir los siguientes pasos.

1. Se selecciona un punto C que será el referente para la rotación.
2. Se une el punto de rotación con un punto del polígono.
3. Se selecciona un ángulo θ para hacer la rotación y un sentido horario o antihorario.
4. Se ubica el centro del transportador en el punto C y se alinea con 0º, con la unión entre el punto de rotación y un punto del polígono.
5. Se marca en la hoja con ayuda del transportador el ángulo θ que se seleccionó como medida a rotar.
6. Se Traza una recta desde el punto C con la marca hecha con el transportador.
7. Con ayuda del compás se toma la distancia desde el punto C con el punto del polígono seleccionado.
8. Se copia la medida que se tomó con el compás en el paso 7, sobre la recta que se trazó en el paso 6 y se realiza un nuevo punto.

Los pasos 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 se repiten con cada punto representativo (vértices) del polígono.

9. Se unen los puntos nuevos generados en las rectas trazadas del paso 6. El polígono generado por estos nuevos puntos es la consecuencia de la rotación del polígono inicial con el ángulo, sentido y el punto de rotación dado.

3.2.8 Reflexión

Una reflexión es una transformación que invierte o refleja un objeto a través de un punto, una línea o eje, o un plano. La figura que se obtiene la interpretamos como la imagen a través de un espejo colocado en el punto, eje o plano respecto al cual se aplica la transformación.

3.2.8.1 Reflexión central: Una reflexión central μ_C de un punto P de coordenadas (x, y) con respecto a un punto C ,es una transformación tal que el segmento PP' (donde P' es la imagen de P es decir $\mu_C(P) = P'$) tiene a C como su punto medio.

El punto C se conoce también como centro de simetría, es decir, P'. Es el simétrico de P con respecto a C

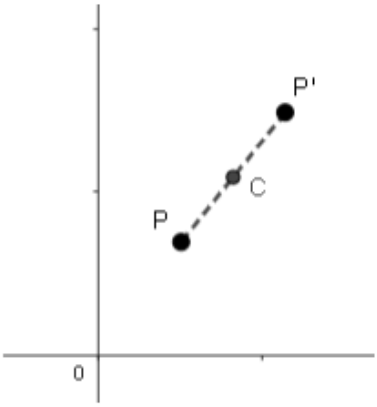


Figura 3.11: Reflexión Central

Si el procedimiento se hiciera con regla y compás se deben seguir los siguientes pasos.

1. Trazar una recta que contenga al punto P y al punto C, el cual es el punto de referencia para la reflexión central.
2. Con ayuda del compás se toma la distancia desde el punto P hasta el punto C.
3. Se copia la medida que se tomó con el compás en el paso 2, sobre la recta que se trazó en el paso 1 y se realiza un nuevo punto P'.
4. El punto P' es la consecuencia de realizar la reflexión central del punto P con respecto al punto C.

Veamos ahora como determinar las coordenadas del punto P' usando coordenadas, es decir, analíticamente:

Sean P el punto de coordenadas (x, y) y C el punto de coordenadas (a, b). La idea es determinar las coordenadas del punto $P'(x', y')$ simétrico de P respecto a C.

Por definición C es el punto medio del segmento PP', es decir,

$$a = \frac{x+x'}{2} \quad \text{y} \quad b = \frac{x+x'}{2}$$

Despejando x' e y' se obtiene

$$x' = 2a - x \quad \text{y} \quad y' = 2b - y$$

$$\mu_C(P) = \mu_C(x, y) = (2a - x, 2b - y)$$

Ejemplo 3.2.8.1: Encontrar las coordenadas del punto $P'(x', y')$ simétrico del punto $P(5, -1)$ respecto al punto $C(4, -2)$

$$x' = 2(4) - 5 = 3 \quad \text{y} \quad y' = 2(-2) - (-1) = -3$$

$$\mu_C(P) = \mu_C(5, -1) = (x', y') = (3, -3)$$

3.2.8.2 Simetría central o respecto a un punto: Una figura tiene simetría respecto a un punto, si existe un punto C tal que la imagen de figura bajo reflexión μ_C es la misma figura.

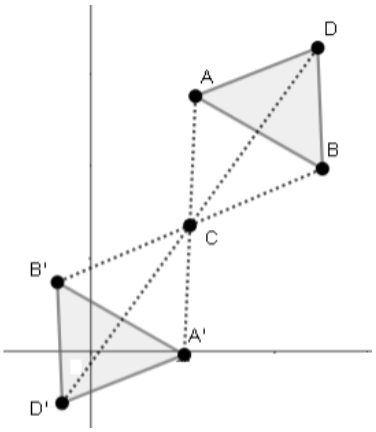


Figura 3.12: Simetría Central

Si el procedimiento se hiciera con regla y compás se deben seguir los siguientes pasos.

1. Trazar una recta que contenga al punto B y al punto C, el cual es el punto de referencia para la reflexión central.
2. Con ayuda del compás se toma la distancia desde el punto B hasta el punto C.
3. Se copia la medida que se tomó con el compás en el paso 2, sobre la recta que se trazó en el paso 1 y se realiza un nuevo punto B'.
4. El punto B' es la consecuencia de realizar la reflexión central del punto P con respecto al punto C.

Los pasos 1,2 y 3 se repiten con cada punto representativo (vértices) del polígono.

5. Se unen los puntos nuevos generados en las rectas trazadas del paso 1. El polígono generado por estos nuevos puntos es la consecuencia de la reflexión central del polígono inicial con respecto al punto C.

Analíticamente, para encontrar la imagen final de un polígono se aplica el procedimiento descrito en el parágrafo anterior a cada uno de los vértices.

3.2.8.3 Reflexión axial (respecto a la recta l) Una reflexión μ_l de un punto P de coordenadas (x, y) con respecto a una recta l es una transformación con la propiedad que:

1. Si P pertenece a recta l, su imagen es $\mu_l(P) = P$.

2. Si P no está en l, su imagen es $\mu_l(P) = P' = (x', y')$, donde l es la mediatriz del segmento PP', es decir, que l actúa como un espejo y P' esta al otro lado del espejo y a la misma distancia de l que P.

La recta l se denomina eje de reflexión.

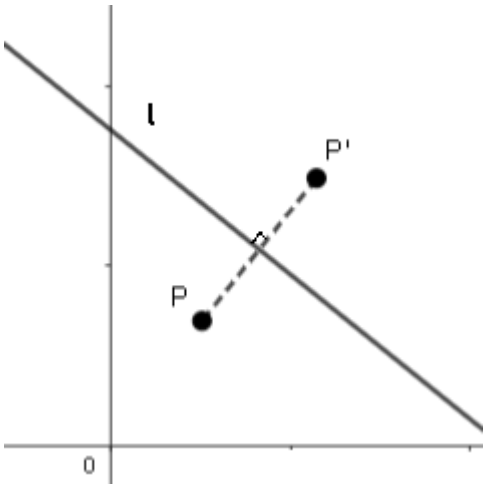


Figura 3.13: Reflexión respecto a una recta

Si el procedimiento se hiciera con regla y compás se deben seguir los siguientes pasos.

1. Trazar una recta que contenga al punto P y sea perpendicular a la recta l, la cual es la recta de referencia para la reflexión axial (Eje de reflexión).
2. Se traza el punto de intersección entre la recta trazada en el paso 1 y la recta l.
3. Con ayuda del compás se toma la distancia desde el punto P hasta el punto de intersección trazado en el paso 2.
4. Se copia la medida que se tomó con el compás en el paso 3, sobre la recta trazada en el paso 1 que es perpendicular a l y se realiza un nuevo punto P'.
5. El punto P' es la consecuencia de realizar la reflexión axial del punto P con respecto la recta l , recta que es el eje de reflexión.

Consideremos el caso particular de simetrías respecto a los ejes coordenados

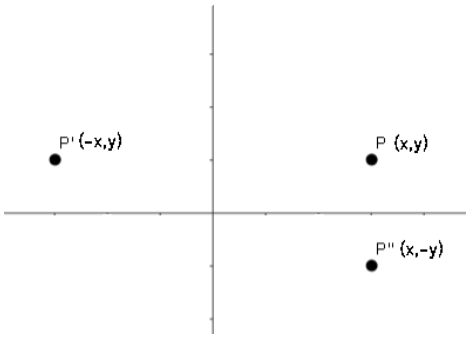


Figura 3.14: Reflexión respecto a los ejes

Si se refleja el punto de P coordenadas (x, y) con respecto al eje y se obtiene el punto P' de coordenadas $(-x, y)$: $\mu_y(x, y) = (-x, y)$

y al reflejarlo respecto al eje x se obtiene el punto P'' de coordenadas $(x, -y)$: $\mu_x(x, y) = (-x, y)$

Si el procedimiento se hiciera con regla y compás se deben seguir los siguientes pasos:

1. Trazar una recta que contenga al punto P y sea perpendicular al eje y del plano cartesiano, el cual es el eje de referencia para la reflexión axial.
2. Se traza el punto de intersección entre la recta trazada en el paso 1 y el eje y.
3. Con ayuda del compás se toma la distancia desde el punto P hasta el punto de intersección trazado en el paso 2.
4. Se copia la medida que se tomó con el compás en el paso 3, sobre la recta trazada en el paso 1 que es perpendicular al eje y, después se realiza un nuevo punto P'.
5. El punto P' es la consecuencia de realizar la reflexión axial del punto P con respecto al eje y , el cual es el eje de reflexión.

Para realizar una reflexión axial del punto P con respecto al eje x usando regla y compás, se deben seguir los siguientes pasos.

1. Trazar una recta que contenga al punto P y sea perpendicular al eje x del plano cartesiano, el cual es el eje de referencia para la reflexión axial.
2. Se traza el punto de intersección entre la recta trazada en el paso 1 y el eje x.
3. Con ayuda del compás se toma la distancia desde el punto P hasta el punto de intersección trazado en el paso 2.
4. Se copia la medida que se tomó con el compás en el paso 3, sobre la recta trazada en el paso 1 que es perpendicular al eje x, después se realiza un nuevo punto P''.
5. El punto P'' es la consecuencia de realizar la reflexión axial del punto P con respecto al eje x , el cual es el eje de reflexión.

3.2.8.4 Simetría axial de una figura:

Una figura tiene simetría axial, si existe una recta l tal que la imagen de cualquier punto P de la figura, bajo la reflexión respecto a l también es un punto de la figura. La recta l se llama eje de simetría.

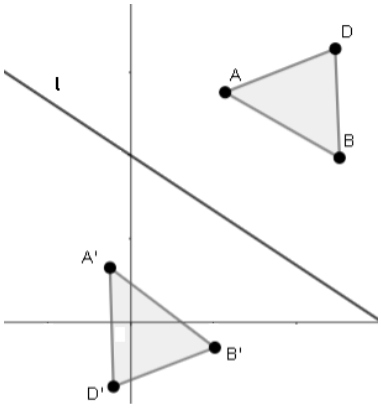


Figura 3.15: Simetría axial

Si el procedimiento se hiciera con regla y compás se deben seguir los siguientes pasos.

1. Trazar una recta que contenga al punto A y sea perpendicular a la recta l, la cual es la recta de referencia para la reflexión axial (Eje de reflexión).
2. Se traza el punto de intersección entre la recta trazada en el paso 1 y la recta l.
3. Con ayuda del compás se toma la distancia desde el punto A hasta el punto de intersección trazado en el paso 2.
4. Se copia la medida que se tomó con el compás en el paso 3, sobre la recta trazada en el paso 1 que es perpendicular a l y se realiza un nuevo punto A'.
5. El punto A' es la consecuencia de realizar la reflexión axial del punto A con respecto la recta l , recta que es el eje de reflexión.

Los pasos 1,2, 3 y 4 se repiten con cada punto representativo (vértices) del polígono.

6. Se unen los puntos nuevos generados en las rectas trazadas del paso 1. El polígono generado por estos nuevos puntos es la consecuencia de la reflexión central del polígono inicial con respecto la recta l, recta que es el eje de reflexión.

3.2.9 Composición de transformaciones

Cualquier par de movimientos considerados hasta ahora, traslaciones, rotaciones y reflexiones o simetrías se pueden aplicar sucesivamente a una figura dada, esto es, primero se aplica uno y a la figura transformada se le aplica el segundo movimiento. La transformación que permite pasar de la figura inicial a la final se conoce como la composición de los movimientos dados. Por ejemplo, se denomina simetría con deslizamiento a la composición de una simetría y una traslación.

.

Definición 3.2.9.1: Sean $T\ y\ T_1$ dos transformaciones del plano en sí mismo, se llama composición de T con T_1 y se denota como $T \circ T_1$, a la transformación que se obtiene por la aplicación sucesiva de la transformación T_1 y T en ese orden, es decir,

$$(T \circ T_1)(X) = T(T_1(X))$$

Ejemplo 3.2.9.1: En la siguiente figura se puede observar cómo al ΔABC, se le aplican dos transformaciones: una traslación $T_u = T_{(0,5)}$, seguida de una reflexión axial respecto al eje x μ_x, obteniendo así el triángulo $\Delta A''B''C''$

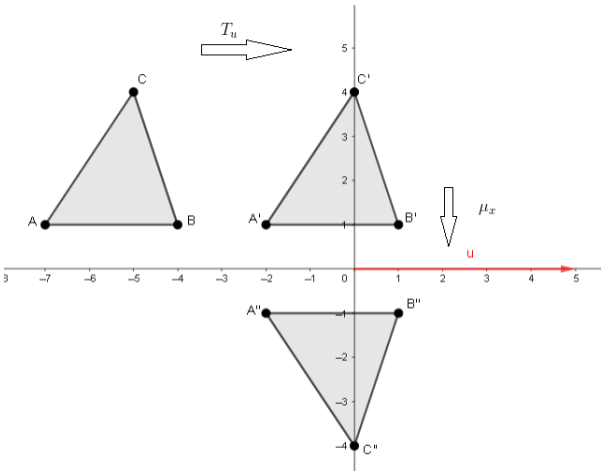


Figura 3.16: Composición de transformaciones

Es decir,

$$(\mu_x \circ T_u)(\Delta ABC) = \mu_x\big(T_u(\Delta ABC)\big) = \mu_x(\Delta A'B'C') = \Delta A''B''C''$$

3.2.10 Grupos de Transformaciones

Se denotará por $\mathcal{g}$ el conjunto de todas las trasformaciones biyectivas del plano $\mathbb{R}^2$ en sí mismo, es decir $\mathcal{g} = \{T \ |T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ \ es\ biyectiva\}$.

Un resultado fundamental para el propósito de este trabajo se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.10.1: $(\mathcal{g},\circ)$ tiene estructura de grupo.

Demostración:

1. Propiedad G_1

$\mathcal{g}_1, \mathcal{g}_2, \mathcal{g}_3 \in \mathcal{g}$	
$\mathcal{g}_1 \circ (\mathcal{g}_2 \ \circ \mathcal{g}_3)(F) = \mathcal{g}_1 \circ (\mathcal{g}_2(\mathcal{g}_3(F))$	Def. de composición
$\mathcal{g}_1 \circ (\mathcal{g}_2\big(\mathcal{g}_3(F)\big) = \mathcal{g}_1((\mathcal{g}_2(\mathcal{g}_3(F)))$	Def. de composición
$\mathcal{g}_1 \circ (\mathcal{g}_2 \ \circ \mathcal{g}_3)(F) = (\mathcal{g}_1 \circ \mathcal{g}_2)\ (\mathcal{g}_3(F))$	Def. de composición
$\mathcal{g}_1 \circ (\mathcal{g}_2 \ \circ \mathcal{g}_3)(F) = (\mathcal{g}_1 \circ \mathcal{g}_2)\ \circ \mathcal{g}_3(F)$	
$\mathcal{g}_1 \circ (\mathcal{g}_2 \circ \mathcal{g}_3) = (\mathcal{g}_1 \circ \mathcal{g}_2)\ \circ \mathcal{g}_3$	Conclusión

2. Propiedad G_2

$i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ \ i \in \mathcal{g}\ \ ; i(F) = F$	transformación identidad
$Sea\ \ \mathcal{g}_1 \in \mathcal{g}$	Hipótesis
$(\mathcal{g}_1 \circ i)(\mathrm{F}) = \mathcal{g}_1\ (i(F))= \mathcal{g}_1(F)$	Def. transformación identidad.

3. Propiedad G_3

$\mathcal{g}_1 \in \mathcal{g}$	Dado

Existe $g_1^{-1} \in g$ con $(g_1^{-1} \circ g_1) = i \quad y \quad (g_1 \circ g_1^{-1}) = i$	Por biyectividad de las transformaciones
g_1^{-1} es una transformación biyectiva	Def. 3.6

El propósito del trabajo es establecer una relación entre el concepto de grupo y las transformaciones geométricas, particularmente las simetrías por lo que a continuación presentaremos un par de ejemplos que nos permiten establecer el vínculo de los dos conceptos

Ejemplo 3.2.10.1. Grupo de permutaciones S_3

El grupo **S_3** se conoce como el **grupo simétrico** y consta de las $3! = 6$ permutaciones de los elementos del conjunto $A = \{1,2,3\}$

$$123, \quad 231, \quad 312, \quad 132, \quad 321, \; y \quad 213$$

Con la notación introducida en la sección 3.2.4

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En el conjunto $S_3 = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ se define una operación* (multiplicación) definida en la siguiente tabla

*	$\boldsymbol{\sigma_0}$	$\boldsymbol{\sigma_1}$	$\boldsymbol{\sigma_2}$	$\boldsymbol{\rho_1}$	$\boldsymbol{\rho_2}$	$\boldsymbol{\rho_3}$
$\boldsymbol{\sigma_0}$	σ_0	σ_1	σ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_3
$\boldsymbol{\sigma_1}$	σ_1	σ_2	σ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
$\boldsymbol{\sigma_2}$	σ_2	σ_0	σ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2
$\boldsymbol{\rho_1}$	ρ_1	ρ_3	ρ_2	σ_0	σ_2	σ_1
$\boldsymbol{\rho_2}$	ρ_2	ρ_1	ρ_3	σ_1	σ_0	σ_2
$\boldsymbol{\rho_3}$	ρ_3	ρ_2	ρ_1	σ_2	σ_1	σ_0

Tabla 3-3.2.10.1 Composición de simetrías del triángulo equilátero

Un ejemplo de cómo actúa la operación * es

$$\sigma_2 * \rho_1$$

σ_2 transforma el 1 en 3 el 2 en 1 y el 3 en 2, a la nueva ordenación, es decir, 312 le aplicamos ρ_1, que transforma el 3 en 2 el 1 en 1 y el 2 en 3, luego obtendríamos 213 que corresponde a ρ_3.

El conjunto S_3 con la operación *, es decir la pareja $(S_3\,,\ *)$ tiene estructura de grupo, en el que el módulo o elemento neutro es σ_0 y los inversos son:

$\sigma_0{}^{-1} = \sigma_0,\quad \sigma_1{}^{-1} = \sigma_2\,,\quad \sigma_2{}^{-1} = \sigma_1,\quad \rho_1{}^{-1} = \rho_1,\quad \rho_2{}^{-1} = \rho_2$ y , $\rho_3{}^{-1} = \rho_3,$

Ejemplo 3.2.10.2 Grupo de simetrías de un triángulo equilátero D_3

El grupo $\mathbf{D_3}$ conocido como el grupo diédrico, se puede ver como una interpretación geométrica del grupo $\mathbf{S_3}$ del ejemplo anterior.

Consideremos el triángulo equilátero de la figura cuyos vértices están rotulados con los números 1, 2 y 3 y su centro (baricentro) con la letra C:

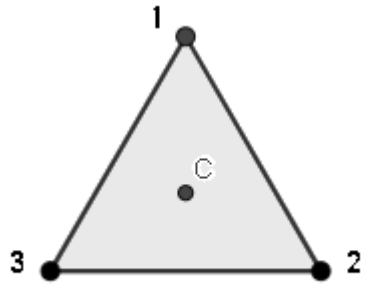


Figura 3.17: Triángulo equilátero

Denotamos respectivamente por σ_{0° , $\sigma_{120^\circ}, \sigma_{240^\circ,}$ las rotaciones de 0°, 120° y 240° respecto al centro C del triángulo en sentido horario.

Sean $l_i,\quad i = 1,2,3$ las medianas del triángulo que pasan por el vértice i

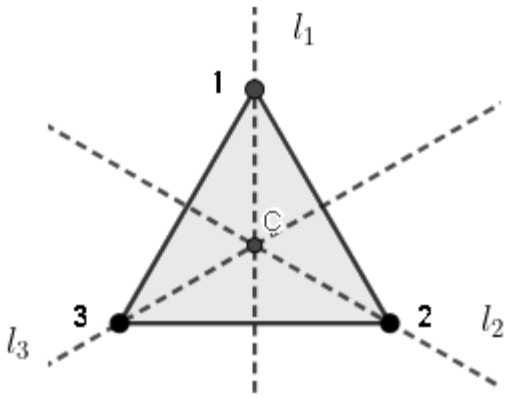


Figura 3.18: Medianas del triángulo

Denotamos por $\rho_{1,}$ $,\rho_2$ y ρ_3 las reflexiones axiales respecto a cada una de las medianas l_i. Si rotamos un ángulo de 0° respecto a C, los vértices no cambiarían de posición, es decir el vértice 1 queda en la posición 1, el 2 en la posición 2 y el 3 en la posición 3, una manera común de notar lo anterior es

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

De la misma manera, si rotamos el triángulo con respecto a su centro C ángulos de 120° y 240° respectivamente (en sentido horario), obtendremos:

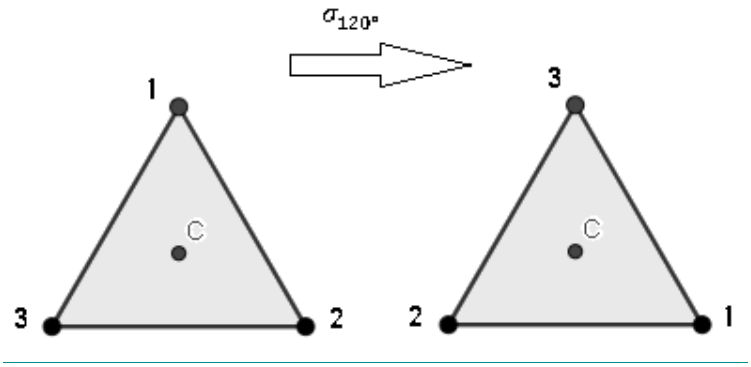


Figura 3.19:Simetría de rotación de 120°

$$\sigma_{120°} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

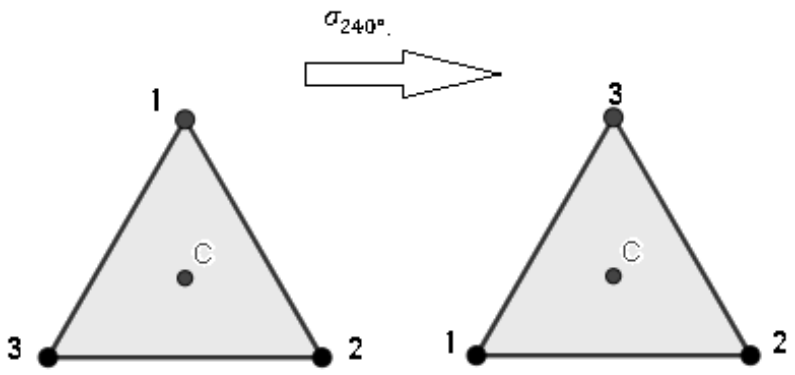


Figura 3.20: Simetría de rotación de 240°

$$\sigma_{240°} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora, si realizaremos las reflexiones axiales respecto a las rectas que pasan por cada vértice i y el punto medio del lado opuesto(medianas) las cuales denotaremos por ρ_i con $i = 1,2,3$ obtendríamos:

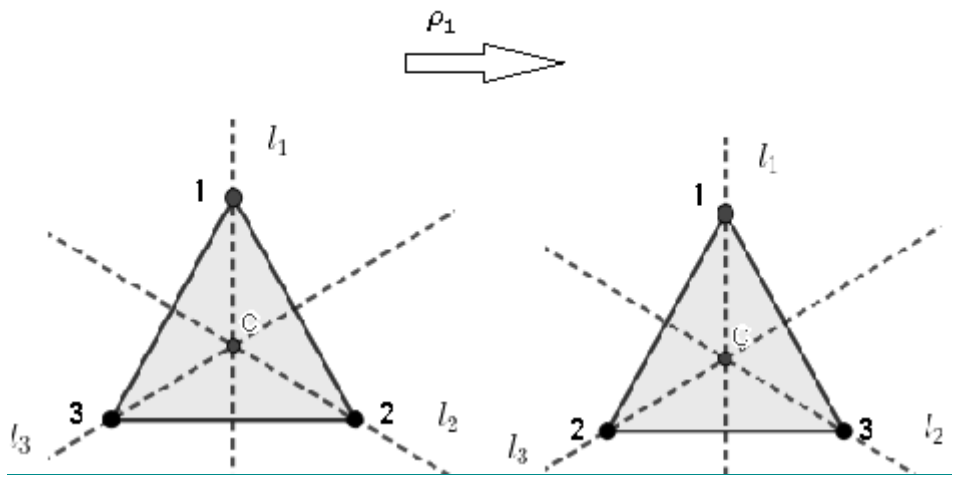


Figura 3.21: Simetría de reflexión

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

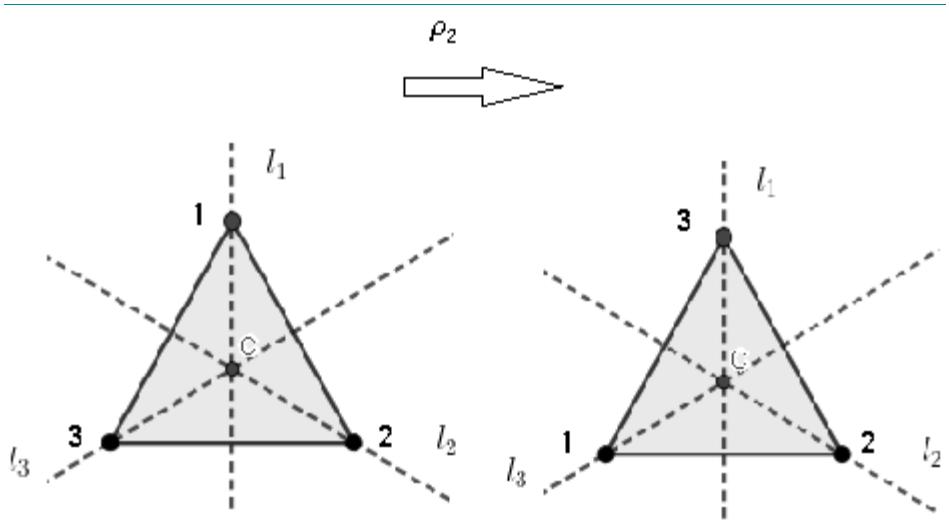


Figura 3.22: Simetría de reflexión

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

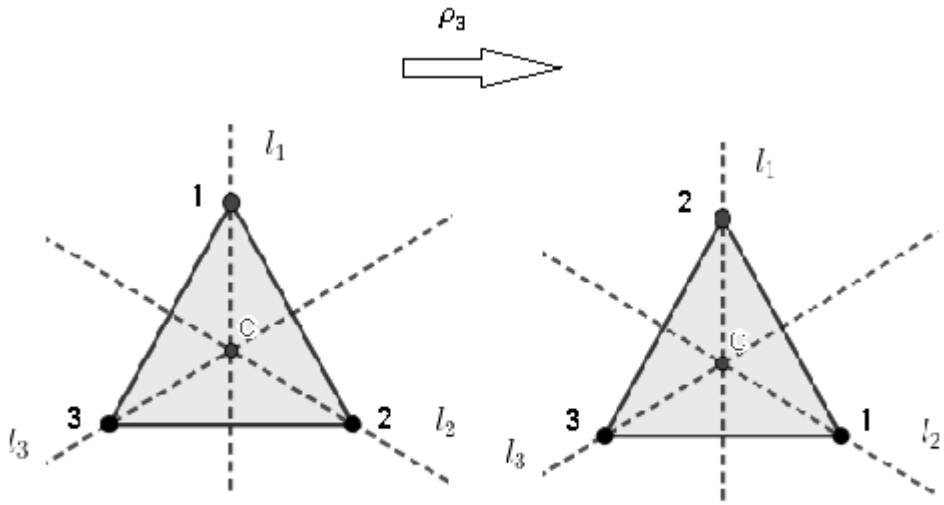


Figura 3.23:Simetría de reflexión

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.3 Marco didáctico

En esta sección se presentan los aspectos didácticos que sustentan y fortalecen el análisis de los procesos de abstracción y generalización en matemáticas, así como las conexiones que tienen con el razonamiento en geometría y el razonamiento en álgebra. Dienes, Z. (1986) y Bruner, J. (1966) proponen 5 etapas para estudiar el proceso de abstracción. Por otra parte, Mason, J (1999), Socas, M. (1996) y Radford, L. (1996) especifican algunas características de la generalización y algunos tipos de clasificación por niveles.

Adicionalmente, como las situaciones propuestas están enmarcadas en contextos geométricos y algebraicos, se estudian los niveles de razonamiento en geometría propuestos por (Van Hiele, P. M. 1957) y los niveles de razonamiento en álgebra enmarcados en los procesos de algebrización en la educación escolar según Godino, J. Neto, D. Aké, L. P. Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014).

3.3.1 Abstracción

Existen múltiples definiciones de abstracción, por ejemplo, según la real academia española (2001) es "*Separar por medio de una operación intelectual las cualidades de un objeto para considerarlas aisladamente o para considerar el mismo objeto en su pura esencia o noción"*. En la filosofía, la abstracción, es una operación intelectual donde se separa lo que es inseparable en la realidad. En matemáticas, se entiende como el proceso de extraer las estructuras, patrones o propiedades subyacentes de un concepto matemático, eliminando cualquier dependencia de los objetos del mundo real con los que originalmente podría haber estado conectado y generalizándolo para que tenga aplicaciones más amplias o coincidencias con otros conceptos abstractos.

3.3.2 Proceso de Abstracción

A través de la historia el trabajo sobre el aprendizaje de las matemáticas y sus diferentes líneas de investigación en educación matemática se destaca el que fue hecho por Dienes Zoltan y Jerome Bruner en el proceso de abstracción en matemáticas, pues para

desarrollar pensamiento matemático es necesario atravesar desde manipulaciones concretas hasta niveles más maduros de objetos abstractos. Estas etapas son:

Nivel concreto: Se trabaja con objetos físicos o manipulables. Como por ejemplo contar objetos, manipular bloques o utilizar elementos tangibles.

Nivel icónico: Se representa objetos y conceptos matemáticos mediante imágenes o dibujos. Por ejemplo, pueden representar situaciones matemáticas para resolver problemas.

Nivel verbal: Se utiliza palabras para describir y comunicar conceptos matemáticos. Se comienza a usar un lenguaje matemático más formal y a expresar sus pensamientos matemáticos de manera verbal.

Nivel simbólico: Se utilizan símbolos matemáticos como números y operadores para representar y manipular conceptos matemáticos. Por ejemplo, usan y manejan propiedades de suma, resta, multiplicaciones y divisiones etc. y existe un trabajo de ecuaciones.

Nivel abstracción formal: Se trabaja con símbolos matemáticos de manera más abstracta y generalizada aplicándolos a diferentes situaciones matemáticas. Pueden comprender y resolver problemas matemáticos más complejos y abstractos.

3.3.3 Generalización

El término generalización se usa tanto dentro como fuera de las matemáticas para referirse al proceso de aplicar un argumento dado en un contexto más amplio, particularmente según la real academia española (2001), la generalización significa: *"Abstraer lo que es común y esencial a muchas cosas, para formar un concepto general que las comprenda todas"*. En matemáticas es un proceso que busca reconocer patrones de índole aritmético o geométrico con el objetivo de plantearse una regla para algunos elementos u objetos de estudio que cumplen unas características. Este reconocimiento permite que los elementos que se relacionan permanezcan invariantes o son variantes bajo esa regla o patrón. También se busca los medios para poder expresar ese patrón o regla encontrada.

3.3.4 Proceso de abstracción

La generalización permite hacer una transición del análisis de objetos o situaciones particulares a generar leyes que se cumplen cuando están bajo ciertas condiciones para un grupo de elementos en particular. Este proceso trata de mostrar y entender lo que se es observado comparándolo con otras situaciones y relacionándolo con algunas reglas que se establecen para su conformación. Cuando se comprueban en casos particulares las propiedades encontradas, se hacen conjeturas y se logra llegar a conformar reglas generales este proceso se le conoce como inducción. Según Mason (1999) la generalización es esencial para el pensamiento matemático y algebraico.

Cuando se desea realizar la identificación de patrones o regularidades se pretende encontrar o reconocer diferencias, semejanzas y el descubrimiento de propiedades esenciales que conforman una organización o estructura. En el trabajo de identificación de patrones se pueden encontrar distintos niveles de dificultad.

Inicialmente se pueden encontrar patrones numéricos en tablas, o propiedades en los conjuntos numéricos y sus operaciones construyendo así un camino hacia el álgebra para desarrollar estos procesos de generalización y abstracción. Una muestra de ello son las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva, estas propiedades permiten la reconstrucción de generalidades y las argumentaciones para verificar estas generalizaciones a partir de ejemplos particulares, es decir usando un proceso deductivo. Teniendo cuenta lo mencionado anteriormente se propone cuatro etapas o niveles con el objetivo de estudiar y analizar los procesos de generalización en el aula de clases:

Percibir patrones

Por medio de la sucesión o secuencia de alguna figuras o números, se consigue percibir un patrón, para ello se usan técnicas matemáticas como la recursividad o la inducción para formar los números o patrones como una etapa primaria en este proceso intuitivo.

Expresar patrones.

Se trata de comunicar lo que se percibe y poder expresarlo y registrarlo. Con el objetivo de estudiar el patrón encontrado. Se espera que este trabajo se haga mediante un trabajo

cooperativo por grupos de estudiantes donde se pueda preguntar y opinar para controvertir o llegar a acuerdos

Registrar un Patrón

Cuando se verifica la propiedad o regla hallada para que se cumpla el patrón. Se espera que este registro sea expresado con esquemas, palabras, un lenguaje que determine lo que se está encontrado y sus relaciones entre las variables en el problema propuesto con la secuencia. La parte escrita muestra lo que es propio de cada caso particular y lo que encontramos común en todos los casos. Es decir, lo que se mantiene invariante a pesar de las condiciones para poder así formular una generalización.

Prueba la validez de las fórmulas

Por medio de la observación de características, para que una fórmula o regla sea válida, se debe ensayar de formas diferentes, por ejemplo, a través de su aplicación en otros casos particulares por medio de dibujos, conteos o el hacer cálculos para verificar su estabilidad.

Un aspecto de relevancia en estas etapas es el contexto en el cual se presenta la situación. El presente trabajo se refiere a dos contextos dentro de las matemáticas, los aritméticos y los geométricos; pues unos permiten manipular la información de tal manera como se encuentren las características de la situación; y los otros a aprovechar el conocimiento y la experiencia de los estudiantes en el manejo de los números y sus propiedades. Pues" el *proceso de particularización se usa para reunir el grado de evidencia necesario sobre el que se va a basar el proceso de generalización."* (Mason J. 1989, 22).

Por otro lado, aunque no se evidencia con certeza la formalidad algebraica en las etapas anteriores, si es importante dedicar un trabajo juicioso a estas, pues por apresurarse a pasar de una etapa de observación a una de registro de generalidad con simbología de la regularidad encontrada esta puede perder el significado de la expresión general y quizás se convierta en un obstáculo que posteriormente impide tener un uso adecuado de las expresiones algebraicas que resultaron.

Pues cabe resaltar que *"Particularizar da una idea de lo que está pasando: el detectar alguna ley oculta y formularla en palabras da lugar a una conjetura que puede ser*

examinada, cuestionada y modificada. El proceso de hacer conjeturas ocupa el centro del razonamiento matemático." (Mason J. 1989, 77). De acuerdo con lo anteriormente planteado, el proceso que se está llevando de lo particular a lo general, es un proceso de razonamiento inductivo, como lo plantea Socas M. *"la inducción es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones…" (*Socas M. 1996,151)

El lenguaje que se usa en matemáticas debería ser comprensible por todos, dado que la abstracción está principalmente unida a los procesos de generalización y es aquí donde se pueden encontrar algunas dificultades cuando se está trabajando en matemáticas desde la experiencia escolar. Para ello se debe pensar en un lenguaje que permita registrar, por ejemplo, las relaciones que se encuentran en la exploración de patrones numéricos o propiedades geométricas. Pero constantemente el lenguaje natural o cotidiano no es claro y existen obstáculos para relacionarse con la propiedad o patrón encontrado en el objeto de estudio en matemáticas.

En este sentido se visualiza al lenguaje algebraico como una herramienta adecuada en ciertas situaciones que permite registrar las abstracciones o enunciados que las personas pueden hacer de una situación particular, sin que esto conlleve a ambigüedades, posibilitando así, expresar con precisión de manera simbólica lo que se encuentra de manera general.

Es importante destacar que el antecedente de la generalización es la abstracción. Es decir, no se puede construir conocimiento general sin separar lo individual, es decir, sin abstraer. *"La abstracción prepara para la generalización, dispone el análisis y es el requisito indispensable de la sistematización ordenada de los conocimientos"* (Castro, Cañadas y Molina, 2010). También se afirma que *"en el proceso de abstracción se diferencian dos formas de abstracción, una empírica, en donde el sujeto se limita a comprobar algunas propiedades de los objetos exteriores y a analizarlas independientemente. La generalización en este tipo de abstracción empírica es de naturaleza extensional que se refiere a sólo contemplar el paso de 'algunos' a 'todos'. Otra forma de abstracción es la reflexiva, se refiere a las acciones y operaciones que el sujeto realiza, que hacen de lo real una manifestación de lo posible."*

Finalmente, las actividades de la secuencia didáctica que se propone están enmarcadas en el pensamiento algebraico y geométrico por ello es importante analizar a continuación los niveles de razonamiento en cada uno de estos dos pensamientos:

3.3.5 Niveles de razonamiento en geometría

En la etapa del razonamiento en geometría observamos que pensar inductivamente es fundamental en todo el desarrollo de las matemáticas, pues es donde se puede intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y si es posible demostrar sin obligación de una formalización extrema, como se suele terminar los resultados en las matemáticas. Básicamente se trabaja razonando inductiva o deductivamente. La matemática usa la inducción para iniciar el análisis de alguna situación, pero la veracidad de sus afirmaciones se demuestra por medio de la deducción. Es por ello por lo que es pertinente estudiar y analizar este tipo de razonamiento por medio de los niveles de razonamiento para geometría propuestos por Van Hiele, P. M. (1957):

Nivel 1: Reconocimiento

En este nivel los estudiantes reconocen de manera visual o sensorial algunas propiedades o pueden identificar, describir u organizar figuras geométricas. Los estudiantes podrían dibujar o construir figuras, identificar formas, no generalizan las características que tiene las figuras de la misma clase y no usan un lenguaje matemático apropiado para comunicar una idea.

Nivel 2: Análisis

En este nivel los estudiantes pueden describir las partes que conforman una figura y ver que estas tienen unas propiedades específicas. Por otro lado, no pueden identificar las condiciones necesarias o suficientes para determinar las propiedades, se generaliza a partir de la experimentación.

Nivel 3: Clasificación

En este nivel los estudiantes no son capaces de construir por sí mismos una demostración, pero son capaces de encontrar propiedades que se deducen de otras, realizan razonamientos deductivos informales y también logran comprender el papel tan importante que juegan las definiciones.

Nivel 4: Deducción formal

En este nivel los estudiantes usan varios pasos y logran entender una demostración formal de una propiedad encontrada en una figura, realizan conjeturas y las verifican, pueden comparar y contrastar demostraciones, pueden comprender la estructura axiomática de las matemáticas, aunque no profundizan en el sistema axiomático que usan y no lo comparan con otros sistemas axiomáticos.

Nivel 5: Rigor

En este nivel los estudiantes pueden identificar diferentes sistemas axiomáticos y compararlos. Logran razonar como lo hace un matemático profesional donde cada vez se va sofisticando su manera en que se trabaja en matemáticas.

Este modelo Van Hiele además de proponer estos niveles de razonamiento, también propone unas fases de aprendizaje donde se evidencian unas pautas para la enseñanza de la geometría y del desarrollo de los procesos de razonamiento en los estudiantes. Se encuentran cinco fases: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración. Buscando así la mejor manera de que los estudiantes desarrollen un nivel superior de razonamiento.

3.3.6 Niveles de razonamiento Algebraico

Según (Godino, J. Neto, D. Aké, L. Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014) se define y se describe unos niveles de razonamiento en álgebra para reconocer características en situaciones matemáticas, con el objetivo de desarrollar distintos niveles de algebrización para educación primaria, básica secundaria y media. Los criterios para definir estos niveles son:

Educación primaria

1. *Generalización.* Generación o inferencia de intensivos.
2. *Unitarización*. Reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias.
3. *Formalización y ostensión.* Nombramiento mediante expresiones simbólico-literales.

4. *Transformación.* Utilización de los objetos intensivos en procesos de cálculo y en nuevas generalizaciones.

Educación secundaria:

1. *El parámetro como registro numérico (placeholder):*
2. *El parámetro como cantidad cambiante:*
3. *El parámetro como generalizador:*
4. *El parámetro como incógnita*

Después de este estudio para observar los niveles de algebrización se definió con Aké (2013) y Godino (2014) seis niveles que permiten tener una mirada desde la educación primaria e inicial hasta secundaria y bachillerato de manera más específica.

Nivel 0: Aritmético

Se presenta ausencia de álgebra y se usa el lenguaje natural, gestual, icónico y numérico. Es un primer grado de generalidad.

Nivel 1: Proto-algebraico incipiente

Se observa las propiedades del conjunto de los números naturales, la igualdad definida como equivalencia. Es un segundo grado de generalidad.

Nivel 2: Proto-algebraico intermedio

Para describir objetos que están relacionados con aspectos espacial, temporal y contextual, se realiza una solución de ecuaciones de la forma $ax + b = c$ con $a, b\ y\ c\ \epsilon\mathbb{R}$. Es decir, se usan representaciones simbólico- literales.

Nivel 3: Algebraico consolidado

En este nivel las representaciones simbólicas se usan de manera analítica, sin relacionarlo con información contextual. Se realiza una solución de ecuaciones de la forma $ax + b = cx + d$ con $a, b, c\ y\ d\ \epsilon\mathbb{R}$, usando operaciones con variables.

Nivel 4: Uso de parámetros

En este nivel se usan parámetros y coeficientes para estudiar familias de ecuaciones y funciones.

Nivel 5: Manipulación de parámetros

En este nivel se usan variables y parámetros para hacer cálculos analíticos.

Nivel 6: Tareas estructurales

En este nivel se realiza un análisis o estudio de estructuras algebraicas, definiciones, propiedades y resultados en ellas

A continuación, se describe el modelo pedagógico usado para la práctica en aula y la aplicación de las actividades:

3.3.7 Modelo pedagógico

La intervención en el aula y la aplicación de la secuencia didáctica se enmarca en un modelo pedagógico de trabajo colaborativo. Este modelo se caracteriza por un protagonismo en los estudiantes quienes organizados como grupos de trabajo son animados a realizar las actividades propuestas, teniendo un dialogo entre ellos, pudiendo así contrastar o apoyar los argumentos de los compañeros de su grupo. Además, el papel del docente aquí es el de un guía o facilitador de las interacciones, es quien proporciona un ambiente de aprendizaje, más no es él, el centro de atención de la clase. Es importante resaltar que en el equipo de trabajo también existe una responsabilidad individual y una participación equitativa, teniendo en cuenta el nivel de desempeño y aprendizaje de cada estudiante. Como explica Guillar, M (2009) describiendo las ideas de Jerome S. Bruner mostrando que el aprendizaje debe ser por descubrimiento y sean los estudiantes quienes puedan ser los constructores de su propio conocimiento.

Teniendo en cuenta estos aspectos pedagógicos y didácticos del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas descritos anteriormente, se diseña y evalúa una prueba diagnóstica, una secuencia didáctica compuesta de 4 talleres y una prueba o test final para lograr ver el desarrollo de los procesos de abstracción y generalización enmarcados en contextos de razonamiento en geometría y razonamiento en álgebra.

4. Marco metodológico

En el presente capítulo se hará una descripción de la metodología utilizada para la aplicación de una secuencia didáctica en torno a los conceptos de movimientos rígidos en el plano y el concepto de estructura de grupo en álgebra abstracta.

4.1.1 Tipo de investigación

Este trabajo de grado se enmarca en una investigación – acción u acción participativa, ya que con la secuencia didáctica se busca perseguir al mismo tiempo la acción y los resultados del aprendizaje, esto se logra con la participación de los individuos inmersos en el desarrollo del presente trabajo. En otras palabras, Latorre, A. (2005) explica que la investigación acción "*se entiende como una reflexión sobre las acciones humanas y las situaciones sociales vividas por el profesorado que tiene como objetivo ampliar la comprensión (diagnóstico) de los docentes de sus problemas prácticos. Las acciones van encaminadas a modificar la situación una vez que se logre una comprensión más profunda de los problemas*".

Los instrumentos que se realizaron para resolver la pregunta problema se basan en una secuencia de actividades. El primer instrumento es una prueba diagnóstica en donde se analizaron los diferentes niveles en los procesos de generalización y abstracción inmersos en los componentes de razonamiento geométrico y algebraico, en esta prueba participaron 14 estudiantes de grado undécimo de un total de 30 estudiantes, razón por la cual la muestra de esta investigación serán estos 14 estudiantes que fueron seleccionados aleatoriamente. De los 14 estudiantes 9 son mujeres y 5 son hombres. El segundo instrumento es una serie de 4 talleres cuyo objetivo era que los estudiantes involucrados en esta investigación lograran adquirir los niveles propuestos en el marco metodológico y los que se evidenciaron en los resultados de la prueba diagnóstica. Estos talleres fueron

guiados por el docente quien en su rol generaba preguntas o daba respuestas a las inquietudes que los estudiantes presentaban, evidenciando la acción participativa profesor-estudiantes, estudiantes-profesor y planteando un ambiente de aprendizaje de trabajo colaborativo.

El ultimo instrumento diseñado es un juego que involucra los movimientos rígidos en el plano y su relación con la simetría y la estructura algebraica de grupo. El objetivo fundamental de este juego es percibir si los estudiantes mediante los talleres aplicados pudieron adquirir los niveles deseados en los procesos de generalización y abstracción, para ello se realiza un análisis similar al análisis de los resultados de la prueba diagnóstica.

Esta metodología es usada como dice Romera, M (2012) "*Precisamente, la investigación-acción educativa busca la compresión de las propias prácticas para transformarlas y mejorarlas"*. En la educación matemáticas se espera que este tipo de ejercicio de investigación, de reflexión pedagógica vaya en aumento pues es una necesidad seguir pensando los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las instituciones educativas, con el propósito de que cada vez el docente de matemáticas se vea y este en un rol más de investigador y pueda construir comunidades educativas para ver críticamente sus prácticas escolares y conozca el trabajo que se hace en didáctica de las matemáticas a nivel global.

4.1.2 Propuesta didáctica

La presente propuesta de enseñanza se desarrolló dando cumplimento a los objetivos específicos. Primero, se hizo una revisión de la bibliografía pertinente para consolidar el marco teórico y el desarrollo disciplinar y epistemológico de los movimientos rígidos en el plano de figuras geométricas y el estudio de estructuras algebraicas, en este caso la estructura de grupo y su relación con la simetría. Posteriormente se diseñó y aplicó una prueba diagnóstica a los estudiantes de grado once de la institución, con el propósito de identificar el nivel que tienen en los conocimientos de conceptos previos, en lo relacionado

con los movimientos rígidos en el plano y propiedades de los conjuntos numéricos y estructuras algebraicas que ya habían estudiado. Después de analizar los resultados de la prueba diagnóstica se hizo una selección de tópicos de la geometría para los movimientos rígidos en el plano y se tomaron algunos elementos sobre estructuras algebraicas que fueran pertinentes en la secundaria desde el contexto curricular para la construcción de los talleres en los cuales se tuvieron en cuenta actividades, ejercicios, situaciones problema y material didáctico, que permitieran alcanzar los objetivos propuestos. Cada sesión se planeó con una parte inicial guiada por el docente para explicar algunas nociones específicas de las temáticas a trabajar y su objetivo dentro de la secuencia didáctica y posterior aplicación de cada uno de los talleres. Finalmente se aplicó una actividad de cierre, descrito como un juego, con el propósito de determinar si se había alcanzado el objetivo.

La propuesta estará inmersa en el estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele, en los cuales se observan los procesos de abstracción y generalización en geometría. Es de destacar que, para la estructuración y análisis de las actividades se tuvieron en cuenta dos propuestas de trabajo que estudian el proceso de abstracción y generalización y especifican algunas características y tipos de clasificación para lograr estos procesos. Tales propuestas son planteadas por (Castro, Cañadas, & Molina, 2010) y Mason (1999), (Socas M. 1996,151) y Radford, L. (1996) respectivamente.

El trabajo que se plantea pretende dar respuesta a la siguiente pregunta ¿Qué tipo de estrategia didáctica permite mejorar los procesos de abstracción y generalización en matemáticas de los estudiantes de grado once?

4.1.3 Estructura de los talleres

- **Prueba diagnóstica**

En la primera parte de la prueba, las preguntas tienen el objetivo de observar en los estudiantes los diferentes tipos de razonamiento en geometría. Además de recoger la información sobre el desempeño de ellos en las temáticas de movimientos rígidos en el plano.

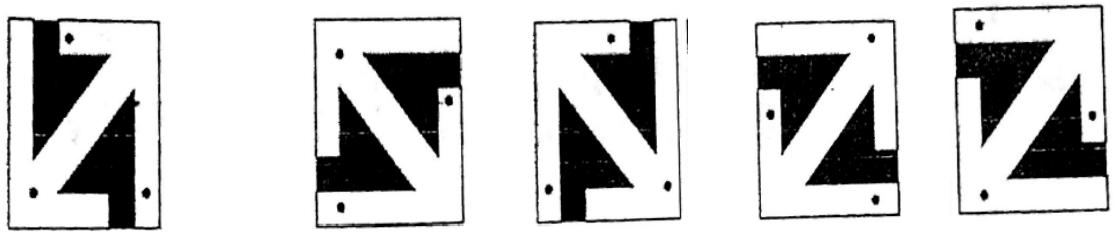
Niveles de razonamiento:

1. Reconocimiento
2. Análisis
3. Clasificación
4. Deducción formal
5. Rigor

Responder las siguientes preguntas, situaciones o ejercicios. Escribir todos los procedimientos, gráficos e ideas que use para resolverlas.

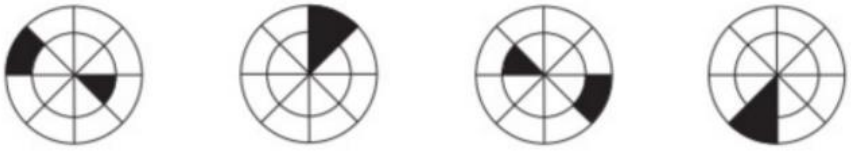
I PARTE

1. ¿Cuál de las figuras es igual al modelo de la izquierda?



A. **B.** **C.** **D.**

2. Observar la secuencia y responder

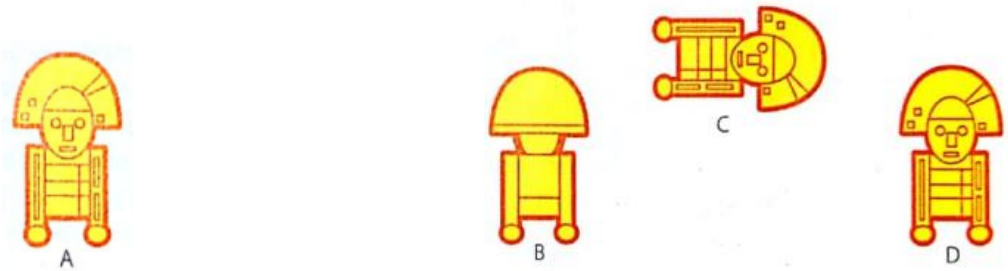


¿Qué figura debe ir en la quinta posición?

A. B. C. D.

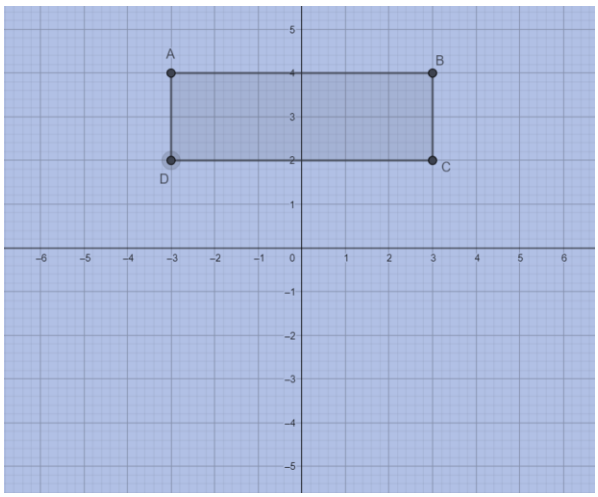
3. En cada figura, trazar una línea que la divida en dos partes iguales. Analizar si existen varias posibilidades.

4. De las figuras B, C y D ¿Cuál corresponde a una traslación de la figura A?



5. Si el cuadrilátero ABCD se refleja con respecto al eje x, se obtiene un cuadrilátero A'B'C'D'.

Graficarlo y escribir las coordenadas de sus vértices.



6. Dibujar en un plano cartesiano el triángulo de vértices $A\ (2{,}3), B\ (7,-2), C\ (5{,}8)$. Si se aplica una rotación con centro en el origen y ángulo de 180°en sentido antihorario, se obtiene otro triángulo de vértices A´B´C´ cuyas coordenadas son:

A. $A'\ (-2,-3), B'\ (-7\ ,2\ ),\ C'(\ -5\ ,-8\ )$

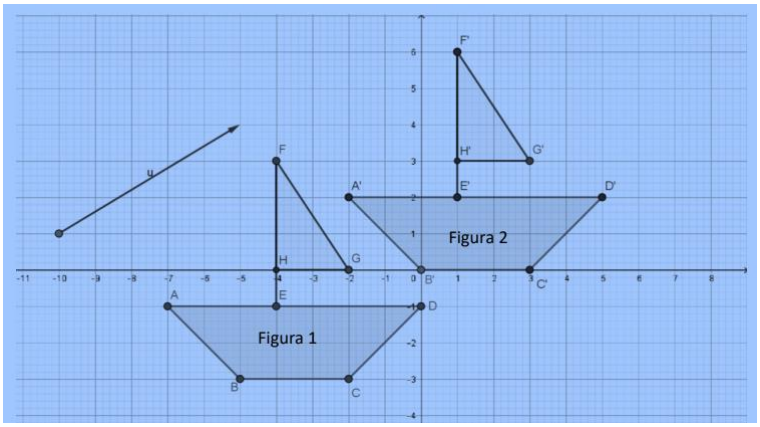
B. $A'\ (2,-3),\ B'(7\ ,2\ ),\ C'(\ 5\ ,-8\ )$

C. $A'\ (-2,3), B'(\ -7\ ,-2\ ),\ C'(-5\ ,8)$

D. $A'\ (3,2\ ),\ B'(-2\ ,7\ ),\ C'(\ 8,5\ )$

E. $A\ '\ (-3,2),\ B\ '(\ 2\ ,7\ ),\ C\ '(-8\ ,5)$

7. Teniendo en cuenta la información contenida en el gráfico, completar la tabla con las coordenadas del vector y de los puntos



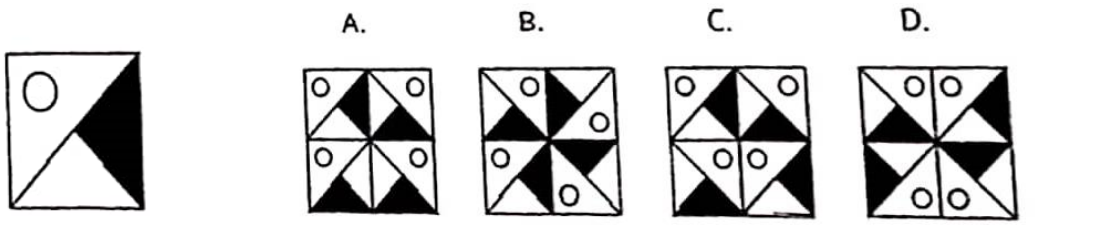
Figura#1

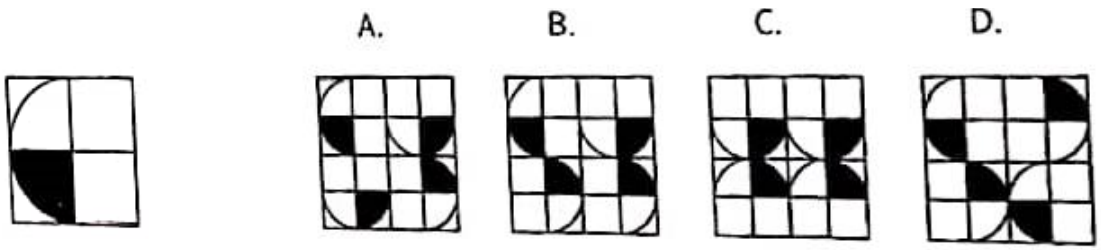
Vector	Figura 1	Figura 2
$\vec{u} =$	A=	A'=
	B=	B'=
	C=	C'=
	D=	D'=
	E=	E'=
	F=	F'=
	G=	G'=
	H=	H'=

Tabla 4-1.1.3.1: Coordenadas del barco

Analizar y describir la relación que existe entre las coordenadas de los puntos de la figura 1 y los de la figura 2 con las coordenadas del vector $\vec{u}$.

8. Identificar el enchape que **NO** se puede obtener con la baldosa de la izquierda:





9. Observe detenidamente las siguientes figuras

a. En cada figura ubique su centro: **C**
b. Determinar si en cada figura existen rotaciones con respecto a su centro **C** tal forma que la figura se mantenga igual.

c. En cada figura trazar una línea vertical y una horizontal que pase por el centro **C**. ¿Cuáles de las figuras presentan simetría respecto a las líneas trazadas?

10. En un plano cartesiano graficar el triángulo ABC cuyos vértices son los puntos de coordenadas A$(-4,5)$, $B(0,-3)$ y $C(4,5)$

A. ¿En el triángulo ABC se pueden identificar dos triángulos con la propiedad que uno de ellos es el reflejo del otro respecto al eje y? en caso afirmativo ¿cuáles serían las coordenadas de los vértices de estos dos triángulos?

B. Demostrar que el triángulo ΔABC es isósceles

C. Demostrar que los dos triángulos encontrados son congruentes.

Para la segunda parte de la prueba, las preguntas tienen el objetivo de detectar los diferentes niveles que tienen los estudiantes en los procesos de abstracción y generalización en aritmética, pre-álgebra y álgebra. Además de recoger información sobre el desempeño y conocimiento de las estructuras algebraicas y las propiedades del sistema numérico que se trabaja para este ciclo escolar.

Procesos de generalización:

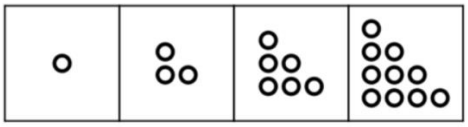
1. Percibir patrones
2. Expresar patrones.
3. Registrar un Patrón
4. Probar la validez de las fórmulas

Procesos de abstracción:

1. Abstracción empírica
2. Abstracción reflexiva

II PARTE

1. Para ir a la escuela los estudiantes pueden usar dos medios de transporte (carro y bicicleta). Se sabe que por cada estudiante que va en carro hay 3 que van en bicicleta. Si hay 212 estudiantes en la escuela, ¿Cuántos estudiantes utilizan cada medio de transporte?
2. En la figura se muestra una secuencia de círculos dentro de cuadrados.



¿Cuántos círculos son necesarios para formar la figura del sexto cuadrado? ¿Y para formar la figura que estuviera en la posición 20? ¿Cuántos círculos serán necesarios para construir la figura que ocupe la posición 100?

3. Construir una sucesión de números naturales con la formula $\frac{n(n+1)}{2}$ ¿qué característica o patrón encuentras en la sucesión escrita?

4. Explique si es falsa o verdadera cada proposición.

- **A.** La división en los números naturales es clausurativa o es cerrada.
- **B.** El inverso aditivo de 2/3 es 3/2
- **C.** La resta (diferencia) de números naturales es asociativa.

5. ¿Cuál es inverso multiplicativo de ¾?

6. ¿Cuál es el elemento neutro o módulo en la multiplicación del conjunto de los números racionales?

7. Escriba por extensión cada conjunto

- **A.** $\{m \in \mathbb{Z}/m^2 - m < 110\}$
- **B.** $\{x \in \mathbb{R}/x^2 = 3\}$

8. ¿Los siguientes conjuntos tiene elementos o son vacíos? Explique su repuesta

- **A.** $\{n \in \mathbb{Z}/n^2 < 0\}$
- **B.** $\{p \in \mathbb{Z}/39 < p^3 < 57\}$
- **C.** $\{x \in \mathbb{Q}/\ el\ denominador\ de\ x\ es\ mayor\ que\ 100\ \}$

9. Se define una operación binaria en $(\mathbb{Z}^+, *)$ mediante:

$a * b = (a \cdot b) + 2$.

- **A.** Efectúa las siguientes operaciones: 2*3, 4*6, 3*20.
- **B.** ¿La operación * es clausurativa? ¿* es conmutativa? ¿* es asociativa?
- **C.** ¿Existe un módulo o elemento neutro en $\mathbb{Z}^+$ con la operación *?

10. Considera la operación binaria * definida en el conjunto $S = \{a, b, c, d, e\}$ y definida en la siguiente tabla

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	b	d
b	b	c	a	e	c
c	c	a	b	b	a
d	b	e	b	e	d
e	d	b	a	d	c

Calcular:

A. $b * d$

B. $c * c$

C. $[(a * c) * e]$

D. ¿Es * una operación conmutativa? Explique por qué

E. ¿Para la operación * existe un módulo? Explique por qué

4.1.4 Secuencia didáctica

- **Taller 1**

Objetivo: Reconstruir los conceptos asociados a los movimientos rígidos en el plano (rotaciones, traslaciones, reflexiones) y definirlos geométricamente de manera formal.

A partir de las actividades 1, 2 y 3 que se realizarán por grupos de trabajo, los estudiantes identificarán las características necesarias para la realización de cada uno de los movimientos rígidos en el plano (traslación, rotación o giro y reflexión central y axial). Posteriormente con la ayuda y la guía del docente se realiza una puesta en común usando las respuestas a las preguntas (acertadas o erradas) para formalizar los conceptos.

Seguidamente con el objetivo de consolidar la parte teórica, se complementará el trabajo con las actividades 4 y 5 que permitirán estudiar los diferentes movimientos rígidos en el plano usando recursos tales como: regla, compás, transportador y hojas tipo milimetradas. Para el cierre de este taller en la actividad 5 se usará el programa GeoGebra para realizar las construcciones que se hicieron con regla, transportador y compás y así fortalecer los conocimientos adquiridos.

TRASLACIÓN

Actividad 1

1. Observe a Patricio en las siguientes imágenes.

A la figura denominada como inicial se le aplica una traslación (según el vector indicado) que genera una figura denominada como final.

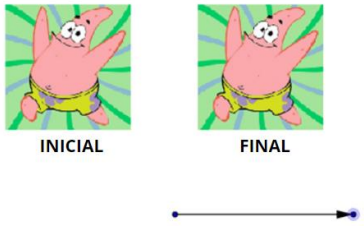


Imagen #1

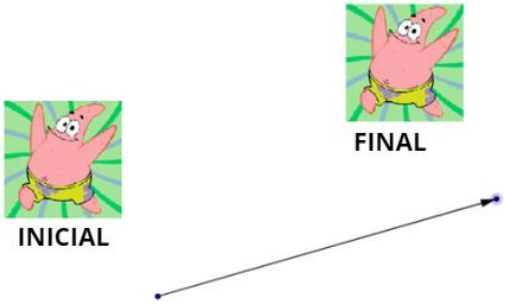


Imagen #2

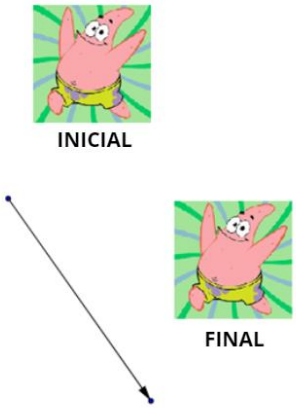


Imagen #3

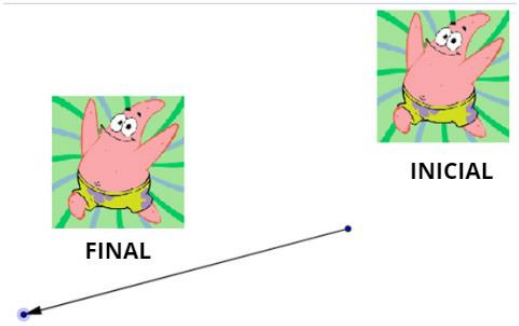


Imagen #4

- **~~A.~~** ¿En cada imagen, qué relación tienen la figura inicial y la final?
- **B.** ¿En cada Imagen, la figura inicial cambio de: forma, tamaño, sentido u orientación?
- **C.** ¿Qué relación tienen el vector, la figura inicial y la final?

2. Graficar en un plano cartesiano el triángulo cuyos vértices tienen coordenadas $A(3,-8)$, $B(3,-7)$ y $C(4,-8)$, luego trasladarlo según el vector de coordenadas $V(5,2)$.

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del triángulo trasladado?

Observando lo realizado en los puntos 1 y 2: ¿Cómo definiría una traslación? y ¿qué elementos considera que son necesarios para realizarlas?

ROTACIONES

Actividad 2

Observe detenidamente cada imagen en la que se realiza un giro o rotación.

1. Identifique y señale en cada imagen el punto de giro o rotación e indique si la rotación se hizo en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario.

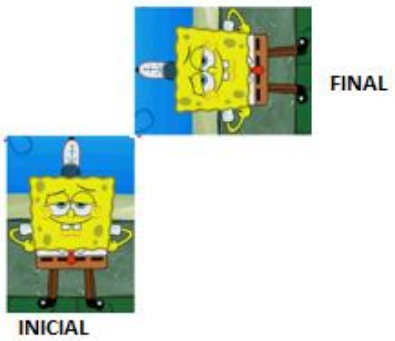


Imagen #1

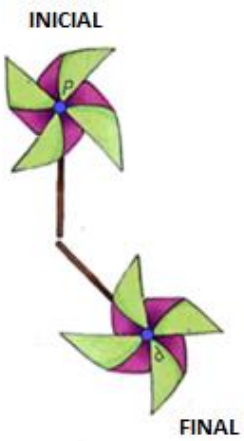


Imagen #2

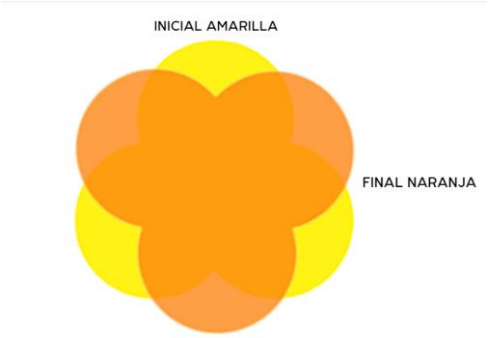


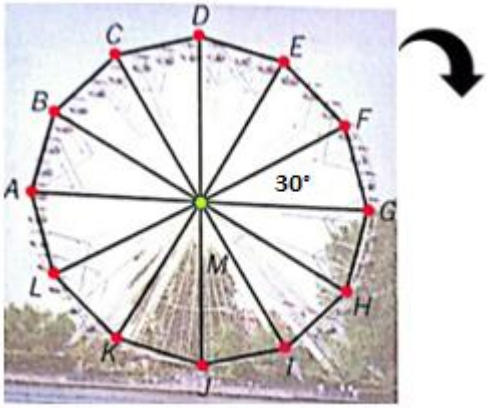
Imagen #3

2. Con respecto al punto anterior responder:

~~A.~~ ¿En cada imagen, qué relación tienen la figura inicial y la final?

B. ¿En cada Imagen, la figura inicial cambio de: forma, tamaño, sentido u orientación?

3. La figura representa una rueda de Chicago que está en movimiento en la dirección indicada. Las sillas son equidistantes por lo que el ángulo entre cada par de aristas es de 30°. Observe y complete la tabla de acuerdo con el ejemplo dado:



Posición inicial	Posición final	Rotación
A	**I**	Sobre el punto **M** realizar $R(240°)$
L	**G**	
D	**F**	
H	**B**	

Tabla 4-2.1.4: Movimientos de los asientos rueda de chicago

¿Qué relación tiene el número de lados del polígono regular que se forma en la rueda de chicago con el ángulo con el cual se está girando para pasar de un asiento a otro en la atracción mecánica?

4. De acuerdo con los puntos 1 y 2 ¿Cómo definiría las rotaciones? ¿Qué elementos considera que son necesarios para realizar una rotación?,

REFLEXIONES

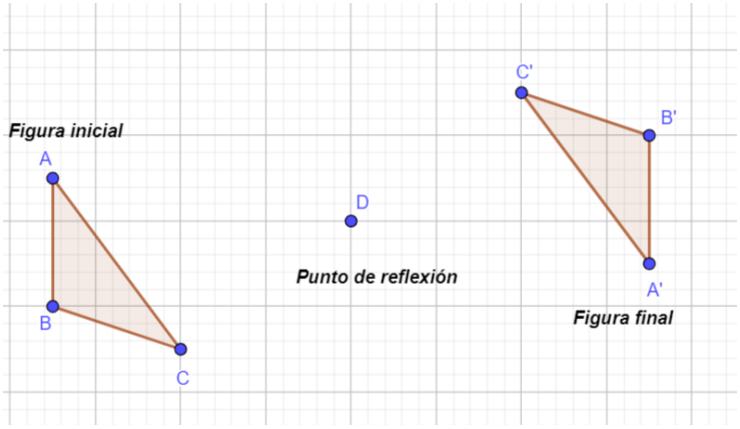
Actividad 3

Inicialmente se mostrarán dos ejemplos en donde a una figura se le aplicará una reflexión central y una reflexión axial, posteriormente se plantean actividades y ejercicios para poder desarrollar estos dos conceptos.

Observe y analice los siguientes ejemplos, tenga en cuenta las conclusiones obtenidas para el desarrollo de las actividades:

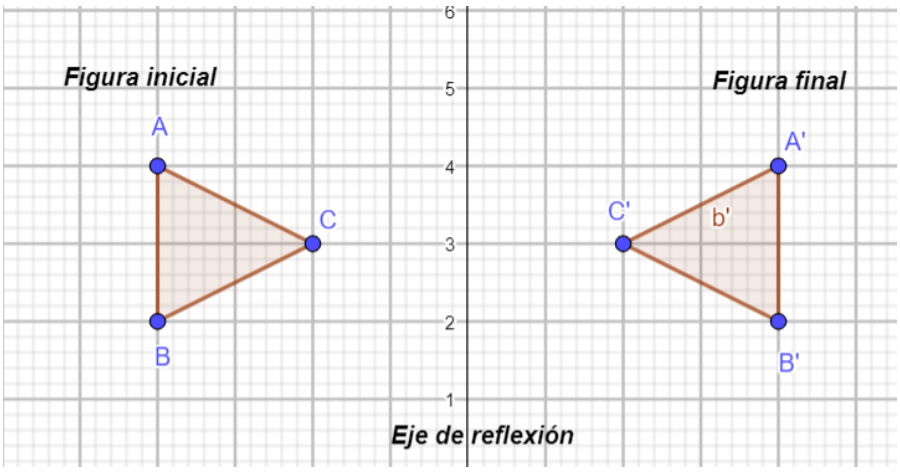
Ejemplo 1. REFLEXIÓN RESPECTO A UN PUNTO (CENTRAL)

En la siguiente imagen vemos que la figura inicial es el ΔABC , se le aplica una reflexión central con respecto al punto D y se obtiene la figura final $\Delta A'B'C'$



Ejemplo 2. REFLEXIÓN RESPECTO A UNA RECTA (AXIAL)

En la siguiente imagen vemos que la figura inicial es el ΔABC , se le aplica una reflexión axial con respecto al eje y y se obtiene la figura final $\Delta A'B'C'$



Nota: Una línea que "funciona" como un espejo y refleja la mitad de una figura en el costado opuesto del "espejo" se conocen como ***eje de simetría*** **o eje de reflexión**

1. Cada una de las figuras se refleja con respecto a la línea punteada de color rojo **(eje de reflexión o eje de simetría).**

Completar el dibujo

2. Analizar las siguientes figuras y decidir si tienen ejes de simetría, en caso afirmativo trazarlos

3. En cada caso: Ubicar el punto P en un plano cartesiano, graficar y escribir las coordenadas del punto P' que se obtiene al reflejarlo respecto al punto Q

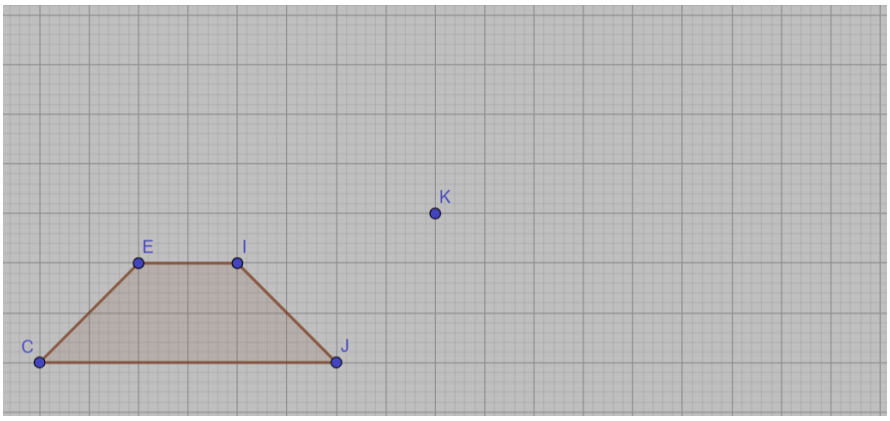
A. P $(-3,-2)$ respecto a Q $(0,0)$ (al origen).

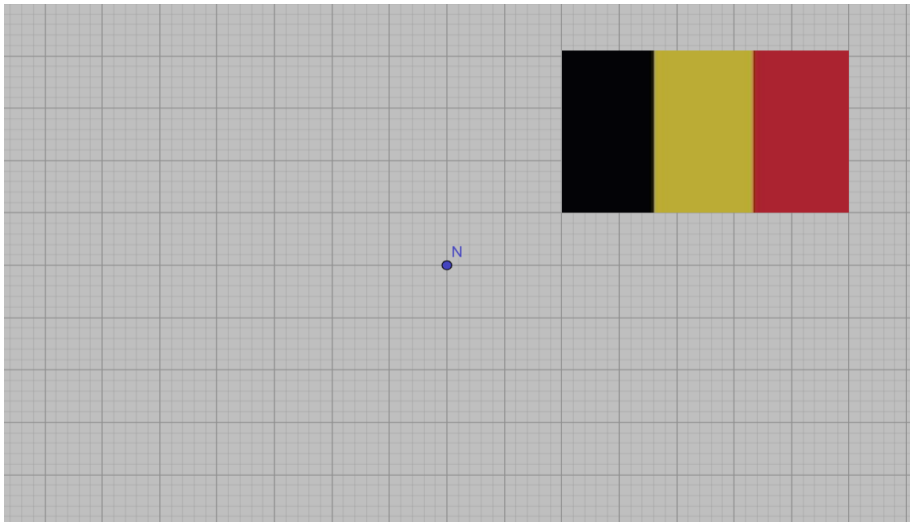
B. P $(1,2)$ respecto a Q $(3,4)$

C. Si el punto $P'(0,-1)$ es el reflejo del punto P $(-6,3)$ respecto al punto Q. ¿Cuáles son las coordenadas de Q?

4. Generalizar: Si el punto $P(x,y)$ se refleja respecto al punto $Q(a,b)$ ¿Cuáles serán las coordenadas del punto P' reflejado?

5. Dibujar el reflejo del trapecio con respecto al punto K y el reflejo de la bandera de Bélgica con respecto al punto N





6. Con respecto a los dos puntos anteriores responder:

¿En cada Imagen al reflejarla hubo cambio de forma, tamaño, sentido u orientación de la figura inicial?

Defina que entiende por una reflexión y describa los dos tipos de reflexiones: axial y la reflexión central.

7. Dibujar en un plano cartesiano el triángulo de vértices $A\,(-8,-3)$, $B(-5,-1)y\ C(-1,-4)$, graficar el triángulo $A'B'C'$ obtenido al aplicar la reflexión axial sugerida y escribir las coordenadas de sus vértices:

A. Respecto al eje y

B. Respecto al eje x

8. Generalizar:

A. ¿Cuáles son las coordenadas del punto que se obtiene al reflejar el punto $P(x,y)$ respecto al eje x?

B. ¿Cuáles son las coordenadas del punto que se obtiene al reflejar el punto $P(x,y)$ respecto al eje y?

C. ¿Cuáles son las coordenadas del punto que se obtiene al reflejar el punto $P(x,y)$ respecto a las rectas $x=a$ o $y=b$?

Actividad 4

Recursos: una hoja de papel milimétrico, regla, compás y transportador.

1. En la hoja de papel milimétrico, dibujar un plano cartesiano y ubicar en él los puntos de coordenadas: $A(-10,7)$; $B(-3,8)$; $C(2,3) y\ D(-5,2)$ con la regla, compás y/o transportador verificar que corresponden a los vértices de un rombo.
   A continuación, en el mismo plano y en color diferente, graficar y determinar las coordenadas del rombo transformado mediante los siguientes movimientos:

A. Reflexión axial con respecto al eje x (Rf_x)

B. Reflexión central con respecto al punto C (R_C)

C. Reflexión respecto a la recta que pasa por los puntos $M(0,-3) y\ N(3,6)$ (Rf_{MN})

D. Rotación de $90°$ alrededor del punto A en sentido contrario a las manecillas del reloj. (AR 90°)

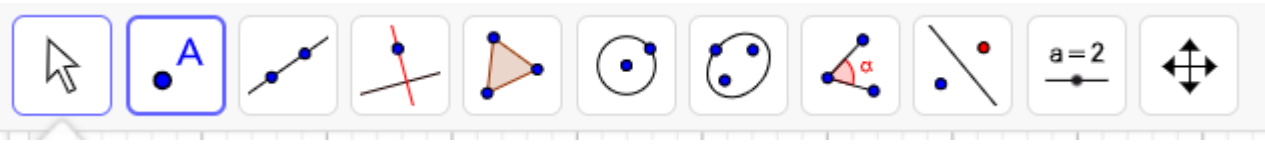
E. Traslación según el vector V que inicia en $(-2,1)$ y finaliza en $(4,1)$ (T_V)

F. En orden aplicar: Reflexión axial con respecto al eje x (R_x), seguida de una rotación de 180° en sentido antihorario y finalmente una traslación según el vector V que tiene origen en (0,0) y punto final (1,2) lo denotaremos así: $T_V(1,2)$

Actividad 5

El programa GeoGebra nos permite realizar construcciones geométricas las cuales podemos estudiar a fondo, ya que podemos mover los elementos y modificar casi al instante las diferentes medidas de esos objetos.

Algunas herramientas que nos pueden servir en las construcciones las podemos encontrar desplegando en los botones del menú en los iconos que aparecen en la siguiente figura:



Estas herramientas nos permiten, por ejemplo, dibujar un punto, dibujar una recta un segmento o un vector, dibujar un polígono regular o no, etc. También es posible tomar medidas y realizar movimientos como traslaciones, rotaciones o reflexiones axiales o centrales.

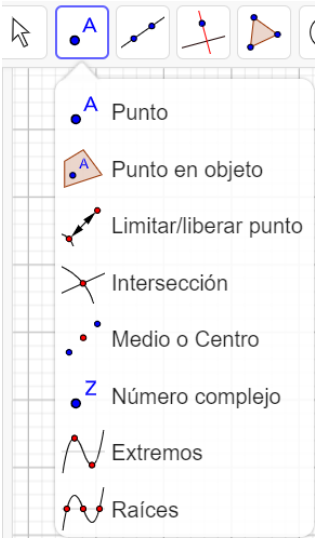


Imagen #1

Imagen #2

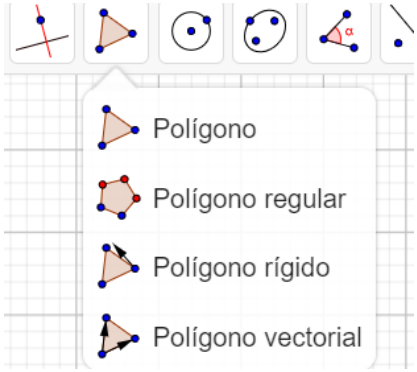


Imagen 3

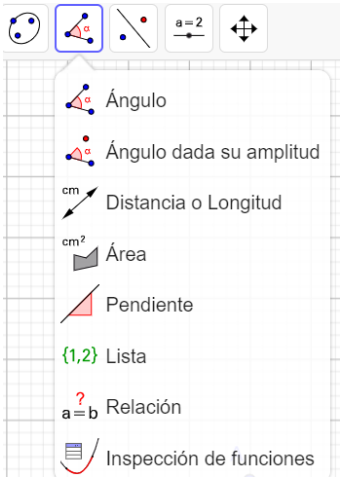


Imagen #4

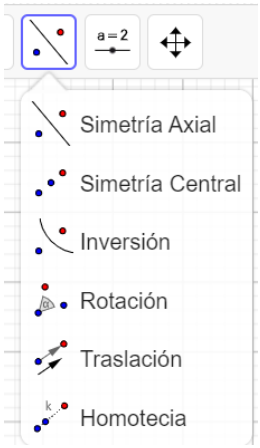


Imagen #5

Por ejemplo, si queremos rotar, reflejar o trasladar un objeto. Damos click en el botón

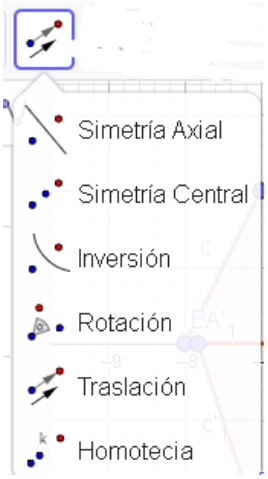


Imagen #6

y seleccionamos el movimiento deseado (simetría axial o central, rotación, o traslación respectivamente). Para el caso de las rotaciones se escoge el objeto, el centro de rotación, la amplitud del ángulo que deseamos y si el sentido es favor o en contra de las manecillas del reloj. Para una reflexión seleccionamos según sea el caso simetría axial o central se selecciona el objeto y el eje de simetría o el centro de simetría. Y para las traslaciones seleccionamos el objeto y el vector.

1. Con las herramientas del programa GeoGebra realice las construcciones de la actividad 4.

Compare el trabajo hecho en GeoGebra con los resultados obtenidos en las construcciones hechas en el papel milimétrico con regla, transportador y compás de la actividad anterior. Guarde el archivo del programa GeoGebra para compartirlo con el docente.

Actividad 6

2. Complete el siguiente cuadro con un SI o un NO, respecto a lo realizado en las tres actividades.

	CAMBIA TAMAÑO	CAMBIA FORMA	CAMBIA ORIENTACIÓN
TRASLACIÓN			
ROTACIÓN		**NO**	
REFLEXIÓN			

Tabla 4-3.1: Características de los movimientos

3. Con su grupo de trabajo, hacer una puesta en común de las respuestas dadas en cada una de las actividades, y reescribir la definición y características de cada uno de los movimientos rígidos.

- **Taller 2**

Objetivo: Profundizar en la noción de simetría, identificando cuando esta relación se presenta en las figuras geométricas y cuando no.

Introducción

Para afianzar las definiciones encontradas después del análisis de la prueba diagnóstica, el trabajo realizado en el taller 1 tanto con elementos geométricos (regla, compás y transportador) como con el programa GeoGebra, se pretende profundizar en la noción de simetría para lo cual se realizará una lectura introductoria sobre una conversación de un estudiante y su profesor, también en esta actividad se estudiarán algunas figuras

geométricas y sus diferentes simetrías de rotación y reflexión dibujándolas y usando permutaciones. Finalmente se hará un trabajo de comparación usando hojas de acetato donde están impresos distintos mosaicos para analizar las traslaciones, giros y reflexiones que son simetría. Estarán inmersos los siguientes tipos de simetría: simetría axial, simetría respecto a un punto y simetría rotacional.

Actividad 1

Realizar la siguiente lectura y responder a las preguntas y ejercicios que se plantean al final.

Amor y matemáticas
LA ESENCIA DE LA SIMETRÍA

Para la mayoría de gente, la matemática trata sobre números. Imaginan a los matemáticos como personas que se pasan el día procesando números: números grandes y números más grandes aún, Con nombres exóticos. Yo también lo pensaba…, al menos hasta que Yevgueni Yevguénievich (mi profesor) me presentó los conceptos e ideas de las matemáticas modernas. Uno de ellos es clave para el descubrimiento de los quarks en física: El concepto de simetría.

¿Qué es la simetría? Todos comprendemos intuitivamente qué es: la reconocemos cuando la vemos. Cuando le pido a la gente que me dé un ejemplo de simetría, suelen mencionar mariposas, copos de nieve o el cuerpo humano.

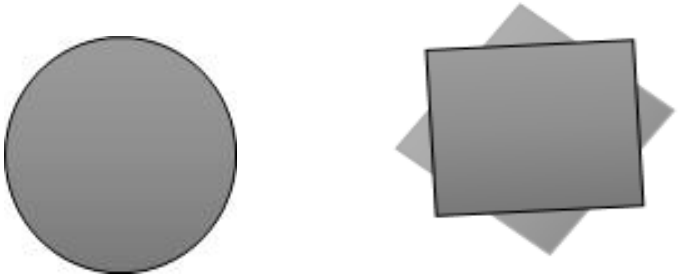
Pero si les pregunto qué significa que un objeto determinado es simétrico, dudan.
Yevgueni Yevguénievich Me lo explicó así:

-Observemos esta mesa cuadrada y esta mesa redonda -dijo, señalándome las dos mesas de la oficina ¿cuál es la más simétrica?
-La redonda, claro, ¿no es obvio?

Pero ¿Por qué? Ser matemático significa que uno no nada por obvio, sino que intenta razonarlo. Muy a menudo te darás cuenta de que la respuesta más obvia es errónea.

Al ver mi cara de confusión Yevgueni Yevguénievich me dio una pista:
- ¿Cuál es la propiedad de la mesa redonda qué la hace más simétrica?
Pensé en el tema durante un rato y de repente me di cuenta:
-Supongo que la simetría de un objeto tiene que ver con que mantenga su forma y su posición cuando se le aplican cambios.
Yevgueni Yevguénievich asintió.
-Efectivamente. Veamos todas las posibles transformaciones de una mesa que conservan su forma y su posición –dijo-. En el caso de la mesa redonda… Le interrumpí:

-Cualquier rotación en torno a su centro valdrá. Tendremos la misma mesa en la misma posición. Pero si aplicamos una rotación arbitraria a una mesa cuadrada, tendremos una mesa cambiada de posición. Sólo las rotaciones de 90 grados y sus múltiplos la mantendrían sin cambios en su aspecto.
-¡Exacto! Si te fueras de la oficina durante un minuto y yo girara la mesa redonda en cualquier ángulo, no notarías la diferencia. Pero si hiciera lo mismo con la mesa cuadrada, lo verías, a menos que yo la girara 90, 180 o 270 grados.



Si aplicamos a una mesa redonda una rotación de un ángulo cualquiera no cambia, pero si a una mesa cuadrada le aplicamos una rotación de un ángulo que no sea múltiplo de 90 grados, si cambia (ambas vistas desde arriba).
Continuó:

-A estas transformaciones se les denomina Simetría. De modo que, como ves, la mesa cuadrada tiene cuatro simetrías de rotación, mientras que la mesa redonda tiene muchas más: en realidad, infinitas más. Por eso decimos que la mesa redonda es más simétrica. Tenía mucho sentido.

-Esta es una observación bastante directa -continuó Yevgueni Yevguénievich-. No es necesario ser matemático para ver esto. Pero si eres un matemático, te harás la siguiente pregunta: ¿Cuáles son todas las posibles simetrías de un objeto?

-Examinemos el caso de la mesa cuadrada. Sus simetrías son estas cuatro rotaciones alrededor del centro de la mesa: de 90°, de 180°, 270° y de 360°, en el sentido contrario a las agujas del reloj. Un matemático diría que el conjunto de simetrías de la mesa cuadrada consiste en cuatro elementos, que se corresponden a los ángulos 90, 180, 270 y 360. Cada rotación lleva a una las esquinas (marcada con un círculo en la figura) a uno de los cuatro rincones.

Tomado de Amor y matemáticas - Edwar Frenkel. Capítulo 2, páginas 31, 32 y 33

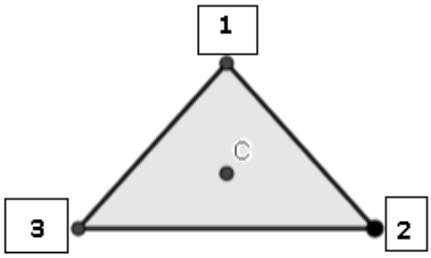
1. Teniendo en cuenta la lectura anterior y la actividad 3 del taller 1 cómo define con sus palabras la idea de simetría. ¿cómo sabemos que encontramos una simetría en una figura geométrica?

2. Identificar y describir las simetrías por rotación o reflexión de las siguientes figuras. Dibújelas

A. Triángulo equilátero .

B. Cuadrado

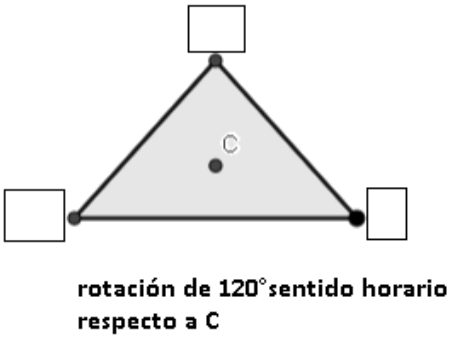
3. Considere el triángulo equilátero de la figura cuyos vértices están rotulados con los números 1, 2 y 3 y su centro con la letra C:



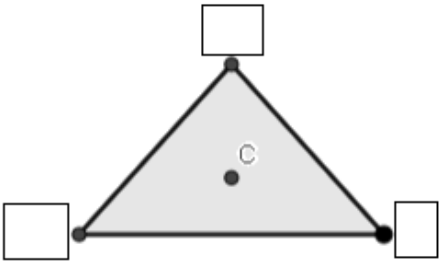
Si rotamos un ángulo de 0° respecto a C, los vértices no cambiarían de posición, es decir el vértice 1 queda en la posición 1, el 2 en la posición 2 y el 3 en la posición 3, una manera común de notar lo anterior es

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora, rotamos el triángulo con respecto a su centro C ángulos de 120° y 240° respectivamente (en sentido horario). Ubicar en los cuadros el número del vértice después de la rotación.



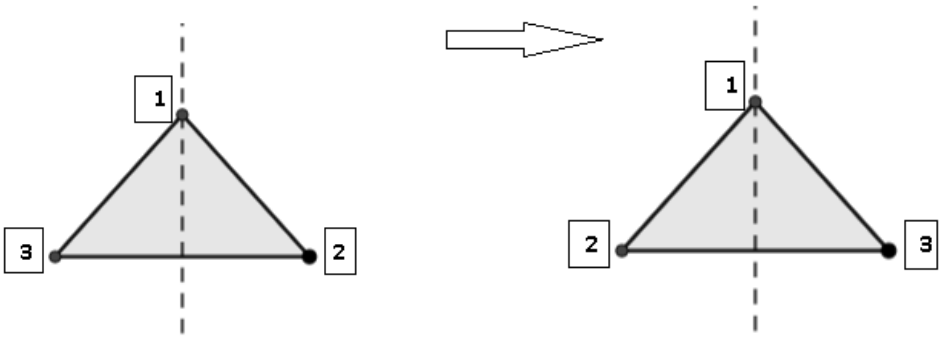
$$\sigma_{120^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



rotación de 240° sentido horario respecto a C

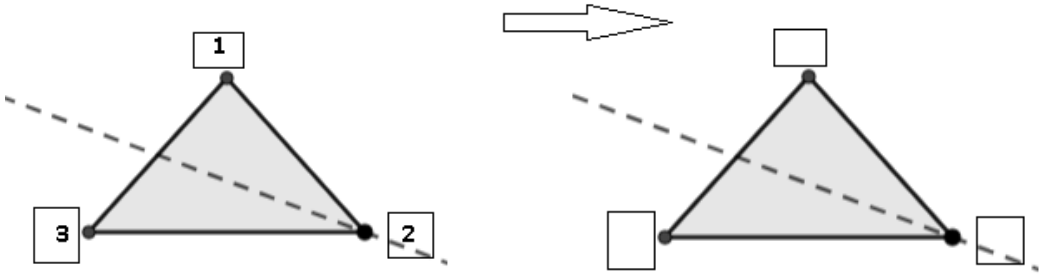
$$\sigma_{240^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Nuevamente consideramos el triángulo equilátero del punto anterior, pero la idea ahora es hacer reflexiones axiales respecto a las rectas que pasan por cada vértice i y el punto medio del lado opuesto (medianas) las cuales denotaremos por ρ_i con $i = 1,2,3$

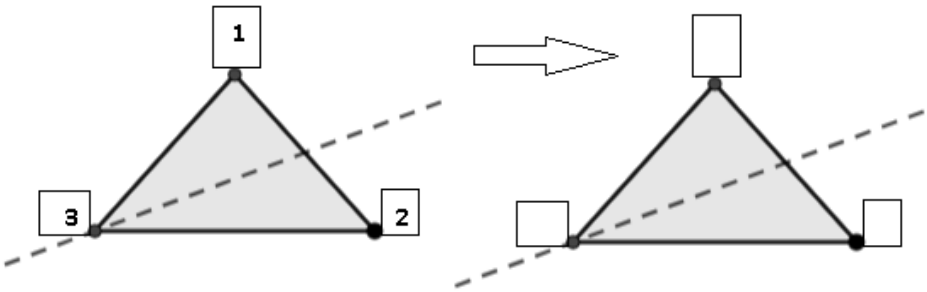


$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Completar los cuadros con los números de los vértices correspondientes a las reflexiones axiales respecto a las rectas que pasan por los vértices 2 y 3



$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cada una de las ordenaciones de la segunda fila en $\sigma_{0°}$, $\sigma_{120°}, \sigma_{240°}, \rho_{1,}$ $, \rho_2$ y ρ_3 se conoce permutaciones de los números 1, 2 y 3.

4. Si tenemos un rectángulo y organizamos sus vértices de la siguiente manera:

A. Describa la transformación aplicada al rectángulo si su representación esta dada por $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

B. Describa la transformación aplicada al rectángulo inicial para obtener el rectángulo: Y use la notación correspondiente para representarla.

Actividad 2

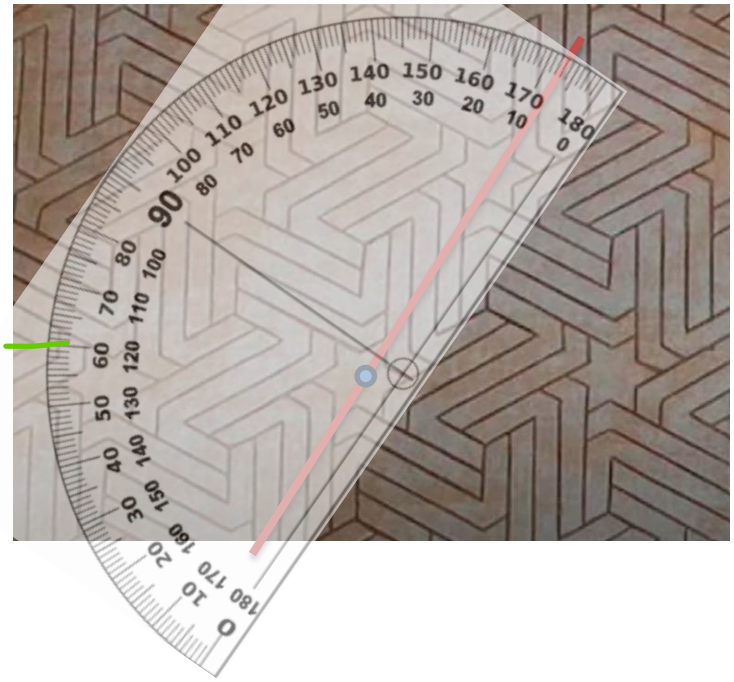
Mosaicos - Láminas de acetato

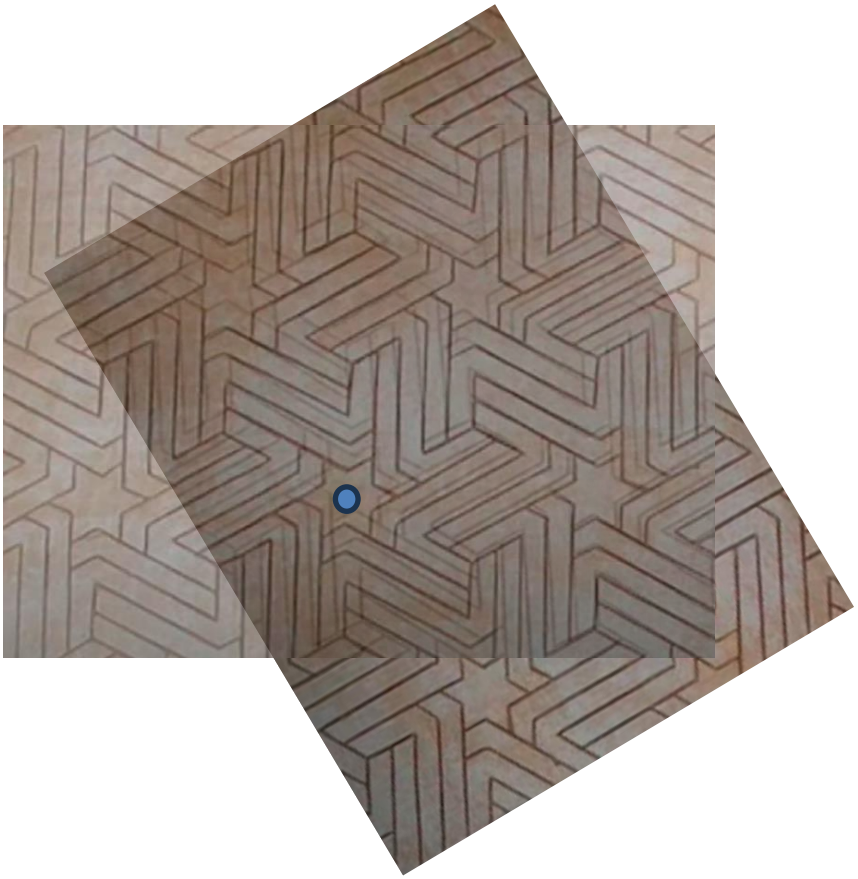
Usando impresiones a color en papel e impresiones en láminas de acetato de algunos diseños de mosaicos, se fija con cinta la hoja de papel y se mueve solo la impresión en acetato para mostrar a los estudiantes los movimientos de reflexión, rotación y traslación que se pueden hacer para que el diseño del mosaico se conserve invariante.

Es importante medir los ángulos para realizar las rotaciones de los mosaicos. Para ello usaremos un transportador y tendremos como referencia una línea y un punto de referencia de giro.

7. Se selecciona un punto que será el referente para la rotación.
8. Se ubica el centro del transportador en el punto de rotación y se alinea con 0º, teniendo en cuenta la línea de referencia.
9. Se selecciona un ángulo qué será la medida para hacer la rotación y un sentido horario o antihorario.
10. Se marca en la hoja con ayuda del transportador el ángulo que se seleccionó como medida a rotar
11. Se gira el acetato respecto al ángulo que marque en el paso anterior c
12. Se verifica si el diseño del mosaico quedo igual a como esta antes de hacer le movimiento de rotación si es así tiene simetría de giro en ese punto con ese ángulo. Por ejemplo, se muestra que el siguiente mosaico tiene una simetría de giro de 60° si tomamos el punto azul de referencia y la línea anaranjada en el sentido horario:

Ejemplo 1:





Ejemplo2:

En la figura #1 si ignoramos los colores en ella, usando un transportador se puede realizar una rotación de 60° a favor de las manecillas de reloj con respecto al punto rojo para que las imágenes vuelvan a coincidir y esta tenga una simetría de giro.

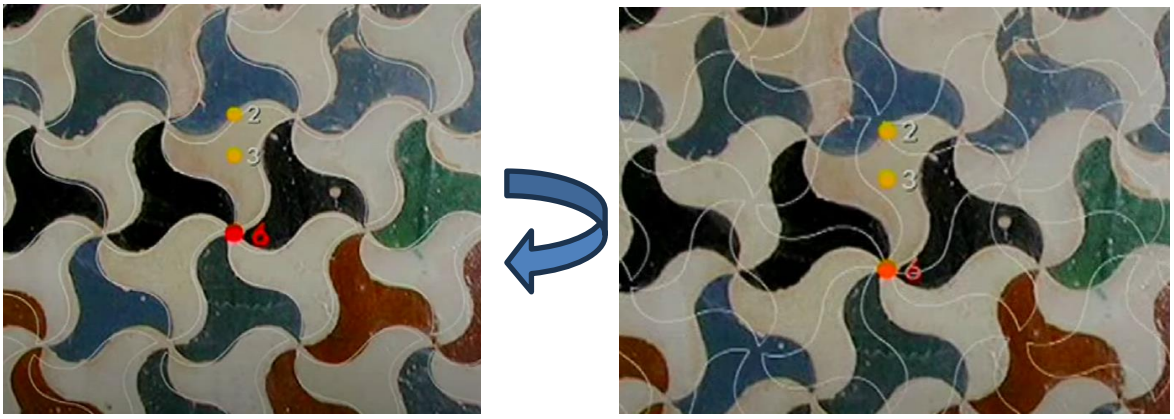


Figura #1 inicial ***Figura #1 final***

Pero si tenemos el punto #3 amarillo como referencia tendríamos una simetría de giro cuando realicemos un giro de 120°. Además, cuando el punto de referencia de giro es el #2 amarillo y realizamos una rotación de 180° encontraremos de nuevo una simetría de giro, es decir, el mosaico se conserva invariante.

1. En grupo de tres personas, teniendo en cuenta la explicación anterior y con las impresiones a color en papel e impresiones en láminas de acetato que fueron entregadas a cada grupo:

A. Realice una exploración de los siguientes diseños de mosaicos e identifique y describa diferentes transformaciones que se pueden realizar para que cada uno se mantenga invariante.

Figura 1

Figura 2

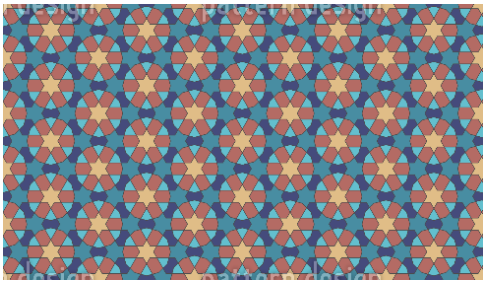
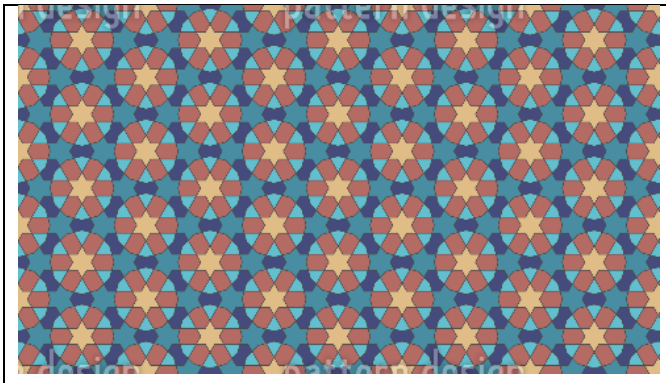
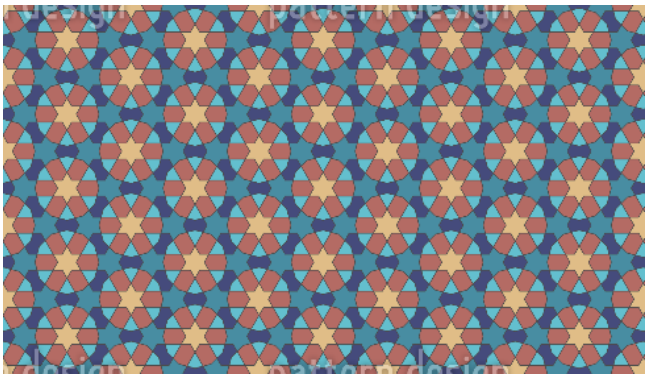


Figura 3

B. Completa el siguiente cuadro:

MOSAICO	**MOVIMIENTO:**	**¿CÓMO QUEDO?**
	Traslade el mosaico diagonalmente	
	Marque el centro C del mosaico y luego gírelo 90° a favor de las manecillas del reloj respecto a C.	
	Escoja una circunferencia y en ella marque su centro C , posteriormente	

	haga una rotación de 180° en contra de las manecillas del reloj respecto a C.	
	Marque el centro C de la figura y luego trace una recta horizontal que pase por C. Posteriormente refleje la parte superior respecto a la recta trazada .	
	Marque el centro C de la figura y luego trace una recta horizontal que pase por C. Posteriormente refleje la parte superior respecto a la recta trazada .	

C. ¿Existen simetrías usando los movimientos de giro, reflexión o translación en estos mosaicos, es decir quedan invariantes al realizar estos movimientos? Describa estos movimientos.

D. Al observar los mosaicos y haber encontrado las asimetrías existentes ¿tienen algo en común las simetrías de los diferentes mosaicos?

Se termina la actividad discutiendo sobre lo encontrado en la tabla anterior. Posteriormente se dejará un trabajo para casa relacionado con las matemáticas y la cultura en los mosaicos que se encuentran en el museo de Alhambra ubicado en la ciudad de Granada en España.

- **Taller 3**

Objetivo: Realizar un trabajo que recoja y afirme los conceptos sobre los sistemas numéricos conocidos, algunas operaciones binarias definidas sobre ellos y sus respectivas propiedades.

El propósito de la siguiente actividad intuitiva es explorar la noción de propiedad, con el objetivo de definir algunas en un conjunto de elementos dado, es decir se desea buscar características comunes que tienen los elementos de un conjunto dado, particularmente, en este caso consideramos las 15 fichas que aparecen a continuación y posteriormente haremos una búsqueda de propiedades, pero en los conjuntos numéricos conocidos.

Actividad 1

1. Teniendo en cuenta el siguiente conjunto de 15 fichas de cartulina las cuales serán entregadas por el docente a cada grupo. El docente relacionará las fichas usando un criterio de clasificación. Lo estudiantes deben encontrar ese criterio usado por el docente.

En la figura #1 se muestran las fichas que se usarán en la actividad:

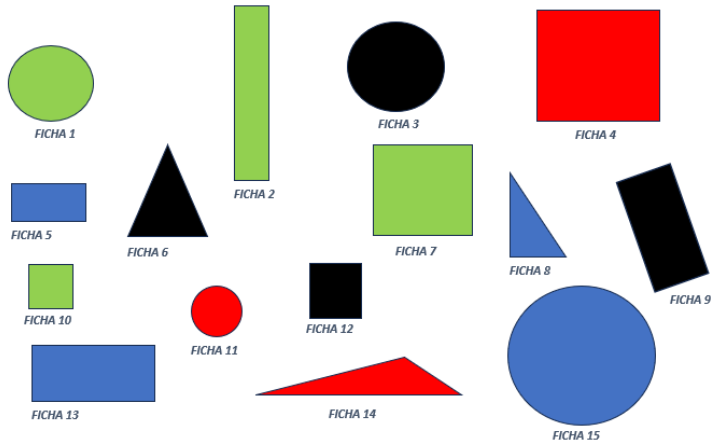
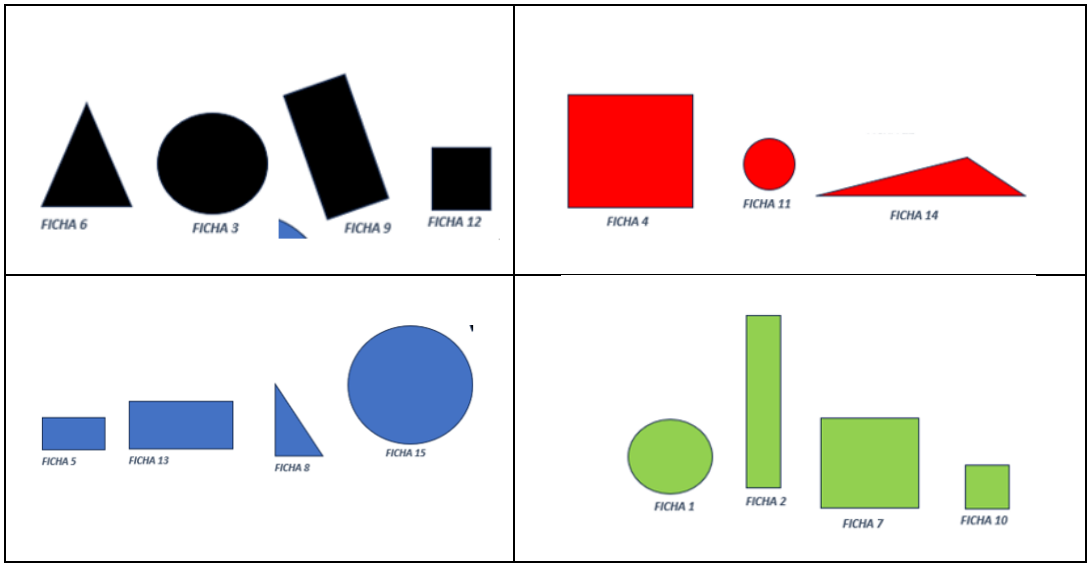


Figura #1

En el siguiente cuadro se observa la organización de las fichas después del criterio usado por el docente:



A. ¿Cuál es el criterio de clasificación que usó el docente con las fichas ¿cómo el docente relacionó las fichas? Escribe algunas parejas de fichas que se puedan relacionar con el criterio encontrado.

B. ¿Existen más criterios para clasificar las 15 fichas?

C. Organizar sobre la mesa las fichas según un criterio que hayan encontrado y luego cambien de mesa con algún grupo de la clase para que ellos puedan adivinar el criterio que ustedes escogieron y ustedes adivinar el de otro grupo.

D. Dado un criterio de clasificación, donde por ejemplo se relaciona la ficha 3 con la ficha 6 ¿es lo mismo que relacionar la ficha 6 con la ficha 3? ¿qué propiedad conocida se estaría evidenciando? ¿en cuáles operaciones con los conjuntos de números que conoce se cumple esta propiedad encontrada?

Actividad 2

Los siguientes ejercicios tienen el propósito de recordar los conjuntos numéricos estudiados a lo largo del bachillerato, algunas operaciones binarias definidas en ellos y propiedades tales como: clausurativa, conmutativa, asociativa, elemento neutro y elemento inverso.

1. En el siguiente cuadro relacione con una flecha los conjuntos de la columna 1 con su respectivo nombre en la columna 2

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \dots \dots \dots \dots \dots .\}$	Números reales: $\mathbb{R}$
$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \dots \dots \dots \dots .\}$	Números naturales: $\mathbb{N}$
$\{\dots \dots . -3, -2, -1,0,1,2,3,4, \dots .\}$	Números Pares: P
$\left\{\frac{a}{b} \mid \quad a, b \in \mathbb{Z}, \qquad b \neq 0\right\}$	Números irracionales: $\mathbb{I}$
$\left\{x \in \mathbb{R} \mid \ no\ existen\ \ a, b \in \mathbb{Z}\ \ con\ \ x = \frac{a}{b}\right\}$	Números enteros:$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$	Números impares: i
$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots \dots \dots \dots \dots \dots .\}$	Números racionales: $\mathbb{Q}$

Tabla 4-4.3 Conjuntos numéricos

2. Resuelva las operaciones indicadas y luego ubique los números obtenidos en **todos** los conjuntos a los que pertenecen

$5 - 9\,,\quad \sqrt{12} \times \sqrt{3},\quad \frac{2}{5} + \frac{3}{5},\quad 0.\overline{3} + 0.\overline{4}\,,\quad \pi \times \frac{2}{7},\quad \frac{3}{2} \div \frac{3}{8},\quad \frac{1}{2} + \frac{4}{3},\quad \sqrt{17 - 21}$

i	P	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$

3. Clasifique las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas (discuta con sus compañeros de grupo la razón de su clasificación)

a. La suma de dos números impares siempre es impar.
b. La suma de dos números naturales siempre es natural.
c. La suma de dos números irracionales siempre es irracional.
d. La suma de dos números racionales siempre es racional.
e. La suma de dos números reales siempre es real.
f. El producto de dos números pares siempre es par.
g. El producto de dos números irracionales siempre es irracional.
h. El producto de dos números reales siempre es real.

4. Recordemos algunas de las propiedades de las operaciones binarias básicas:

Sea * una operación definida en un conjunto C, se dice que:

- * es cerrada o clausurativa si para todo $x, y \in C$, se cumple que $x * y \in C$
- * es conmutativa si para todo $x, y \in C$, $x * y = y * x$.
- * es asociativa si para todo $x, y, z \in C$, $(x * y) * z = x * (y * z)$.
- $e \in C$ es el módulo o elemento neutro de * si para todo
- $x \in C$, $x * e = e * x = x$
- x^{-1} es el inverso de $x\ en$ C en para * si para todo $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

5. Con la información dada diga si las operaciones dadas son o no clausurativas, conmutativas, asociativas, tienen módulo, tienen inverso en el conjunto dado:

A. $+\ en\ \mathbb{N}$

B. $+\ en\ \mathbb{R}$

C. $+\ en\ \mathbb{I}$

D. $+\ en\ P$

E. $\times\ en\ \mathbb{R}$

F. $\times\ en\ \mathbb{I}$

G. $\times\ en\ \mathbb{Q}$

H. $\times\ en\ \mathrm{i}$

9. Resolver las siguientes ecuaciones en el conjunto de los números reales:

A. $8p - 21 = 3$

B. $3x + 3 = x + 4$

10. En grupo dialoguen y respondan las siguientes preguntas:

A. ¿Qué propiedades de la suma y/o el producto usaron en la solución?

B. ¿Se pueden resolver las siguientes ecuaciones en el conjunto de los números naturales? Explique

- $w + 10 = 6$
- $5y = 3$

11. Escriba los elementos de cada conjunto por extensión:

A. $A = \{y \in \mathrm{Z} \mid y\ es\ impar,\ \ y < 19\}$

B. $B = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 6 \,\}$

C. $C = \{\, y \in \mathbb{N} \mid y = x - 2 \quad si \quad x \in \mathrm{Z} \wedge -2 \leq x < 3\}$

D. $D = \left\{y \in \mathbb{N} \mid y = \frac{x+4}{2}\ si\ \ x \in \mathbb{N} \quad \wedge\ x < 6\right\}$

E. $E = \{\, y \in \mathbb{N} \mid y = 2x - 11 < 15\}$

F. $F = \{\, z \in \mathbb{N}\ /z + 5 = 4\}$

Como hemos podido observar las operaciones de suma y multiplicación en los conjuntos en los que están bien definidas (es decir son clausurativas), las podemos definir como una

regla que asocia a un par de elementos del conjunto otro elemento del mismo conjunto, en términos formales esto se resume diciendo que la operación es binaria.

Actividad 3

1. Determinar si la operación definida en el conjunto dado es o no binaria.
   - **A.** En el conjunto de los números racionales positivos Q^+ la operación * está definida por $a * b = \frac{a}{b}$
   - **B.** En el conjunto de los números enteros positivos Z^+ la operación * está definida por $a * b = \frac{a}{b}$
   - **C.** En el conjunto $C = \{p, q, r\}$ la operación * definida en la tabla

*	p	q	r
p	p	q	r
q	q	r	p
r	r	p	q

Tabla 4-5.1: Tabla de operaciones

2. Determinar si la operación * definida como $a * b = a^b$ en el conjunto de los números enteros positivos Z^+ cumple las propiedades: conmutativa, asociativa y si se puede encontrar un módulo e inversos.

A lo largo de la historia de las matemáticas, en álgebra se empezó a estudiar estructuras abstractas donde se podían observar propiedades como las que hemos estudiado (clausurativa, conmutativa, existencia de elemento neutro e inversos). Con estas propiedades y otras se forman las reglas de juego para la construcción de nuevos objetos o estructuras algebraicas. Es decir, existencia de conjuntos en los que se pueden definir operaciones binarias que satisfacen ciertas propiedades y así determinar qué tipo de estructura conforman. En las siguientes actividades nos enfocaremos en el estudio de una estructura algebraica especifica conocida como ***grupo.***

- **Taller 4**

Objetivo: Relacionar el estudio de las transformaciones geométricas y la noción de simetría con la estructura algebraica conocida como ***grupo***.

Uno de los objetivos en relación con los 4 talleres es poder visualizar la abstracción y generalización, desde una perspectiva geométrica a una algebraica y como estos resultados se puede aplicar a otros contextos; teniendo como referente la idea de simetría para reforzar la noción de grupo, sus propiedades y así poder identificar esta estructura en otras situaciones.

Inicialmente se explicará la definición de la estructura de grupo.

Grupo (Estructura algebraica)

Sea G un conjunto no vacío provisto de una operación binaria *, se dice que el par $(G,*)$ es un grupo si cumple:

$\boldsymbol{G_1}$: Dados $a, b, c \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$, es *decir,* $*$ *es asociativa.*

$\boldsymbol{G_2}$: *Existe un elemento* $e \in G$ *tal que* $e * a = a * e = a$ *para todo* $a \in G$, e *se denomina elemento neutro o módulo.*

$\boldsymbol{G_3}$***:*** *Para cada* $a \in G$ *existe un elemento* $a' \in G$ *tal que* $a' * a = a * a' = e$

a' *se denomina el inverso de* a *en* G *. Se acostumbra a denotar el inverso de* a

como $a' = a^{-1}$.

Si además cumple que para a, b *en* G,

$a * b = b * a$, *es decir,* $*$ *es conmutativa, entonces se dice que* $(G,*)$, *es un* ***grupo abeliano***.

ACTIVIDAD 1

Retomamos la *actividad #1* de *taller #2* en la que se estudiaron las simetrías del triángulo equilátero y se denotaron respectivamente por $\sigma_{0°}$, $\sigma_{120°}, \sigma_{240°,}$ las rotaciones de 0°, 120° y 240° respecto al centro del triángulo y en sentido horario. Y por $\rho_{1,}$,ρ_2 y ρ_3 las reflexiones axiales respecto a cada una de las medianas del triángulo.

A continuación, se define la operación * que se define como la composición de dos trasformaciones aplicadas al triángulo T, por ejemplo:

$(\sigma_a * \sigma_b)(T)$= $\sigma_a(\ \sigma_b(T))$ es decir, primero se aplica σ_b a T y al resultado se le aplica σ_a

O

$(\rho_i * \rho_j)(T)$=$\rho_i(\ \rho_j(T)\ )$ es decir, primero se aplica ρ_j a T y al resultado se le aplica ρ_i

De la misma forma se define si combinamos rotaciones y reflexiones, es decir, por ejemplo $(\rho_i * \sigma_a)(T)$=$\rho_i(\ \sigma_a(T))\ )$ equivale a primero aplicar la rotación y luego la reflexión axial.

Con los resultados obtenidos en el taller #2

$$\sigma_{0°} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_{120°} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_{240°} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Con la definición dada de *, los resultados anteriores y el análisis de los siguientes ejemplos completar la tabla:

$$(\sigma_{120°} * \sigma_{240°})(T) = \sigma_{120°}(\ \sigma_{240°}(T)) = \sigma_{120°} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \sigma_{0°}$$

$$\rho_1 * \sigma_{240°})(T) = \rho_1 (\sigma_{240°}(T)) = \rho_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \rho_3$$

*	$\sigma_{0°}$	$\sigma_{120°}$	$\sigma_{240°}$	ρ_1	ρ_2	ρ_3
$\sigma_{0°}$						
$\sigma_{120°}$			$\sigma_{0°}$			
$\sigma_{240°}$						
ρ_1			ρ_3			
ρ_2						
ρ_3						

Tabla 4-6.1Composición de simetrías del triángulo equilátero

ACTIVIDAD 2

El docente hace entrega a cada uno de los grupos un “reloj no convencional” hecho en cartón paja como el que aparece en la figura #1:

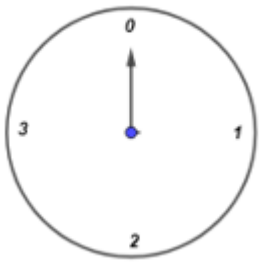


Figura #1

Se explica que el “reloj no convencional” es usado en el planeta Z_4 en el que cada día solar dura sólo 8 horas por lo que la manecilla salta únicamente entre los números 0,1,2 y 3. Se plantean situaciones para analizar y resolver manipulando el “reloj” tales como:

- Si un habitante se levantó en la hora 1 y dentro de 3 horas debe estar en su trabajo, ¿qué número indicará la manecilla del reloj?, es decir, a qué es igual $1 \oplus 3$?
- Si un habitante sale de su casa en la hora 2 y regresa en 3 horas, ¿qué número indicará la manecilla del reloj?, es decir, a qué es igual $2 \oplus 3$?

1. Después de que se familiaricen con el funcionamiento de la "aritmética" de este reloj, se pide que complete la siguiente tabla

$\oplus$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0		2	
1				0
2	2			
3				2

Tabla 4-7.1 Composición de horas en el reloj

2. El conjunto que representa las horas que marca el reloj es $C = \{0,1,2,3\}$ y la operación que se definió en C es $\oplus$

Responda las siguientes preguntas justificando plenamente su respuesta

a. Es $\oplus$ una operación binaria?

b. ¿$(C,\oplus)$ tiene estructura de grupo?, en caso afirmativo, es un grupo abeliano?

ACTIVIDAD 3

Recordemos que dadas dos funciones reales f y g , a partir de ellas es posible, usando las operaciones básicas de los números reales (suma, resta, producto, cociente) formar nuevas funciones. Sin embargo; existe una operación adicional conocida como **composición** y denotada por el símbolo $\circ$ definida como: Dadas dos funciones reales f y g ,iniciamos con un número x en el dominio de g y calculamos su imagen $g(x)$. Si este

número $g(x)$ está en el dominio de f, se calcula el valor de $f(g(x))$. El resultado obtenido es una nueva función que se obtiene al sustituir g en f denominada **composición** de f y g

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Ejemplo:

Si $f(x) = x + 8$ y $g(x) = \sqrt{x}$ entonces la regla de correspondencia para encontrar $(f \circ g)(x)$ se obtiene haciendo la siguiente sustitución:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

$$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}\ ).$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x} + 8$$

Practiquemos y relacionemos los conceptos aprendidos. La siguiente actividad es tomada y adaptada de la página 163 del libro *Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos Representar estructuras algebraicas finitas y enumerables*. Investigación realizada por los docentes Luque, C. Jiménez, H. Ángel, J. (2013)

Sea $D = \{l, m, n. g\}$, un conjunto de funciones con:

$$l(x) = x \qquad m(x) = -x \qquad n(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = -\frac{1}{x}$$

Y las consideramos con dominio y codominio el conjunto de los números reales diferentes a cero. Usando la definición de composición de funciones completar la tabla 3

$\circ$	l	m	n	g
l				
m			g	
n				
g				

Tabla 4-8.1: Composición de funciones

Responda las siguientes preguntas justificando plenamente su respuesta

a. Es $\circ$ una operación binaria?

b. ¿$(D,\circ)$ tiene estructura de grupo?, en caso afirmativo, es un grupo abeliano?

- **Prueba final**

El propósito de esta prueba es evidenciar los aprendizajes y el desarrollo de los procesos de abstracción y generalización en los estudiantes después de la aplicación de la secuencia de actividades donde están involucradas las temáticas de movimientos rígidos en el plano y la noción de grupo.

Juguemos con un tablero de 4 casillas y una ficha roja la cual puede:

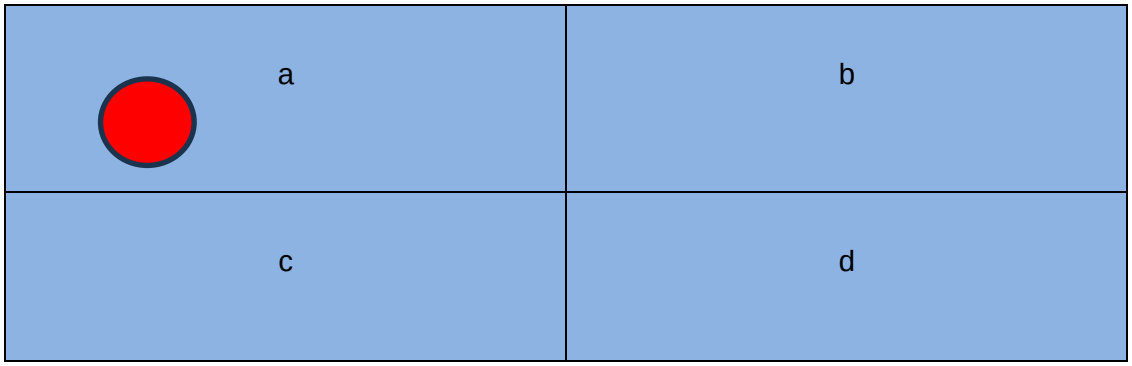
No moverse: $\boldsymbol{E}$

Moverse verticalmente: $\boldsymbol{V}$

Moverse horizontalmente: $\boldsymbol{H}$

Moverse diagonalmente: $\boldsymbol{D}$

Consideremos el conjunto $A = \{E, V, H, D\}$ de posibles "jugadas o movimientos "de la ficha



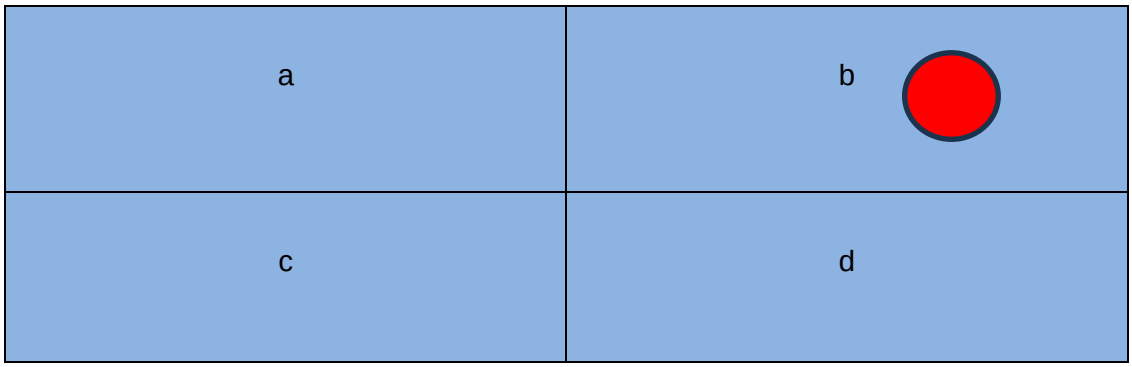
Definimos la operación * en el conjunto A de las "jugadas" así:

$(\boldsymbol{X} * \boldsymbol{Y})(\boldsymbol{i})$ Primero se aplica a $\boldsymbol{i}$ el movimiento $\boldsymbol{Y}$ y después a $Y(\boldsymbol{i})$ se aplica el movimiento $\boldsymbol{X}$ **.** **(**noten la similitud con la composición de funciones)

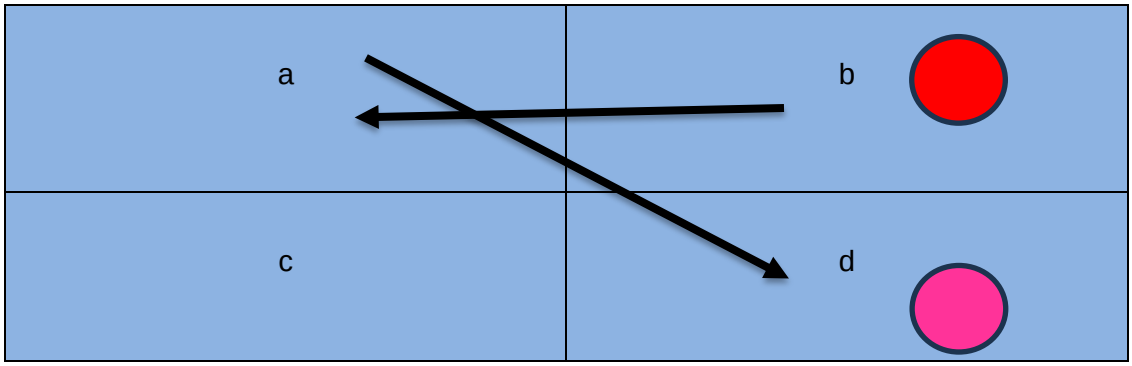
Ejemplo:

$$(\boldsymbol{D} * \boldsymbol{H})(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{b})\big) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{d} = \ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{b})$$

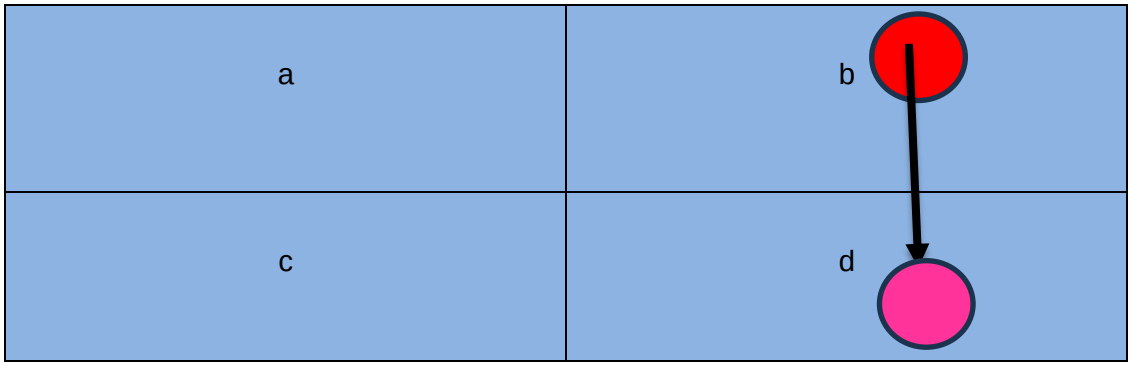
Ficha roja en su posición inicial



Ficha roja en la posición final después de los movimientos.



Es decir, si estamos ubicados en la casilla de la “b” y aplicamos primero un movimiento horizontal y luego uno diagonal, es equivalente a un solo movimiento vertical.



1. Usando la ficha roja realizar:

$$(V * D)(a) =$$

$$(H * H)(c) =$$

2. Completar la tabla con la operación *

$*$	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{D}$
$\boldsymbol{E}$				
$\boldsymbol{V}$				
$\boldsymbol{H}$				
$\boldsymbol{D}$				

Tabla 4-9.1: Tabla composición de movimientos

3. ¿Como se puede relacionar estos movimientos E, V, H y D con los movimientos rígidos en el plano rotación, reflexión y traslación?

4. La operación tiene un elemento neutro o modulo ¿Cuál es? ¿Cada elemento tiene un elemento inverso?

5. ¿Se cumple la propiedad asociativa?

6. ¿ $(A,*)$ tiene estructura de grupo?, ¿es un grupo abeliano?

5. Análisis de los resultados

5.1 Prueba diagnóstica

Inicialmente se tendrá en cuenta el análisis de los resultados de la aplicación de la prueba diagnóstica y evaluar la propuesta didáctica con su prueba o test final. Para ello se usarán las propuestas planteadas por Dienes, Z (1986) y Bruner, J (1966), Mason (1999), (Socas M. 1996) y Radford, L. (1996) respectivamente. Pues son trabajos pertinentes para estudiar los procesos de abstracción y generalización.

Figura 5.1: Evidencias aplicación

Además, debido a que las diferentes situación, actividades o ejercicios están enmarcadas en contextos geométricos y algebraicos se estudiarán los niveles de razonamiento en geometría propuestos por (Van Hiele, P. M. 1957) y los niveles de razonamiento en álgebra enmarcados en los procesos de algebrización en la educación escolar según Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014).

Convenciones:

Procesos de generalización

G1: Percibir patrones

G2: Expresar patrones.

G3: Registrar un patrón

G4: Prueba la validez de las formulas

Procesos de abstracción

A1: Nivel concreto

A2: Nivel icónico

A3: Nivel verbal

A4: Nivel simbólico

A5: Nivel de abstracción formal

Niveles de razonamiento en geometría

V1: *Nivel 1 (Reconocimiento)*

V2: Nivel 2 (Análisis)

V3: Nivel 3 (Clasificación)

V4: Nivel 4 (Deducción formal)

V5: Nivel 5 (Rigor)

Niveles de razonamiento en álgebra

E0: Nivel aritmético

E1: Nivel proto-algebraico incipiente

E2: Nivel proto-algebraico intermedio

E3: Nivel algebraico consolidado

E4: Nivel de uso de parámetros

E5: Nivel de manipulación de parámetros

E6: Nivel de tareas estructurales

	Razonamiento en geometría					Generalización				Abstracción				
PREGUNTAS	**V1**	**V2**	**V3**	**V4**	**V5**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
1	X	X				X				X	X			
2	X	X	X			X	X			X	X	X		
3	X	X	X			X	X			X	X			
4	X	X				X				X	X			
5	X	X	X			X	X			X	X			
6	X	X	X			X	X			X	X	X		
7	X	X	X			X	X	X		X	X	X		
8	X	X	X			X	X	X		X	X			
9	X	X	X			X	X	X		X	X	X		
10	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabla 5-1.1: Clasificación de las preguntas según el tipo de razonamiento geométrico y según los procesos de generalización y abstracción.

	Razonamiento de álgebra							Generalización				Abstracción				
PREGUNTAS	**E0**	**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
1	X	X	X	X				X	X	X	X	X		X	X	
2	X	X	X	X				X	X	X	X	X	X	X	X	X
3	X	X	X	X				X	X	X				X	X	X
4	X	X					X	X	X	X		X		X	X	
5	X	X					X	X	X	X		X		X	X	
6	X	X					X	X	X	X		X		X	X	
7	X	X	X	X		X		X	X	X	X			X	X	X
8	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X			X	X	X
9	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			X	X	X
10			X	X			X	X	X	X	X			X	X	X

Tabla 5-2.1: Clasificación de las preguntas según el tipo de razonamiento algebraico y según los procesos de generalización y abstracción

5.1.1 Análisis prueba diagnóstica

Inicialmente se presentan las respuestas a las preguntas de la prueba diagnóstica:

Razonamiento en geometría

1. Opción B debido al diseño de la figura, pues las demás opciones de respuesta cambian la longitud de las flechas en el diseño.

2. Opción D debido a que vuelve a comenzar la secuencia desde la primera figura presentada.

3.

Figura 5.2: Solución punto 3 prueba diagnóstica

En la señal de tránsito y el símbolo del Ying Yang no se puede trazar líneas que dividan en dos partes iguales a estas figuras, debido a sus diseños.

4. Opción D debido a que en esta opción la figura no cambia su ángulo de rotación y tampoco es reflejada, solamente fue desplazada aplicando una traslación a la figura original.

5. $A(-3,-4)\ B(3,-4)\ C(3,-2)\ y\ D(-3,-2)$

6. Opción A

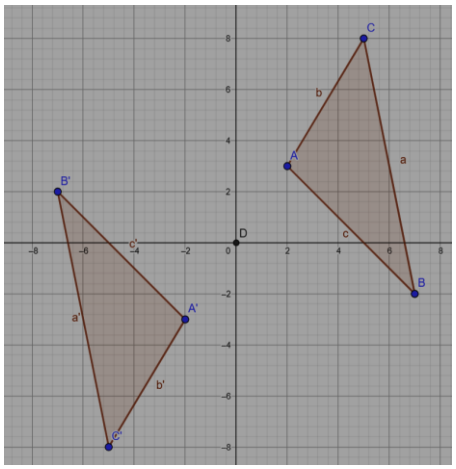


Figura 5.3: Solución del punto 6 prueba diagnóstica

7.

- $\overrightarrow{u} = (5,3)$
- $A(-7,-1),\ B(-5,-3),\ C(-2,-3), D(0,-1),\ E = (-4,-1),\ F(-4,3),$ $G(-2,0)\ y\ H(-4,0)$
- $A'(-2,2), B'(0,0),\ C'(3,0),\ D'(5,2),\ E'(1,2),\ F'(1,6),\ G'(3,3)\ y\ H' = (1,3)$

8. Opción A y Opción C respectivamente debido a que con la baldosa se pueden hacer los diseños de las opciones de respuesta B, C y D. Cuando se hacen se usa las respectivas rotaciones de 90° la baldosa el diseño quedaría así:

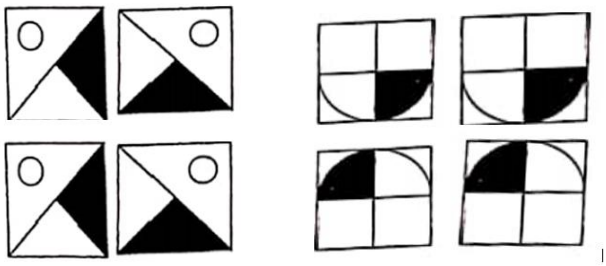


Figura 5.4: Solución punto 8 prueba diagnóstica

9.

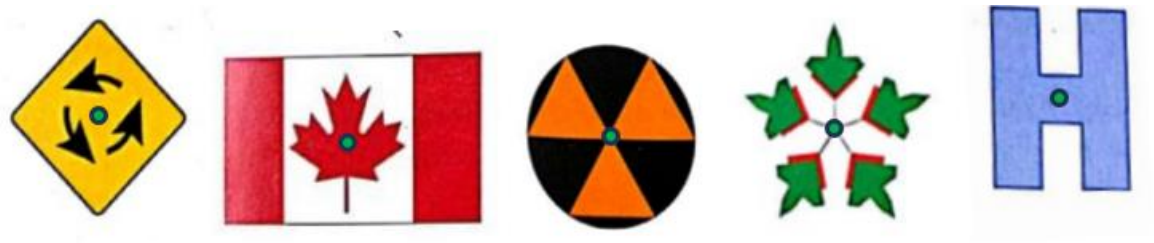


Figura 5.5: Solución punto 9 prueba diagnóstica

- La señal de tránsito tiene una simetría de rotación respecto al centro de 0°, 90°, 180° y 270°
- La bandera de Canadá tiene una simetría de rotación con respecto al centro de 0°
- La figura circular tiene tres simetrías de rotación con respecto al centro de 0°, 120° y 240°.
- El copo de nieve pentagonal tiene cinco simetrías de rotación con respecto al centro de 0°, 72°, 144°, 216°y 288° debido a que el polígono tiene 5 lados y una rotación completa de la figura seria de 360°. Si dividimos 360 entre 5 podemos encontrar el ángulo de rotación para las simetrías de giro del copo de nieve pentagonal.
- La letra h tiene 2 simetrías de 0° y 180°

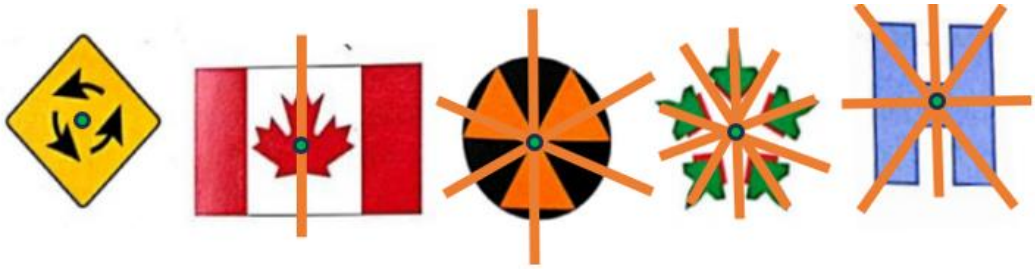


Figura 5.6:Solución punto 9 prueba diagnóstica

10.

A. Si se pueden identificar dos triángulos congruentes y sus coordenadas son:

Primer triángulo $(-4,5)(0,3)y\ (0,5)$ segundo triángulo $(4,5)(0,3)y\ (0,5)$

Para el ítem B y C de la pregunta 10. Una opción de solución es:

:

Deducir que los puntos A y C son simétricos con respecto al punto D es decir $AD = DC$. Posteriormente deducir que los triángulos ΔABD y ΔCBD son congruentes. Como $AD = DC$. Además, los dos triángulos comparten un mismo lado BD es decir $BD = BD$ y como los ángulos $\measuredangle ADB\ y \measuredangle CDB$ que son rectos. Por el criterio de congruencia LAL (Lado, ángulo y lado) se demuestra que $\Delta ABD \cong \Delta CBD$. Seguidamente por definición de triángulos congruentes, sus respectivos lados son congruentes es decir $AB = BC$ con lo que se demuestra que el ΔABC es isósceles.

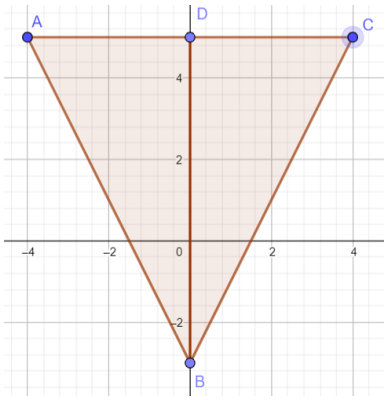


Figura 5.7: Triángulo isósceles

Razonamiento Algebraico

11. 53 estudiantes utilizarían bicicleta y 159 estudiantes usarían carro. Debido a que si dividimos 212 entre 4 (pues por cada 3 estudiantes que usan bicicleta y 1 usa carro) obtenemos 53 y a 212 se le resta 53 para obtener un resultado de 159, que son los estudiantes que usan carro.

12. Para el sexto cuadro son necesarios 21 círculos, para el cuadro número veinte son necesarios 210 círculos y para el cuadro 100 son necesarios 5050 círculos.

13. $1, 3, 6, 10, 15, 21$ ... un patrón posible es decir que se puede construir la sucesión usando la suma de los números naturales $0 + 1 = 1,\ 0 + 1 + 2 = 3,\ 0 + 1 + 2 + 3 = 6,\ 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ...

14. A. Falsa: Porque la operación división en el conjunto de los números naturales No es cerrada o no se cumple la propiedad clausurativa, ya que, por ejemplo:

$$1 \in \mathbb{N}\ \boldsymbol{y}\ \mathbf{2} \in \mathbb{N}$$

$$\mathbf{1 \div 2 = 0.5}$$

$$\mathbf{0.5} \notin \mathbb{N}$$

B. **Falsa:** Porque $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \neq \mathbf{0}$

C. **Falsa:** Porque por ejemplo $(12-2)-1 \neq 12-(2-1)$

$$(10)-1 \neq 12-(1)$$

$$2 \neq 11$$

15. El inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$ porque $\frac{3}{4} * \frac{4}{3} = 1$

16. El elemento neutro en el conjunto de los números racionales con la operación multiplicación es 1 porque por ejemplo $\frac{6}{11} * 1 = \frac{6}{11}$

17. $\boldsymbol{A} = \{9,10\}$

$\boldsymbol{B} = \sqrt[2]{3}\ y - \sqrt[2]{3}$

18.

A. El conjunto es vacío debido a que no existe un número entero que al cuadrado sea menor que cero. Algunos ejemplos: $(-5)^2 = 25, (4)^2 = 16$ o $(0)^2 = 0$

B. El conjunto es vacío debido a que no hay elementos en los números enteros que cumplan esta desigualdad. Por ejemplo, si tomamos a 3 y a 4 como números enteros si los elevamos al cubo se pasan, el primer número es menor que 57 pero no es mayor que 39 y el segundo si lo elevamos al cubo es mayor que 39 pero no es menor que 57.

C. Si, existen infinitos elementos en este conjunto serian todos los numero de la forma $\frac{a}{b}$ tal que $b > 100$. Por ejemplo $\frac{10}{110}$ o $\frac{25}{215}$

19.

A. $2 * 3 = 8, 4 * 6 = 26\ y\ 3 * 20 = 62$

B. $*$ si es clausurativa ya que los resultados que se obtienen pertenecen al conjunto de $\mathbb{Z}^+$

* no es asociativa ya que:

$$(4 * 6) * 5 \neq 4 * (6 * 5)$$

$$(26) * 5 \neq 4 * (32)$$

$$132 \neq 130$$

* si es conmutativa ya que:

$$10 * 8 = 8 * 10$$
$$82 = 82$$

C. No existe modulo, pues no estaría definido para el conjunto de $\mathbb{Z}^+$

20.

A. $b * d = e$

B. $c * c = b$

C. $[(a * b) * e] = [(b) * e] = c$

D. La operación $*$ no es conmutativa ya que $e * b \neq b * e$

E. No existe un módulo para la operación $*$

A continuación, se presentan los porcentajes del desempeño de los estudiantes en la prueba diagnóstica discriminado por preguntas en los razonamientos geométrico y algebraico.

P1: Desarrolla de manera óptima la pregunta y alcanza los niveles de razonamiento geométrico u algebraico descritos para esa pregunta.

P2: Desarrolla de manera parcial la pregunta y alcanza algunos niveles de razonamiento geométrico y algebraico descritos para esa pregunta.

P3: Desarrolla la pregunta, pero tiene dificultades para alcanzar los niveles de razonamiento geométrico u algebraico descritos para esa pregunta.

P4: No desarrolla la pregunta o tiene dificultades para alcanzar los niveles de razonamiento geométrico u algebraico descritos para esa pregunta.

En las preguntas 4, 15 y 16 se tomó en cuenta solo las categorías P1 y P4 al no evidenciar procesos intermedios en la resolución de las preguntas.

En las preguntas 1, 2, 3, 6 y 17 se tomó en cuenta como categorías P1 y P4 y una categoría intermedia ya que, si bien realizaba un procedimiento aprobado para resolver la pregunta, presentaba algunas dificultades para alcanzar en su totalidad los niveles de abstracción y generalización.

Preguntas	P1	P2	P3	P4
1	7,14	64,3		28,6
2	7,3	71,4		21,3
3	64,3	33,7		0,0
4	64,3			35,7
5	92,9	0,0	0,0	7,1
6	28,6	57,1		14,3
7	0,0	42,9	50,0	7,1
8	78,6	14,3		7,1
9	0,0	14,3	50,0	35,7
10	14,3	57,1	28,6	0,0
11	85,7	0,0	0,0	14,3
12	57,1	21,4	21,4	0,0
13	50,0	14,3	14,3	21,4
14	21,4	57,1	14,3	7,1
15	85,7			14,3
16	85,7			14,3
17	7,1	92,9		0,0
18	7,1	21,4	50,0	21,4
19	14,3	35,7	28,6	21,4
20	7,1	28,6	57,1	7,1

Tabla 5-3.1: Porcentajes desempeño en la solución de las preguntas y situaciones por parte de los estudiantes.

Componente geométrico

Pregunta #1

Según los resultados obtenidos al aplicar la prueba se deduce que el 28.6% de los estudiantes no identifican el patrón establecido en esta pregunta, el 64.3% si identifican el patrón, mientras que el 7.14% identifican y justifican el patrón de la pregunta.

Este resultado nos indica que solo el 7,14% de los estudiantes alcanzan los niveles G1y G2 del proceso de generalización y los niveles A1, A2 y A3 del proceso de abstracción.

Pregunta #2

Según los resultados obtenidos al aplicar la prueba se deduce que el 21.3% de los estudiantes no identifican el patrón establecido en esta pregunta, el 71.4% si identifican el patrón, mientras que el 7.3% identifica y justifica el patrón de la pregunta.

Este resultado nos indica que solo el 7,3% de los estudiantes alcanzan el nivel G1 del proceso de generalización y los niveles A1 y A2 del proceso de abstracción.

Pregunta #3

El 33.7% de estudiantes Identifican la reflexión solo de los polígonos. Mientras que el 64.3% identifica las reflexiones de algunos polígonos. Esto conlleva a pensar que el 100 % de los estudiantes no reconocen la reflexión en figuras no convencionales o polígonos que cuentan con alguna imagen o diseño en su interior.

Este resultado nos indica que el 64.3% de los estudiantes alcanzan el nivel G1 y G2 del proceso de generalización y los niveles A1 y A2 del proceso de abstracción

Pregunta #4

El 64.3% de los estudiantes identifican de manera correcta el concepto de translación mientras que el 35.7% confunden el concepto de traslación, conceptos de rotación y reflexión.

Este resultado nos indica que el 64.3% de los estudiantes presentan el nivel G1 y G2 del proceso de generalización y los niveles A1 y A2 del proceso de abstracción

Pregunta #5

El 92.9% de los estudiantes identifican de manera correcta el concepto de reflexión mientras que el 7.1% tienen dificultades en identificar el concepto de reflexión.

Este resultado nos indica que solo el 7.1% de los estudiantes alcanzan el nivel G1 y G2 del proceso de generalización y los niveles A1 y A2 del proceso de abstracción.

Pregunta #6

El 28.6% de los estudiantes siguen correctamente el proceso de rotación, el 57.1% de los estudiantes si bien realizan el movimiento de rotación tiene dificultad con la ubicación de algunas coordenadas, mientras que el 14.3% de los estudiantes no siguen correctamente el proceso para realizar una rotación.

Este resultado nos indica que solo 28.6% de los estudiantes alcanzan el nivel G1 y G2 del proceso de generalización y los niveles A1, A2 y A3 del proceso de abstracción.

Pregunta #7

El 42.9% de los estudiantes justifican de manera correcta el proceso de traslación, sin embargo, presenta dificultad en describir el vector de traslación, el 50% de los estudiantes si bien identifica las coordenadas de la figura inicial y la figura final trasladada no lograron establecer una relación entre el vector y las dos figuras y el 7.1% no identifican el proceso de traslación.

Este resultado nos indica que 42.9% de los estudiantes alcanzan el nivel G1, G2 y G3 del proceso de generalización y los niveles A1, A2 y A3 del proceso de abstracción.

Pregunta #8

El 78.6% de los estudiantes identifican las dos secuencias en el proceso de rotación, mientras que el 14.3% logran identificar la rotación de una figura cuando esta contiene un diseño con líneas rectas y el 7.1% no identifican el proceso de rotación en la formación de una nueva figura.

Este resultado nos indica que 78.6% de los estudiantes alcanzan el nivel G1, G2 y G3 del proceso de generalización y los niveles A1 y A2 del proceso de abstracción.

Pregunta #9

El 14.3% de los estudiantes logran en mayor parte identificar las rotaciones y las reflexiones de las figuras expuestas para encontrar simetrías, mientras que el 50% de los estudiantes si bien describen simetrías de giro de algunas figuras, no identifican de manera

correcta las simetrías de reflexión y el 35.7% de los estudiantes tienen dificultad en identificar los dos tipos de simetría en las figuras.

Este resultado nos indica que solo el 14.3% de los estudiantes presentan los niveles G1, G2 y G3 del proceso de generalización y los niveles A1, A2 y A3 del proceso de abstracción.

Pregunta #10

El 14.3% de los estudiantes identifican plenamente el concepto de reflexión y justifica con argumentos matemáticos las preguntas realizadas en términos de demostración en geometría, el 57.1% de los estudiantes identifican el concepto de reflexión sin embargo algunas de las justificaciones carecen de argumentos matemáticos, el 28,6% identifica el concepto de reflexión, pero carecen de argumentos matemáticos para realizar las demostraciones.

Este resultado nos indica que solo el 14.3% de los estudiantes alcanzan el nivel G1, G2, G3, G4 del proceso de generalización y los niveles A1, A2, A3, A4 y A5 del proceso de abstracción.

Componente Algebraico

Pregunta #1

El 85.7% de los estudiantes identifican de manera correcta el concepto de proporción y el uso adecuado de las operaciones aritméticas básicas, mientras que el 14.3% presentan dificultad en el manejo de estas operaciones y no realiza correctamente la proporción.

Este resultado nos indica que el 85.7% de los estudiantes alcanzan el nivel G1, G2, G3 y G4 del proceso de generalización y los niveles A1, A3 y A4 del proceso de abstracción.

Pregunta #2

El 57,1% de los estudiantes identifican de manera plena la secuencia de figuras geométricas y logra hacer una transposición a un lenguaje algebraico, el 21.4% de los estudiantes identifican algunos elementos de la secuencia, pero comenten algunos errores

al identificar la posición de los números, cuando esta es muy lejana, el 21.4% logran identificar la secuencia y logran encontrar números cercanos de la misma.

Este resultado nos indica que el 57.1% de los estudiantes alcanzan los niveles G1, G2, G3 y G4 del proceso de generalización y los niveles A1, A2, A3, A4 y A5 del proceso de abstracción.

Pregunta #3

El 50% de los estudiantes logran hacer una transposición desde el lenguaje algebraico a un lenguaje aritmético y justifica de manera correcta la regla que rige dicho lenguaje, el 14.3% de los estudiantes logran realizar la transposición desde el lenguaje algebraico a un lenguaje aritmético pero la justificación de la regla carece de algunos argumentos matemáticos, el 14.3 % de los estudiantes solo logran hacer la transposición desde el lenguaje algebraico a un lenguaje aritmético, mientras, el 21.4% de los estudiantes no identifican dicha transposición y esto implica no poder justificar de manera correcta la regla que rige a la secuencia.

Este resultado nos indica que el 50% de los estudiantes alcanzan el nivel G1, G2 y G3 del proceso de generalización y los niveles A3, A4 y A5 del proceso de abstracción.

Pregunta #4

El 21,4% de los estudiantes identifican de manera correcta las propiedades clausurativa, asociativa e inverso aditivo, el 57.1% de los estudiantes identifican solo la propiedad asociativa y el inverso aditivo, el 14.3% de los estudiantes solo identifican la propiedad asociativa, mientras que el 7.1% no identifican dichas propiedades de los conjuntos numéricos.

Este resultado nos indica que solo el 21.4% de los estudiantes alcanzan el nivel G1, G2 y G3 del proceso de generalización y los niveles A1, A3 y A4 del proceso de abstracción.

Pregunta #5

El 85,7% de los estudiantes identifican de manera correcta el inverso multiplicativo de un numero en el conjunto de los números reales, mientras que el 14,3% no lo identifican.

Este resultado nos indica que el 85.7% de los estudiantes alcanzan los niveles G1, G2 y G3 del proceso de generalización y los niveles A1, A3 y A4 del proceso de abstracción.

Pregunta #6

El 85,7% de los estudiantes identifican de manera correcta el elemento neutro en la multiplicación del conjunto de los números racionales, mientras que el 14,3% no lo identifican.

Este resultado nos indica que el 85.7% de los estudiantes alcanzan el nivel G1, G2 y G3 del proceso de generalización y los niveles A1, A3 y A4 del proceso de abstracción.

Pregunta #7

El 7.1% de los estudiantes identifican de manera correcta los elementos de un conjunto y no tienen dificultades con la relación de orden y el concepto de raíz cuadrada, mientras que el 92.9% de los estudiantes identifican algunos elementos del conjunto y esto se debe a que tienen dificultad con las relaciones de orden o con el concepto de raíz cuadrada esto lleva a pensar que la mayor parte de los estudiantes poseen dificultades al describir conjuntos por extensión dados por comprensión.

Este resultado nos indica que solo el 7.1% de los estudiantes alcanzan el nivel G1, G2, G3 y G4 del proceso de generalización y los niveles A3, A4 y A5 del proceso de abstracción.

Pregunta #8

El 7.1% de los estudiantes identifican plenamente los elementos de un conjunto dado por comprensión, el 21.4% de los estudiantes poseen dificultades al identificar cuando un conjunto es vacío, el 50% de los estudiantes presentan dificultades en describir algunos elementos de los conjuntos dados por comprensión e identificar cuando un conjunto es vacío, mientras que el 21.4% de los estudiantes no identifican plenamente los elementos de un conjunto por comprensión.

Este resultado nos indica que solo el 7.1% de los estudiantes alcanzan los nivelesG1, G2, G3 y G4 del proceso de generalización y los niveles A3, A4 y A5 del proceso de abstracción.

Pregunta #9

El 14,3 % de los estudiantes identifican las propiedades de nuevas operaciones binaria definidas en los conjuntos numéricos conocidos, el 35% de los estudiantes identifican la operación binaria pero presentan dificultad en establecer si esta cuenta con elemento neutro, el 28.6% de los estudiantes identifican solo la operación binaria pero presentan dificultades para establecer propiedades en esa operación binaria, mientras que el 21.4% de los estudiantes no identifican la operación binaria y las propiedades que ella tiene.

Este resultado nos indica que solo el 14.3% de los estudiantes alcanzan los niveles G1, G2, G3 y G4 del proceso de generalización y los niveles A3, A4 y A5 del proceso de abstracción.

Pregunta # 10

El 7.1% de los estudiantes identifican operaciones binarias dadas en tablas de doble entrada y justifican de manera correcta si estas cuentan con propiedades., el 28.6% de los estudiantes identifican la operación binaria y justifican de manera correcta la carencia de la propiedad conmutativa, el 57.1% de los estudiantes identifican la operación binaria en la tabla pero no justifican si esta tiene o carece de algunas propiedades, mientras que el 7.1% de los estudiantes tienen dificultades en identificar las operaciones binarias dadas en tablas de doble entrada y en la búsqueda de propiedades que se presentan o no en ellas.

Este resultado nos indica que solo el 7.1% de los estudiantes alcanzan los niveles G1, G2, G3 y G4 del proceso de generalización y los niveles A3, A4 y A5 del proceso de abstracción.

Se mostrarán los resultados más destacados que se evidenciaron en la implementación de la prueba diagnóstica teniendo cuenta el anterior análisis de los diferentes niveles en los procesos de abstracción y generalización:

Preguntas 1, 2 y 8

Se observa en la siguiente pregunta que la asociación que hacen con la figura, su giro respectivo no coincide con la ubicación en la que debería quedar la figura, muestra dificultades en la ubicación espacial. Además, en las secuencias se observa una asociación de la parte sombreada sin tener en cuenta el patrón, es decir simplemente el área.

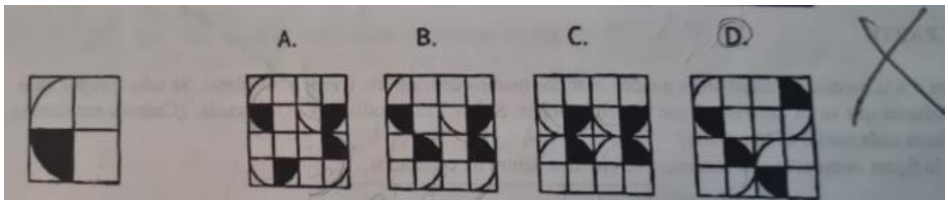


Figura 5.2: Procedimientos estudiantes

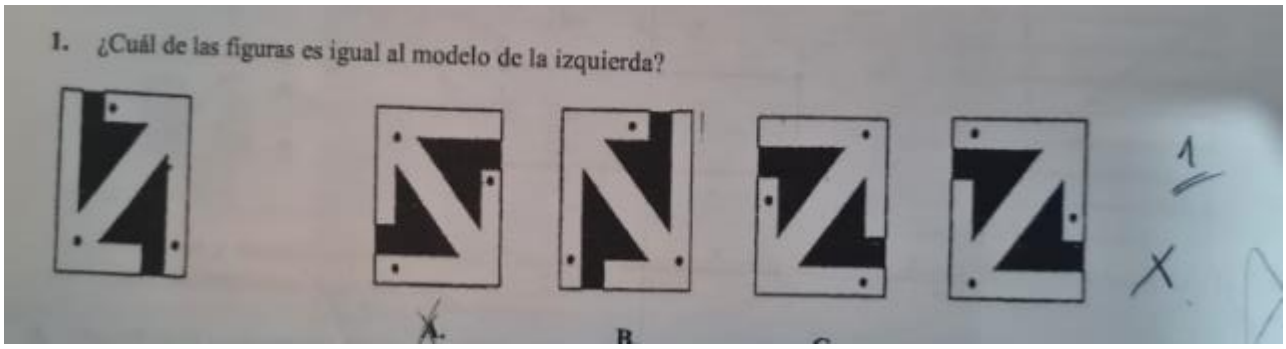


Figura 5.3: Procedimientos estudiantes

Preguntas 3 y 9

Su atención estaba puesta sobre el polígono y no en el diseño que tenía el polígono y las ignoraban las simetrías de giro o de reflexión axial que podrían tener o simplemente no tenían las figuras.

Se observa algunas figuras como el símbolo de Yin Yang que se suponía por parte de ellos era simétrica, pero pudieron algunos darse cuenta de que no tenía simetrías de giro o de reflexión axial.

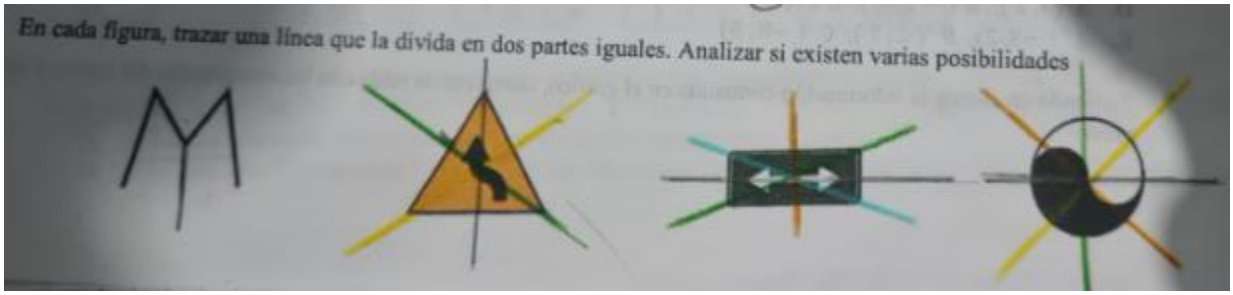


Figura 5.4: Procedimientos estudiantes

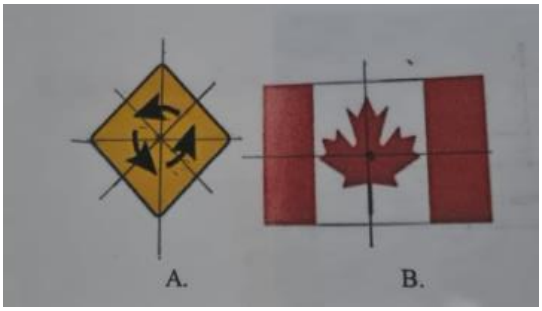


Figura 5.5: Procedimientos estudiantes

Preguntas 5,6 y 7

Se presentan errores en la ubicación de las coordenadas y específicamente en la asociación del vector que se usa para la figura a trasladar con la figura final. Además, que en las reflexiones se presentan obstáculos referidos a la distancia que tiene la figura con respecto a la recta que es el eje de simetría se conserva la figura, pero no la distancia que esta ella de su eje de simetría.

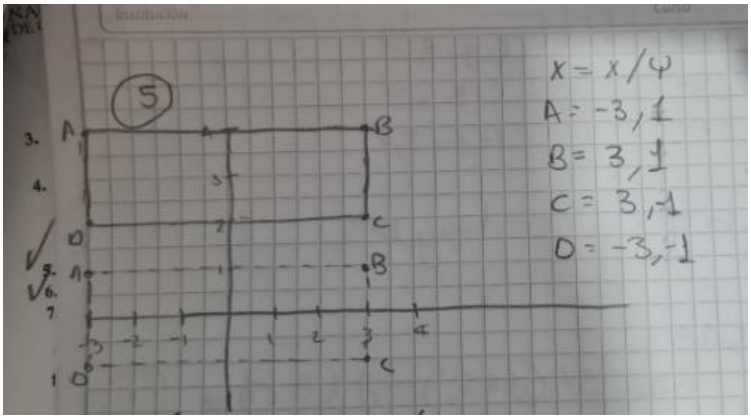


Figura 5.6: Procedimientos estudiantes

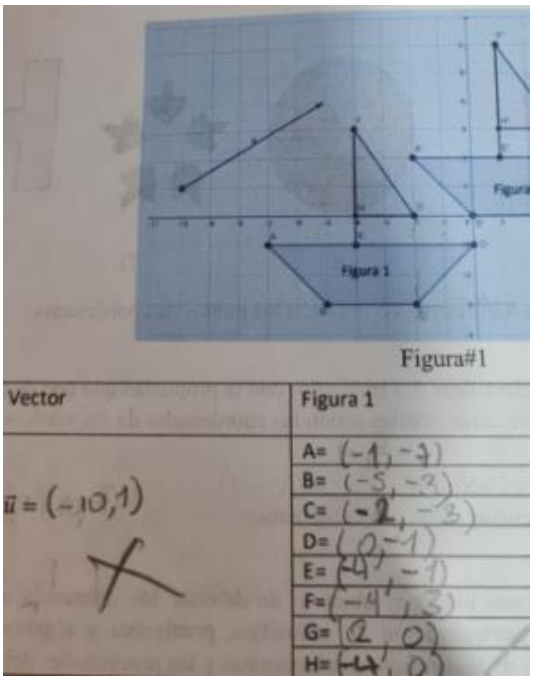


Figura 5.7: Procedimientos estudiantes

5.2 Secuencia didáctica (Talleres)

Se mostrarán los resultados más destacados que se evidenciaron en la implementación de los talleres teniendo cuenta el análisis de los diferentes niveles en los procesos de abstracción y generalización:

En los diferentes talleres se usaron materiales manipulativos didácticos para evidenciar aprendizajes de los estudiantes y desarrollar pensamiento matemático.

Recordemos la clasificación de procesos de abstracción y generalización que se realizó por razonamiento geométrico y algebraico en la prueba diagnóstica con el objetivo de estudiar los talleres de la misma manera en este caso por actividades.

Taller 1

	Generalización				Abstracción				
Actividades	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
1	X	x	x		X	X	X	X	
2	X	X	x		X	X	X		
3	X	X	x	x	X	X	X	X	X
4	X	x	x		X	X	X	X	
5	X	X	x		X	X	X		
6	X	X	x		X	X	X		

Tabla 5-4.1: Clasificación de las actividades taller 1 según los procesos de generalización y abstracción

Taller 2

	Generalización				Abstracción				
Actividades	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
1	X	X	X	X	X	X	X	X	
2	X	X	X		X	X	X		

Tabla 5-5.1: Clasificación de las actividades taller 2 según los procesos de generalización y abstracción

Taller 3

	Generalización				Abstracción				
Actividades	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
1	X	X	X		X	X	X		
2	X	X	X	X			X	X	X
3	X	X	X	X			X	X	X

Tabla 5-6.1: Clasificación de las actividades taller 3 según los procesos de generalización y abstracción

Taller 4

	Generalización				Abstracción				
Actividades	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
1	X	X	X	X		X	X	X	X
2	X	X	X	X	X	X	X	X	X
3	X	X	X	X			X	X	X

Tabla 5-7.1: Clasificación de las actividades taller 4 según los procesos de generalización y abstracción

5.2.1 Análisis de la aplicación de la secuencia didáctica (Talleres)

Taller 1

Los materiales usados en este taller fueron regla, compás, transportador y hojas milimetradas. Además, se usó el software de geometría GeoGebra en los celulares de los estudiantes con el objetivo de recordar y reforzar los conceptos referidos a los movimientos rígidos en el plano.

Figura 5.8: Evidencia aplicación Talleres

Actividad 2 ítem 2:

En la siguiente imagen se puede evidenciar una dificultad con encontrar el centro de rotación de la figura. Cuando se comenzó con los talleres, algunos estudiantes normalmente hacían los giros de las figuras sin tener en cuenta muy bien el sentido el ángulo y el punto de giro.

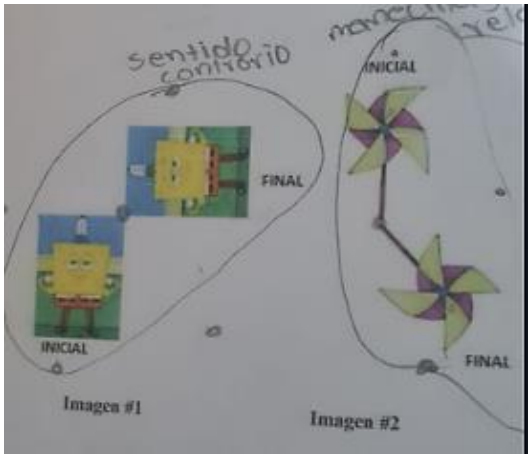


Figura 5.9: Procedimientos estudiantes

Actividad 3 ítem 6:

Podemos observar cómo los estudiantes están familiarizados con la reflexión axial necesitando un eje de simetría, pero están ignorando que la reflexión que se pide de las figuras mostradas es una reflexión central con respecto un punto. Esto se discutió con los demás estudiantes para poder identificar características específicas de cada reflexión

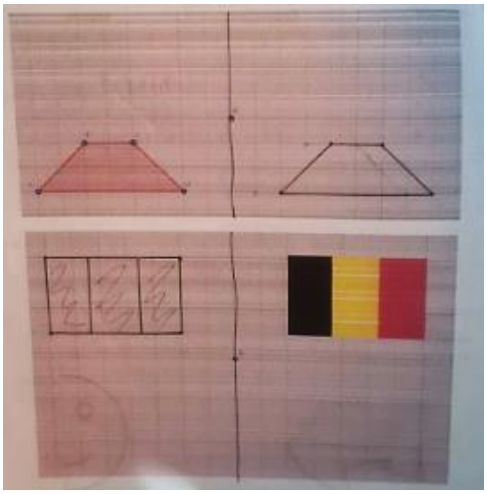


Figura 5.10: Procedimientos estudiantes

Actividad 4: Inicialmente a algunos estudiantes se les dificultó realizar composiciones de los movimientos en el plano, además de no saberse ubicar bien el plano cartesiano.

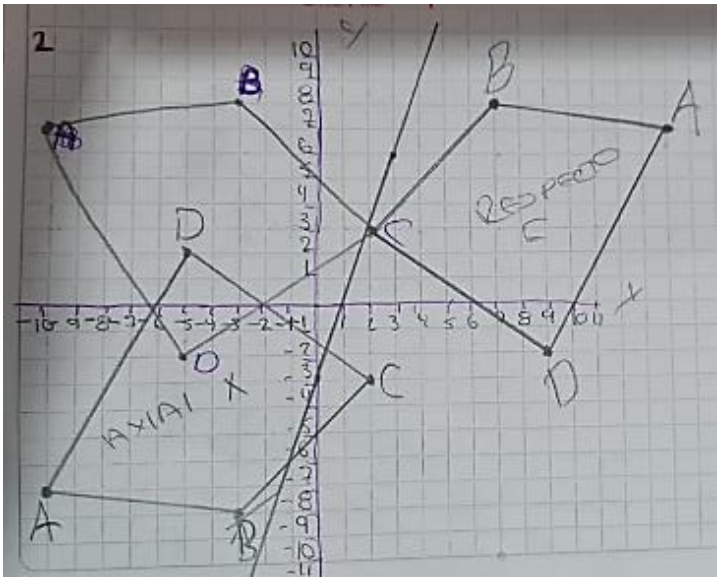


Figura 5.11: Procedimientos estudiantes

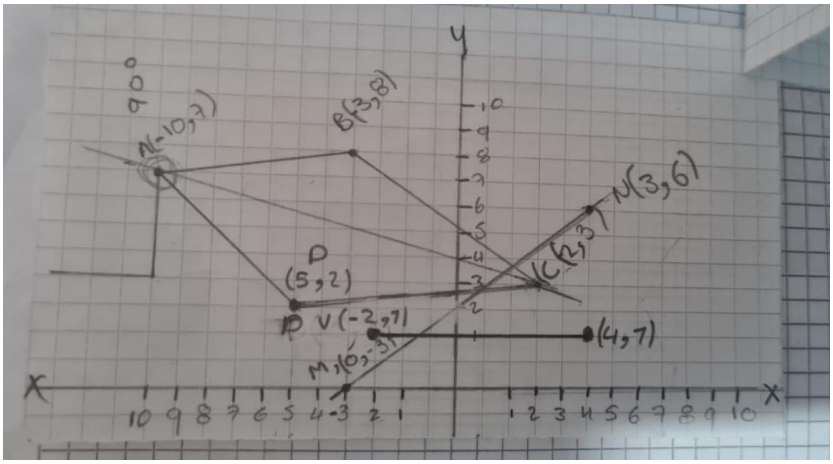


Figura 5.12: Procedimientos estudiantes

Actividad 3 ítems 3 y 4: Se evidencia que a través de ejemplos particulares los estudiantes pudieron empezar a construir proceso de abstracción y generalización.

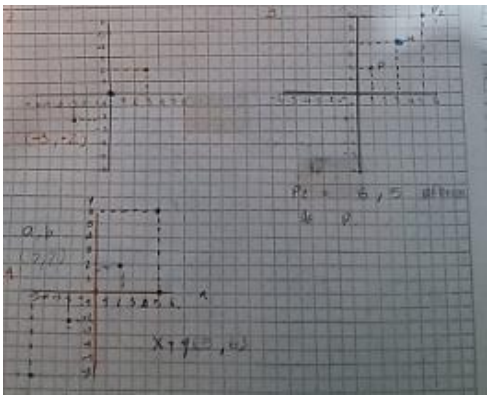


Figura 5.13: Procedimientos estudiantes

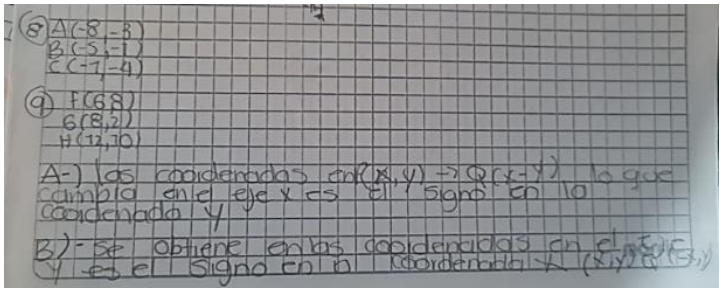


Figura 5.14: Procedimientos estudiantes

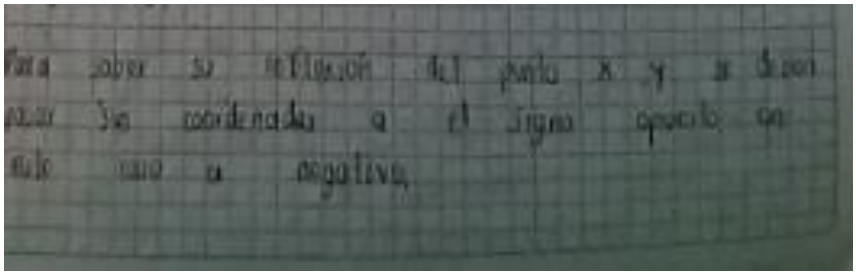


Figura 5.15: Procedimientos estudiantes

Actividad 2 ítem 3: Como se puede evidenciar acá los procesos de abstracción A1, A2, A3 y A4 y generalización G1, G2, G3 empiezan a estar presente y es algo que se construye a través de las situaciones o ejercicios de las actividades planteadas.

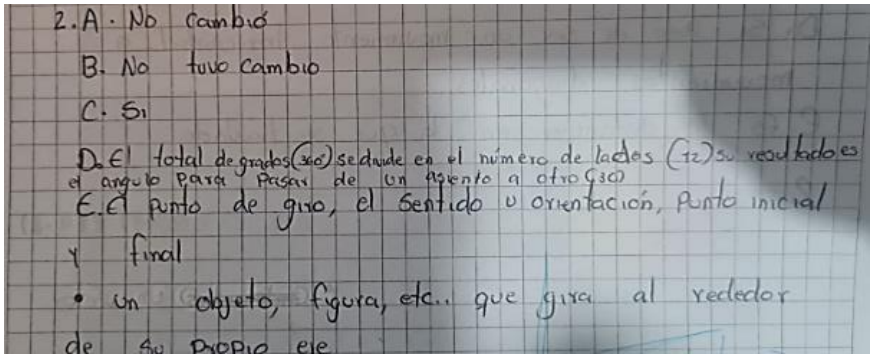

2. A. No cambió
B. No tuvo cambio
C. Si
D. El total de grados (360) se divide en el número de lados (12) su resultado es el angulo para pasar de un asiento a otro (30)
E. El punto de giro, el sentido u orientación, punto inicial y final
• un objeto, figura, etc.. que gira al rededor de su propio eje

Figura 5.16: Procedimientos estudiantes

Taller 2

En este taller se usó diseños de mosaicos impresos en papel y en hoja de acetato y se utilizó el compás, transportador regla y lápiz como materiales para realizar algunas actividades propuestas sobre la noción de simetría.

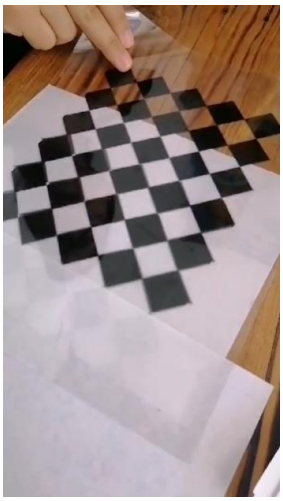


Figura 5.17: Materiales **Figura 5.18: Materiales**

Figura 5.19: Evidencias aplicación

Actividad 1 ítems 2 y 5: Se logra que los estudiantes se motiven al construir conceptos más abstractos que inicialmente se podían visualizar de la geometría por ejemplo encontrando las simetrías de reflexión y de rotación que tenían el triángulo equilátero. Además de la relación de las permutaciones con la figura de un rectángulo con el objetivo de empezar a pasar por los procesos de abstracción A3 Y4 y de generalización G3 Y G4 y así poder realizar las actividades del taller 4.

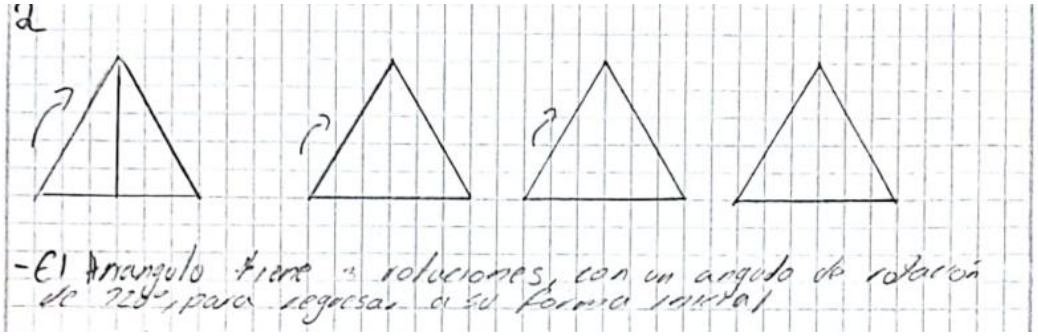


Figura 5.20: Procedimientos estudiantes

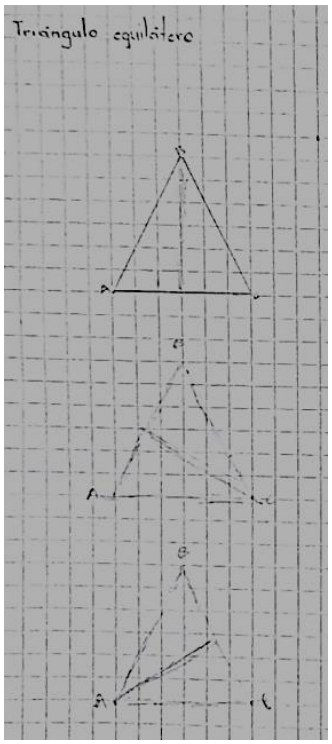


Figura 5.21: Procedimientos estudiantes

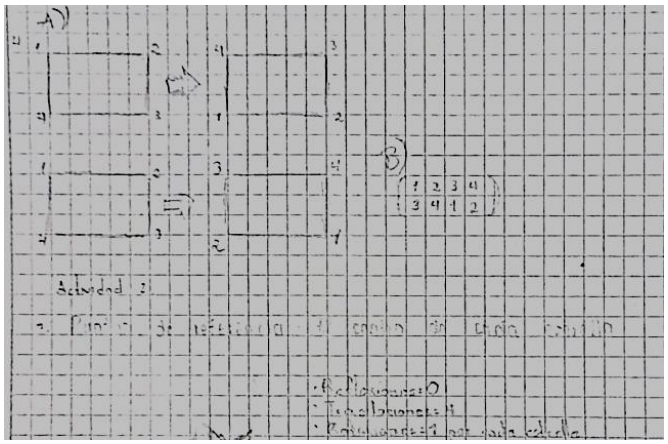


Figura 5.22: Procedimientos estudiantes

Actividad 2: Después de dar la indicación a los estudiantes: “en el siguiente mosaico marcar el centro C de la figura y luego trazar una recta horizontal que pase por C, posteriormente reflejar la parte superior respecto a la recta trazada y encontrar aciertos en el tipo de simetría que se busca ya sea usando reflexiones giros o traslaciones”. Se encontró que en se les dificultaba relacionar estos movimientos y las simetrías del mosaico.

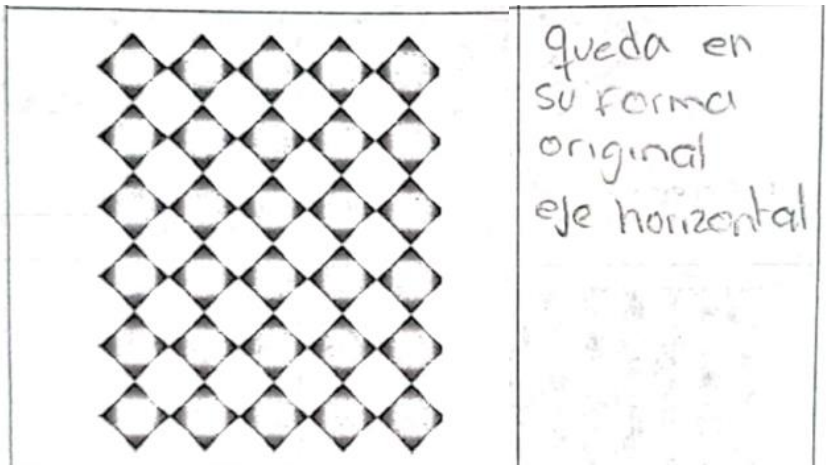


Figura 5.23: Procedimientos estudiantes

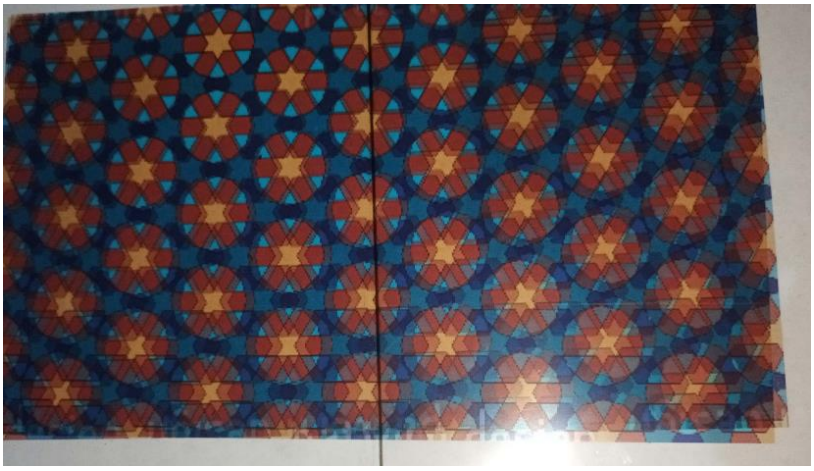


Figura 5.24: Procedimientos estudiantes

Taller 3

En este taller se comenzó usando unas fichas como material manipulativo para poder hablar de la noción de propiedad en un conjunto de elementos y así poder buscar propiedades en conjuntos numéricos conocidos.

Figura 5.25: Materiales

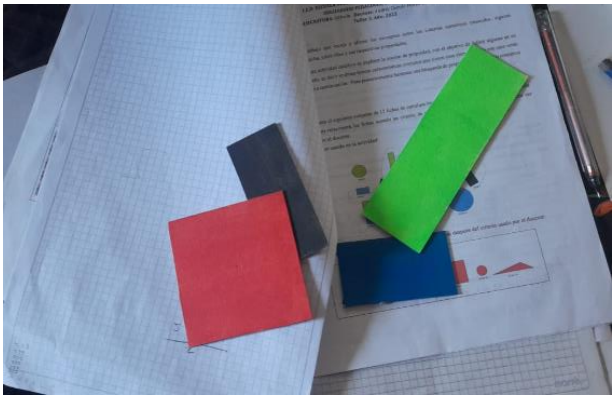
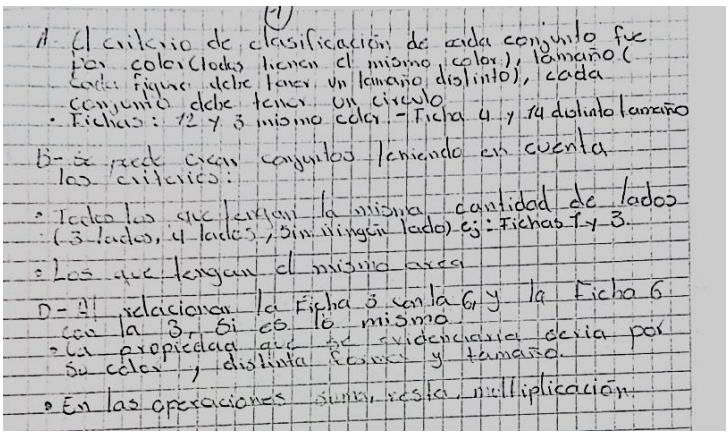


Figura 5.26: Evidencias aplicación

Actividad 1: Sirvió bastante la actividad sobre las 15 fichas para poder empezar la situación en torno al concepto de propiedad y así más adelante buscar propiedades en los sistemas numéricos que ellos relacionaban.



(1)

A- El criterio de clasificación de cada conjunto fue por color (todos tienen el mismo color), tamaño (cada figura debe tener un tamaño distinto), cada conjunto debe tener un círculo.

- Fichas: 12 y 3 mismo color - Ficha 4 y 14 distinto tamaño

B- Se pueden crear conjuntos teniendo en cuenta los criterios:

- Todos los que tengan la misma cantidad de lados (3 lados, 4 lados), sin ningún lado) ej: Fichas 1 y 3.
- Los que tengan el mismo area

D- Al relacionar la Ficha 3 con la 6 y la Ficha 6 con la 3, si es lo mismo.

- La propiedad que se evidenciaría sería por su color y distinta forma y tamaño.

- En las operaciones suma, resta, multiplicación.

Figura 5.27: Procedimientos estudiantes

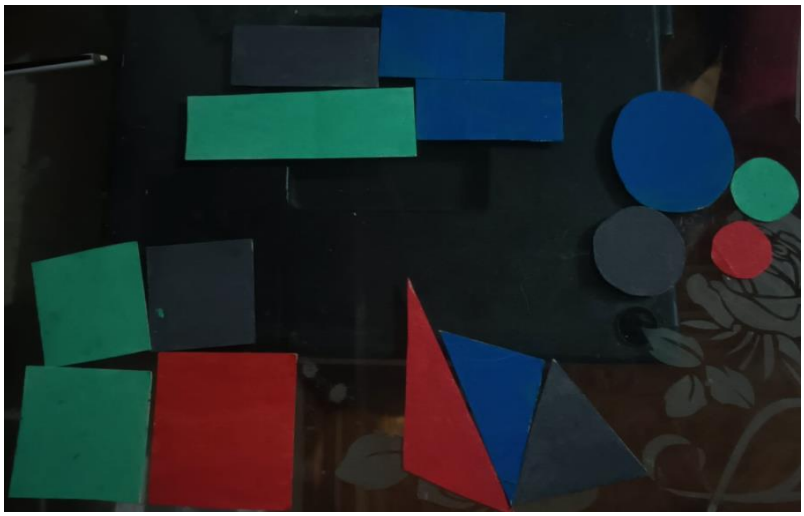


Figura 5.28: Procedimientos estudiantes

Actividad 2 ítem 2: Hubo algunos errores al comparar sistemas numéricos cuando se realizaban algunas operaciones. Se desea fortalecer los procesos de generalización G3 y G4.

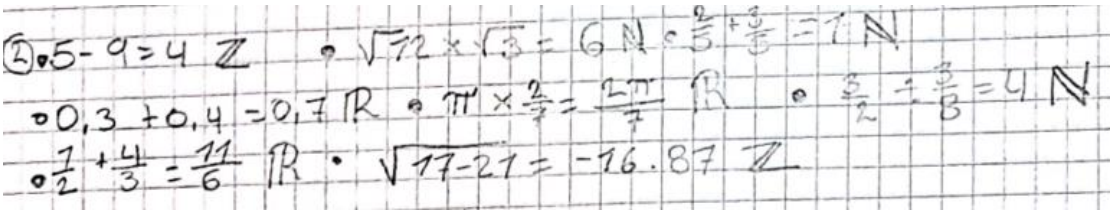


Figura 5.29: Procedimientos estudiantes

Actividad 2 ítem 10: Se pudo observar la construcción de la noción de operación binaria a través de ejercicios y temáticas que ellos ya manejaban.

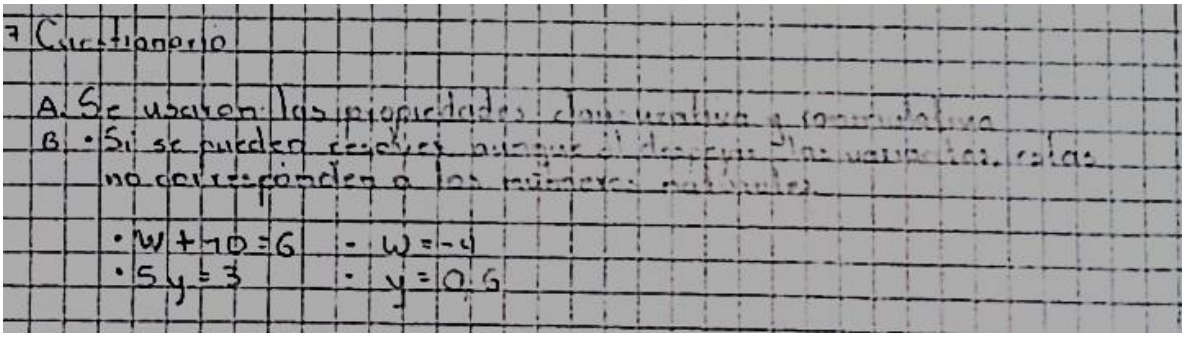


Figura 5.30: Procedimientos estudiantes

Taller 4

En el presente taller se usó como material un reloj hecho en cartón paja que marcaba solo 4 horas para poder realizar una actividad donde se podía evidenciar la estructura algebraica de grupo y así observar algunas de sus propiedades.

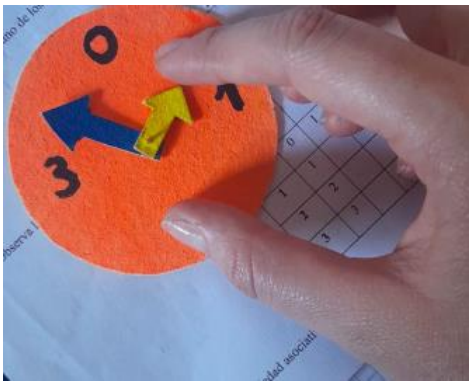


Figura 5.31: Evidencias aplicación

Figura 5.32: Materiales

Actividad 1: Con el propósito de relacionar el taller 2 con el taller 4 se evidencio el trabajo de permutaciones y la organización de ellas para la construcción de tablas de doble entrada y así relacionar la noción de simetría con operación binaria y estudiar la noción de estructura de grupo.

*	$\sigma_{0°}$	$\sigma_{120°}$	$\sigma_{240°}$	ρ_1	ρ_2	ρ_3
$\sigma_{0°}$	0°	120°	240°	0°	60°	60°
$\sigma_{120°}$	0°	60°	$\sigma_{0°}$	120°	60°	120°
$\sigma_{240°}$	60°	60°	60°	120°	120°	0°
ρ_1	P1	P2	ρ_3	0°	120°	240°
ρ_2	P2	P3	P1	120°	0°	120°
ρ_3	P3	P1	P2	120°	240°	0°

Figura 5.33: Procedimientos estudiantes

Actividad 2: La mayoría de los estudiantes tuvo un buen desempeño al manipular el reloj que tenía 4 horas y se pudo evidenciar de mejor manera por parte de ellos la búsqueda de propiedades de la operación binaria que se establecida en esa situación.

1. Observa la tabla y encuentra el patrón para poder completarla.

⊙	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Figura 5.34: Procedimientos estudiantes

Actividad 4: Algunos estudiantes pudieron relacionar lo visto en el área de cálculo con la composición como operación con las funciones allí descritas. Fue una actividad que les permitió tender puentes entre varios capos de las matemáticas.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

$$(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x}).$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x} + 8$$

1.Consideremos las siguientes funciones:

A B C D

$$l(x) = x \qquad m(x) = -x \qquad n(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = -\frac{1}{x}$$

Funciones con dominio y codominio en los números reales diferentes a cero. El conjunto $D = \{l, m, n, g\}$ completa la tabla realizando la composición de las anteriores funciones.

∘	l	m	n	g
l	l	l	l	l
m	l	m	g	n
n	l	g	n	m
g	l	n	m	g

Figura 5.35: Procedimientos estudiantes

5.3 Prueba o test final

En la prueba se utilizó un tablero con una ficha como material didáctico para poder jugar a con él y evaluar a los estudiantes con respecto a la aplicación de los 4 talleres y hacer una comparación con el desempeño en su prueba diagnóstica.

Figura 5.36: Evidencias aplicación

Figura 5.37: Evidencias aplicación

5.3.1 Análisis Prueba o test final

Inicialmente se presentan las respuestas a las preguntas de la prueba o test final:

1.

$$(V * D)(a) = H(a)$$

$$(H * H)(c) = E(c)$$

2. Completar la tabla con la operación *

$*$	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{D}$
$\boldsymbol{E}$	E	V	H	D
$\boldsymbol{V}$	V	E	D	H
$\boldsymbol{H}$	H	D	E	V
$\boldsymbol{D}$	D	H	V	E

Tabla 5-8.1: Composición de movimientos

3. El movimiento de traslación se puede relacionar cuando la ficha roja se desplaza o hace un movimiento $V, H\ o\ D$

Los movimientos de reflexión se pueden observar al hacer el movimiento D o una composición como esta $(V\ *\ H)(a) = D(a)$ para una reflexión central y para una reflexión axial podría ser con el movimiento H

El movimiento de rotación se podría comprar con las simetrías de un cuadrado y los movimientos de la ficha roja en el tablero. Por ejemplo, si pensamos en los vértices de un cuadrado como el punto de partida de la ficha es $a,$ podría rotar con respecto al centro a la posición b con un ángulo de $90°$, para rotar a la posición d con uno de $180°$, para rotar a la posición c con un ángulo de $270°$ y para volver a la posición a se debería rotar con un ángulo de $0°$ o $360°$

4. La operación $*$ si tiene un elemento neutro, es el movimiento E, ya que:

$$(E\ *\ E)(a) = E(a)$$
$$(E\ *\ H)(a) = H(a)$$
$$(E\ *\ V)(a) = V(a)$$
$$(E\ *\ D)(a) = D(a)$$

Cada elemento del conjunto si tiene un elemento inverso, es si mismo:

$$(E\ *\ E)(a) = E(a)$$
$$(H\ *\ H)(a) = E(a)$$
$$(V\ *\ V)(a) = E(a)$$
$$(D\ *\ D)(a) = E(a)$$

5. Si se cumple la propiedad asociativa, por ejemplo, si partimos de la posición a tenemos que:

$$(H * D) * V = H * (D * V)$$
$$(V) * V = H * (H)$$
$$E = E$$

6. $(A,*)$ SI tiene estructura de grupo ya que * es una operación binaria sobre el conjunto A como podemos ver en la tabla del punto 2. Se cumple que existe un módulo y cada elemento del conjunto tiene un inverso como se vio en el punto 4. Además, se cumple la propiedad asociativa como se pudo observar en el punto 5 Finalmente debido a que se cumple la propiedad conmutativa, por ejemplo:

$$(V * H)(a) = (H * V)(a) = D(a)$$

Entonces $(A,*)$ es un grupo abeliano.

A continuación, se presentan los porcentajes del desempeño de los estudiantes en la prueba o test final después de la implementación de la secuencia didáctica teniendo en cuenta:

P1: Desarrolla de manera óptima la pregunta y alcanza los niveles de razonamiento geométrico u algebraico descritos para esa pregunta.

P2: Desarrolla de manera parcial la pregunta y alcanza algunos niveles de razonamiento geométrico y algebraico descritos para esa pregunta.

P3: Desarrolla la pregunta, pero tiene dificultades para alcanzar los niveles de razonamiento geométrico u algebraico descritos para esa pregunta.

P4: No desarrolla la pregunta o tiene dificultades para alcanzar los niveles de razonamiento geométrico u algebraico descritos para esa pregunta.

En la pregunta 1 se tomó en cuenta como categoría P1 y P4 y una categoría intermedia ya que, si bien realizaba un procedimiento aprobado para resolver la pregunta, presentaba algunas dificultades para alcanzar en su totalidad los niveles de abstracción y generalización.

Preguntas	P1	P2	P3	P4
1	71,4	28,6		0,0
2	85,7	14,3	0,0	0,0
3	0,0	14,3	28,6	57,1
4	28,6	0,0	57,1	14,3
5	14,3	28,6	14,3	42,9
6	14,3	28,6	28,6	28,6

Tabla 5-9.1: Porcentajes desempeño en la solución de las preguntas y situaciones del juego o test final por parte de los estudiantes.

De acuerdo con las categorías y clasificación de los procesos de abstracción y generalización. La prueba o test final se tipifica de la siguiente manera:

	Generalización				Abstracción				
Actividades	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**
1	X				X	X		X	X
2	X		X		X	X		X	X
3	X	X	X		X	X	X	X	X
4	X	X	X	X	X	X	X	X	X
5	X	X	X	X	X	X	X	X	X
6	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Tabla 5-10.1: Clasificación de las preguntas y situaciones del juego o test final según los procesos de generalización y abstracción

Pregunta #1

El 71.4% de los estudiantes identifican de manera correcta cómo funciona el juego usando el tablero, la ficha roja, interpretando bien la operación * dada y los movimientos: No moverse $\boldsymbol{E}$, moverse verticalmente $\boldsymbol{V}$, moverse horizontalmente $\boldsymbol{H}$ y moverse diagonalmente $\boldsymbol{D}$**.** Mientras que el 28.6% tienen dificultades para entender cómo funciona la operación ***** dada y moverse adecuadamente en el tablero de juego.

Este resultado nos indica que solo el 71.4% de los estudiantes alcanzan el nivel G1 del proceso de generalización y los niveles A1, A2, A4 y A5 del proceso de abstracción.

Pregunta #2

El 85.7% de los estudiantes identificaron de manera correcta la operación * para poder completar la tabla de doble entrada y así encontrar propiedades que cumple esta operación. Además, el 14.3% de los estudiantes logran identificar los resultados al operar lo elementos con la operación *, sin embargo, tienen algunos errores al completar la misma.

Este resultado nos indica que solo el 85.4% de los estudiantes alcanzan los niveles G1 y G3 del proceso de generalización y los niveles A1, A2, A4 y A5 del proceso de abstracción.

Pregunta #3

Solo 14.3% de los estudiantes logran identificar los movimientos rígidos en el plano presentes en el juego a través de los movimientos No moverse E, moverse verticalmente V, moverse horizontalmente H y moverse diagonalmente D teniendo algunos errores de interpretación geométrica, el 28.6% logra identificar los movimientos del juego pero no los relaciona correctamente con los movimientos rígidos en el plano y el 57.1% de los estudiantes no logra relacionar los movimientos rígidos en el plano con los movimientos explicados en el juego.

Este resultado nos indica que solo el 14.3% de los estudiantes alcanzan medianamente los niveles G1, G2 y G3 del proceso de generalización y los niveles A1, A2, A3, A4 y A5 del proceso de abstracción.

Pregunta #4

El 28.6 % de los estudiantes logran identificar la existencia de elemento neutro e inversos en la operación * estudiada y observada en la tabla de doble entrada completada en la pregunta anterior, el 57.1% de los estudiantes logran identificar el elemento neutro o módulo pero no los inversos de cada elemento de la tabla de doble entrada y al 14.3% de los estudiantes se les dificulta encontrar estas propiedades en este conjunto y su respectiva operación a pesar de tener como ayuda los resultados en la tabla de doble entrada.

Este resultado nos indica que el 28.6% de los estudiantes alcanzan los niveles G1, G2, G3 y G4 del proceso de generalización y los niveles A1, A2, A3, A4 y A5 del proceso de abstracción.

Pregunta #5

El 14.3% de los estudiantes logran hacer algunos ejemplos para evidenciar la propiedad asociativa en la situación descrita en esta pregunta, el 28.6 % de los estudiantes logran identificar o validar medianamente la propiedad asociativa en este conjunto con su respectiva operación, el 14.3% Se le dificulta realizar la operación de manera correcta para poder evidenciar el cumplimiento de la propiedad asociativa en dicho conjunto con la operación respectiva y el 42.9% de los estudiantes no logro evidenciar la propiedad asociativa al no reconocerla de manera correcta en los sistemas numéricos conocidos.

Este resultado nos indica que el 28.6% de los estudiantes alcanzan los nivelesG1, G2, G3 y G4 del proceso de generalización y los niveles A1, A2, A3, A4 y A5 del proceso de abstracción.

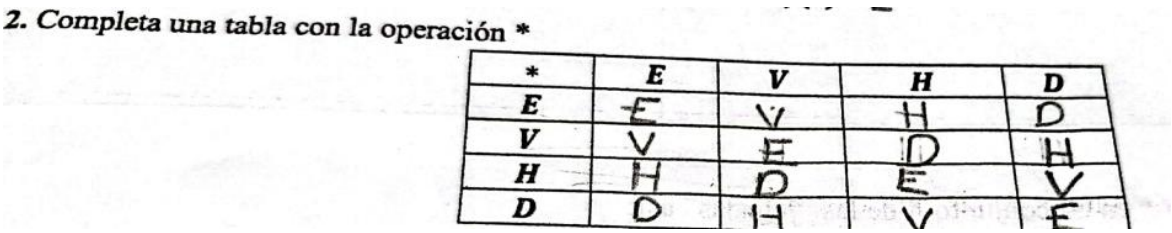
Pregunta #6

El 14.3 % de los estudiantes logran identificar la estructura e grupo evidenciada en la situación usando el tablero del juego y los resultados de la tabla de doble entrada además de reconocer la existencia de la propiedad conmutativa, el 28.6% de los estudiantes reconocen las propiedades de la estructura de grupo pero medianamente se le dificulta expresarlo de la mejor manera puede encontrar la propiedad conmutativa evidenciada en dicho conjunto con la su respectiva operación, el 28.6% de los estudiantes solo logran reconocer la propiedad conmutativa pero se le dificulta identificar las propiedades que hacen que unas estructura sea un grupo y el 28.6% de los estudiantes restantes se les dificulta observar y describir las operaciones binarias y establecer si hay propiedades como la asociatividad, la conmutatividad o la existencia de elemento neutro o elementos inversos allí.

Este resultado nos indica que el 14.3 % de los estudiantes alcanzan los niveles G1, G2, G3 y G4 del proceso de generalización y los niveles A1, A2, A3, A4 y A5 del proceso de abstracción.

Prueba o test final

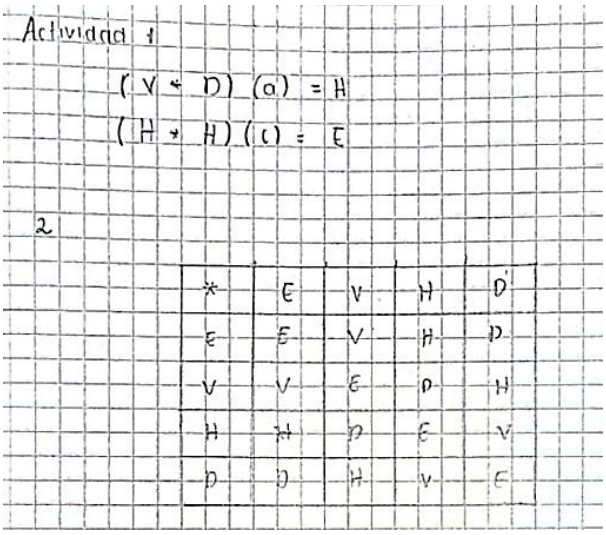
Actividad 1 ítem 2: Se pudo evidenciar que los estudiantes se dieron cuenta en el juego que a pesar de colocar la ficha roja en el punto a o b la tabla no cambiaba en su estructura.



2. Completa una tabla con la operación *

*	E	V	H	D
E	E	V	H	D
V	V	E	D	H
H	H	D	E	V
D	D	H	V	E

Figura 5.38: Procedimientos estudiantes



Actividad 1

(V * D) (a) = H

(H * H) (c) = E

2

*	E	V	H	D
E	E	V	H	D
V	V	E	D	H
H	H	D	E	V
D	D	H	V	E

Figura 5.39: Procedimientos estudiantes

Algunos estudiantes encontraron que con los movimientos No moverse: E, moverse verticalmente: V. Se podía también verificar las propiedades de la estructura algebraica de grupo.

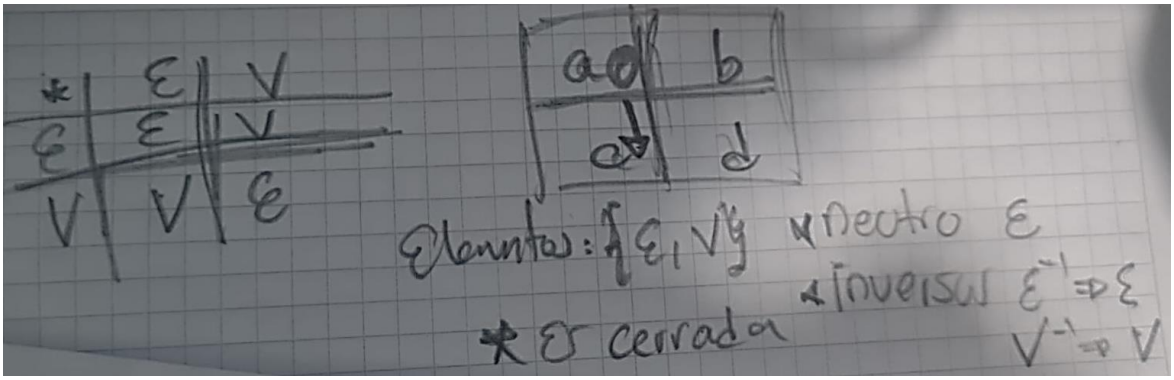


Figura 5.39: Procedimientos estudiantes

6. Conclusiones y recomendaciones

6.1 Conclusiones

Se logra cumplir con los objetivos propuestos al comienzo de la investigación pues se pudo aplicar una prueba diagnóstica que identificó los conceptos previos de los estudiantes respecto a las transformaciones geométricas en el plano (rotaciones, traslaciones, reflexiones, simetrías) y propiedades de los sistemas numéricos que utilizan. Además, a través de un trabajo de investigación y de estudio profundo se analizaron conceptos básicos de las transformaciones geométricas y de la teoría de grupos desde su desarrollo disciplinar, histórico y epistemológico y teniendo en cuenta las implicaciones didácticas para poder diseñar y evaluar los procesos de abstracción y generalización en el marco del razonamiento en geometría y álgebra. Esto está expuesto en el desarrollado del marco teórico en el presente trabajo

Con el trabajo anteriormente desarrollado se pudo estructurar una secuencia didáctica que respondiera a los objetivos planteados. Con el propósito de realizar una nivelación en el estudio de las transformaciones geométricas en el plano (rotaciones, traslaciones, reflexiones, simetrías) y propiedades de los sistemas numéricos que conocían los estudiantes y como estos se podían relacionar para poder conceptualizar la noción de estructura algebraica de grupo y así observar una transición de la geometría al álgebra teniendo como vehículo a la simetría teniendo en cuenta el desarrollo de los procesos de abstracción y generalización.

A pesar de las circunstancias de los tiempos de clase, las actividades institucionales o culturales y o eventos externos a la institución educativa en una población de 30 estudiantes de undécimo se logró implementar esta secuencia didáctica con una muestra de 14 estudiantes, los cuales se involucraron en un trabajo colaborativo de aprendizaje

que les permitió restructurar sus conocimientos y desarrollar habilidades necesarias en el pensamiento o matemático.

Finalmente, los 14 estudiantes lograron realizar el juego final, el cual pretendía evaluar lo aprendido y desarrollado en los cuatro talleres que se diseñaron con respecto a los resultados de la prueba diagnóstica.

Como docente en compañía de la asesora de trabajo de grado se logró definir algunas categorías para poder evaluar la implementación de la secuencia didáctica. Usando referentes de autores en investigación de la didáctica de las matemáticas.

Se logró tener un avance significativo en los procesos G1, G2, G3 en el marco del razonamiento algebraico. Pues en la prueba o test final se observó en el juego, que hubo actividades en los talleres que los prepararon para desenvolverse mejor en situaciones de percibir, registrar patrones y expresarlos. Para los niveles de abstracción de observa un incremento en los primeros tres niveles A1, A2, A3 y un avance menor en el nivel A4. Ayudo bastante las relaciones entre el razonamiento geométrico y algebraico su transición en medio de los 4 talleres propuestos. Esto se evidencio en el análisis de la prueba diagnóstica y los resultados de la prueba o test final.

Este tipo de actividades lúdicas que se desarrollan con los estudiantes generan interés en la participación de ellos y motivan a dialogar de manera profunda conceptos en matemáticas que les permiten desarrollar procesos como los de generalización y abstracción.

A través de toda la implementación de la secuencia didáctica, se ve con optimismo la posibilidad de enseñar en aulas de básica secundaria y media conceptos de las matemáticas modernas, realizando su respectiva transposición didáctica.

En términos matemáticos con los estudiantes se trabajó la noción de grupo como estructura algebraica pero algunos grupos de trabajo por medio de las tablas de doble entrada se dieron cuenta en los ejercicios de las simetrías de un triángulo equilátero que un subconjunto de esas simetrías también formaba una estructura de grupo, pues cumplía con las propiedades.

Dos grupos se dieron cuenta de que la estructura algebraica que se podía construir con de las simetrías del triángulo en sus palabras *"era parecida"* a la de las permutaciones de 3 elementos. Pero que cuando hicieron el ejercicio del cuadrado se dieron cuenta que esa no tenía una estructura *"parecida"* a la de las permutaciones de 4 elementos.

En el juego o test final los estudiantes se dieron cuenta que con los movimientos: No moverse $\boldsymbol{E}$ y moverse verticalmente $\boldsymbol{V}$ se cumplía las propiedades de una estructura de grupo.

También pudieron evidenciar los estudiantes en las simetrías del triángulo equilátero que con la rotación de 120° y una de las reflexiones axiales podrían generar todas las demás simetrías del triángulo. Es decir que $\sigma_{120°}$ y ρ_1 generaban los elementos restantes, las rotaciones $\sigma_{0°}$, $\sigma_{240°,}$ y las reflexiones ρ_2 y ρ_3.

Por último, con el presente trabajo pude culminar, relacionar y aplicar todas las materias vistas en el posgrado y pude crecer profesionalmente debido al impacto positivo que tuve en el proceso de planeación, escritura, asesorías de la docente que me acompaño, en la investigación, implementación, análisis de los resultados y reflexiones finales del trabajo de grado. Todo un crecimiento en términos pedagógicos, didácticos y sobre todo disciplinares. Procesos que me hacen mejor docente en este momento comparado a cuando me inscribí y tuve mi primer día de clase en este programa de maestría en enseñanza de las ciencias naturales y exactas de la Universidad Nacional de Colombia.

A través de toda la implementación de la secuencia didáctica, se ve con optimismo la posibilidad de enseñar en aulas de básica secundaria y media conceptos de las matemáticas modernas, realizando su respectiva transposición didáctica.

Se encontró un interés por participar y organizar un club de matemáticas en asocio con la Universidad Pedagógica Nacional el cual se ha podido consolidar cada vez más desde que comencé el desarrollo del presente trabajo.

Revisar mis propias prácticas docentes en los demás cursos que tengo a cargo en la institución para realizar procesos de investigación - acción y poder mejorar en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

El impacto que tuvo en la institución fue favorable ya que en las clases se desarrolla más aprendizaje significativo y se pudo hacer reflexiones sobre el quehacer pedagógico,

didáctico e investigativo con los docentes en formación en los semestres del ciclo de normalista superior específicamente en tercer semestre.

6.2 Recomendaciones

Se recomienda continuar con el diseño, aplicación y evaluación de propuestas didácticas que mejoren los procesos de abstracción y generalización ya que estos procesos están inmersos en los diferentes pensamientos en matemáticas y el desarrollo de las competencias tales como la comunicación, el razonamiento y la resolución de problemas.

Se tuvo en cuenta algunas actividades relacionadas con los 17 grupos de simetría que se podían visualizar en el museo de alhambra. Pero no se realizaron por problemas de tiempo en la aplicación de la secuencia didáctica. Pueden ser de mucha ayuda a la hora de conceptualizar la noción de simetría y desarrollarían procesos de abstracción y generalización. Así mismo poder relacionar algunos teoremas de la teoría de grupos y estudiarlos con los estudiantes, pero requería otras bases conceptuales y trabajar en procesos de argumentación y demostración. Se recomienda incluirlos en futuras propuestas.

También se observó que, en la prueba final del juego, específicamente en la pregunta #3 se necesitan actividades que apoyen la presente secuencia didáctica y desarrollen de mejor manera los niveles G1, G2 y G3 del proceso de generalización y los niveles A1, A2, A3, A4 y A5 del proceso de abstracción desde el razonamiento geométrico pues en ese aparte no hubo un avance significativo comparando la prueba diagnóstica y los resultados de la prueba o test final.

Además, se recomienda diseñar ambientes de aprendizaje donde se vincule el razonamiento geométrico y algebraico como un eje de integración para el desarrollo de la enseñanza en matemáticas.
Se recomienda seguir usando materiales manipulativos para mejorar el interés en los estudiantes por las actividades y también aprovechar su uso para obtener aprendizajes significativos.

Se puede mejorar un poco el proceso de aprendizaje, si algunas actividades se desglosan cada vez más en actividades pequeñas referentes a las nociones estudiadas como la de simetría o la de estructura de grupo, pues los prerrequisitos con los que cuentan algunos estudiantes son algo escasos.

Se recomendaría usar un grupo control teniendo en cuenta dos grupos de grado once para profundizar aún más en las comparaciones del desarrollo de los procesos de generalización y abstracción.

Se recomienda tener una metodología parecida a la que se planteó en el presente trabajo para desarrollar las habilidades de abstracción y generalización desde otras temáticas de matemáticas modernas.

Bibliografía

Álcala, M. (2002). La construcción del lenguaje matemático. México: Editorial Grao.

Boyer, C.B. (1999). Historia de la matemática. España: Alianza

Caicedo, J. (2004). Teoría de grupos. Colombia: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

Castellanos, M y Obando, J. (2009). Errores y dificultades en procesos de representación El caos de la generalización y el razonamiento, Encuentro colombiano de matemática educativa.

Castro, E, Cañadas, M y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. UNO 54, 55-67.

Clark, D. (2007). Theory of groups. University of New York. Suny New Paltz

Collette, J. (1985). Historia de las matemáticas. Siglo XXI. España Editores.

Corbalán, F. (2017) La invención de la teoría de grupos. Galois. RBA. España

Du Sautoy, M. (2009). Simetría un viaje por los patrones de la naturaleza. Barcelona editorial, Acantilado.

Fraleigh, J. (1988). Álgebra Abstracta primer curso. Addison. Wesley iberoamericana. México.

Fresan, F. (2011). Hasta que el álgebra os separe. La teoría de grupos y sus aplicaciones. España. RBA.

Godino, J. y Font, V. (2000). Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros. Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumatmaestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Godino, J. Neto, T. Aké, L. Etchegaray, S. Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias, 32.1, 199 – 219.

Godino, J. Neto, T. Aké, L. Etchegaray, S. Wilhelmi, M. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas onto semiótica y antropológica.

Herstein, N. (1996). Abstract Algebra, Third edition, Prentice-Hall, New Jersey.

Guillar, M. (2009). Las ideas de Bruner: “De la revolución cognitiva a la revolución cultural”. Educere. 13(44), 235-241 https://www.redalyc.org/pdf/356/35614571028.pdf

Kieran, C. y Filloy, Y. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las ciencias. *7*(3), 229 – 240.

Luque, C. Jiménez, H. Ángel, J. (2013). Actividades Matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos Representar estructuras algebraicas finitas y enumerables. Universidad Pedagógica Nacional Fondo editorial.

Mason, J. Graham, D. Pimm, D. Gower, N (1985), Routes of Roots of Algebra, Gran Bretaña, The Open University Press.

M.E.N. (2016). Derechos básicos de aprendizaje V2. Bogotá: Magisterio.

M.E.N (1998). Lineamientos curriculares de Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

M.E.N. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Magisterio.

M.E.N. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá: Magisterio.

Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en educación primaria. Universidad de Granada. SEIEM. *1*(1), 53-59

Morales, F. Valderrama, J. Fernández, A. (2021). La alhambra matemática. la belleza de los caprichos nazaríes. Gami editorial.

Moreno, P. (2014). La contracción semiótica como proceso de objetivación en estudiantes de grado sexto en el campo del pensamiento algebraico. Maestría tesis, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Piaget J. 1975. Introducción a la epistemología genética. Tomo II. Buenos Aires: Editorial Paidos

Radford, L. (1996), “The Role of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective”, en N. Bernardz, C. Kieran e I. Lee (eds.), Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching, Holanda, Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. Mathematical Thinking and Learning. *5*(1), 37–70

Ramírez, A., Uson, C. (2002). La repetición como argumento; la infinitud como objetivo. Los 17 grupos de simetría en el mudéjar aragonés. UNED Aragón y Centro de Estudios Mudéjares, Instituto de Estudios Turolenses.

Rascón, G. (2003). El Surgimiento del Álgebra Abstracta. Vol. 1, No.3

Rascón, G. (2003). El Surgimiento del Álgebra Abstracta. Vol. 2, No.2

Romero, M (2012). La investigación-acción en Didáctica de las Matemáticas: teoría y realizaciones. Universidad Complutense, Madrid.

Ruiz, Ángel (2001). Asuntos de método en la educación matemática. Revista Digital Matemática.

Samper, Carmen (2008). Geometría. Colombia editorial Norma S.A.

Van Hiele, P. M. (1957). El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría) Tesis doctoral no publicada. El

problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría) Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Holanda.