UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Contención de taludes en estado viscoplástico

Carolina Mora Molano
Ingeniera Civil

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Civil
Maestría en Ingeniería-Geotecnia
Bogotá D.C. Colombia
2011

Contención de taludes en estado viscoplástico

Carolina Mora Molano
Ingeniera Civil

Tesis de Maestría para optar al título de:
Magíster en Ingeniería - Geotecnia

Director:
Félix Hernández Rodríguez
Ingeniero Civil, Msc en Geotecnia

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Civil
Maestría en Ingeniería-Geotecnia
Bogotá D.C. Colombia
2011

Nota de Aceptación

Ing. Mario Camilo Torres
Presidente del Jurado

Ing. Guillermo Eduardo Ávila Álvarez
Jurado

Ing. Carlos Eduardo Rodríguez Pineda
Jurado

Ing. Félix Hernández Rodríguez
Director

Bogotá D.C., Abril de 2011

A Dios por darme fortaleza.

A mi esposito por su amor y ternura.

A mi mamita por ser mi inspiración.

A mi papito por ser mi vara.

A mi hermano Camilo por sus risas.

Y a mi familia por sus voces de ánimo y aliento.

AGRADECIMIENTOS

La autora expresa sus agradecimientos a Félix Hernández Rodríguez, Ingeniero Civil y Director de la investigación, por su valiosa orientación, constante ánimo y por tener siempre la disposición en atender cualquier inquietud durante el desarrollo del trabajo.

A Luís Ernesto Mariño, estudiante de Ingeniería de Sistemas de la Universidad Nacional a Distancia, por su valioso asesoramiento en el manejo del programa Visual Basic 6.0.

Así mismo a Manuel García López y José Vicente Amórtegui, Ingenieros Civiles de la firma Ingeniería y Geotecnia, por sus oportunas observaciones a la investigación, además de algunos aportes fotográficos para la presentación de este trabajo.

Y a mi esposo, papá, familia y amigos, por su apoyo incondicional en los momentos de debilidad, por su paciencia, amor y alegría que juntos ayudaron, en gran medida, a la culminación de esta tesis.

Carolina Mora

Resumen

En esta investigación se desarrolla un método de análisis que permite calcular los empujes en un muro de gravedad afectado por el movimiento de una masa viscoplástica, además del cálculo de los desplazamientos, velocidad y aceleración que desarrollaría la masa. El método también permite determinar la longitud crítica de la masa en movimiento que conduzca al desbordamiento del muro. El método de análisis se basa en la integración de las ecuaciones constitutivas del suelo y la superficie de falla junto con la ecuación de movimiento de Newton, y su solución numérica se plasmó en el programa GeoCtVp. El programa calcula y grafica los desplazamientos, velocidades, aceleraciones, empujes de la masa, además de la variación del perfil del terreno.

Palabras Claves: deslizamientos, muros, reología, viscoplasticidad, dinámica, cinemática.

Abstract

This research develops an analytical method for calculating the pressure on a wall of gravity affected by the movement of a viscoplastic mass, further the calculation of displacement, velocity and acceleration that would develop the mass. The method also allows determining the critical length of the moving mass that leads to the overflow wall. The method of analysis is based on the integration of the constitutive equations of soil and surface failure with the Newton second equation, its numerical solution is embodied in the program GeoCtVp. The program calculates and plots the displacements, velocities, accelerations, pressure the mass, in addition to the variation of terrain profile.

Keyword: landslide, wall, rheology, viscoplastic, dynamic, kinematic.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN **1**

CAPITULO 1 MOVIMIENTO LENTO EN TALUDES **5**

1.1 CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO LENTO. **6**

1.1.1 MOVIMIENTO SUPERFICIAL 7

1.1.2 MOVIMIENTO EN PROFUNDIDAD 10

1.2 CINEMÁTICA DE MOVIMIENTOS LENTOS. **11**

1.2.1 ENFOQUE OBSERVACIONAL 11

1.2.2 MODELACIÓN NUMÉRICA 13

1.3 ENSAYOS DE LABORATORIO Y DETERMINACIÓN DE PARÁMETROS POR RETRO-ANÁLISIS **14**

1.4 CARACTERIZACIÓN GEOTÉCNICA **16**

1.5 CASOS DE ESTUDIO **18**

CAPITULO 2 MODELOS CONSTITUTIVOS DE TALUDES EN MOVIMIENTO LENTO **21**

2.1 FLUIDO NEWTONIANO **22**

2.2 MODELOS VISCOPLÁSTICOS **23**

2.2.1 MODELO BINGHAMº 23

2.2.2 MODELO VISCOSO DE COULOMB 24

2.3 MODELOS ELASTOVISCOPLÁSTICOS 25

2.3.1 MODELO DE PERZYNA (1966) 25

2.3.2 MODELO DE DESAI Y OTROS (1995) 27

CAPITULO 3 TRABAJOS PREVIOS 31

3.1 OLDRICH HUNGR - 1995 31

3.2 XIMENA BASTO - 2009 35

3.3 JOSÉ JAIME SIERRA - 2009 42

3.4 FERRARI Y OTROS – 2010 45

CAPITULO 4 ANÁLISIS VISCOPLÁSTICOS EN LA CONTENCIÓN DE TALUDES 52

4.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA 53

4.1.1 GEOMETRÍA DEL PROBLEMA 54

4.1.2 FUERZAS ACTUANTES 55

4.1.3 CARACTERÍSTICAS DEL SUELO 57

4.2 MODELO MATEMÁTICO DE LA CONTENCIÓN DE TALUDES VISCOPLÁSTICOS 57

4.2.1 DEFORMACIÓN DE LOS RESORTES 58

4.2.2 EMPUJES ENTRE TAJADAS 62

4.2.3 ECUACIONES DE MOVIMIENTO 64

4.2.4 FALLA INTERNA DEL SUELO 73

4.3 VARIACIÓN DE LA ALTURA DE LAS TAJADAS 76

4.4 VARIACIÓN DE LA FUERZA DEL AGUA 80

4.5 MOVIMIENTO DE LA SUPERFICIE DEL TERRENO 82

CAPITULO 5 MÉTODO NUMÉRICO Y ESTABILIDAD DE LA SOLUCIÓN 88

5.1 MÉTODO NUMÉRICO 89

5.1.1 MOVIMIENTO EN EL TIEMPO 89

5.1.2 PRIMER MOVIMIENTO 93

5.1.3 VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y EMPUJES 97

5.2 ESTABILIDAD DE LA SOLUCIÓN 98

5.2.1 CARACTERÍSTICAS DE LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA 99

5.2.2 SOLUCIÓN ANALÍTICA VS MDF 100

5.2.3 RANGOS DE VISCOSIDAD, MÓDULO DE ELASTICIDAD Y PASO DEL TIEMPO 104

CAPITULO 6 PROGRAMA GeoCtVp 110

6.1 CARACTERÍSTICAS DEL PROGRAMA 110

6.1.1 SECCIÓN 1 - INTERFAZ 111

6.1.2 SECCIÓN 2 - DESPLAZAMIENTOS 119

6.1.3 Sección 3 – Velocidad, aceleración, empuje y perfil del terreno 125

6.1.4 Sección 4 – Resultado gráfico 127

6.2 Ejemplos de aplicación 128

6.2.1 Superficie del terreno horizontal 133

6.2.2 Solución inestable 136

CAPITULO 7 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD: INFLUENCIA DE LAS VARIABLES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS 139

7.1 Casos de estudio 140

7.1.1 Caso 1: Influencia del ángulo de inclinación del talud 140

7.1.2 Caso 2: Influencia de la longitud de la masa deslizada 143

7.1.3 Caso 3: Influencia del espesor de la masa deslizada 145

7.1.4 Caso 4: Influencia de la viscosidad 147

7.1.5 Caso 5: Influencia del módulo de rigidez 151

7.1.6 Caso 6: Influencia del nivel del agua subterránea 154

7.1.7 Caso 1: Influencia de los parámetros de resistencia del suelo 157

7.2 Ejercicio de aplicación 160

7.2.1 Cálculo con el programa GeoCtVp 160

CONCLUSIONES Y LIMITACIONES 169

BIBLIOGRAFÍA 175

APÉNDICE 1 PRESIÓN DE POROS EN UN TALUD INFINITO 179

APÉNDICE 2 MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS 182

APÉNDICE 3 CÓDIGO DEL PROGRAMA GeoCtVp.....189

APÉNDICE 4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN.....240

LISTA DE FIGURAS

Figura 1–1. Perfil de velocidad – Registros en campo de la Ladera Villarbeney (Suiza). *7*
Figura 1–2. Creep. *8*
Figura 1–3. Creep de suelo. *9*
Figura 1–4. Creep. a) Inclinación en la base de los árboles. *9*
Figura 1–5. Gelifluxion *10*
Figura 1–6. Imágenes satelitales *12*
Figura 1–7. Esquema de movimientos lentos. *13*
Figura 1–8. Comparación de los parámetros viscosos de tres deslizamientos obtenidos a partir del ensayo de corte directo y retro-análisis. *15*
Figura 1–9. Comparación de la deformación cortante obtenida a partir del ensayo de fluencia y retro-análisis. *15*
Figura 1–10. Características típicas deslizamientos lentos *16*
Figura 1–11. Comparación de la predicción modelo matemático (elastoviscoplástico) Vs. observación en campo *19*
Figura 1–12. Comparación de la predicción modelo matemático (viscoplástico) Vs. observación en campo. *20*

Figura 2–1. Relación entre el esfuerzo cortante (τ) y la tasa de deformación al corte (γ) *23*
Figura 2–2. Idealización del talud en creep. *28*
Figura 3–1. Modelo del fluido equivalente. *32*
Figura 3–2: Masa discretizada. *32*
Figura 3–3: Fuerzas actuantes en el bloque. *33*
Figura 3–4. Geometría del talud falla circular – modelo viscoplástico. *35*
Figura 3–5. Geometría del sector final del talud - cuña de transición. *36*
Figura 3–6. Fuerzas actuantes en la tajada radial. *36*
Figura 3–7. Fuerzas actuantes en la cuña de transición *37*
Figura 3–8. Fuerzas actuantes en la tajada vertical. *37*
Figura 3–9. Geometría del talud falla circular – modelo elastoplástico. *42*

Figura 3–10. Masas concentradas unidad a resortes – modelo elastoplástico. *43*
Figura 3–11. Fuerzas actuantes. *43*
Figura 3–12. Deformación de los resortes. *44*
Figura 3–13. Geometría del talud falla planar – modelo Bingham. *46*
Figura 3–14. Fuerzas actuantes en los dos bloques *46*
Figura 3–15. Componentes de la fuerza de interacción R´ *49*
Figura 4–1. Muros sucesivos colocados a lo largo de la ladera. *53*
Figura 4–2. Sección típica de análisis. *54*
Figura 4–3. Fuerzas actuantes en la tajada. *55*
Figura 4–4. Presiones de poros periféricas. *56*
Figura 4–5. Modelo mecánico equivalente. *58*
Figura 4–6. Deformación del resorte Kj. *59*
Figura 4–7. Deformación del resorte Kj+1. ..... *61*
Figura 4–8. Representación de los empujes en la tajada i. *63*
Figura 4–9. Movimiento oscilatorio amortiguado. *66*
Figura 4–10. Fuerzas actuantes en la primera tajada. *67*
Figura 4–11. Fuerzas actuantes en la tajada central. *69*
Figura 4–12 Fuerzas actuantes en la última tajada. *70*
Figura 4–13. Fuerzas actuantes en un elemento de suelo fallado. *73*
Figura 4–14. Altura de las tajadas. *76*
Figura 4–15. Variación de la altura del agua en la tajada. *80*
Figura 4–16. Sección longitudinal del talud. *83*
Figura 4–17. Coordenadas X-Z de las tajadas. *83*
Figura 4–18. Sistema coordenado U-V. *85*
Figura 4–19. Perfil del terreno desplazado. *86*
Figura 5–1. Problema marchando en el tiempo. *92*
Figura 5–2. Calidad en la malla. *99*
Figura 5–3. Bloque en movimiento *100*
Figura 5–4. Gráfica de desplazamiento de un bloque L=10 m *102*
Figura 5–5. Gráfica de desplazamiento de un bloque L=5 m. *103*
Figura 5–6. Variación del paso del tiempo – E=1000 KPa. *104*

Figura 5–7. Variación del paso del tiempo – E=10 KPa. *104*
Figura 5–8. Histograma de frecuencias para el paso del tiempo, E = 1000 KPa..... *105*
Figura 5–9. Histograma de frecuencias para el paso del tiempo, E = 10 KPa...... *106*
Figura 5–10. Desplazamiento para diferentes pasos de tiempo *107*
Figura 5–11. Rango de valores donde la solución es estable...... *109*
Figura 6–1. Diagrama de flujo del programa GeoCtVp..... *112*
Figura 6–2. Interfaz - Datos de entrada. *113*
Figura 6–3. Geometría del talud..... *114*
Figura 6–4. Propiedades del suelo y superficie de falla...... *115*
Figura 6–5. Geometría del muro de gravedad..... *116*
Figura 6–6. Predimensionamiento de muros de gravedad. *117*
Figura 6–7. Diagrama de flujo de la interfaz. *118*
Figura 6–8. Módulo de elasticidad a partir del ensayo de compresión inconfinada. *120*
Figura 6–9. Geometría de la tajada..... *121*
Figura 6–10. Diagrama de flujo desplazamientos...... *124*
Figura 6–11. Diagrama de flujo de la respuesta del programa. *126*
Figura 6–12. Ventana de resultados - Sección 4. ..... *127*
Figura 6–13. Datos de entrada del programa-Muro típico...... *129*
Figura 6–14. Variación del perfil del terreno – Talud inclinado. *129*
Figura 6–15. Desplazamientos – Talud inclinado...... *130*
Figura 6–16. Velocidad – Talud inclinado. *130*
Figura 6–17. Aceleración – Talud inclinado...... *131*
Figura 6–18. Empuje sobre el muro – Talud inclinado...... *131*
Figura 6–19. Variación del perfil del terreno – Talud horizontal...... *133*
Figura 6–20. Desplazamientos – Talud horizontal...... *134*
Figura 6–21. Velocidad – Talud horizontal...... *134*
Figura 6–22: Aceleración – Talud horizontal. *135*
Figura 6–23: Variación del empuje – Talud horizontal. *135*
Figura 6–24. Desplazamientos – Solución inestable...... *136*
Figura 6–25. Velocidad – Solución inestable. *137*
Figura 6–26: Aceleración – Solución inestable...... *137*

Figura 6–27: Variación del perfil del terreno – Solución inestable. *138*
Figura 7–1. Influencia de la inclinación del talud en el movimiento.. ..... *142*
Figura 7–2. Influencia de la longitud de la masa deslizada en el movimiento. *144*
Figura 7–3. Influencia del espesor de la masa en el movimiento. *146*
Figura 7–4. Influencia de la viscosidad del suelo. *149*
Figura 7–5. Influencia de la viscosidad de la superficie de falla *150*
Figura 7–6. Influencia del módulo de rigidez *152*
Figura 7–7. Influencia del nivel del agua subterránea. *155*
Figura 7–8. Influencia de los parámetros de resistencia del suelo *158*
Figura 7–9. Esquema de la ladera natural. *160*
Figura 7–10. Muro de análisis. *161*
Figura 7–11. Gráficas de salida de GeoCtVp, L=5 m. *162*
Figura 7–12. Gráficas de salida de GeoCtVp, L=10 m. *163*
Figura 7–13. Gráficas de salida de GeoCtVp, L=20 m. *164*
Figura 7–14. Gráficas de salida de GeoCtVp, L=30 m. *165*
Figura 7–15. Gráficas de salida de GeoCtVp, L=40 m. *166*
Figura 7–16. Carta de Longitud de Separación Vs Htajada/Hmuro *168*

INTRODUCCIÓN

En las laderas colombianas, sobre todo en obras viales, se han usado de forma extensiva muros para contener taludes sometidos a flujo lento. Se ha observado que en el mediano plazo, el muro es rebasado por el suelo, presentándose eventualmente la falla del mismo. Este tipo de proceso se evidencia en corredores viales como los de Bogotá – Villavicencio y Bogotá – Villeta, en donde el material deslizado manifiesta un comportamiento viscoso evidenciado en un desplazamiento lento sobre el talud, afectando la vía, las obras de contención existentes y los puentes, entre otros.

Este tipo de movimiento se puede catalogar como “creep” o flujo lento de tierras (Varnes, 1978). Detonantes como el clima contribuyen en gran medida a que las laderas presenten o lleguen a esta condición de flujo lento, facilitando la degradación del suelo y la infiltración de abundante agua en el terreno.

En ocasiones este flujo de material sobrepasa las obras de contención y sigue su trayectoria ladera abajo con velocidades muy lentas. No obstante, se deben desarrollar obras de infraestructura en este tipo de laderas y es necesario garantizar su estabilidad y duración. En el caso particular de obras viales, se debe evitar a toda costa la falla del talud. El hecho que se presenten fallas en los muros de contención no significa que no sean útiles, sino que hay factores de la dinámica de los movimientos de tierras que pueden no haber sido tenidos en cuenta, como la tendencia de la masa deslizada a adoptar una geometría horizontal,

acumulándose detrás del muro. Este fenómeno incita a construir varios muros a lo largo de la ladera con la finalidad de que no puedan ser sumergidos bajo la masa deslizada.

Ahora bien, teniendo en cuenta que el estudio tradicional de estabilidad y el cálculo de los empujes en las estructuras de contención se basa en el análisis de la cuña de falla como cuerpo rígido, se hacía indispensable proponer un método para cuñas de falla deformables cuyo desplazamiento sobre la superficie de falla y su deformación interna sean de tipo viscoso: viscoplástico o viscoelástico.

En este sentido, se plantea la necesidad de desarrollar un método de análisis que permita entender cómo varían los empujes en una estructura de contención, en este caso un muro de gravedad, afectada por el movimiento de una masa deslizada de comportamiento viscoplástico. Además, es necesario entender cómo varían los desplazamientos y qué velocidad puede alcanzar la masa deslizada.

Para lograr esos objetivos, se opta por recurrir a una modelación basada en elementos reológicos. En la superficie de falla se emplearon elementos viscoplásticos que hacen que las fuerzas que se oponen al movimiento tengan dos componentes: una friccional, que depende de la carga normal efectiva, y una viscosa que depende de la velocidad que tenga el movimiento.

La masa de suelo que se desplaza se disctetizó en tajadas o bloques, quedando cada una de ellas representada por una masa concentrada soportada, lateralmente, por modelos viscoelásticos de Kelvin Voigt. En la base de la tajada, en el contacto con la superficie de fallas se realiza, como se dijo, un modelo viscoplástico.

La descripción del movimiento de cada una de las tajadas se obtuvo aplicando la segunda ley de Newton y dando lugar a una ecuación diferencial de segundo orden. De esa manera, se construyó un sistema de ecuaciones diferenciales; una por cada tajada. Para resolver el

sistema se opta por escribir esas ecuaciones en diferencias finitas y diseñar el programa de computador que las resuelva.

En ese sentido, se crea el programa GeoCtVp bajo la plataforma de Visual Basic 6.0. El programa calcula los desplazamientos, velocidades, aceleraciones, el empuje del suelo detrás del muro y el cambio del perfil del terreno en el tiempo. Además muestra en pantalla los resultados gráficos de las variables de interés y guarda en el ordenador una hoja de cálculo con los resultados obtenidos.

Esta investigación pretende aportar al estado del conocimiento en la dinámica de los movimientos lentos, en cuanto a la contención de este tipo de materiales, considerándolo útil para quienes diseñan y conciben obras viales, para la ingeniería de consulta, la ingeniería de construcción y para la docencia universitaria. Sería bueno compartir este trabajo con esos sesos sectores, con el fin de perfeccionarlo y enriquecerlo.

En el Capítulo 1, “Movimiento Lento en Taludes”, se presenta una descripción general de las características del movimiento lento, se compilan algunos parámetros geomecánicos de este tipo de movimiento en casos europeos y se hace una breve explicación sobre la manera de determinar valores de la viscosidad del suelo en laboratorio y en campo.

En el Capítulo 2, “Modelos Constitutivos de Taludes en Movimiento Lento”, se muestra un resumen de los modelos constitutivos más usados.

En el Capítulo 3, “Trabajos Previos”, se describe brevemente los trabajos que fueron de interés para el desarrollo de esta investigación, entre ellos el modelo dinámico para movimientos rápidos de tierra, flujos rápidos y avalanchas propuesto por Hungr en 1995.

En el Capítulo 4, “Análisis Viscoplásticos en la Contención de Taludes”, se presenta la formulación de la dinámica del movimiento del talud utilizando un modelo mecánico

equivalente para cada tajada y obteniendo un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden. También se desarrolla la formulación para la falla interna del suelo y para el análisis de la variación de la altura del terreno en el tiempo.

En el Capítulo 5, “Modelo Numérico y Estabilidad de la Solución”, se formula la solución del sistema de ecuaciones diferenciales empleando diferencias finitas y se establecen criterios para la elección del paso del tiempo. También se analizan los valores de los parámetros mecánicos del suelo para garantizar la estabilidad de la solución.

En el Capítulo 6, “Programa GeoCtVp”, se describe el programa desarrollado en Visual Basic 6.0, se presenta su diagrama de flujo y se muestra varios ejemplos de aplicación.

En el Capítulo 7, “Análisis de Sensibilidad: Influencia de las Variables Mecánicas y Geométricas”, se presenta diferentes casos de estudio con variación de parámetros, mecánicos y geométricos, y se elabora un ejercicio para determinar la longitud crítica de la masa en movimiento lento que conduzca al desbordamiento de un muro.

Por último se elaboran las “Conclusiones y Limitaciones” del trabajo de investigación.

Además se incluyen cuatro apéndices. En el Apéndice 1 “Presión de Poros en un Talud Infinito” se presenta la formulación para hallar la presión de poros en un talud infinito sobre la superficie de falla. En el Apéndice 2 “Método de las Diferencias Finitas” se hace una breve descripción del método y se desarrolla la formulación empleada en el Capítulo 5 “Modelo Numérico y Estabilidad de la Solución”. En el Apéndice 3 “Código del Programa GeoCtVp” se presenta el algoritmo desarrollado para el programa. Y en el Apéndice 4 “Ejemplos de Aplicación” se muestra en detalle el análisis de la variación de los parámetros realizados en el Capítulo 7.

CAPITULO 1

MOVIMIENTO LENTO EN TALUDES

Muchas laderas presentan movimientos lentos y continuos debido a la respuesta del material que las constituyen, a los cambios en la geometría, cambios en sus condiciones hidráulicas y/o estáticas o por afectación de ambientes químicos (Cazacu y Cristescu, 2000). Las velocidades que pueden alcanzar a largo plazo son del orden de 156 m/año hasta valores inferiores a 1.6 mm/año (Cruden y Varnes, 1996; Glastonbury, 2008). Se ha observado que este tipo de movimiento se presenta tanto en la parte superficial de la ladera como en mayor espesor, asociando el primero de ellos a cambios climáticos principalmente (Hutchinson, 1982).

Con el propósito de entender el comportamiento y evaluar el efecto de los movimientos lentos, ya sea sobre vías o construcciones, es de suma importancia obtener la cinemática del movimiento enmarcado bajo los perfiles de desplazamientos y los campos de velocidad. Se ha observado que en el campo de la ciencia, los investigadores han llevado a cabo tal propósito bajo dos enfoques: el **observacional** y la **modelación numérica**, siendo estos redundantes para efectos del análisis.

Bajo el enfoque observacional, los investigadores han obtenido la cinemática del movimiento a partir de mediciones en campo durante largos periodos de tiempo, con instrumentos tales como inclinómetros y piezómetros, además de agrupaciones de imágenes satelitales. En el caso de la modelación numérica, han utilizado modelos viscoplásticos y elastoviscoplásticos con el fin de caracterizar la respuesta del material de la ladera, complementado con la formulación de ecuaciones dinámicas (ley fundamental de la dinámica de Newton, Lagrangianas, etc.) o con ecuaciones de equilibrio derivadas del balance de masa y momentum lineal (Vulliet, 1999; Cazacu y Cristescu, 2000; Ferrari y otros, 2010).

En este capítulo se presenta una descripción general del movimiento lento en taludes tanto superficial como en profundidad; se describen brevemente lo métodos de análisis empleados, los ensayos de laboratorio utilizados para la caracterización de los parámetros relevantes en el movimiento y finalmente se presentan los resultados de cinco casos de estudio de movimientos lentos en Europa en los cuales se muestran las características más relevantes, como la velocidad, geometría y parámetros viscosos.

1.1 Características del movimiento lento.

Se presenta tanto en la superficie de la ladera como en profundidad, desarrollando mayores velocidades en la superficie y menores velocidades a medida que se profundiza en el terreno (Desai y otros, 1995; Vulliet, 1999; Cazacu y Cristescu, 2000; Cristescu y otros, 2002), ver Figura 1–1. A pesar de que estos movimientos presentan tasas de velocidad bajas, pueden llegar a convertirse en movimientos rápidos por la deformación de la masa acumulada durante varios años llevándola a la falla (García y otros, 1998). En taludes con superficies de falla definidas, estos movimientos pueden ocurrir como un evento previo a un deslizamiento o como resultado de deslizamientos anteriores.

En la naturaleza, este tipo de movimiento se presenta en la reptación o “creep” de suelos, solifluxión, deslizamientos submarinos, flujo lento de tierras, deslizamientos de lodos, deslizamientos de tierra sobre roca como respuesta a procesos geomorfológicos, caída y volteo de suelo, hundimiento de roca y algunos deslizamientos profundos a bajas tasas de deformación a largo plazo (Densmore y otros, 1998; Petley y Allison, 1997 en Cristescu y otros, 2002; García y otos, 1998).

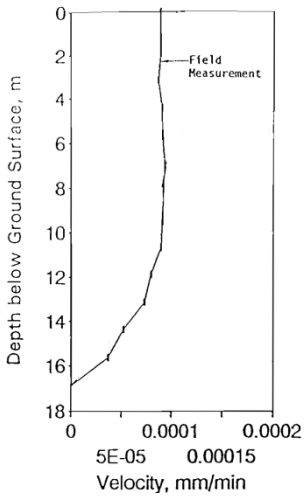


Figura 1–1. Perfil de velocidad – Registros en campo de la Ladera Villarbeney (Suiza).
Fuente: Desai y otros, 1995.

1.1.1 Movimiento superficial

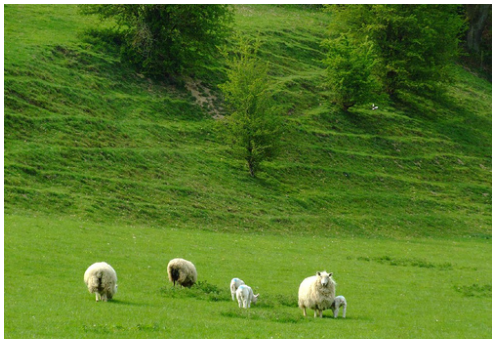
Se genera sobre las capas externas del terreno por la influencia de factores climáticos de acuerdo con la temporada o estación del año, ocasionando cambios en el volumen del material por la fluctuación en el contenido del agua o variación en la temperatura. De hecho, en ambientes periglaciales los cambios volumétricos se generan por el congelamiento y descongelamiento del agua contenida en la masa del suelo o en un afloramiento rocoso; en climas tropicales como el nuestro, el efecto es producido por

humedecimiento y secado de suelos residuales, entre otros. En climas periglaciales, este tipo de movimiento superficial es conocido como gelifluxión; de lo contrario se denomina creep o reptación.

Una característica de este tipo de movimiento es la distribución de los desplazamientos resultantes. Al no presentar una superficie definida entre la masa en movimiento y la que permanece inmóvil, los desplazamientos son dispersos y no concentrados como ocurre en los deslizamientos, cuya superficie de falla es evidente.

Reptación

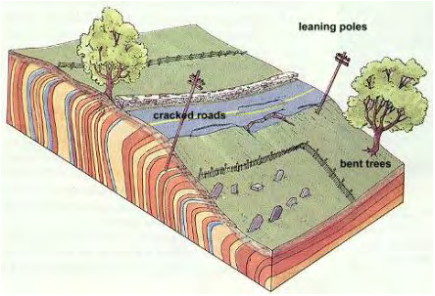
Se caracteriza por presentar deformación del terreno en la superficie, evidenciada por la formación de arrugas y escalonamientos en suelos, formación de pliegues en las formaciones rocosas (ver Figura 1–2), por la inclinación de árboles, cercas y postes o por el corrimiento en las vías (García y otros, 1998), (ver Figura 1–3 y Figura 1–4).



a)

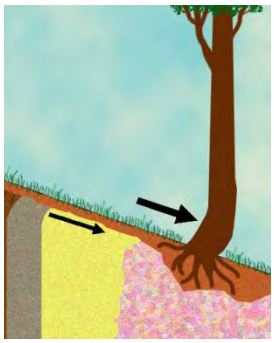
b)

Figura 1–2. Creep. a) De suelo, donde se evidencia la formación de arrugas. Fuente: Internet [1]. b) De roca, se observa la formación de pliegues. Fuente: Internet [2a].



a) b)

Figura 1–3. Creep de suelo. a) Evidencia de la deformación en superficie. Fuente: Internet [3]. b) Creep en la parte superior de la fotografía. Fuente: Internet [2b].



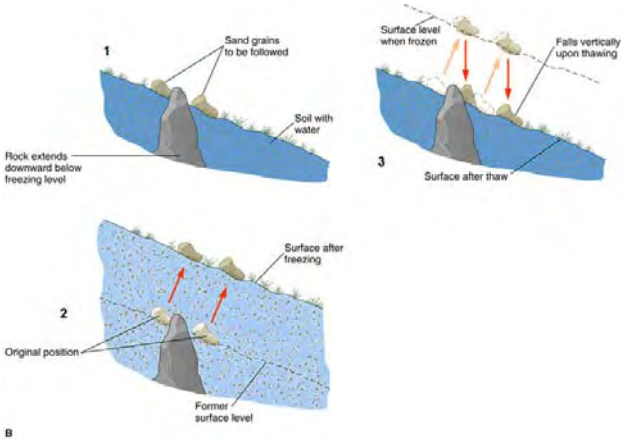
a) b)

Figura 1–4. Creep. a) Inclinación en la base de los árboles. Fuente: Internet [4]. b) Esquema de la deformación que sufren los árboles. Fuente: Internet [5a].

Gelifluxión

Se presenta en zonas frías donde el agua (cerca de la superficie del suelo) se congela y descongela cíclicamente. Cuando el suelo se congela sufre un aumento en su volumen causando el desplazamiento de su matriz hacia arriba y cuesta abajo por la expansión del agua. Cuando el agua se derrite el suelo se mueve nuevamente hacia abajo sobre la

superficie del terreno. Este movimiento se evidencia durante periodos largos de tiempo presentando formas de lóbulos en las laderas o de coladas (ver Figura 1–5).



a) b)

Figura 1–5. Gelifluxion. a) Formación de lóbulos. Fuente: Internet [6].
b) Esquema del movimiento del terreno. Fuente: Internet [5b].

1.1.2 Movimiento en profundidad

Se Inicia debajo del límite del creep superficial y ocurre a esfuerzos constantes inferiores a la resistencia última del material. Se puede presentar antes de la falla y después de la falla (Hutchinson, 1982).

Creep antes de la falla

Asociado a un movimiento progresivo donde hay una aceleración de la masa en creep, anticipando una falla de la ladera.

Creep después de la falla

Sucede sobre superficies de falla preexistentes debido, por ejemplo, a los altos niveles del agua en la masa del talud en época invernal.

1.2 Cinemática de movimientos lentos.

Como ya se había mencionado, la cinemática de estos movimientos se determina por medio de la observación o métodos numéricos.

1.2.1 Enfoque observacional

El perfil de desplazamientos se obtiene a partir de registros tomados en campo, obtenidos de la instrumentación de la ladera. Se utilizan inclinómetros, piezómetros, extensómetros, GPS e imágenes satelitales.

Imágenes satelitales

Se basan en los análisis multitemporales de imágenes tomadas por satélites de alta resolución a partir de deslizamientos identificados. El método consiste en ajustar el rango de los desplazamientos obtenidos a partir de las imágenes, con respecto a los desplazamientos medidos en campo (Hilley, 2004). Este tipo de procedimiento resulta útil en movimientos lentos de áreas extensas. Además permite relacionar la precipitación con el movimiento de los deslizamientos en cuanto a su iniciación y tasas de desplazamiento.

Hilley (2004) utiliza este procedimiento para analizar los deslizamientos lentos ubicados hacia el costado oriental de la Bahía de San Francisco, en cercanía a la falla de Hayward. Utilizó imágenes satelitales entre 1992 y 2008 además de registros pluviométricos. A partir del análisis introduce un método que puede explicar las variaciones en su movimiento, típicas de los deslizamientos lentos (durante estaciones o temporadas).

En resumen, encuentra que durante la temporada invernal hay mayores tasas de desplazamiento que durante el periodo seco. Sin embargo observa que hay una relación no lineal entre la precipitación y las tasas de movimiento de los deslizamientos, asociándola al proceso de saturación del suelo cerca a la superficie. En otras palabras, Hilley, (2004) determina que en periodos húmedos hay un retraso de aproximadamente tres meses entre la iniciación de las lluvias intensas y la aceleración de los deslizamientos, asociándolo con el tiempo requerido para saturación de la zona superficial.

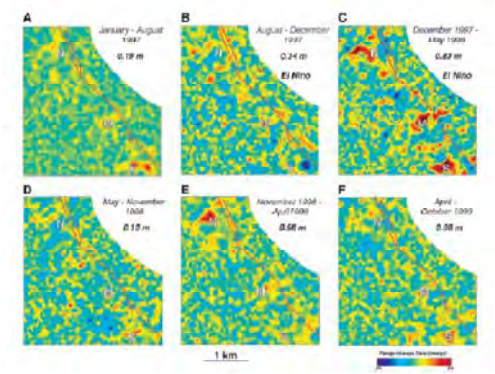
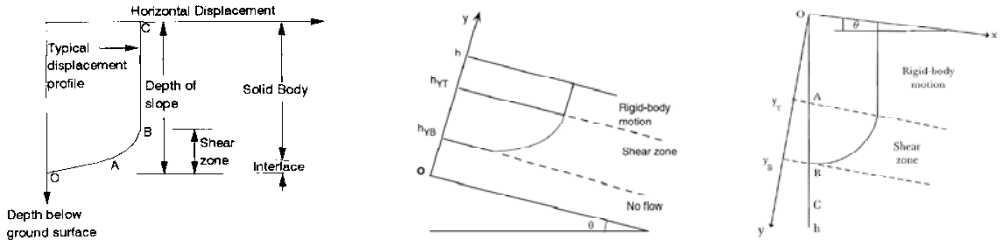


Figura 1–6. Imágenes satelitales de la zona de deslizamientos durante el fenómeno El Niño correspondiente al periodo entre 1997 y 2000 - Costado oriental de la Bahía de San Francisco. Fuente: Hilley (2004)

1.2.2 Modelación numérica

Diferentes autores han empleado relaciones constitutivas viscoplásticas (Vulliet, 1999; Cazacu y Cristescu, 2000, Ferrari, 2010) y elastoviscoplásticas (Desai y otros, 1995) con el fin de caracterizar la respuesta del material, en conjunto con las ecuaciones de la dinámica para modelar el movimiento. En el Capítulo 2 se realiza una descripción de los modelos constitutivos empleados en los movimientos lentos de tierra. Para efectos del modelo, generalmente consideran que el talud está dividido en dos sectores: la mayor parte del espesor de la ladera como un cuerpo sólido y una capa más delgada llamada la interfase (ver Figura 1–7). Ferrari y otros (2010) consideran una sola zona cuyo comportamiento es como un cuerpo rígido. La interfase está sobre una superficie fija y presenta un movimiento traslacional. Un parámetro fundamental de los modelos constitutivos es la viscosidad de la masa deslizada y es por ello la importancia de obtener procedimientos adecuados para la estimación de su valor (ver Sección 1.3).



a) b) c)

Figura 1–7. Esquema de movimientos lentos. a) Creep. Fuente: Desai y otros (1995). b) Flujo a lo largo de un talud. Fuente: Cristescu y otros (2002). c) Diagrama de flujo de una ladera en creep. Fuente: Cazacu y Cristescu (2000).

Los autores citados antes han encontrado que los modelos constitutivos junto con las ecuaciones dinámicas, la ecuación de balance de masa y momentum lineal, proporcionan una buena aproximación al comportamiento en campo (ver Sección 1.5).

1.3 Ensayos de laboratorio y determinación de parámetros por retro-análisis

Debido a la importancia del parámetro viscoso del suelo, diversos autores han establecido procedimientos para su cálculo. Dentro de estos procedimientos están los ensayos de laboratorio y el cálculo por retro-análisis. Autores como Desai y otros (1995) y Van Asch y otros (2007) han utilizado ensayos de laboratorio, ensayo de fluencia y el ensayo de corte directo respectivamente, en conjunto con retro-análisis para contrastar los resultados obtenidos. El ensayo de fluencia es no drenado, con medición de presión de poros, usando una deformación cortante en el equipo GEONOR. Como resultado, se obtienen curvas de deformación cortante con el tiempo para diferentes valores de fuerzas cortantes, a partir de las cuales se determinan los parámetros viscosos, de acuerdo con el modelo constitutivo propuesto. El ensayo de corte directo se hizo con deformación controlada para tasas de deformación representativas a los valores registrados en campo. Nuevamente estos resultados alimentan al modelo constitutivo propuesto.

Otros autores como Cazacu y Cristescu (2000), Cristescu y Cazacu (2002) y Ferrari y otros (2010), emplean únicamente retro-análisis para su determinación. El procedimiento consiste en tomar los registros de campo de inclinómetros, extensómetros o GPS durante un periodo de tiempo para formar una base de datos de los desplazamientos registrados. Estos se usan en los modelos constitutivos, obteniendo los parámetros de interés.

Representatividad de los ensayos de laboratorio

Van Asch y otros (2007) en su investigación, concluyen que los valores de los parámetros viscoplásticos calculados a partir del ensayo de corte directo con deformación cortante, son diferentes a los obtenidos por retro-análisis, siendo estos últimos 10 a 1000 veces mayores (ver Figura 1–8). Estiman que dicha diferencia se puede atribuir a la variación de la presión

de poros registrada en campo, a las limitaciones en la información del espesor de la zona de corte del deslizamiento (uno de los parámetros que involucra su modelo constitutivo), entre otros. Además, Cristescu y Cazacu (2002) afirman en su investigación que los ensayos de laboratorio están lejos de representar el comportamiento in-situ a largo plazo del deslizamiento, debido a la limitación que se tiene en el tiempo de ejecución de los ensayos.

Landslide	Laboratory ring shear results				Back analysed from field velocities			
	h_m (m)	η_0 (kPa s)	b	R^2	h_m (m)	η_0 (kPa s)	b	R^2
La Valette	0.003	7.1E+04	4.7	0.99	0.003	1.23E+07	4.6	0.63
La Mure	0.003	5.1E+03	2.3	0.99	0.015	1.3E+07	2.2	0.82
					0.015	*4.9E+06*	*2.2*	*0.81*
Hau	0.003	9.2E+03	2.2	0.92	0.003	1.2E+05	2.1	–

Figura 1–8. Comparación de los parámetros viscosos de tres deslizamientos obtenidos a partir del ensayo de corte directo y retro-análisis. Fuente: Van Asch (2007).

Sin embargo Desai y otros (1995) encuentran buena correlación entre lo obtenido en laboratorio y lo calculado por retro-análisis (ver Figura 1–9). La variable que correlaciona es la deformación cortante, parámetro importante en su modelo constitutivo, a partir de la cual se obtienen las características viscosas del material.

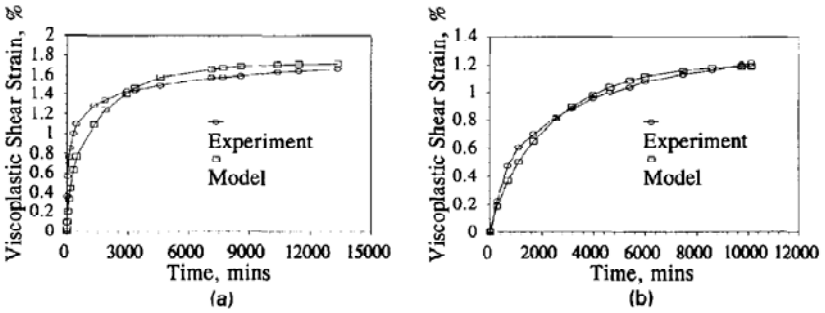


Figura 1–9. Comparación de la deformación cortante obtenida a partir del ensayo de fluencia y retro-análisis. a) Esfuerzo de preconsolidación de 200KPa.
b) Esfuerzo de preconsolidación de 400 KPa. Fuente: Desai y otros (1995).

1.4 Caracterización geotécnica

Para entender el problema de los movimientos lentos de laderas, es indispensable identificar algunas características propias de los movimientos; por ejemplo la geometría, las características de la fuente del deslizamiento, y de la superficie de ruptura (en caso de presentarse el movimiento lento después de la falla), características de la masa deslizada y monitoreo de la deformación en campo.

En este sentido, Glastonbury y Fell (2008) caracterizaron 45 grandes deslizamientos lentos en varias regiones del mundo. De acuerdo con el tipo de movimiento, los deslizamientos se clasificaron como: flujo de lodos, deslizamientos traslacional de roca-detritos, deslizamientos traslacional de roca y movimientos complejos. Al final del estudio muestran una tabla resumen con las características más relevantes (ver Figura 1–10).

Characteristic	Mudslides	Translational rock–debris slides	Translational rock slides	Internally sheared compound slides	Rotational multiple slips	Block-type slope movements
General geology	Argillaceous sedimentary strata	Highly anisotropic rock with faulting/folding	Sedimentary – horizontally bedded	Sedimentary – horizontally bedded	Massive cap-rock over argillaceous strata	Massive cap-rock over argillaceous strata
Slide mass characteristics	Highly disaggregated, low P-wave velocity, CF = 30%–40%	Highly disaggregated, low P-wave velocity; GP/GM	Predominantly intact	Variable – some intact, some disaggregated	Variable disaggregation dependent on age	Variable disaggregation dependent on age
Rupture surface characteristics	Rotational at rear, then planar. CI/CH infill	Foliation shears/crush zones with CL/CI infill	Follow argillaceous layers	Horizontal bedding in argillaceous layers	Rotational mass failure in argillaceous layer	Planar surface in argillaceous layer
Rupture surface inclination, α	Parallel to ground surface – 10°–20°	Parallel to ground surface – 15°–30°	Subhorizontal (0°–5°)	Basal surface = 0°–5°; rear surface = 50°–70°	Variable – rotational; vertical in cap-rock	Generally <10°
α versus ϕ_r	ϕ, approx. 1°–3° > α	ϕ, approx. 1°–3° > α	ϕ_r approx. 3°–4° > α	ϕ_r approx. 5° > α	Rock mass failure	$\phi_r > \alpha$
Lateral margin influence	Minimal	Minimal	Variable but low influence	Variable but low influence	Unknown – likely minimal	Unknown – likely minimal
Water influence	Higher influence in track and accumulation zones	Greater influence on scarp slope failures	Significant – seasonal reactivations	Significant – seasonal reactivations	Minor	Minor
Slide history	Reactivated/active	Reactivated/active	Reactivated/active	Reactivated/active	Active	Active
Internal deformation	Minor ≈ 80% movement on basal surface	Multiple internal shears; 60%–70% on base	Minor – retrogressive behaviour	Major – biplanar and rotational	Not apparent	Not apparent
Typical velocity range	0.1–100 mm/day; (avg. velocities)	0.01–20 mm/day; (avg. velocities)	10–20 mm/day; (2 cases)	0.1–30 mm/day; (avg. velocities)	0.03–5 mm/day; (avg. velocities)	0.003–0.08 mm/day; (avg. velocities)
Other comments	General compression trend	Slide expansion related to valley development. General extension trend	Retrogressive behaviour common	Variable nature of internal shearing. Small graben wedges (<25%)	Progressive valley development. Rotational slumping	Progressive valley development. Translational sliding

Figura 1–10. Características típicas deslizamientos lentos. Fuente: Glastonbury y Fell (2008).

En la tabla siguiente se resumen los valores de resistencia tanto de la superficie de falla como de la masa en movimiento lento, además de la inclinación de la superficie.

Superficie de falla						
	Deslizamiento de lodos		Deslizamiento de rocas-detritos		Deslizamiento de rocas	
	α	ϕr´	α	ϕr´	α	ϕr´
Max	15	16	30	27	10	20
Min	7.5	5	7	14	1	6.5
Prom	11	11	20	21	3.4	11

Masa deslizada		
	Deslizamiento de lodos	
	ϕr´	c´
Max	28	17
Min	6	0
Prom	19	3

Tabla 1–1. Valores de resistencia y ángulos de inclinación.

Del estudio, los autores concluyen que las características típicas encontradas para estos deslizamientos lentos son las relacionadas con:

- La geología del material involucrado en el movimiento (masa deslizada y superficie de falla).
- Características de la masa deslizada (disgregación, porcentaje de finos, clasificación, etc.).
- Característica de la superficie de falla (mecanismo de falla, clasificación del material).
- Relación entre el ángulo de inclinación y el ángulo de fricción residual de la superficie de falla.
- Influencia de la margen lateral en el movimiento.
- Historia de la deformación interna del deslizamiento
- Tasas de velocidad típicas.

Además, determinan que la mayoría de los deslizamientos lentos ocurrieron como consecuencia de deslizamientos antiguos activados o reactivados. Debido a esos movimientos, se registraron valores cercanos a la resistencia residual en la superficie de ruptura actual. También observaron que el ángulo de inclinación de la superficie de ruptura es menor que el ángulo de fricción residual.

En cuanto a la restricción en el movimiento de la masa deslizada, establecen que la influencia de las márgenes laterales de los deslizamientos es mínima en comparación con el efecto de la fluctuación de las presiones de poros, las cuales son realmente las que controlan el movimiento. Con respecto a la masa deslizada, observaron que presenta baja resistencia y altos grados de disgregación.

Para efectos del presente trabajo, se toman algunos valores de resistencia de la superficie de ruptura y de la masa deslizada como variables de entrada del programa GeoCtVp.

1.5 Casos de estudio

Se presentan cinco deslizamientos lento de tierras: Villarbeney-Suiza (Desai y otros, 1995; Vulliet, 1999; Cazacu y Cristescu, 2000; Cristescu y otros, 2002), Vallcebre-España (Ferrari y otros, 2010), La Valette-Alpes Franceses, La Mure-Francia y Hau-Suiza, estos tres últimos referenciados por Van Asch y otros (2007).

En la Tabla 1–2 se resumen las características principales de estos deslizamientos, como la geometría del talud, tipo de falla, parámetro viscoso, velocidades alcanzadas, entre otros. Además, para algunos de ellos, se expone el perfil de desplazamiento y velocidad calculado a partir de los modelos matemáticos o retro-análisis versus lo observado en campo (ver Figura 1–11 y Figura 1–12).

Características	Deslizamiento				
	Villarbeney	Vallcebre	La Valette	La Mure	El Hau
Ubicación	Suiza	España	Francia	Francia	Suiza
Material del deslizamiento	Originado a partir de la erosión de limolita	Limolita arcillosa intercalada con una capa de shales fisurados sobre un lecho de caliza	Marga meteorizada y material morrenico arcilloso	Arcilla varvada	Roca meteori-zada constituida por areniscas intercalada con margas
Observación en campo	1 año	2 años	2 años	9 años	-
Tipo de deslizamiento	Ver Desai y otros (1995)	Traslacional	Complejo	Circular	Flujo
Longitud		1450 m	-	70	-
Profundidad [m]			20	4.1	6
Inclinación falla		6	18	20-12	14
ϕ_r'		7.8	24.5	18.7	21.5
c_r' [Kpa]		-	0	1.6	0
Viscosidad [Kpa.s]		2.40E+07	1.23E+07	1.30E+07	1.20E+05
Velocidad [m/año]	0.05	5	1.8 - 95.63	1.8 - 94.9	1.8 - 73

Tabla 1–2. Características principales de los cinco deslizamientos lentos.

Predicción Vs observación de campo

Deslizamiento Villarbeney:

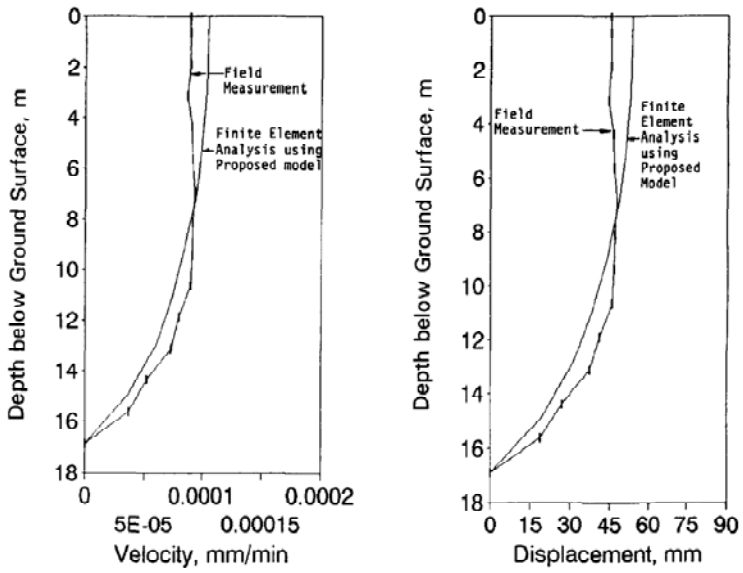


Figura 1–11. Comparación de la predicción modelo matemático (elastoviscoplástico) Vs. observación en campo. Fuente: Desai y otros (1995).

Deslizamiento Vallcebre:

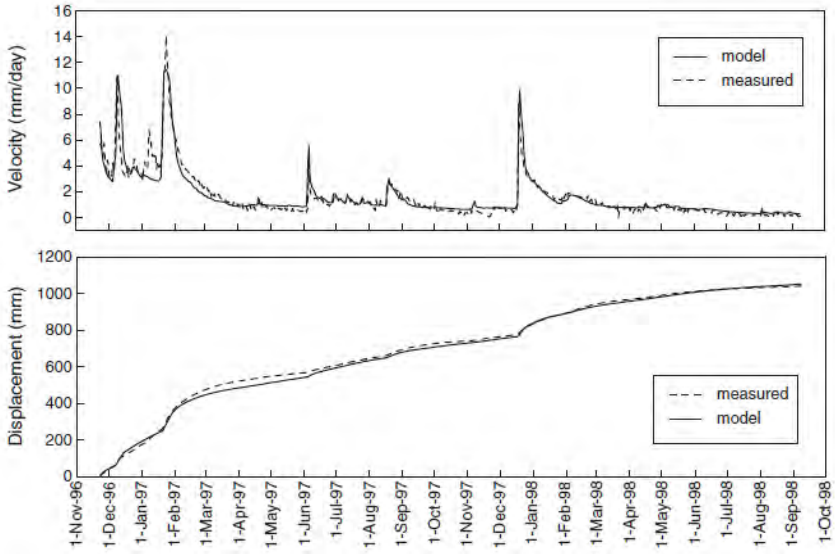


Figura 1–12. Comparación de la predicción modelo matemático (viscoplástico) Vs. observación en campo. Fuente: Ferrari y otros (2010).

CAPITULO 2

MODELOS CONSTITUTIVOS DE TALUDES EN MOVIMIENTO LENTO

Modelar taludes en movimiento lento ha sido una tarea que se ha llevado a cabo en los últimos 50 años por diversos investigadores (Desai y otros, 1995). La mayoría han modelado el suelo como un cuerpo viscoso no Newtoniano (Vulliet, 1999) utilizando modelos viscoplásticos y modelos elastoviscoplásticos (Desai y otros 1995; Vulliet 1999; Cristescu y otros, 2002; Van Asch y otros, 2007; Ferrari y otros, 2011). También han sido modelados, como un fluido, empleando la ley de Newton de la viscosidad (Vulliet y Hutter, 1988b en Desai y otros, 1995).

Dentro de los modelos viscoplásticos más empleados se encuentra el modelo Bingham (Cazacu y Cristescu, 2000; Vulliet, 1999; Cristescu y otros, 2002; Van Asch y otros, 2007; Ferrari y otros, 2011) y el modelo viscoso de Coulomb (Savage y Hutter, 1991 en Cazacu y Cristescu, 2000). El modelo Bingham ha sido usado ampliamente para modelar el comportamiento de taludes en reptación debido a su simplicidad además de la buena aproximación que tiene con los datos obtenidos en campo. Por ejemplo Liu y Mei (1989) (en Cristescu y otros, 2002) en su análisis de flujo lento de lodos, sobre un plano inclinado,

consideraron el lodo como un fluido Bingham de espesor variable. Así mismo, Sousa y Voight (1991) (en Cristescu y otros, 2002) usaron un modelo Bingham con dos coeficientes de viscosidad para caracterizar taludes en falla. Además Cazacu y Cristescu (2000) utilizaron también un modelo Bingham considerando la variación de la densidad del suelo con el esfuerzo de fluencia. Sin embargo la modelación resulta alejada del comportamiento real del suelo debido a la no inclusión de los efectos elásticos del suelo, la trayectoria de esfuerzos, entre otros.

Por otra parte, la introducción de los modelos elastoviscoplásticos en la modelación de taludes en movimiento lento fue realzada por Desai y otros en 1995. El modelo se realizó para laderas en creep cuyo comportamiento es representado por el modelo de elastoviscoplasticidad de Perzyna.

A continuación se hace un resumen del modelo Bingham, el modelo viscoso de Coulomb, el modelo elastoviscoplástico de Perzyna y el modelo propuesto por Desai y otros.

2.1 Fluido Newtoniano

Muestra la relación lineal entre el esfuerzo cortante y la tasa de deformación al corte cuya pendiente es la viscosidad del material (Figura 2–1). El modelo es representado por la siguiente ecuación:

$$\tau = \mu\gamma = \mu\frac{dv}{dz} \qquad EC(2–1)$$

donde μ es la viscosidad del fluido γ es la tasa de deformación al corte o el gradiente de velocidad. La tasa de deformación está dada por la variación de la velocidad de fluido con

respecto a la profundidad, dv/dz. Este modelo no tiene un esfuerzo de fluencia como los modelos viscoplásticos.

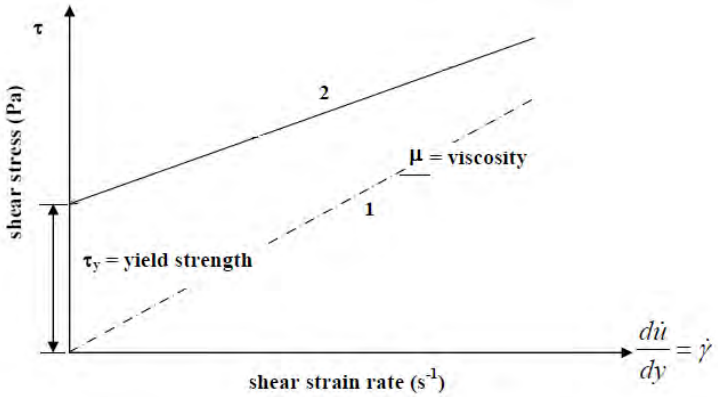


Figura 2–1. Relación entre el esfuerzo cortante (τ) y la tasa de deformación al corte ($\dot{\gamma}$). Los tipos de fluidos mostrados son (1) Newtoniano y (2) Bingham. Gráfica adaptada de Hance (2003).

2.2 Modelos Viscoplásticos

2.2.1 Modelo Bingham

Para un fluido no Newtoniano sometido a esfuerzos cortantes muy pequeños su comportamiento se asemeja al de un cuerpo rígido; pero fluye viscosamente cuando los esfuerzos cortantes son altos. Entonces, para que el fluido "fluya" se necesita que el esfuerzo de corte exceda un valor crítico llamado esfuerzo de fluencia (τ_y), como se muestra en la Figura 2–1. Este comportamiento se debe al rompimiento de la estructura sólida formada por la interacción entre las partículas en suspensión que constituye el fluido.

Esta estructura es muy débil y se rompe al alcanzar el esfuerzo de fluencia. Luego las partículas se mueven libremente bajo fuerzas viscosas.

El modelo está dado por la siguiente expresión:

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < \tau_y \\ (\tau - \tau_y)/\mu & \tau \geq \tau_y \end{cases} \qquad EC(2\text{–}2)$$

donde γ es la tasa de deformación al corte, τ_y es el esfuerzo de fluencia y μ es la viscosidad.

La parte superior de la Ecuación 2-2 indica que la tasa de deformación al corte es cero cuando el fluido presenta esfuerzos inferiores al de fluencia, es decir el fluido no “fluye” y permanece como un cuerpo rígido. La segunda parte de la ecuación relaciona el esfuerzo cortante con la tasa de deformación al corte cuando se presentan esfuerzos superiores al de fluencia. Reorganizando se tiene:

$$\tau = \tau_y + \mu\gamma \qquad EC(2\text{–}3)$$

2.2.2 Modelo Viscoso de Coulomb

Johnson en 1965, basado en ensayos de laboratorio y observaciones en campo de flujos de detritos, propone una modificación al modelo Bingham (Rickenmann, 1990) en el que incluye un término de fricción como una componente de la resistencia al corte del “fluido” (Hance, 2003). Este modelo es conocido como el modelo viscoso de Coulomb y está dado por la siguiente expresión:

$$\tau = c' + \sigma'_n \tan\phi' + \mu\left(\frac{dv}{dy}\right) \qquad EC(2–4)$$

donde *c'* es la cohesión efectiva, σ_n' es el esfuerzo normal efectivo en el "fluido" y ϕ' es el ángulo de fricción expresado en términos efectivos.

Para efectos del presente trabajo se utilizará este modelo como modelo constitutivo para simular el comportamiento de la superficie de falla.

2.3 Modelos Elastoviscoplásticos

2.3.1 Modelo de Perzyna (1966)

La teoría elastovicoplástica de Perzyna se usa a menudo para caracterizar comportamiento viscoso o creep de materiales térreos utilizando diferentes modelos de plasticidad como el de Mises, Drucker-Prager (Zienkiewicz y Cormeau, 1974; Katona y Mulert, 1984 en Desai y otros, 1995) y Mohr-Coulomb (Rojas y León, 2008).

El modelo se basa en la hipótesis de la descomposición de la deformación total en la deformación elástica y deformación plástica y en la relación entre deformación elástica y la tensión, es decir:

$$\varepsilon_{ij} = \overset{e}{\varepsilon}_{ij} + \overset{vp}{\varepsilon}_{ij} \qquad EC(2–5)$$

$$\sigma_{ij} = E^e + \overset{e}{\varepsilon}_{ij} \qquad EC(2–6)$$

donde $\varepsilon_{ij}, \overset{e}{\varepsilon}_{ij}, \overset{vp}{\varepsilon}_{ij}$ representa las derivadas respecto al tiempo de la deformación total, elástica y viscoplástica, respectivamente; σ la derivada de la tensión respecto al tiempo y E^e es el operador matricial elástico. Los subíndices *ij* indican la orientación de las deformaciones y de los esfuerzos.

Perzyna define el flujo de deformación viscoplástica como un tensor dependiente de la viscosidad, de la resistencia máxima del suelo proporcionada por la función de fluencia y de la variación del potencial viscoplástico respecto al tensor de esfuerzos, como se presenta a continuación:

$$\overset{vp}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\mu}\langle\phi(F)\rangle\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}} \qquad EC(2\text{–}7)$$

donde μ es la viscosidad del material durante la deformación viscoplástica, F es la función de fluencia del material la cual depende del estado de esfuerzos, la historia de las deformaciones plásticas y de algunas propiedades mecánicas. La función ϕ es una función arbitraria de F, Q es el potencial viscoplástico y σ_{ij} el tensor de esfuerzos.

Nótese que la variación de las deformaciones viscoplásticas está restringida por la siguiente condición:

$$\frac{\partial\overset{vp}{\varepsilon}_{ij}}{\partial t} = \overset{vp}{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} 0 & F \le 0 \\ \frac{1}{\mu}\langle\phi(F)\rangle\frac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}} & F > 0 \end{cases} \qquad EC(2\text{–}8)$$

La ecuación anterior indica que si la función de fluencia es menor o igual a cero, no existirán deformaciones viscoplásticas; por el contrario, si la función es mayor que cero, las deformaciones viscoplásticas se estimarán de acuerdo con la formulación de Perzyna,

Ecuación 2-7. Para que la función de fluencia sea mayor que cero, el desviador debe superar la envolvente de resistencia del suelo.

Con el fin de determinar la función de fluencia, se utilizan los criterios de resistencia expresados en función de las invariantes de los desviadores de esfuerzos.

Ahora, si se considera flujo asociado ($Q \equiv F$) donde el potencial viscoplástico es igual a la función de fluencia, se puede obtener el gradiente del potencial viscoplástico $\partial Q / \partial \sigma_{ij}$.

Finalmente, los componentes de la Ecuación 2-7 están totalmente definidos y se puede calcular ahora la variación de las deformaciones en el tiempo.

2.3.2 Modelo de Desai y otros (1995)

El modelo está concebido para laderas en reptación. Considera que el movimiento del terreno sucede tanto en profundidad como a lo largo de la ladera. El modelo asume que el movimiento del terreno se presenta en 2 zonas: la primera relaciona al material como un cuerpo sólido y la segunda como una superficie de falla (esta zona se denomina interfase). Ver Figura 2–2.

El comportamiento de la zona superior (cuerpo sólido) es modelado utilizando la ecuación constitutiva elastoviscoplástica de Perzyna. Ésta también se utiliza para modelar la interfase, pero con algunas modificaciones.

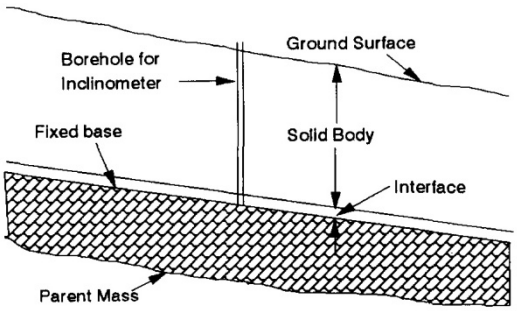


Figura 2–2. Idealización del talud en creep. Fuente: Desai y otros (1995).

Zona como cuerpo sólido.

Asumiendo pequeñas deformaciones, el tensor de las tasas de deformación total se descompone en su parte elástica y viscoplástica, como se mostró en la Ecuación 2-5 a partir de la formulación de Perzyna.

En este modelo, el flujo de deformación viscoplástica está dado por:

$$\overset{vp}{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \overset{vp}{\varepsilon}_{ij}}{\partial t} = \Gamma \left\langle \phi\left(\frac{F}{F_o}\right)\right\rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \qquad EC(2\text{–}9)$$

Donde σ_{ij} es el tensor de esfuerzos efectivos, ϕ es una función escalar del flujo de fluencia F, F_o es una función que se usa para normalizar, Q es la función del potencial viscoplástico y Γ es un parámetro que tiene que ver con la fluidez del material. La relación (F/F_0) se asocia a la iniciación de las deformaciones viscoplásticas. Si $(F/F_0) > 0$ entonces $\langle \varphi(F/F_0)\rangle = \varphi(F/F_0)$ y cuando $(F/F_0) \leq 0$ entonces $\langle \varphi(F/F_0)\rangle = 0$.

A partir del de ensayos de laboratorio encontraron la siguiente relación:

$$\phi(F) = \left(\frac{F}{F_o}\right)^N \qquad EC(2–10)$$

donde *N* es un parámetro del material.

Con base en el comportamiento de los ensayos de laboratorio, encuentran apropiado caracterizar la masa del suelo usando flujo asociado (Q≡F). La función de fluencia dada por Desai (1986) (en Desai y otros, 1995) es de la forma:

$$F = J_{2D} - \left(-\alpha J_1^n + .\overline{\gamma} J_1^2\right)\left(1 - \beta S_r\right)^{0\,5} \qquad EC(2–11)$$

Donde Sr es la relación de esfuerzos y está en función de J_2 y J_3. J_1 es el primer invariante del tensor de esfuerzos efectivos σ_{ij}, J_2 y J_3 son el segundo y tercer invariante del tensor de los esfuerzos desviadores. *F* y las invariantes son normalizados con respecto a la presión atmosférica. La función α tiene que ver con el endurecimiento del material.

Zona de Interfase

El mecanismo de deformación en la interfase es diferente que el considerado para la zona de cuerpo sólido. En esta zona el movimiento es de tipo traslacional y es generado por el contacto entre la interfase y la masa basal (Desai y otros, 1995). Ver Figura 2–2.

Con el fin de modelar el comportamiento en la interfase hacen una adaptación al modelo desarrollado para la zona de cuerpo sólido. Utilizan el esfuerzo normal y el esfuerzo cortante (esfuerzos que actúan en la interfase) en vez de los invariantes. Es así que la función de fluencia la definieron como (Desai y Fishman, 1991 en Desai y otros, 1995):

$$F_i = \tau^2 + \alpha_i \sigma_n^{ni} - \overline{\gamma_i} \sigma_n^2 \qquad EC(2–12)$$

donde τ y σ_n son adimensionales con respecto a la presión atmosférica y α_i es una función que tiene que ver con el endurecimiento.

De acuerdo con ensayos de laboratorio encontraron que la caracterización del comportamiento de la interfase es adecuada para un flujo no asociado, definiendo la función del potencial plástico como:

$$F_i = \tau^2 + \alpha_Q \sigma_n^{\ ni} - \overline{\gamma}_i \sigma_n^{\ 2} \qquad EC(2–13)$$

donde α_Q es un expresión en función de α para la condición de flujo asociado y del valor de la carga de corte y del esfuerzo cortante pico en ensayos de laboratorio.

Finalmente, obtienen que la tasa viscoplástica de deformación relativa para la interfase está compuesta por la deformación volumétrica normal y cortante, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{pn} \\ \varepsilon_{ps} \end{pmatrix} = \Gamma \left\langle \phi_i \left(\frac{F_i}{F_{io}} \right) \right\rangle \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial \sigma_n} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial \tau} \end{Bmatrix} \qquad EC(2–14)$$

CAPITULO 3
TRABAJOS PREVIOS

Este capítulo expone los trabajos previos que influyeron en el desarrollo de esta investigación. Como primera medida se revisa el trabajo realizado por Oldrich Hungr "A Model for the Runout Analysis of Rapid Flow Slides, Debris Flows, and Avalanches" en 1995, quien elabora un modelo para el análisis de flujo rápido de tierras, flujo de detritos y avalancha.

También se revisa el trabajo de tesis de maestría de Ximena Bastos "Desplazamientos Viscoplásticos en Taludes Fallados" del 2009 y el trabajo de tesis de pregrado de José Jaime Molina "Procesos Cinemáticamente Controlados de Falla de Taludes" también del 2009. Ambos trabajos fueron elaborados bajo la dirección del Ingeniero Félix Hernández Rodríguez, profesor de la Universidad Nacional de Colombia, también director de esta investigación.

3.1 Oldrich Hungr - 1995

En su trabajo propone un modelo para el análisis de flujo rápido de tierras, flujo de detritos y avalanchas, el cual se basa en la solución de la ecuación lagrangiana del movimiento en coordenadas curvilíneas para una masa discretizada en bloques. En cada uno de los bloques

se plantea la ecuación de movimiento obteniéndose un sistema de ecuaciones que se resuelve empleando el método de las diferencias finitas. En resumen, se tiene 2n-1 incógnitas las cuales son los desplazamientos longitudinales y la profundidad promedio de los bloques y 2n-1 ecuaciones de movimiento, donde n es el número de paredes de los bloques que constituyen la masa deslizada. De esta manera el problema es determinado, cuya solución numérica es explícita, y ocurre en intervalos de tiempo establecidos.

Hungr propone sustituir la masa deslizada por un fluido equivalente el cual es dividido en bloques libres de deformarse y que mantienen constante el volumen del material durante su descenso por la superficie de falla curva, como se muestra en las Figura 3–1 y Figura 3–2.

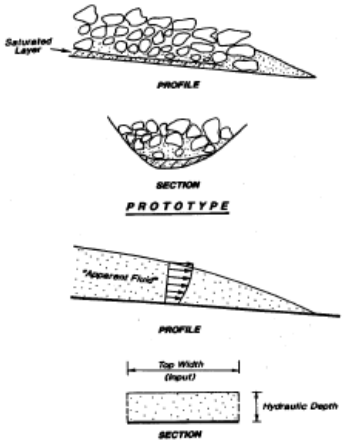


Figura 3–1. Modelo del fluido equivalente. Fuente: Hungr (1995).

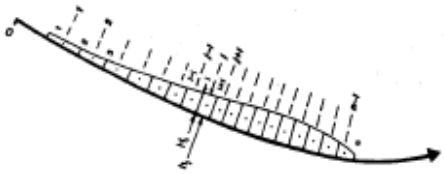


Figura 3–2: Masa discretizada. Fuente: Hungr (1995).

Sobre la pared de cada bloque actúa una fuerza motriz neta, la cual está compuesta por la componente tangencial del peso, la componente de la fuerza resistente en la base del bloque (T) y la resultante interna de presiones (P) como se presenta en la Figura 3–3.

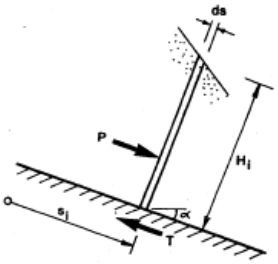


Figura 3–3: Fuerzas actuantes en el bloque. Fuente: Hungr (1995).

Es así que la fuerza motriz F está dada por:

$$F = \gamma H_i B_i ds sen\ \alpha + P - T \qquad EC(3–1)$$

donde γ es el peso unitario del material, ds es la longitud del bloque, α es el ángulo de inclinación de la superficie de falla, H_i es la altura del bloque y B_i es el ancho; estos últimos medidos perpendicularmente a la dirección del flujo.

La nueva velocidad en cada bloque se obtiene por integración numérica de la segunda ley de Newton como se expresa en la siguiente ecuación:

$$V_i = V_i' + \frac{g(F\Delta t - M)}{\gamma H_i B_i ds} \qquad EC(3–2)$$

donde V_i' es la velocidad inicial o la velocidad en el tiempo anterior, Δt es el intervalo de tiempo y g es el valor de la gravedad, M es el flujo de momento el cual está asociado a la erosión o arrastre del material.

Integrando nuevamente se obtiene una expresión para calcular los desplazamientos curvilíneos como se muestra a continuación:

$$S_i = S_i' + \frac{g(F\Delta t - M)}{\gamma H_i B_i ds} \qquad EC(3–3)$$

donde S_i' son los desplazamientos en el tiempo inicial (lo cuales son asumidos) o los desplazamientos en el tiempo anterior.

Ahora bien, como es conocida la nueva posición de los bloques y los volúmenes del material entre ellos, la profundidad promedio en el bloque h_j se calcula para mantener el volumen constante como sigue:

$$h_j = \frac{2V_j}{(S_{i+1} - S_i)(B_{i+1} + B_i)} \qquad EC(3–4)$$

donde V_j es el volumen del bloque.

Entonces, la nueva altura H_i es el promedio de las profundidades de los bloques adyacentes, como sigue:

$$H_i = \frac{h_{j-1} + h_j}{2} \qquad EC(3–5)$$

Y como se asume que la geometría del bloque inicial y final de la masa en movimiento corresponden a la de un triángulo, su altura está dada por:

$$H_i = \frac{h_j}{2} \;\; y \;\; H_n = \frac{h_{n-1}}{2} \qquad EC(3–6)$$

El modelo propuesto por Hungr es limitado en cuanto a que es una aproximación de un problema tridimensional reducido a una simple formulación unidimensional donde además se utiliza una reología constante en el tiempo.

3.2 Ximena Basto - 2009

Plantea un modelo de análisis basado en un modelo viscoplástico que permite predecir la geometría de una cuña de falla movilizada, su desplazamiento y velocidad para un talud cuya superficie de falla es circular. Además plantea un algoritmo para determinar el factor de seguridad del talud para este tipo de materiales.

El talud que se considera para el análisis se presenta en la Figura 3–4, la superficie de falla es circular y aflora en la pata del talud; a partir de allí se asume que la superficie del terreno es horizontal.

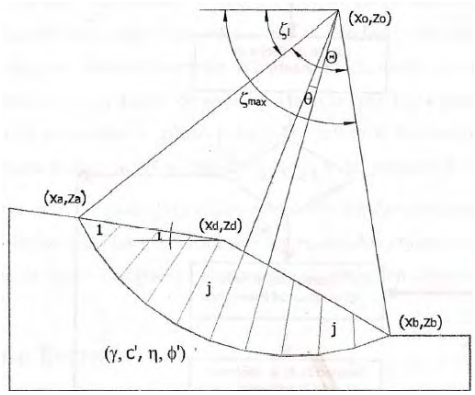


Figura 3–4. Geometría del talud falla circular – modelo viscoplástico. Fuente: Basto (2009).

El talud se discretiza en tajadas radiales y verticales (en la parte final del talud donde el terreno es horizontal), además de una cuña de transición entre la tajada radial y la vertical.

En las Figura 3–5 a laFigura 3–8 se muestra la geometría de la cuña de transición y las fuerzas actuantes en la tajada radial, vertical y cuña de transición. En ellas W_j es el peso del suelo, P_j son las cargas concentradas en la corona, q_j son las cargas distribuidas en la corona, Q_j cargas debidas a efectos sísmicos, y U_j, U_i y U_{i+1} las fuerzas del agua.

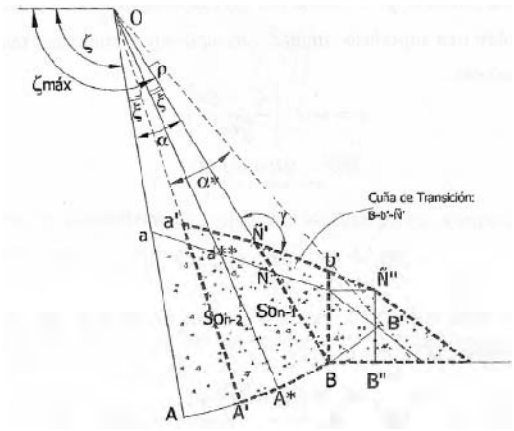


Figura 3–5. Geometría del sector final del talud - cuña de transición. Fuente: Basto (2009).

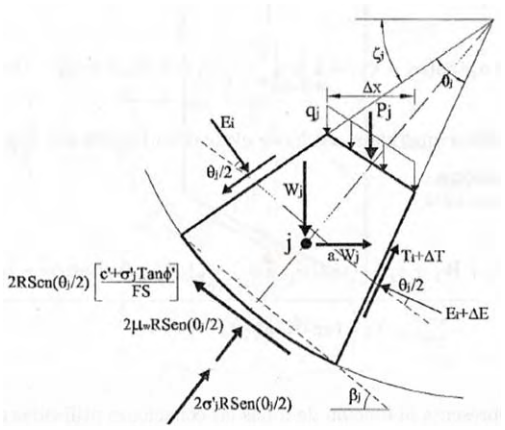


Figura 3–6. Fuerzas actuantes en la tajada radial. Fuente: Basto (2009).

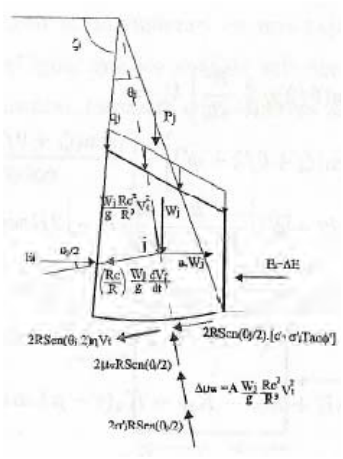


Figura 3–7. Fuerzas actuantes en la cuña de transición. Fuente: Basto (2009).

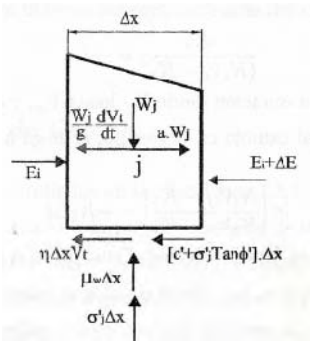


Figura 3–8. Fuerzas actuantes en la tajada vertical. Fuente: Basto (2009).

Tajada radial

La ecuación de movimiento para la tajada se expresa como:

$$\frac{dV_t}{dt} + K_2 V_t^{\,2} + K_1 V_t = K_t \qquad EC(3\text{–}7)$$

donde:

$$K_1 = 2\eta sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{g}{W}\frac{R^2}{R_c}$$

$$K_2 = (1-A)\tan\phi'\frac{R_c}{R^2}$$

$$K_t = K_w - K_{\Delta E}\Delta E - K_E E - K_w\left(c' - \mu_w \tan\phi'\right)$$

$$K_w = \frac{g}{\cos\phi'}\frac{R}{R_c}\left[\cos\left(\varsigma_i + \theta/2 + \phi'\right) + a.sen\left(\varsigma_i + \theta/2 + \phi'\right)\right]$$

$$K_{\Delta E} = \frac{g}{W}\frac{R}{R_c}\frac{\cos\left(\theta/2 - \phi'\right)}{\cos\phi'}$$

$$K_E = 2sen\left(\theta/2\right)\tan\phi'\frac{g}{W}\frac{R}{R_c}$$

De esta manera, V_t es la velocidad tangencial de la tajada y K_1, K_2 y K_t son constantes que dependen de la viscosidad del suelo (η), de la carga sísmica (a), el radio de curvatura de la trayectoria (R), la geometría de la cuña (θ), el peso (W), el ángulo de fricción del material (ϕ), y el incremento del empuje (ΔE), entre otros.

Separando variables en la Ecuación 3-7 e integrando desde V_{tf} hasta V_{to} y t_{tf} hasta t_{to}, se obtiene:

Para $\frac{K_t}{K_2} - \left(\frac{K_1}{2K_2}\right)^2 \geq 0$ $$\frac{1}{K}\left\{\arctan\left|\frac{V_{tf} + \frac{K_1}{2K_2}}{K}\right| - \arctan\left[\frac{V_{to} + \frac{K_1}{2K_2}}{K}\right]\right\} = -K_2\Delta t \quad EC(3\text{–}8)$$

Y para $\frac{K_t}{K_2} - \left(\frac{K_1}{2K_2}\right)^2 < 0$ $$\frac{1}{2K}\ln\left|\frac{\left(V_{tf} + \frac{K_1}{2K_2} - K\right)\left(V_{to} + \frac{K_1}{2K_2} + K\right)}{\left(V_{tf} + \frac{K_1}{2K_2} + K\right)\left(V_{to} + \frac{K_1}{2K_2} - K\right)}\right| = -K_2\Delta t \qquad EC(3–9)$$

Cuña de transición

La ecuación del movimiento de Newton para la cuña de transición se expresa como:

$$\frac{dV_t}{dt} + K_1 V_t + K_2 V_t^{\,2} = K_t' \qquad EC(3–10)$$

donde:

$$K_1 = 2\eta sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{g}{W}\frac{R}{R_c}$$

$$K_2 = (1 - A)\tan\phi'\frac{R_c}{R^2}$$

$$K_t' = K_E\Delta E - K_{\Delta E}\Delta E + K_w - K_u\left(c' - \mu_w \tan\phi'\right) + K_q$$

$$K_w = \frac{g}{\cos\phi'}\frac{R}{R_c}\left[\cos\left(\varsigma_i + \theta/2 + \phi'\right) + a.sen\left(\varsigma_i + \theta/2 + \phi'\right)\right]$$

$$K_{\Delta E} = \frac{g}{W}\frac{R}{R_c}\frac{\cos\left(\theta/2 - \phi'\right)}{\cos\phi'}$$

$$K_E = \frac{\left[\cos\left(\theta/2 - \phi'\right) - sen\left(\varsigma_i + \theta/2 + \phi'\right)\right]}{\cos\phi'} \frac{g}{W} \frac{R}{R_c}$$

$$K_u = 2sen\left(\theta/2\right)\tan\phi' \frac{g}{W} \frac{R^2}{R_c}$$

$$K_q = \left(p + q\Delta x\right)\cos\left(\varsigma_i + \theta/2 + \phi'\right)\cos\phi' \frac{g}{W} \frac{R}{R_c}$$

Aquí también V_t es la velocidad tangencial de la tajada y K_1, K_2 y K_t' son constantes que dependen de la viscosidad del suelo (η), de la carga sísmica (a), el radio de curvatura de la trayectoria (R), la geometría de la cuña (θ), el peso (W), el ángulo de fricción del material, y el incremento del empuje (ΔE).

Tajada vertical

La ecuación de movimiento para la tajada vertical está dada por:

$$\frac{dV_t}{dt} + K_1 V_t = K_3 \qquad EC(3–11)$$

donde:

$$K_1 = \eta\Delta x \frac{g}{W}$$

$$K_3 = g\left(a - \tan\phi'\right) - \frac{g}{W}\left(c' - u\tan\phi'\right)\Delta x - \frac{g}{W}\Delta E$$

Las constantes K_1 y K_3 están en función de la viscosidad del material (η), de la longitud de la tajada (Δx), la aceleración generada por la fuerza sísmica (a), el ángulo de fricción del material (ϕ´), el peso (W) y el incremento del empuje (ΔE).

Separando variables e integrando la Ecuación 3-11 desde V_{tf} hasta V_{to} y t_{tf} hasta t_{to} se obtiene:

$$\ln\left|\frac{K_1 V_{tf} - K_3}{K_1 V_{to} - K_3}\right| = -K_1 \Delta t \qquad EC(3–12)$$

Ahora, considerando que en la superficie de falla plana la viscosidad es igual a cero, entonces la ecuación del movimiento está dada por:

$$\frac{dV_t}{dt} = K_3 \qquad EC(3–13)$$

Nuevamente separando las variables e integrando la ecuación anterior desde V_{tf} hasta V_{to} y t_{tf} hasta t_{to} se obtiene:

$$\frac{V_{tf} - V_{to}}{\Delta t} = K_3 \qquad EC(3–14)$$

En resumen, a partir de las Ecuaciones 3-8 a la 3-10, las Ecuaciones 3-12, 3-14 y la ecuación de equilibrio de empujes, se forma un sistema de ecuaciones no lineales. Este sistema se resuelve empleando métodos numéricos obteniendo las variables de interés; el desplazamiento, la velocidad y el empuje.

3.3 José Jaime Sierra - 2009

Elabora un análisis basado en un modelo elastoplástico que permite predecir el factor de seguridad de un talud, analizándolo no como una masa rígida sino como una masa que pueda presentar deformaciones en la corona, cuerpo o en la pata.

Considera un talud cuya superficie de falla es circular la cual se extiende hasta la pata del talud como se muestra en la Figura 3–9. El talud se discretiza en tajadas radiales.

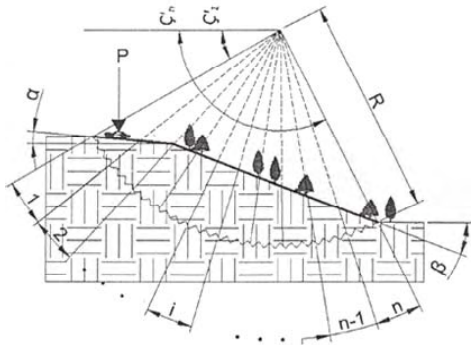


Figura 3–9. Geometría del talud falla circular – modelo elastoplástico. Fuente: Sierra (2009).

La tajada de suelo es representada por una masa puntual unida a un resorte como se muestra a continuación:

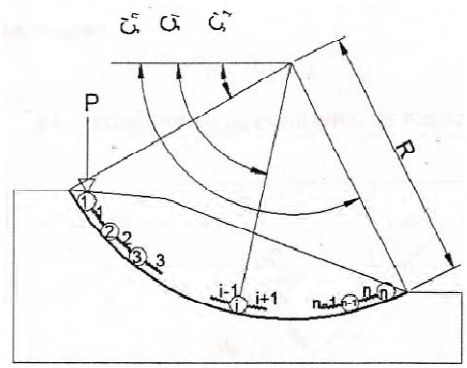


Figura 3–10. Masas concentradas unidad a resortes – modelo elastoplástico. Fuente: Sierra (2009).

La Figura 3–11 muestra las fuerzas actuantes y resistentes en una tajada cualquiera. Allí W es el peso de la tajada, a es la aceleración producida por la fuerza sísmica, F_{wi} es la fuerza de presión de poros, T_i es la fuerza resistente tangente a la superficie de falla, N_i es la fuerza normal perpendicular a la superficie de falla, E^o son los empujes iniciales sobre las caras de las tajadas y R es el radio del círculo de falla.

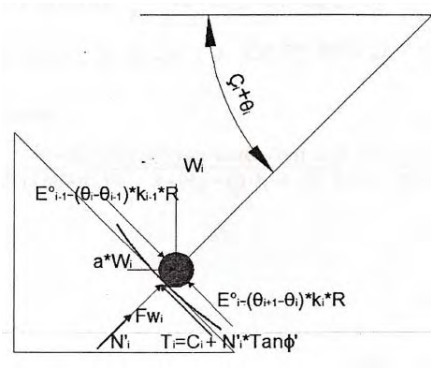


Figura 3–11. Fuerzas actuantes. Fuente: Sierra (2009).

Ahora bien, los empujes están dados por la fuerza elástica aportada por los resortes. Para determinarlos se necesita primero conocer la deformación de estos. Ver Figura 3–12.

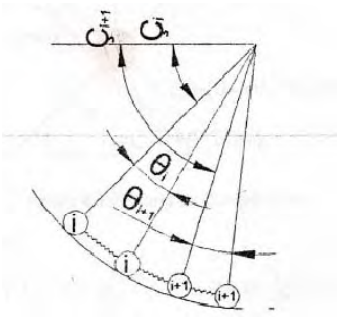


Figura 3–12. Deformación de los resortes. Fuente: Sierra (2009).

De acuerdo con la figura anterior, la longitud inicial está dada por:

$$Lr_i^o = (\varsigma_{i+1} - \varsigma_i)R \qquad EC(3–15)$$

Y la longitud final es:

$$Lr_i = [(\varsigma_{i+1} - \varsigma_i) + (\theta_{i+1} - \theta_i)]R \qquad EC(3–16)$$

es decir que:

$$Lr_i = Lr_i^o + (\theta_{i+1} - \theta_i)R \qquad EC(3–17)$$

Entonces las fuerzas de los resortes, es decir los empujes que actúan en las paredes de las tajadas, son:

$$E_i = E_i^o - (\theta_{i+1} - \theta_i)k_i R \qquad EC(3–18)$$

Donde *k* es la constante de rigidez del resorte.

Ahora bien, para el análisis de estabilidad emplea el método de equilibrio límite. Entonces las fuerzas actuantes están dadas por:

$$T_i = \left(E_{i-1}^{o} - E_i^{o}\right) - \left(\theta_i - \theta_{i-1}\right)k_i R + \left(\theta_{i+1} - \theta_i\right)k_i R + W_i\left[\cos\left(\varsigma_i + \theta_i\right) + asen\left(\varsigma_i + \theta_i\right)\right]$$

EC(3–19)

Y el factor de seguridad está dado por:

$$FS_i = \frac{F.\mathrm{Re}\,sistentes}{F.Actuantes}$$

EC(3–20)

Finalmente,

$$FS_i = \frac{C_i + W_i\left[sen\left(\varsigma_i + \theta_i\right) + a\cos\left(\varsigma_i + \theta_i\right)\right]\tan\phi_i' - F_{Wi}\tan\phi_i'}{\left(E_{i-1}^{o} - E_i^{o}\right) - \left(\theta_i - \theta_{i-1}\right)k_i R + \left(\theta_{i+1} - \theta_i\right)k_i R + W_i\left[\cos\left(\varsigma_i + \theta_i\right) + asen\left(\varsigma_i + \theta_i\right)\right]}$$

EC(3–21)

El método planteado por Sierra consiste en calcular la estabilidad de cada una de las tajadas para identificar si alguna está en movimiento. De ser así, se calcula el desplazamiento de la tajada mediante métodos numéricos y se corrobora su factor de seguridad.

3.4 Ferrari y otros – 2010

Elaboran un modelo numérico basado en un modelo viscoplástico Bingham que permite analizar los efectos que tiene la pata de un deslizamiento lento sobre su estabilidad y cinemática.

La masa deslizada es representada por dos bloques rígidos moviéndose sobre dos superficies de fallas planas las cuales interactúan a través de una frontera en común, como se muestra en la Figura 3–13.

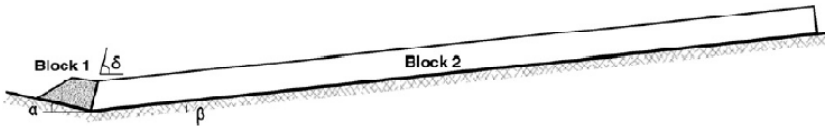


Figura 3–13. Geometría del talud falla planar – modelo Bingham. Fuente: Ferrari y otros (2010).

El bloque 1 representa la pata del deslizamiento, el bloque 2 es el resto del cuerpo y α y β son los ángulos de inclinación de la superficie de falla de la pata y del cuerpo respectivamente. Como el bloque 2 se mueve sobre la inclinación β y limita con la frontera del bloque 1 (frontera que permanece fija), suponen que el desplazamiento del bloque 2 se convierte en masa, la cual es trasferida al bloque 1. La frontera en común está inclinada un ángulo δ con respecto a la horizontal.

Ahora bien, las fuerzas que actúan en cada uno de los bloques se muestran en la Figura 3–14.

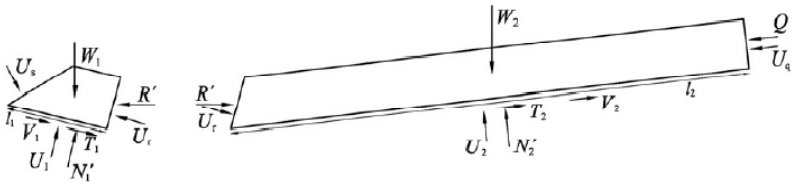


Figura 3–14. Fuerzas actuantes en los dos bloques. Fuente: Ferrari y otros (2010).

Allí W_1 y W_2 son los pesos de los bloques, U_1, U_2, U_r, U_s y U_q son las fuerzas del agua que actúan sobre las fronteras de los bloques, N'_1, T_1 y N'_2, T_2 son las fuerzas normal y cortante en la superficie de falla, R'es la fuerza de interacción entre bloques, V_1 y V_2 son las fuerzas viscosas actuando a lo largo de la superficie de falla y Q es una fuerza lateral que actúa sobre el bloque 2.

El análisis se inicia chequeando la estabilidad del sistema por medio del cálculo del factor de seguridad. Para ello utilizan el método de equilibrio límite usando el método de las cuñas. Aquí las fuerzas T_1 y T_2 están dadas por la resistencia al corte movilizada expresadas como:

$$T_1 = \frac{N'_1 \tan\varphi'_1}{F} \ , \ T_2 = \frac{N'_2 \tan\varphi'_2}{F} \qquad EC(3–22)$$

donde φ'_1 y φ'_2 es el ángulo de resistencia al corte sobre la base del bloque 1 y 2 respectivamente y F es el factor de seguridad.

Se considera que el sistema inicialmente está en reposo es decir que no se desarrollan las fuerzas viscosas. Entonces, las ecuaciones finales de equilibrio para cada uno de los bloques en dirección paralela a las inclinaciones α y β, son:

Bloque 1

$$R'_{per}\left(sen(\alpha+\delta)+\frac{\cos(\alpha+\delta)\tan\varphi'_1}{F}\right)+R'_{par}\left(\cos(\alpha+\delta)-\frac{sen(\alpha+\delta)\tan\varphi'_1}{F}\right)W_1\left(sen\,\alpha+\frac{\cos\alpha\tan\varphi'_1}{F}\right)+$$

$$\frac{U_1\tan\varphi'_1}{F}+U_r\left(sen(\alpha+\delta)+\frac{\cos(\alpha+\delta)\tan\varphi'_1}{F}\right)-\frac{U_{s,per}\tan\varphi'_1}{F}-U_{s,par}=0 \qquad EC(\ 3–23)$$

Bloque 2

$$R'_{per}\left(sen(\delta-\beta)+\frac{\cos(\delta-\beta)\tan\varphi'_2}{F}\right)+R'_{par}\left(\cos(\delta-\beta)-\frac{sen(\delta-\beta)\tan\varphi'_2}{F}\right)+$$

$$W_2\left(\frac{\cos\beta\tan\varphi'_2}{F}-sen\beta\right)-\frac{U_2\tan\varphi'_2}{F}+U_r\left(sen(\delta-\beta)+\frac{\cos(\delta-\beta)}{F}\right)-Q-U_q=0 \quad EC(3–24)$$

donde R'_{per}, R'_{par} y $U_{s,per}$, $U_{s,par}$ corresponden a la descomposición de la fuerza R' y U_s en dirección perpendicular y paralela al plano de frontera común y a la frontera izquierda del bloque 1, respectivamente.

Ahora, si el factor de seguridad es menor que 1, el análisis continúa con el movimiento de los bloques. Aquí, la resistencia cortante disponible a lo largo de las inclinaciones α, β y δ está completamente movilizada, por lo tanto:

$$T_1 = N'_1 \tan\varphi'_1, \qquad T_2 = N'_1 \tan\varphi'_2, \qquad R'_{par} = R'_{per} \tan\varphi'_\delta \qquad EC(3–25)$$

Aplicando el principio de la conservación del momentum lineal en la frontera en común, se tiene:

Bloque 1

$$R'_{par,1} - T_1 - V_1 - W_1 sen\alpha + U_r sen(\alpha+\delta) - U_{s,par} = m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} \qquad EC(3–26)$$

Bloque 2

$$-R'_{par,2} - T_2 - V_2 - W_2 sen\beta + Q + U_q - U_r sen(\delta-\beta) = m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} \qquad EC(3–27)$$

donde m_1 y m_2 son las masas de los bloques 1 y 2, respectivamente y s_1 y s_2 son los desplazamientos del bloque 1 en dirección a la inclinación α y del bloque 2 en dirección a la inclinación β, respectivamente. Además, de acuerdo con la Figura 3–15, $R'_{par,1}$ y $R`_{par,2}$ están dados por:

$$R'_{par,1} = R'_{per}\, sen(\alpha+\delta) + R'_{par} \cos(\alpha+\delta)$$

$$R'_{per,1} = -R'_{per} \cos(\alpha+\delta) + R'_{par}\, sen(\alpha+\delta)$$

$$R'_{par,2} = R'_{per}\, sen(\delta - \beta) + R'_{par} \cos(\delta - \beta)$$

$$R'_{per,2} = R'_{per} \cos(\delta - \beta) - R'_{par}\, sen(\delta - \beta) \qquad EC(3–28)$$

y las fuerzas viscosas V_1 y V_2, según el modelo Bingham, están dadas por:

$$V_1 = \mu_1 \frac{l_1}{z_1} \frac{ds_1}{dt}, \qquad V_2 = \mu_2 \frac{l_2}{z_2} \frac{ds_2}{dt} \qquad EC(3–29)$$

siendo μ_1 y μ_2 las viscosidades, z_1 y z_2 el espesor de la zona de corte, l_1 y l_2 la longitud de la base de los bloques, ds_1/dt y ds_2/dt las velocidades de los bloques.

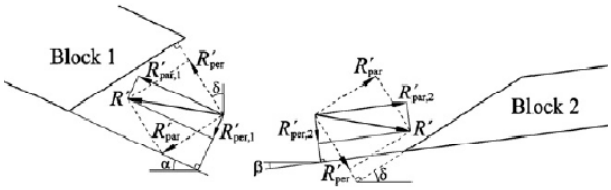


Figura 3–15. Componentes de la fuerza de interacción R´. Fuente: Ferrari y otros (2010).

Luego, la Ecuación 3-26 y 3-27 escritas en términos de R'_{per} y R'_{par} se expresan como:

$$R'_{per} = \frac{1}{a_1}\left(m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} + b_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} + c_1 \right) \qquad EC(3–30)$$

$$R'_{per} = \frac{1}{a_2}\left(m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} + b_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} + c_2 \right) \qquad EC(3–31)$$

donde:

$$a_1 = sen(\alpha+\delta)(1-\tan\varphi'_1\tan\varphi'_\delta)+\cos(\alpha+\delta)(\tan\varphi'_1+\tan\varphi'_\delta)$$

$$a_2 = sen(\delta-\beta)(\tan\varphi'_\delta\tan\varphi'_2-1)-\cos(\delta-\beta)(\tan\varphi'_\delta+\tan\varphi'_2)$$

$$b_1 = \frac{\mu_1 l_1}{z_1}$$

$$b_2 = \frac{\mu_2 l_2}{z_2}$$

$$c_1 = W_1(\cos\alpha\tan\varphi'_1+sen\,\alpha)-U_r(\cos(\alpha+\delta)\tan\varphi'_1+sen(\alpha+\delta))-U_1\tan\varphi'_1+U_{s,per}\tan\varphi'_1+U_{s,par}$$

$$c_2 = W_2(\cos\beta\tan\varphi'_2+sen\beta)+U_r(sen(\delta-\beta)+\cos(\delta-\beta)\tan\varphi'_2)-U_q+U_2\tan\varphi'_2-Q$$

Igualando las Ecuaciones 3-30 y 3-31 se obtiene:

$$a_2 m_1\frac{d^2 s_1}{dt^2}+a_2 b_1\frac{ds_1}{dt}+a_2 c_1 = a_1 m_2\frac{d^2 s_2}{dt^2}+a_1 b_2\frac{ds_2}{dt}+a_1 c_2 \qquad EC(3\text{–}32)$$

Ahora, considerando compatibilidad de deformaciones en la frontera (los bloques permanecen en contacto sin superponerse), se tiene que:

$$s_1 = s_2\frac{sen(\delta-\beta)}{sen(\alpha+\delta)} \qquad EC(3\text{–}33)$$

Finalmente, reemplazando la Ecuación 3-33 en 3-32 se tiene que:

$$\left(a_1 m_2 - a_2 m_1\frac{sen(\delta-\beta)}{sen(\alpha+\delta)}\right)\frac{d^2 s_2}{dt^2}+\left(a_1 b_2 - a_2 b_1\frac{sen(\delta-\beta)}{sen(\alpha+\delta)}\right)\frac{ds_2}{dt}+a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0 \qquad EC(3\text{–}34)$$

Como la ecuación anterior no presenta solución analítica se utiliza el método de las diferencias finitas para resolverla.

De acuerdo con la suposición de que la frontera en común es fija, los desplazamientos de la masa 2 son transferidos al bloque 1 como se muestra a continuación:

$$m_1(t) = m_1^0 + \Delta m_2(t) - \Delta m_e(t) \qquad EC(3–35)$$

$$m_2(t) = m_2^0 + \Delta m_2(t) \qquad EC(3–36)$$

donde m^o_1 y m^o_2 son las masas iniciales de los bloques, Δm_2 es la masa transferida del bloque 2 al bloque 1 (la cual está en función de los desplazamientos del sistema) y Δm_e tiene en cuenta la reducción de la masa de la pata del talud por procesos de excavación o erosión.

CAPITULO 4
ANÁLISIS VISCOPLÁSTICOS EN LA CONTENCIÓN DE TALUDES

Se considera en este capítulo el desarrollo del modelo matemático que describe el problema del movimiento de un talud de comportamiento viscoplástico deslizado sobre una superficie de falla plana contenido por un muro de gravedad. El talud es representado por cierto número de bloques (o tajadas) en contacto unos con los otros, libres de cambiar de forma y manteniendo un volumen constante a lo largo de la trayectoria plana. Los bloques son sustituidos por un modelo mecánico equivalente representado por una masa concentrada soportada lateralmente por el modelo viscoelástico de Kelvin Voigt. Se formulan las ecuaciones de movimiento para este sistema empleando la ley del movimiento de Newton.

Puede suceder que se presente falla interna del suelo por el aumento del empuje entre tajadas en comparación a la fuerza resistente del suelo; por ello se desarrolla además, el análisis de falla interna encontrando dicha fuerza.

Finalmente se plantea el análisis para determinar la altura de los bloques, la variación de la fuerza del agua en la base de los bloques y la variación del perfil del terreno.

4.1 Definición del problema

La colocación de muros de gravedad como obras de contención en laderas de movimiento lento en obras de infraestructura vial, por lo general, no han funcionado satisfactoriamente. Por lo tanto se plantea la idea de intervenir la ladera no por uno, como es habitual, sino por varios muros colocados a lo largo de la misma para contener de una manera efectiva la masa deslizada (ver Figura 4–1).

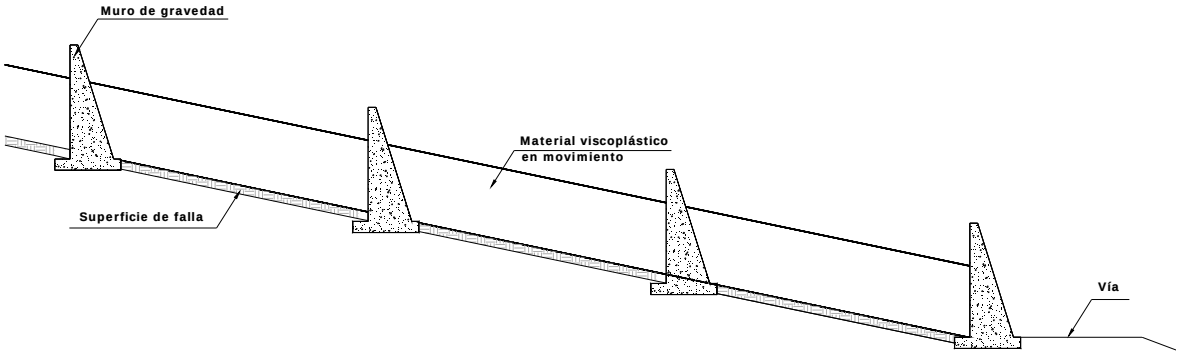


Figura 4–1. Muros sucesivos colocados a lo largo de la ladera.

Es así que el problema se reduce al análisis del movimiento de una masa deslizada sobre una superficie de falla plana limitada por un muro de gravedad. La masa es dividida en bloques (o tajadas) verticales en los que se quiere evaluar los desplazamientos, velocidades, aceleraciones y su cambio de forma. Se asume que antes de la colocación del muro la ladera ya estaba en movimiento, es decir que su factor de seguridad es menor que 1.

Para llevar a cabo el análisis del movimiento es importante, primero, definir la geometría de la masa deslizada, las fuerzas actuantes en el problema y las características del suelo deslizado y de la superficie de falla.

4.1.1 Geometría del problema

La Figura 4–2 muestra la geometría de la sección típica para el análisis del movimiento. Allí α es el ángulo de inclinación del talud, t es el espesor de la masa, medido perpendicularmente a la superficie de falla, y Sc es la separación entre muros tomada desde el centro de gravedad de cada uno de ellos. El talud está referenciado a un sistema coordenado X-Z.

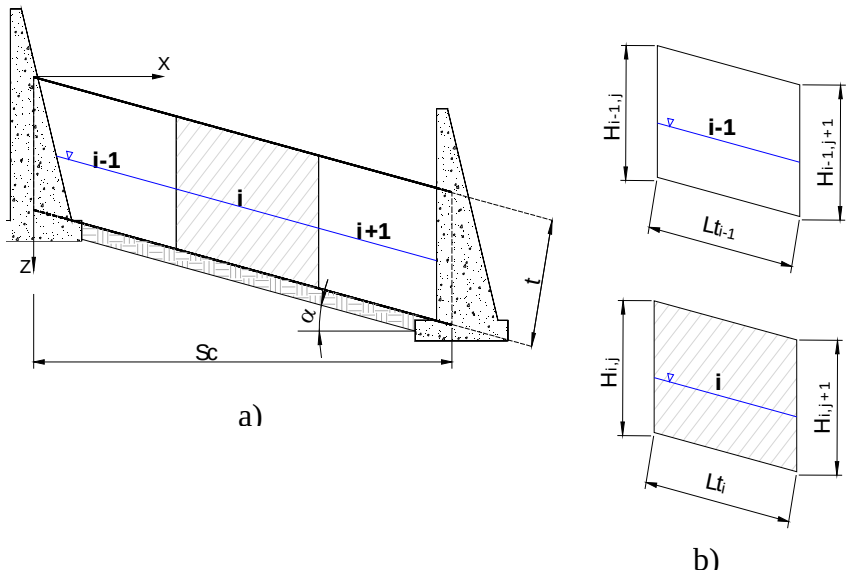


Figura 4–2. Sección típica de análisis.

a) Geometría del talud. b) Geometría de la tajada i-1 e i.

También se muestra la nomenclatura adoptada para la masa de suelo discretizada. La primera tajada se denota con el subíndice *i-1*, la tajada central con el subíndice *i* y la que limita con el muro *i+1*. La longitud se identifica como *Lt*, seguida del subíndice *i*, según la ubicación de la tajada. La altura $H_{i,j}$ y $H_{i,j+1}$ corresponde a la pared anterior y posterior de la tajada *i* respectivamente.

4.1.2 Fuerzas actuantes

En un bloque actúan fuerzas causadas por las acciones y otras generadas por las reacciones como se indica en la Figura 4-3. Las primeras son debidas a las fuerzas de campo, es decir la fuerza causada por el peso de la tajada y la fuerza ejercida por el agua. Las reacciones corresponden a la fuerza resistente, la fuerza normal y la fuerza viscosas, que actúan en la base de la tajada. También corresponden a los empujes que actúan perpendicular a las paredes del bloque.

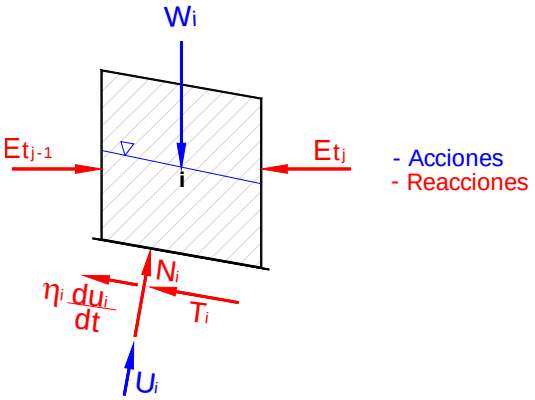


Figura 4–3. Fuerzas actuantes en la tajada.

Peso de las tajadas Wi

El peso está dado por el volumen de las tajadas y el peso unitario del suelo, definido como:

$$W_i = \frac{\left(H_{i,j} + H_{i,j+1}\right)}{2} Lt_i \cos\alpha\gamma_t \qquad EC(4\text{–}1)$$

Fuerza del agua Ui

Las presiones periféricas o presiones de contorno ejercidas por el agua sobre el bloque *i* se muestran en la Figura 4-4. Allí las presiones horizontales sobre las caras verticales se anulan y la presión de poros[1] u_i en la base del elemento se expresa como:

$$u_i = Hw\gamma_w \cos^2 \alpha \qquad EC(4–2)$$

Entonces la fuerza del agua es:

$$U_i = u_i A_i \qquad EC(4–3)$$

Donde A_i es el área en la base del bloque.

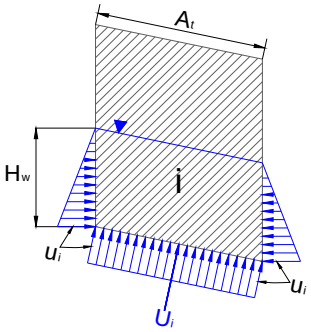


Figura 4–4. Presiones de poros periféricas.

Fuerza resistente Ti

Para efectos del trabajo se decide emplear el modelo viscoplástico de Coulomb (ver Capítulo 2) como lo expresa la siguiente ecuación:

[1] En el Apéndice 1 se hace el desarrollo de la presión de poros en un talud infinito.

$$T_i = c'_i L_i + N'_i \tan\phi' + \eta_i \frac{du_i}{dt} \qquad EC(4–4)$$

4.1.3 Características del suelo

Se considera que la masa en movimiento está constituida por un suelo homogéneo e isotrópico que presenta propiedades friccionantes, viscosas y elásticas constantes a lo largo de la superficie de falla. Estas propiedades son:

- Peso unitario total [KPa]: γt
- Cohesión efectiva [KPa]: c'
- Ángulo de fricción interna efectivo [º]: ϕ'
- Viscosidad dinámica [KPa.s]: μ
- Módulo de Elasticidad [KPa]: E

4.2 Modelo matemático de la contención de taludes viscoplásticos

Como ya se había mencionado, la masa discretizada es transformada en un sistema mecánico equivalente conformado por masas concentradas unidas lateralmente a resortes y a amortiguadores viscosos (modelo viscoelástico Kelvin Voigt) como se muestra en la Figura 4–5. Vale la pena anotar que la longitud de las tajadas está representada por la longitud de los resortes o de los amortiguadores. Además las masas son referenciadas a un sistema coordenado transformado *U-V* en dirección del movimiento para facilitar el cálculo de los desplazamientos. En el modelo se considera que el muro es infinitamente rígido.

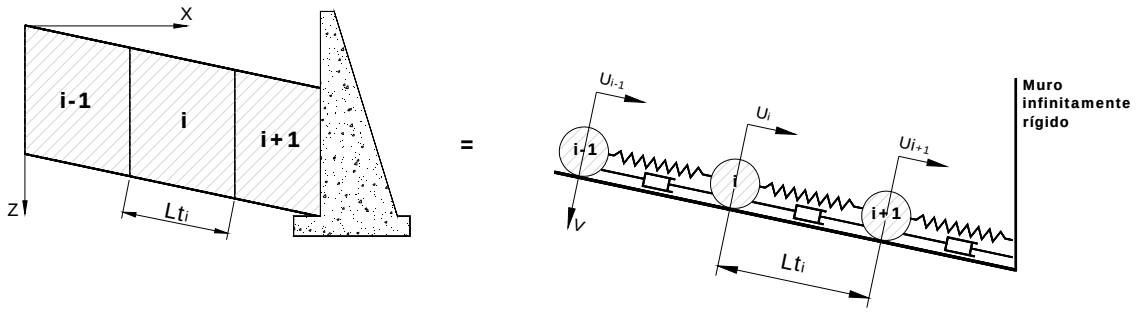


Figura 4–5. Modelo mecánico equivalente.

Una vez que las masas inician el movimiento, los resortes y amortiguadores empiezan trabajar generando unas reacciones en las masas y en el muro. Estas reacciones representan el empuje sobre las paredes de los bloques, en el sentido del movimiento.

A continuación se hace el análisis de deformación del resorte, que para el caso es el mismo del amortiguador viscoso, y se determinan los empujes para las tajadas *i-1*, *i* e *i+1*.

4.2.1 Deformación de los resortes

La Figura 4–6 muestra la deformación que sufre el resorte K_j. Éste se encuentra unido a la masa *i+1* y a la masa *i*, cuyas posiciones están dadas por las abscisas U_{i+1} y U_i (para un tiempo inicial). Después de un lapso, las masas se desplazan un valor de u_{i+1} y u_i quedando ahora referenciadas en las abscisas U_{i+1}' y U_i'. De acuerdo con lo anterior la longitud inicial del resorte K_j está dada por:

$$Lt_i = U_{i+1} - U_i \qquad EC(4–5)$$

y la longitud final es:

$$Lt_i' = U_{i+1}' - U_i' \qquad EC(4–6)$$

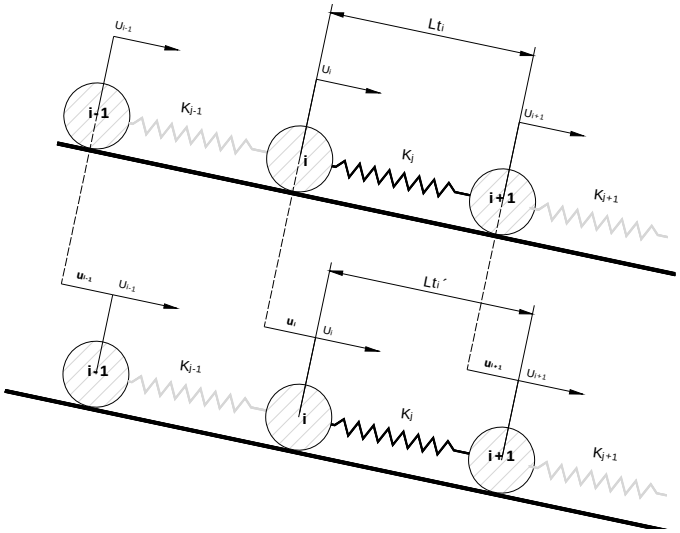


Figura 4–6. Deformación del resorte Kj.

pero se sabe que:

$$U_{i+1}' = U_{i+1} + u_{i+1} \quad y$$

$$U_i' = U_i + u_i \qquad EC(4–7)$$

entonces:

$$Lt_i' = \left(U_{i+1} + u_{i+1}\right) - \left(U_i + u_i\right) \qquad EC(4–8)$$

reorganizando términos, se tiene:

$$Lt_i' = Lt_i + (u_{i+1} - u_i) \qquad EC(4–9)$$

Ahora bien, como las fuerzas que actúan sobre las masas *i* e *i+1* hacen que el resorte se comprima (se acorte), éste presenta una deformación dada por:

$$\Delta L_j = Lt_i - Lt_i' \qquad EC(4–10)$$

reemplazando la Ecuación 4-9 en 4-10 se tiene:

$$\Delta L_j = Lt_i - Lt_i - (u_{i+1} - u_i) \qquad EC(4–11)$$

reorganizando los términos, la deformación del resorte K_j es:

$$\Delta L_j = u_i - u_{i+1} \qquad EC(4–12)$$

De forma similar se procede con el resorte K_{j-1}, donde su longitud y deformación está dada por las siguientes expresiones:

$$Lt_{i-1}' = Lt_{i-1} + (u_i - u_{i-1}) \qquad EC(4–13)$$

$$\Delta L_{j-1} = u_{i-1} - u_i \qquad EC(4–14)$$

La Figura 4–7 indica la deformación del resorte K_{j+1}. Allí la longitud inicial está dada por:

$$Lt_{i+1} = U_{muro} - U_{i+1} \qquad EC(4–15)$$

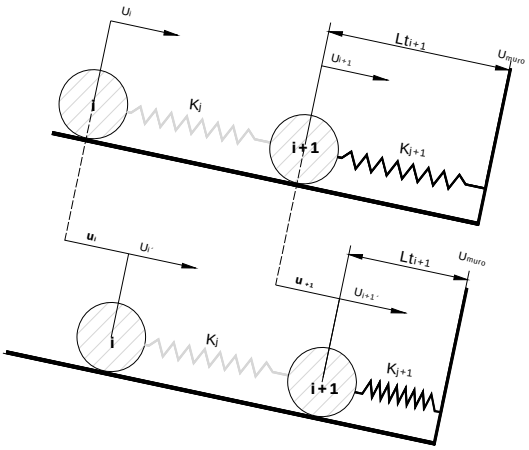


Figura 4–7. Deformación del resorte Kj+1.

y la longitud final es:

$$Lt_{i+1}' = U_{muro}' - U_{i+1}' \qquad EC(4–16)$$

y se sabe que:

$$U_{i+1}' = U_{i+1} + u_{i+1} \qquad y$$

$$U_{muro}' = U_{muro} \qquad EC(4–17)$$

entonces:

$$Lt_{i+1}' = Lt_{i+1} - u_{i+1} \qquad y$$

$$\Delta L_{j+1} = Lt_{i+1} - Lt_{i+1}' \qquad EC(4–18)$$

así que:

$$\Delta L_{j+1} = u_{i+1} \qquad EC(4–19)$$

Se presenta, a continuación, un resumen de las ecuaciones que representan la longitud de las tajadas y la deformación de los resortes.

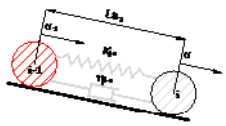
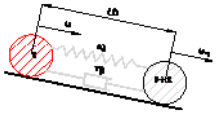
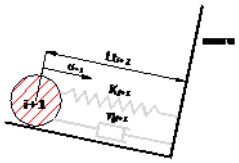
Bloque	Longitud de la tajada	Deformación del resorte
	$Lt_{i-1}' = Lt_{i-1} - (u_i - u_{i-1})$	$\Delta L_{j-1} = (u_{i-1} - u_i)$
	$Lt_i' = Lt_i - (u_{i+1} - u_i)$	$\Delta L_j = (u_i - u_{i+1})$
	$Lt_{i+1}' = Lt_{i+1} - u_{i+1}$	$\Delta L_{j+1} = u_{i+1}$

Tabla 4–1. Longitud de la tajada y deformación del resorte.

4.2.2 Empujes entre tajadas

Considerando la tajada *i*, los empujes que actúan sobre ella son causados por la tajada anterior, *i-1*, y la reacción del empuje de la tajada *i* sobre la tajada *i+1*. Es importante recordar que estos empujes se encuentran en el sentido del movimiento.

Los empujes están constituidos por la componente elástica y viscosa del suelo deslizado, que para el sistema equivalente estará representado por el coeficiente de rigidez del resorte *K* y el coeficiente de amortiguación η, como se muestra en la siguiente figura.

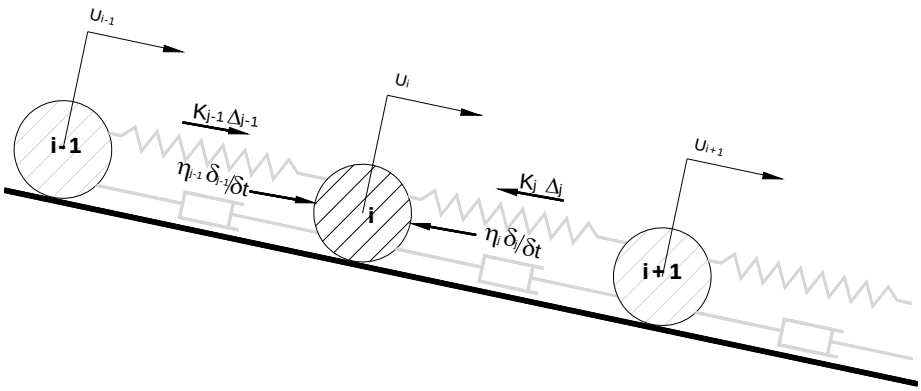


Figura 4–8. Representación de los empujes en la tajada i.

De acuerdo con lo anterior, el empuje E_{j-1} y E_j que actúan sobre las paredes anterior y posterior de la tajada *i* se calcula como:

$$E_{j-1} = K_{j-1}\Delta L_{j-1} + \eta_{j-1}\frac{d}{dt}\Delta L_{j-1} \qquad EC(4–20)$$

$$E_j = K_j\Delta L_j + \eta_j\frac{d}{dt}\Delta L_j \qquad EC(4–21)$$

Ahora, reemplazando los valores de la deformación ΔL_j *y* ΔL_{j-1} según la Ecuación 4-12 y 4-14 se tiene:

$$E_{j-1} = K_{j-1}\left(u_{i-1} - u_i\right) + \eta_{j-1}\frac{d}{dt}\left(u_{i-1} - u_i\right) \qquad EC(4–22)$$

$$E_j = K_j\left(u_i - u_{i+1}\right) + \eta_j\frac{d}{dt}\left(u_i - u_{i+1}\right) \qquad EC(4–23)$$

En seguida se presenta el resumen de las ecuaciones de los empujes actuantes sobre los bloques *i-1*, *i* e *i+1*.

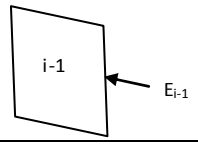
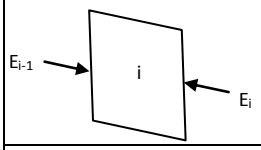
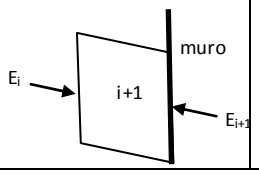
Bloque	Empuje pared anterior	Empuje pared posterior
		$E_{j-1}=K_{j-1}(u_{i-1}-u_i)+\eta_{j-1}d/dt(u_{i-1}-u_i)$
	$E_{j-1}=K_{j-1}(u_{i-1}-u_i)+\eta_{j-1}d/dt(u_{i-1}-u_i)$	$E_j=K_j(u_i-u_{i+1})+\eta_j d/dt(u_i-u_{i+1})$
	$E_j=K_j(u_i-u_{i+1})+\eta_j d/dt(u_i-u_{i+1})$	$E_{j+1}=K_{j+1}(u_{i+1})+\eta_{j+1}d/dt(u_{i+1})$

Tabla 4–2. Empujes sobre los bloques.

4.2.3 Ecuaciones de movimiento

Se supone inicialmente que la masa del suelo se desliza con una velocidad constante y que en algún momento de la historia del movimiento, la masa experimenta un cambio en su velocidad, quizás por la variación de los niveles del agua en el suelo después de un fuerte aguacero o debido a la disminución de la resistencia en la superficie de falla por cambios litológicos. Independientemente de la causa del cambio en la velocidad, el suelo se acelera provocando un desequilibrio entre las fuerzas actuantes y las resistentes involucradas en la masa de suelo.

Con el propósito de simular este comportamiento se emplean las ecuaciones fundamentales de la dinámica (las ecuaciones de movimiento de Newton) aplicadas al sistema mecánico equivalente masa-resorte-amortiguador para el bloque *i-1*, *i* e *i+1*, que reflejan la naturaleza del movimiento oscilatorio amortiguado del sistema. En seguida se hace un breve resumen

de las características del movimiento oscilatorio y luego se continúa con la formulación de las ecuaciones de movimiento.

Movimiento oscilatorio

Como es bien sabido el movimiento oscilatorio amortiguado presenta tres casos que dependen de la variación del coeficiente de amortiguación y el coeficiente de rigidez del resorte: el movimiento sobreamortiguado, el movimiento críticamente amortiguado y subamortiguado.

De acuerdo con la ecuación de movimiento oscilatorio amortiguado se tiene:

$$m\frac{d^2u}{dt^2}+\eta\frac{du}{dt}+Ku=0 \qquad EC(4–24)$$

La solución analítica de la anterior ecuación diferencial de segundo orden es de la forma:

$$u(t)=C_1e^{\frac{1}{2m}\left[\sqrt{\eta^2-4Km}-\eta\right]t}+C_2e^{\frac{-1}{2m}\left[\sqrt{\eta^2-4Km}+\eta\right]t} \qquad EC(4–25)$$

Entonces, para que se presente el movimiento sobreamortiguado se debe cumplir con la condición $\eta - 4Km > 0$. Aquí la masa tiende a su posición de reposo cada vez más lentamente (ver Figura 4–9 a) por ser la fuerza de amortiguamiento mayor que la producida por el resorte.

En el movimiento críticamente amortiguado la condición es $\eta - 4Km = 0$, lo que implica que la fuerza de amortiguamiento es igual a la causada por la elasticidad. La masa también tiende a su posición de equilibrio con el tiempo, pero cualquier modificación en los parámetros causará que el movimiento cambie a sobreamortiguado o a subamortiguado, por lo que este movimiento es un estado límite. Ver Figura 4–9 b.

Para el caso del movimiento subamortiguado la condición a cumplir es η - 4Km < 0, donde la fuerza de amortiguamiento es menor que la causada por la elasticidad, generando un movimiento vibratorio que se detendrá teóricamente cuando el tiempo tienda a infinito, como se muestra en la Figura 4–9 c.

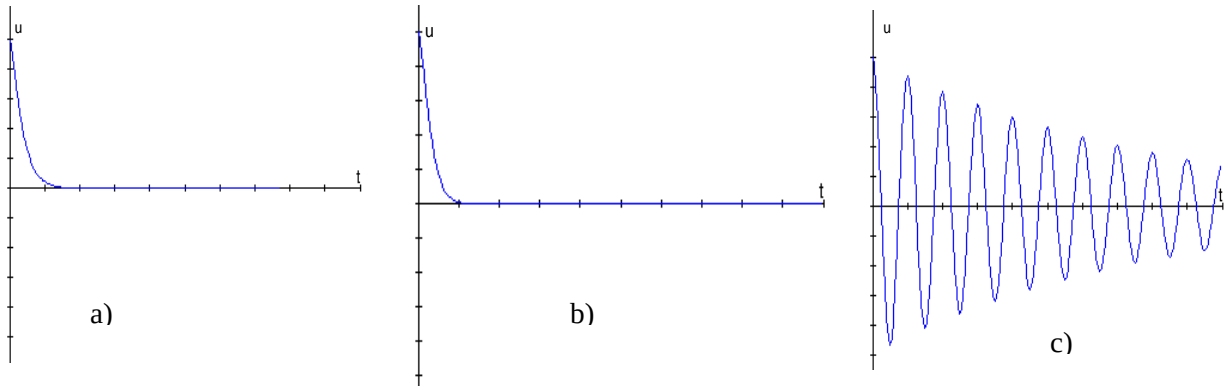


Figura 4–9. Movimiento oscilatorio amortiguado.
a) Sobreamortiguado. b) Críticamente amortiguado. c) Subamortiguado.

Primera tajada

La Figura 4–10 muestra las fuerzas actuantes en la primera tajada. Debido a que no se presenta movimiento en el sentido *V* (perpendicular al movimiento), la sumatoria de fuerzas en este sentido es:

$$\sum F_V = 0 = N_{i-1} + U_{i-1} - W_{i-1}\cos\alpha \qquad EC(4–26)$$

entonces:

$$N_{i-1} = W_{i-1}\cos\alpha - U_{i-1} \qquad EC(4–27)$$

La fuerza resistente en la base de la tajada es:

$$T_{i-1} = N_{i-1}{}'\tan\phi' + \eta_{i-1}\frac{du_{i-1}}{dt} \qquad EC(4–28)$$

y reemplazando la Ecuación 4-27 en ésta se tiene:

$$T_{i-1} = (W_{i-1}\cos\alpha - U_{i-1})\tan\phi' + \eta_{i-1}\frac{du_{i-1}}{dt} \qquad EC(4–29)$$

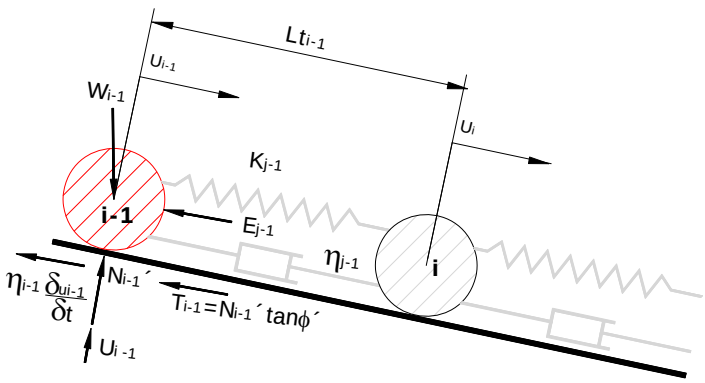


Figura 4–10. Fuerzas actuantes en la primera tajada.

Ahora, el empuje está dado por:

$$E_{j-1} = K_{j-1}\left(u_{i-1} - u_i\right) + \eta_{j-1}\frac{d}{dt}\left(u_{i-1} - u_i\right) \qquad EC(4–30)$$

La ecuación de la dinámica del movimiento dice que:

$$Fneta = m.a \qquad EC(4–31)$$

donde:

$$\overrightarrow{Fneta} = W_{i-1}sen\alpha - E_{j-1} - T_{i-1} \qquad EC(4–32)$$

entonces:

$$W_{i-1} sen\alpha - E_{j-1} - T_{i-1} = m_{i-1} \frac{d^2 u_{i-1}}{dt^2} \qquad EC(4–33)$$

organizando los términos,

$$m_{i-1} \frac{d^2 u_{i-1}}{dt^2} + E_{j-1} + T_{i-1} = W_{i-1} sen\alpha \qquad EC(4–34)$$

Reemplazando la Ecuación 4-29 y 4-30 en la Ecuación 4-34, dividiendo a ambos lados de la ecuación por m_{i-1} y reorganizando los términos se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{d^2 u_{i-1}}{dt^2} + C_{i-1} \frac{du_{i-1}}{dt} - C_{j-1} \frac{du_i}{dt} = \overline{T} + A\overline{U}_{i-1} - \overline{K}_{j-1} u_{i-1} + \overline{K}_{j-1} u_i \qquad EC(4–35)$$

donde:

$$C_{i-1} = \left(\frac{\eta_{i-1} + \eta_{j-1}}{m_{i-1}} \right) \qquad \overline{T} = g\left(sen\alpha - \cos\alpha \tan\phi' \right) \qquad \overline{K}_{j-1} = \left(\frac{K_{j-1}}{m_{i-1}} \right)$$

$$C_{j-1} = \left(\frac{\eta_{j-1}}{m_{i-1}} \right) \qquad A = \left(\frac{\tan\phi'}{m_{i-1}} \right)$$

Tajada central

De forma similar, para la tajada *i* se tiene:

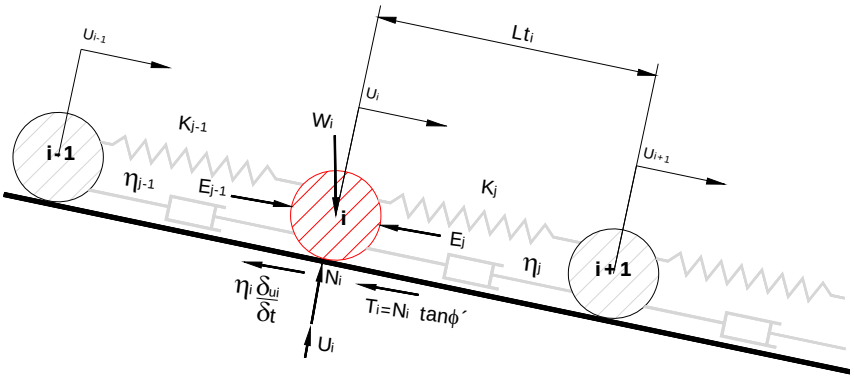


Figura 4–11. Fuerzas actuantes en la tajada central.

La fuerza resistente es:

$$T_i = (W_i \cos\alpha - U_i)\tan\phi' + \eta_i \frac{du_i}{dt} \qquad EC(4–36)$$

Los empujes están dados por:

$$E_{j-1} = K_{j-1}\left(u_{i-1} - u_i\right) + \eta_{j-1}\frac{d}{dt}\left(u_{i-1} - u_i\right) \quad , \quad E_j = K_j\left(u_i - u_{i+1}\right) + \eta_j \frac{d}{dt}\left(u_i - u_{i+1}\right) \qquad EC(4–37)$$

Entonces la ecuación de movimiento está dada por:

$$m_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} + E_j - E_{j-1} + T_i = W_i sen\alpha \qquad EC(4–38)$$

Reemplazando la Ecuación 4-36 y 4-37 en la Ecuación 4-38 y dividiendo nuevamente por el peso de la tajada se obtiene lo siguiente:

$$-C_{j-1}\frac{du_{i-1}}{dt} + \frac{d^2 u_i}{dt^2} + C_i \frac{du_i}{dt} - C_j \frac{du_{i+1}}{dt} = \overline{T} + A\overline{U}_i + \overline{K}_{j-1}u_{i-1} - \left(\overline{K}_{j-1} + \overline{K}_j\right)u_i + \overline{K}_j u_{i+1} \qquad EC(4–39)$$

donde:

$$C_{j-1} = \left(\frac{\eta_{j-1}}{m_i}\right) \qquad \overline{T} = g\left(sen\alpha - \cos\alpha \tan\phi'\right) \qquad \overline{K}_{j-1} = \left(\frac{K_{j-1}}{m_i}\right)$$

$$C_i = \left(\frac{\eta_i + \eta_j + \eta_{j-1}}{m_i}\right) \qquad A = \left(\frac{\tan\phi'}{m_i}\right) \qquad \overline{K}_j = \left(\frac{K_j}{m_i}\right)$$

$$C_j = \left(\frac{\eta_j}{m_i}\right)$$

Última tajada

La siguiente figura indica las fuerzas actuantes en la tajada *i+1* colindante al muro.

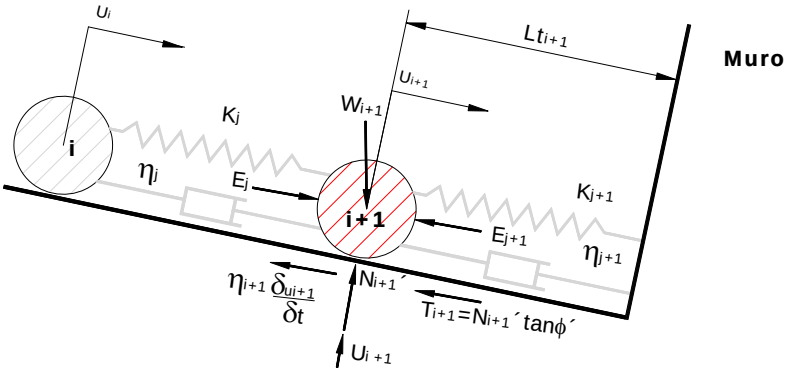


Figura 4–12 Fuerzas actuantes en la última tajada.

De acuerdo con ella se tiene que:

$$T_{i+1} = (W_{i+1}\cos\alpha - U_{i+1})\tan\phi' + \eta_{i+1}\frac{du_{i+1}}{dt} \qquad EC(4–40)$$

Los empujes están dados por:

$$E_{j+1} = K_{j+1}\left(u_{i+1}\right) + \eta_{j+1}\frac{d}{dt}\left(u_{i+1}\right)$$

$$E_j = K_j\left(u_i - u_{i+1}\right) + \eta_j\frac{d}{dt}\left(u_i - u_{i+1}\right) \qquad EC(4–41)$$

Aplicando la ecuación de movimiento se encuentra:

$$m_{i+1}\frac{d^2u_{i+1}}{dt^2} + E_{j+1} - E_j + T_{i+1} = W_{i+}sen\alpha \qquad EC(4–42)$$

Reemplazando la Ecuación 4-40 y 4-41 en la Ecuación 4-42, dividiendo por el peso de la tajada y reorganizando los términos se encuentra lo siguiente:

$$-C_j\frac{du_i}{dt} + \frac{d^2u_{i+1}}{dt^2} + C_{i+1}\frac{du_{i+1}}{dt} = \overline{T} + A\overline{U}_{i+1} + \overline{K}_j u_i - \left(\overline{K}_j + \overline{K}_{j+1}\right)u_{i+1} \qquad EC(4–43)$$

donde:

$$C_j = \left(\frac{\eta_j}{m_{i+1}}\right) \qquad \overline{T} = g\left(sen\alpha - \cos\alpha\tan\phi'\right) \qquad \overline{K}_j = \left(\frac{K_j}{m_{i+1}}\right)$$

$$C_{i+1} = \left(\frac{\eta_{i+1} + \eta_{j+1} + \eta_j}{m_{i+1}}\right) \qquad A = \left(\frac{\tan\phi'}{m_{i+1}}\right) \qquad \overline{K}_{j+1} = \left(\frac{K_{j+1}}{m_{i+1}}\right)$$

En resumen, las expresiones anteriores forman un sistema de *n* ecuaciones diferenciales de segundo orden con n incógnitas como se muestra en seguida:

$$\frac{d^2u_{i-1}}{dt^2}+C_{i-1}\frac{du_{i-1}}{dt}-C_{j-1}\frac{du_i}{dt}=\overline{T}+A\overline{U}_{i-1}-\overline{K}_{j-1}u_{i-1}+\overline{K}_{j-1}u_i$$

$$-C_{j-1}\frac{du_{i-1}}{dt}+\frac{d^2u_i}{dt^2}+C_i\frac{du_i}{dt}-C_j\frac{du_{i+1}}{dt}=\overline{T}+A\overline{U}_i+\overline{K}_{j-1}u_{i-1}-\left(\overline{K}_{j-1}+\overline{K}_j\right)u_i+\overline{K}_ju_{i+1} \qquad EC(4–44)$$

… … … … … … …. …. ….

$$-C_j\frac{du_i}{dt}+\frac{d^2u_{i+1}}{dt^2}+C_{i+1}\frac{du_{i+1}}{dt}=\overline{T}+A\overline{U}_{i+1}+\overline{K}_ju_i-\left(\overline{K}_j+\overline{K}_{j+1}\right)u_{i+1}$$

Las incógnitas son, en cada tiempo, los desplazamientos de las tajadas en que se divide la masa.

Debido a la complejidad del sistema para ser resuelto analíticamente, es necesario usar el método numérico de las diferencias finitas.

Condiciones de frontera

La frontera del problema, de la masa deslizada, está representada por las condiciones cinemáticas conocidas antes de suceder el primer movimiento; es decir, la velocidad inicial (V_o) y el desplazamiento inicial (u_o) para cada tajada.

La velocidad inicial es constante (Vcte) y se expresa como:

$$\frac{du_{i-1}}{dt}=\frac{du_i}{dt}=....=\frac{du_{i+1}}{dt}=...=\frac{du_{i+n-1}}{dt}=Vcte \qquad EC(4–45)$$

Asimismo, el valor del desplazamiento inicial es:

$$u_{i-1}=u_i=....=u_{i+1}=...=u_{i+n-1}=u_o \qquad EC(4–46)$$

4.2.4 Falla interna del suelo

El suelo deslizado podría fallar internamente como consecuencia del incremento en los empujes (debido a la restricción del movimiento por la colocación del muro de gravedad) con respecto al empuje resistente del suelo. La Figura 4–13 muestra las fuerzas actuantes en un elemento de suelo fallado; se asume flujo paralelo al talud.

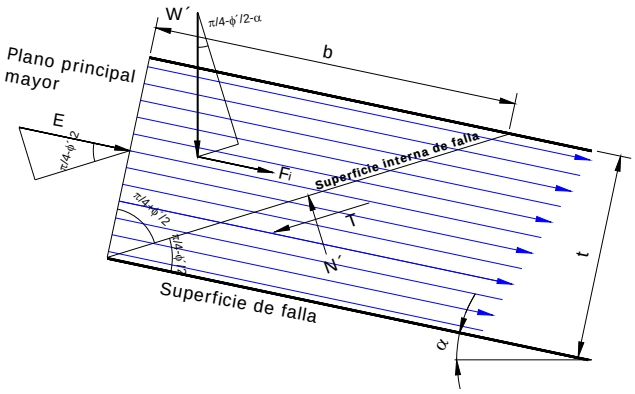


Figura 4–13. Fuerzas actuantes en un elemento de suelo fallado.

Allí $W´$ es el peso sumergido de la cuña, F_f es la fuerza de filtración, T es la fuerza resistente sobre la superficie de falla interna, $N´$ es la fuerza normal a la superficie de falla y E es el empuje. El plano de falla está inclinado $45+\phi´/2$ con respecto al plano principal mayor en donde actúa el empuje E.

Utilizando el método de las fuerzas de filtración más el peso sumergido y haciendo equilibrio de fuerzas se tiene:

En sentido de la fuerza resistente

$$\sum F_T = 0 = E\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right) - W' sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}-\alpha\right) + F_f \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right) - T \qquad EC(4–47)$$

donde:

$$W' = \frac{\gamma_b t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right) \quad y \quad F_f = \gamma_w sen\alpha V \qquad EC(4–48)$$

Siendo γ_b el peso unitario sumergido, ϕ' ángulo de fricción efectivo del suelo, t el espesor del suelo y V el volumen de la cuña.

Entonces:

$$T = -\frac{\gamma_b t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right) sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}-\alpha\right) + \gamma_w \frac{t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right) sen\alpha + E\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right) \qquad EC(4–49)$$

En sentido normal a la superficie de falla

$$\sum N = 0 = -Esen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right) - W'\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}-\alpha\right) - F_f\, sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right) + N \qquad EC(4–50)$$

entonces:

$$N = \frac{\gamma_b t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}-\alpha\right) + \gamma_w \frac{t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right) sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right) sen\alpha + Esen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right) \qquad EC(4–51)$$

Ahora, sabiendo que el factor de seguridad está dado por:

$$F.S = \frac{Fuerzas\ \ \mathrm{Re}sistentes}{Fuerzas\ \ Actuantes} \qquad EC(4–52)$$

es así que:

$$Fuerzas\ \ Actuantes = \frac{c'\left(t/\cos(\pi/4+\phi'/2)\right)+N'\tan\phi'}{F.S} \qquad EC(4–53)$$

pero como $Fuerzas\ Actuantes = T$, entonces:

$$-\frac{\gamma b t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right)sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}-\alpha\right)+\gamma_w\frac{t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right)sen\alpha+$$

$$E\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right)=\frac{c'\left(t/\cos(\pi/4+\phi'/2)\right)+N'\tan\phi'}{F.S} \qquad EC(4–54)$$

Ahora para la condición de falla (F.S=1.0) y reemplazando N' en la ecuación anterior, se tiene que:

$$-\frac{\gamma_b t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right)sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}-\alpha\right)+\gamma_w\frac{t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right)sen\alpha+E\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right)=\frac{c't}{\cos(\pi/4+\phi'/2}+$$
$$\left(\frac{\gamma_b t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}-\alpha\right)+\gamma_w\frac{t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right)sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right)sen\alpha+Esen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi'}{2}\right)\right)\tan\phi' \qquad EC(4–55)$$

simplificando:

$$E=-\frac{\gamma t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right)sen\alpha+\frac{\gamma_b t^2}{2}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right)\cos\alpha+\frac{c't\cos\phi'}{\cos^2(\pi/4+\phi'/2)} \qquad EC(4–56)$$

donde γ es el peso unitario total ($\gamma_b+\gamma_w$).

La expresión anterior determina el empuje de falla o el empuje resistente que se presenta en la superficie de falla del suelo. Para las condiciones particulares de material puramente friccional y cohesivo se tienen las siguientes expresiones:

Empuje de falla debido únicamente a la fricción del material ($c' = 0$ y $E = E_\phi$)

$$E_{\phi} = -\frac{\gamma t^2}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right)sen\alpha + \frac{\gamma_b t^2}{2}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi'}{2}\right)\cos\alpha \qquad EC(4–57)$$

Empuje de falla debido a la parte cohesiva del material ($\phi' = 0$ y $E = E_c$)

$$E_c = -\frac{\gamma t^2}{2}sen\alpha + \frac{\gamma_b t^2}{2}\cos\alpha + 2c't \qquad EC(4–58)$$

4.3 Variación de la altura de las tajadas

La Figura 4–14 muestra el cambio en las alturas de las tajadas al pasar de un tiempo inicial t_o a un tiempo t. El color negro identifica la geometría del talud para el tiempo inicial y el color café la geometría en el tiempo t.

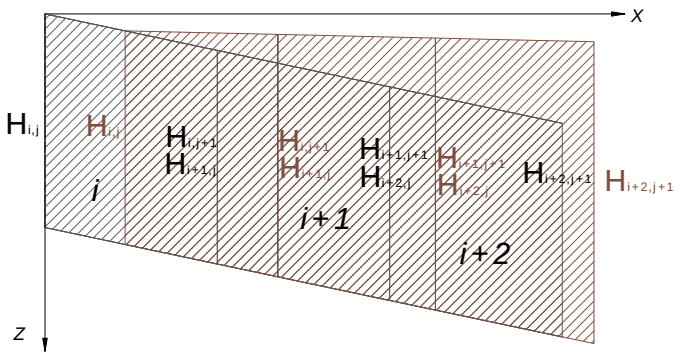


Figura 4–14. Altura de las tajadas.

El volumen *V* de las tajadas *i*, *i+1* e *i+2* en el tiempo inicial t_o está dado por:

$$V_{i,to} = \frac{\left(H_{i,j,to} + H_{i,j+1,to}\right)}{2} L_{i,to}\cos\alpha \qquad EC(4–59)$$

$$V_{i+1,to} = \frac{\left(H_{i+1,j,to} + H_{i+1,j+1,to}\right)}{2} L_{i+1,to} \cos\alpha \qquad EC(4–60)$$

$$V_{i+2,to} = \frac{\left(H_{i+2,j,to} + H_{i+2,j+1,to}\right)}{2} L_{i+2,to} \cos\alpha \qquad EC(4–61)$$

El volumen está en función de las alturas de la cara anterior y posterior, además de la longitud inicial del bloque.

Ahora, el volumen de los bloques para un tiempo *t* se expresa como:

$$V_{i,t} = \frac{\left(H_{i,j,t} + H_{i,j+1,t}\right)}{2} L_{i,t} \cos\alpha \qquad EC(4–62)$$

$$V_{i+1,t} = \frac{\left(H_{i+1,j,t} + H_{i+1,j+1,t}\right)}{2} L_{i+1,t} \cos\alpha \qquad EC(4–63)$$

$$V_{i+2,t} = \frac{\left(H_{i+2,j,t} + H_{i+2,j+1,t}\right)}{2} L_{i+2,t} \cos\alpha \qquad EC(4–64)$$

Aquí, el volumen también depende de las alturas de cada bloque y de la longitud de la tajada en este tiempo. Es importante recordar que la longitud de la tajada en el tiempo *t* está en función de la longitud inicial y de los desplazamientos calculados.

Como el volumen de cada tajada permanece constante en el tiempo, se igualan los volúmenes para el tiempo t_o y *t* encontrándose la nueva altura de la cara posterior de la tajada en el tiempo *t*. Se supone que la altura de la pared de la tajada anterior es conocida y que además, las caras compartidas de las tajadas tienen la misma altura como se muestra en la siguiente expresión:

$$H_{i,j+1,to} = H_{i+1,j,to} \;\; y \;\; H_{i+1,j+1,to} = H_{i+2,j,to} \qquad EC(4–65)$$

Para la tajada *i*:

$$\frac{\left(H_{i,j,to}+H_{i,j+1,to}\right)}{2}L_{i,to}\cos\alpha=\frac{\left(H_{i,j,t}+H_{i,j+1,t}\right)}{2}L_{i,t}\cos\alpha \qquad C(4\text{–}66)$$

Para la primera tajada se asume que la altura de la pared anterior permanece constante con el tiempo, es decir que:

$$H_{i,j,to} = H_{i,j,t} \ldots = H_{i,j,tn} \qquad EC(4\text{–}67)$$

entonces:

$$\left(H_{i,j,to}+H_{i,j+1,to}\right)L_{i,to}=\left(H_{i,j,to}+H_{i,j+1,t}\right)L_{i,t} \qquad EC(4\text{–}68)$$

Es así que el valor de la cara posterior de la tajada *i* en el tiempo *t*, $H_{i,j+1,t}$, es:

$$H_{i,j+1,t}=\frac{\left(H_{i,j,to}+H_{i,j+1,to}\right)L_{i,to}}{L_{i,t}}-\left(H_{i,j,to}\right) \qquad EC(4\text{–}69)$$

La expresión anterior indica que la nueva altura depende de la suma de la altura de la pared anterior y posterior en el tiempo t_o, dividida en la longitud de la tajada en el tiempo *t* menos la altura de la pared anterior en el tiempo t_o. Como todos los valores son conocidos se puede determinar directamente la altura.

De forma similar para la tajada *i+1* se tiene:

$$\frac{\left(H_{i+1,j,to}+H_{i+1,j+1,to}\right)}{2}L_{i+1,to}\cos\alpha=\frac{\left(H_{i+1,j,t}+H_{i+1,j+1,t}\right)}{2}L_{i+1,t}\cos\alpha \qquad EC(4\text{–}70)$$

Pero se sabe que $H_{i+1,j,t} = H_{i,j+1,t}$ y como $H_{i,j+1,t}$ es conocida se tiene entonces que:

$$H_{i+1,j+1,t} = \frac{\left(H_{i+1,j,to} + H_{i+1,j+1,to}\right)L_{i+1,to}}{L_{i+1,t}} - \left(H_{i,j+1,t}\right) \qquad EC(4–71)$$

La altura de la pared posterior de la tajada *i+1* en el tiempo *t* depende de las alturas de la tajada *i+1* y de su longitud en el tiempo t_o, de la longitud de la tajada *i+1* en el tiempo *t* y de la altura de la pared anterior de la tajada *i+1*, que es la misma (altura) de la pared posterior de la tajada *i*. En general se tiene la siguiente expresión para las alturas:

Primera tajada

$$H_{1,j,tn} = H_{1,j,to}$$

$$H_{1,j+1,tn} = \frac{\left(H_{1,j,to} + H_{1,j+1,to}\right)L_{1,to}}{L_{1,tn}} - \left(H_{1,j,to}\right) \qquad EC(4–72)$$

Para una tajada cualquiera

$$H_{m,j,tn} = H_{m-1,j+1,tn-1}$$

$$H_{m,j+1,tn} = \frac{\left(H_{m,j,to} + H_{m,j+1,to}\right)L_{m,to}}{L_{m,t}} - \left(H_{m,j,to}\right) \qquad EC(4–73)$$

donde *m* es el número de tajadas y *n* es el tiempo de análisis. Cabe señalar que siempre se usa el volumen inicial de las tajadas para encontrar las nuevas alturas en cualquier tiempo.

4.4 Variación de la fuerza del agua

La Figura 4–15 muestra la posición del la línea del agua en una tajada en diferentes tiempos (t y t+1). La figura de la izquierda muestra la posición en el tiempo *t* identificando la altura del agua como Hw_t y el área en la base de la tajada como A_t. La figura de la derecha representa el estado de la tajada en el tiempo t+1 en donde ahora el área en la base es A_{t+1} y la altura del agua Hw_{t+1}.

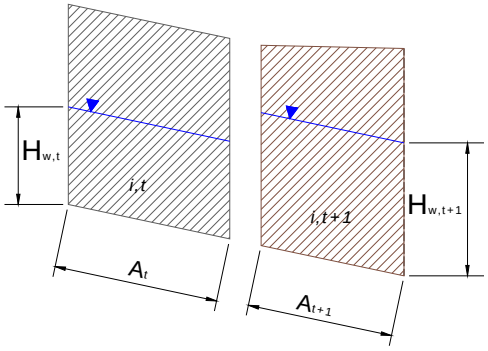


Figura 4–15. Variación de la altura del agua en la tajada.

Asumiendo que el volumen del agua permanece constante en el talud se realiza el siguiente análisis en cada tajada para determinar la fuerza del agua.

En el tiempo *t*, bajo la línea del agua y para el estado saturado, el volumen del agua en la tajada es:

$$S = \frac{Vw}{Vv} = 1 \qquad EC(4–74)$$

entonces:

$$Vw = Vv \qquad EC(4–75)$$

donde *S* es la saturación, *Vw* es el volumen de agua y *Vv* es el volumen de vacíos.

Ahora, el volumen total de la tajada (VT_t) es:

$$VT_t = A_t Hw_t \qquad EC(4–76)$$

y la porosidad n está dada por:

$$n = \frac{Vv}{VT_t} \qquad EC(4–77)$$

y como VW=Vv, entonces:

$$n = \frac{Vw}{VT_t} \qquad EC(4–78)$$

es así que el *Vw* es:

$$Vw = nA_t H_{wt} \qquad EC(4–79)$$

De forma similar se procede para el tiempo *t+1*:

$$Vw = nA_{t+1} Hw_{t+1} \qquad EC(4–80)$$

igualando el volumen de agua se tiene:

$$nA_t H_{wt} = nA_{t+1} Hw_{t+1} \qquad EC(4–81)$$

Por lo tanto la altura del agua en el tiempo *t+1* está dada por:

$$Hw_{t+1} = \frac{A_t}{A_{t+1}} Hw_t \qquad EC(4–82)$$

Ahora bien, se sabe que la presión de poros en la base de la tajada (u_{t+1}) en *t+1* es:

$$u_{w_{t+1}} = Hw_{t+1}\gamma_w \cos^2 \alpha \qquad EC(4–83)$$

Entonces la fuerza del agua en la base de la tajada es:

$$U_{t+1} = u_{w_{t+1}} A_{t+1}$$

$$U_{t+1} = \left(\frac{A_t}{A_{t+1}} Hw_t \gamma_w \cos^2 \alpha \right) A_{t+1}$$

$$U_{t+1} = A_t Hw_t \gamma_w \cos^2 \alpha \qquad EC(4–84)$$

Se observa que la fuerza del agua depende del área de la tajada, de la altura inicial del agua y del ángulo de inclinación del talud, lo que indica que esta fuerza permanece constante en el tiempo.

4.5 Movimiento de la superficie del terreno

El cambio en la geometría de la masa discretizada está dado por la traslación de las tajadas a lo largo de la trayectoria plana y el cambio en su altura dando origen a la nueva superficie del terreno.

El talud está referenciado al sistema coordenado *X-Z* como se muestra en la Figura 4–16. Se encuentra dividido en tajadas verticales cuyos vértices están identificados por números acompañados de un subíndice *s* o *i*, indicando la línea superior o inferior del talud respectivamente. Así mismo el contorno del talud está limitado por los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.

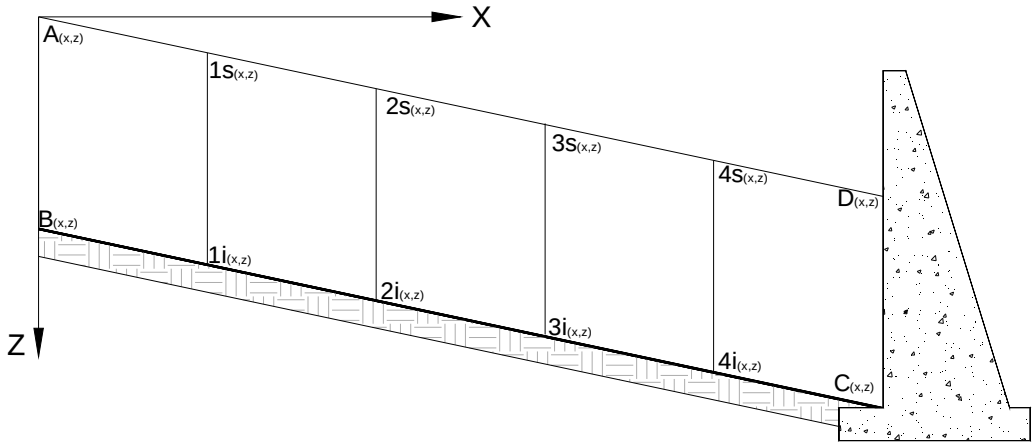


Figura 4–16. Sección longitudinal del talud.

Coordenadas en la condición inicial.

Al iniciar el problema se deben establecer los puntos *A*, *B*, *C* y *D* y deben ser conocidas las alturas de los bloques y su longitud. De acuerdo con la siguiente figura se tiene que las coordenadas de las tajadas para esta condición son:

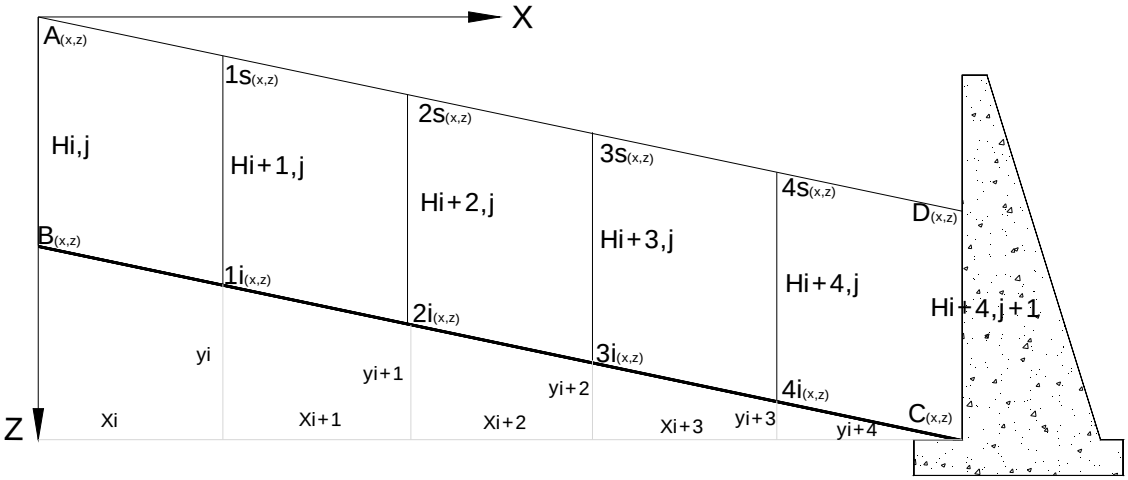


Figura 4–17. Coordenadas X-Z de las tajadas.

Punto	Abscisa X	Ordenada Z
B	B	B
1i	xi	yi+Bz
2i	xi+1+xi	yi+1+Bz
3i	xi+2+xi+1+xi	yi+2+Bz
4i	xi+3+xi+2+xi+1+xi	yi+3+Bz
ni	cosα*Lt_o(n-1)(n-1)	[senα*Lt_o(n-1)(n-1)]+Bz
C	C	C

Punto	Abscisa X	Ordenada Z
A	A	A
1s	1i	1i - Hi+1,j
2s	2i	2i - Hi+2,j
3s	3i	3i - Hi+3,j
4s	4i	4i - Hi+4,j
ns	ni	ni - Hi+n,j
D	D	D - Hi+n,j+1

Tabla 4–3. Coordenadas iniciales X-Z.

Rotación de ejes coordenados (X-Z a U-V)

Con el fin de obtener las abscisas de los nuevos puntos, es decir las coordenadas de las tajadas trasladadas, es necesario realizar una rotación del sistema coordenado para expresarlo en el sentido del movimiento (U-V), como se señala en la Figura 4–18 a, y así sumar fácilmente los desplazamientos (u_n) a las abscisas rotadas (ver Figura 4–18 b).

Entonces las coordenadas desplazadas son:

$$U_n = X_n \cos\alpha + Z_n sen\alpha + u_n$$

$$V_n = Z_n \cos\alpha - X_n sen\alpha \qquad EC(4–85)$$

Nótese que la abscisa U_n es el resultado de la abscisa inicial transformada más el incremento dado por el desplazamiento, mientras que la ordenada V_n simplemente es la ordenada inicial transformada. En la Tabla 4–4 se presentan las coordenadas de los vértices de las tajadas desplazadas.

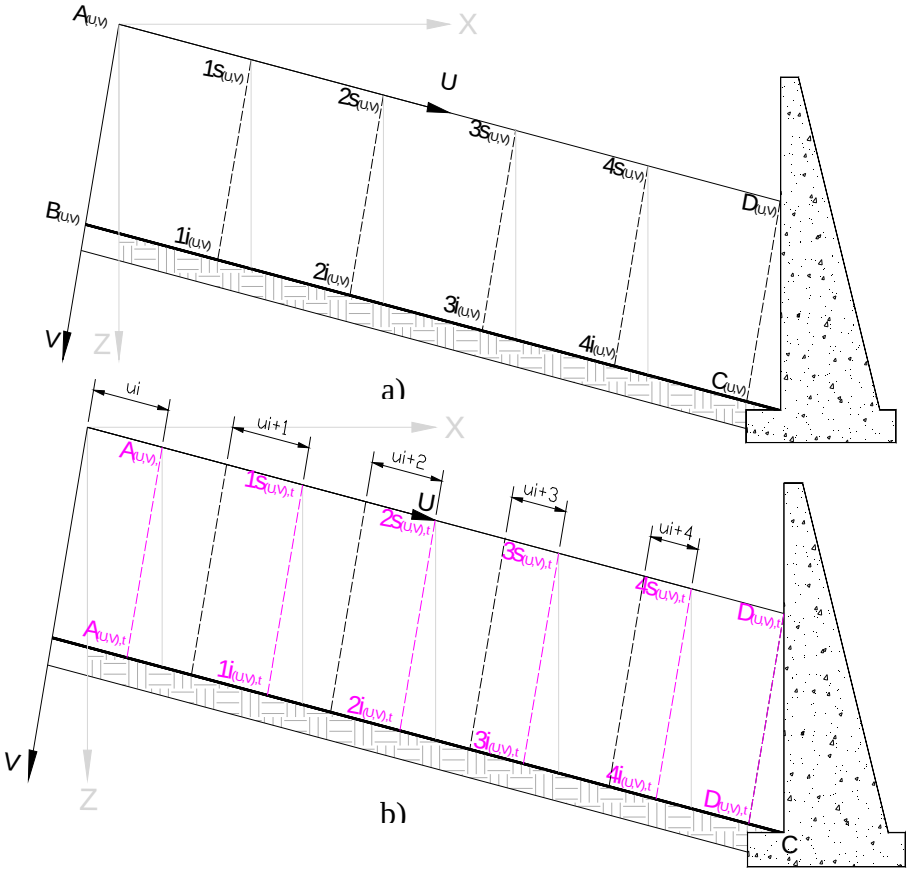


Figura 4–18. Sistema coordenado U-V.

a) Condición inicial. b) Condición desplazada.

Punto	Abscisa U	Ordenada V
A,B	$U_{A/B}$+ui	$V_{A/B}$
1s,1i	U1+ui+1	V1
2s,2i	U2+ui+2	V2
3s,3i	U3+ui+3	V3
4s,4i	U4+ui+4	V4
ns,ni	Un+ui+n	V(n)
C,D	$U_{C/D}$	$V_{C/D}$

Tabla 4–4. Coordenadas U-V.

Rotación de ejes coordenados (U-V a X-Z)

Con la intención de graficar el nuevo perfil (ver Figura 4–19), es indispensable expresar nuevamente las coordenadas de los puntos de las tajadas en el sistema coordenado inicial teniendo presente el valor de la nueva altura de los bloques desplazados. Para ello se emplean las siguientes expresiones:

$$Xr_n = U_n \cos\alpha - V_n sen\alpha$$

$$Zr_n = U_n sen\alpha + V_n \cos\alpha - Hi_n, j \qquad EC(4–86)$$

Obsérvese que las expresiones anteriores son las coordenadas del los puntos superiores de las tajadas que conforman el perfil del terreno. La abscisa *X* es la abscisa desplazada transformada y la ordenada *Z* es la ordenada transformada menos la altura de la pared anterior del bloque que se está analizando. Sin embargo, la ordenada de la pared posterior de la tajada que limita con el muro, $D_{(x,z)t}$, se halla restando la altura de esa pared.

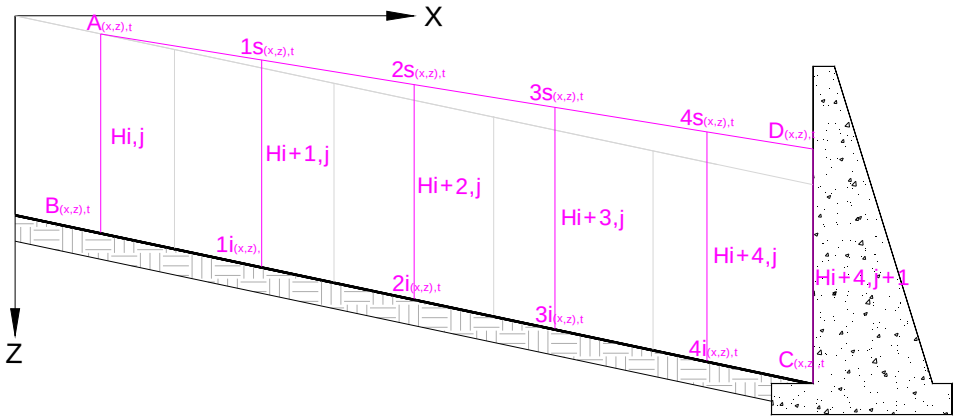


Figura 4–19. Perfil del terreno desplazado.

Las coordenadas superiores e inferiores del nuevo perfil son:

Punto	Abscisa X	Ordenada Z
B	XrB	ZrB
1i	Xr1i	Zr1
2i	Xr2i	Zr2
3i	Xr3i	Zr3
4i	Xr4i	Zr4
ni	Xrni	Zrn
C	XrC	ZrC

Punto	Abscisa X	Ordenada Z
A	XrA	ZrA - Hi,j
1s	Xr1s	Zr1i - Hi+1,j
2s	Xr2s	Zr2i - Hi+2,j
3s	Xr3s	Zr3i - Hi+3,j
4s	Xr4s	Zr4i - Hi+4,j
ns	Xrns	Zrni - Hi+n,j
D	XrD	ZD - Hi+n,j+1

Tabla 4–5. Coordenadas trasladadas X-Z.

CAPITULO 5
MÉTODO NUMÉRICO Y ESTABILIDAD DE LA SOLUCIÓN

Considerando la complejidad para resolver matemáticamente el sistema de ecuaciones diferenciales de la masa en movimiento, es necesario recurrir al uso de métodos numéricos. Estos permiten describir las ecuaciones de movimiento en una fórmula discreta en el tiempo, la cual es trasladada a un algoritmo que posteriormente es resuelto por un código computacional.

Como el problema de la masa deslizada es un problema que marcha en el tiempo, es importante resaltar que la calidad de la malla, constituida por la discretización del tiempo, debe ser tal que garantice la consistencia, estabilidad y precisión en la solución. Lo anterior se refleja en la elección del paso del tiempo, además del número de divisiones de la masa y los parámetros mecánicos del suelo, como el módulo de rigidez y la viscosidad. El paso del tiempo corresponde a los incrementos del tiempo en que se divide la malla.

Este capítulo presenta la solución del sistema de ecuaciones de movimiento empleando el método numérico de las diferencias finitas (MDF), discriminando las ecuaciones del primer movimiento y las ecuaciones del movimiento en el tiempo. Asimismo se establecen

criterios en la elección del paso del tiempo y en los valores de los parámetros mecánicos del suelo que garanticen la estabilidad de la solución.

5.1 Método numérico

5.1.1 Movimiento en el tiempo

De acuerdo con el capítulo anterior, el sistema de ecuaciones diferenciales que se quiere resolver es de la forma:

$$\frac{d^2u_{i-1}}{dt^2}+C_{i-1}\frac{du_{i-1}}{dt}-C_{j-1}\frac{du_i}{dt}=\overline{T}+A\overline{U}_{i-1}-\overline{K}_{j-1}u_{i-1}+\overline{K}_{j-1}u_i$$

$$-C_{j-1}\frac{du_{i-1}}{dt}+\frac{d^2u_i}{dt^2}+C_i\frac{du_i}{dt}-C_j\frac{du_{i+1}}{dt}=\overline{T}+A\overline{U}_i+\overline{K}_{j-1}u_{i-1}-\left(\overline{K}_{j-1}+\overline{K}_j\right)u_i+\overline{K}_ju_{i+1} \qquad EC(5\text{–}1)$$

$$-C_j\frac{du_i}{dt}+\frac{d^2u_{i+1}}{dt^2}+C_{i+1}\frac{du_{i+1}}{dt}=\overline{T}+A\overline{U}_{i+1}+\overline{K}_ju_i-\left(\overline{K}_j+\overline{K}_{j+1}\right)u_{i+1}$$

donde la primera ecuación corresponde al movimiento de la primera tajada, la segunda a la tajada central y la última a la tajada que limita con el muro. Empleando el MDF con aproximación central[1], la primera y segunda derivada se expresan como:

$$\left(\frac{du_n}{dt}\right)_t=\frac{u_{n,t+1}-u_{n,t-1}}{2\Delta t} \qquad EC(5\text{–}2)$$

[1] En el Apéndice 2 se resume el método numérico de las diferencias finitas (MDF) y se explica el tipo de aproximación empleada para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\left(\frac{d^2u_n}{dt^2}\right)_t = \frac{u_{n,t+1} - 2u_{n,t} + u_{n,t-1}}{2\Delta t} \qquad EC(5\text{–}3)$$

donde *n* es el número de la tajada, *t* es el instante para el cual se hace el análisis y *Δt* es el paso del tiempo.

Primera Tajada

Reemplazando la Ecuación 5-2 y 5-3 en la ecuación de movimiento de la primera tajada, se tiene que:

$$\left(\frac{u_{i-1,t+1} - u_{i-1,t} + u_{i-1,t-1}}{\Delta t^2}\right) + C_{i-1}\left(\frac{u_{i-1,t+1} - u_{i-1,t-1}}{2\Delta t}\right) - C_{j-1}\left(\frac{u_{i,t+1} - u_{i,t-1}}{2\Delta t}\right) = \overline{T} + A\overline{U}_{i-1} - \overline{K}_{j-1}u_{i-1,t} + \overline{K}_{j-1}u_{i,t}$$

EC(5–4)

simplificando y dejando los términos *t+1* a la izquierda de la igualdad se obtiene:

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{C_{i-1}}{2\Delta t}\right)u_{i-1,t+1} - \left(\frac{C_{j-1}}{2\Delta t}\right)u_{i,t+1} = \overline{T} + A\overline{U}_{i-1} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{C_{i-1}}{2\Delta t}\right)u_{i-1,t-1} - \left(\frac{C_{j-1}}{2\Delta t}\right)u_{i,t-1} + \left(\frac{2}{\Delta t^2} - \overline{K}_{j-1}\right)u_{i-1,t} + \left(\overline{K}_{j-1}\right)u_{i,t}$$

EC(5–5)

Tajada central

Así mismo, reemplazando la primera y segunda derivada en la ecuación para la tajada central se obtiene que:

$$-C_{j-1}\left(\frac{u_{i-1,t+1} - u_{i-1,t-1}}{2\Delta t}\right) + \left(\frac{u_{i,t+1} - u_{i,t} + u_{i,t-1}}{\Delta t^2}\right) + C_i\left(\frac{u_{i,t+1} - u_{i,t-1}}{2\Delta t}\right) - C_j\left(\frac{u_{i+1,t+1} - u_{i+1,t-1}}{2\Delta t}\right) = \overline{T} + A\overline{U}_i + \overline{K}_{j-1}u_{i-1,t} - \left(\overline{K}_{j-1} + \overline{K}_j\right)u_{i,t} + \overline{K}_j u_{i+1,t}$$

EC(5–6)

y organizando los términos, la ecuación anterior resulta ser:

$$-\left(\frac{C_{j-1}}{2\Delta t}\right)u_{i-1,t+1}+\left(\frac{1}{\Delta t^2}+\frac{C_i}{2\Delta t}\right)u_{i,t+1}-\left(\frac{C_j}{2\Delta t}\right)u_{i+1,t+1}=\overline{T}+A\overline{U}_i-\left(\frac{C_{j-1}}{2\Delta t}\right)u_{i-1,t-1}-\left(\frac{1}{\Delta t^2}-\frac{C_i}{2\Delta t}\right)u_{i,t-1}-\left(\frac{C_j}{2\Delta t}\right)u_{i+1,t-1}+$$

$$\left(\overline{K}_{j-1}\right)u_{i-1,t}+\left[\frac{2}{\Delta t^2}-\left(\overline{K}_{j-1}+\overline{K}_j\right)\right]u_{i,t}+\left(\overline{K}_j\right)u_{i+1,t} \qquad EC(5\text{–}7)$$

Última tajada

De forma similar, la ecuación de movimiento para la última tajada en diferencias finitas es:

$$-C_j\left(\frac{u_{i,t+1}-u_{i,t-1}}{2\Delta t}\right)+\left(\frac{u_{i+1,t+1}-u_{i+1,t}+u_{i+1,t-1}}{\Delta t^2}\right)+C_{i+1}\left(\frac{u_{i+1,t+1}-u_{i+1,t-1}}{2\Delta t}\right)=\overline{T}+A\overline{U}_{i+1}+\overline{K}_j u_{i,t}-\left(\overline{K}_j+\overline{K}_{j+1}\right)u_{i+1,t}$$

EC(5–8)

Nuevamente simplificando y organizando los términos se obtiene la expresión siguiente:

$$-\left(\frac{C_j}{2\Delta t}\right)u_{i,t+1}+\left(\frac{1}{\Delta t^2}+\frac{C_{i+1}}{2\Delta t}\right)u_{i+1,t+1}=\overline{T}+A\overline{U}_{i+1}-\left(\frac{C_j}{2\Delta t}\right)u_{i,t-1}-\left(\frac{1}{\Delta t^2}-\frac{C_{i+1}}{2\Delta t}\right)u_{i+1,t-1}+$$

$$\left(\overline{K}_j\right)u_{i,t}+\left[\frac{2}{\Delta t^2}-\left(\overline{K}_j+\overline{K}_{j+1}\right)\right]u_{i+1,t} \qquad EC(5\text{–}9)$$

De las ecuaciones anteriores se puede decir que para un tiempo *t* dado y conocidos los valores de desplazamiento en el tiempo anterior *t-1* y en *t*, se puede encontrar el desplazamiento para el siguiente tiempo *t+1* en cada tajada, como se muestra la Figura 5–1.

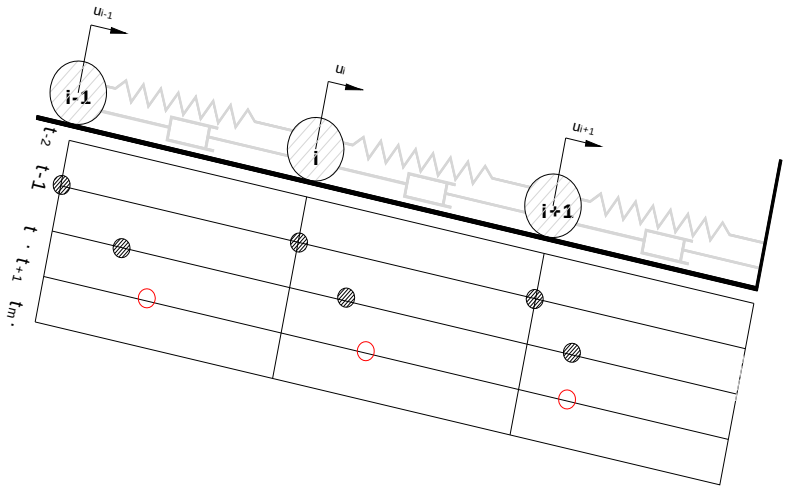


Figura 5–1. Problema marchando en el tiempo.

Los círculos negros representan los valores de desplazamiento conocidos para en el tiempo t y t-1 en las tajadas i-1, i , i+1. Los rojos representan los valores a encontrar en el tiempo t+1.

De acuerdo con el desarrollo anterior, el sistema de ecuaciones diferenciales expresado en diferencias finitas es:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t^2}+\frac{C_{i-1}}{2\Delta t} & \frac{-C_{j-1}}{2\Delta t} & 0 \\ \frac{-C_{j-1}}{2\Delta t} & \frac{1}{\Delta t^2}+\frac{C_i}{2\Delta t} & \frac{-C_j}{2\Delta t} \\ 0 & \frac{-C_j}{2\Delta t} & \frac{1}{\Delta t^2}+\frac{C_{i+1}}{2\Delta t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1,t+1} \\ u_{i,t+1} \\ u_{i+1,t+1} \end{Bmatrix} = \{T\}+[U]\{A\}+ \begin{bmatrix} \frac{-1}{\Delta t^2}+\frac{C_{i-1}}{2\Delta t} & \frac{-C_{j-1}}{2\Delta t} & 0 \\ \frac{-C_{j-1}}{2\Delta t} & \frac{-1}{\Delta t^2}+\frac{C_i}{2\Delta t} & \frac{-C_j}{2\Delta t} \\ 0 & \frac{-C_j}{2\Delta t} & \frac{-1}{\Delta t^2}+\frac{C_{i+1}}{2\Delta t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1,t-1} \\ u_{i,t-1} \\ u_{i+1,t-1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta t^2}-\bar{K}_{j-1} & \bar{K}_{j-1} & 0 \\ \bar{K}_{j-1} & \frac{2}{\Delta t^2}-\left(\bar{K}_{j-1}+\bar{K}_j\right) & \bar{K}_j \\ 0 & \bar{K}_j & \frac{2}{\Delta t^2}-\left(\bar{K}_j+\bar{K}_{j+1}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1,t} \\ u_{i,t} \\ u_{i+1,t} \end{Bmatrix}$$

EC(5–10)

El lado izquierdo de la igualdad muestra las incógnitas que se quieren hallar, es decir, los desplazamientos para el tiempo *t+1*. El lado derecho presenta los valores conocidos que intervienen en el problema como la constante *T* que está en función de los ángulos de inclinación y fricción de la superficie de falla (ver Capítulo 4), la fuerza ejercida por el agua *U*, los desplazamientos en el tiempo de análisis u_t y los desplazamientos en el tiempo

anterior u_{t-1}. El número incógnitas depende del número de tajadas en que se divide la masa deslizada.

En general, el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial se expresa como:

$$\left[K_{sistema}\right]\left\{u_{t+1}\right\}=\left\{F\right\} \qquad EC(5–11)$$

donde $K_{sistema}$ es la matriz de rigidez del sistema constituida por las constantes C_j, C_i y Δt, u_{i+1} es el vector columna de las incógnitas y F es el vector de fuerzas del sistema compuesto por todos los valores conocidos.

Entonces, el vector de desplazamientos se encuentra haciendo:

$$\left\{u_{t+1}\right\}=\left[K_{sistema}\right]^{-1}\left\{F\right\} \qquad EC(5–12)$$

en donde $[K_{sistema}]^{-1}$ es la inversa de la matriz de rigidez.

Sin embargo, para la condición inicial de tiempo t_o, es decir, para el primer movimiento de la masa, se necesita conocer el valor del desplazamiento anterior a este tiempo y como el problema inicia en t_o, este valor es “irreal”. Con el fin de solucionar este problema se emplean las condiciones de frontera para encontrar una expresión en términos de valores conocidos.

5.1.2 Primer movimiento

En el tiempo inicial (t_o) se conoce el valor de la velocidad inicial (*Vcte*) y el desplazamiento inicial (u_o) de las tajadas tal como se indicó en el Capítulo 4. Expresando la velocidad inicial en diferencias finitas para una tajada *n* cualquiera se tiene la siguiente expresión:

$$\left(\frac{du_n}{dt}\right)_{t=to} = \frac{u_{n,t+1} - u_{n,t-1}}{2\Delta t} = Vcte \qquad EC(5–13)$$

Despejando el desplazamiento en el tiempo *t-1* se tiene que:

$$u_{n,t-1} = u_{n,t+1} - 2\Delta t Vcte \qquad EC(5–14)$$

En otras palabras el desplazamiento en el tiempo *t-1* depende del valor del desplazamiento posterior, la velocidad inicial y el paso de tiempo escogido.

Es así que para la primera tajada, la tajada central y la última tajada se tienen las siguientes ecuaciones respectivamente:

$$u_{i-1,t-1} = u_{i-1,t+1} - 2\Delta t Vcte \qquad EC(5–15)$$

$$u_{i,t-1} = u_{i,t+1} - 2\Delta t Vcte \qquad EC(5–16)$$

$$u_{i+1,t-1} = u_{i+1,t+1} - 2\Delta t Vcte \qquad EC(5–17)$$

Ahora bien, reemplazando las ecuaciones anteriores y los valores del desplazamiento inicial en el sistema de ecuaciones diferenciales (ver Ecuación 5-1), para la primera tajada, la tajada central y la última tajada se tienen las siguientes expresiones.

Primera Tajada

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{C_{i-1}}{2\Delta t}\right)u_{i-1,t+1} - \left(\frac{C_{j-1}}{2\Delta t}\right)u_{i,t+1} = \overline{T} + A\overline{U}_{i-1} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{C_{i-1}}{2\Delta t}\right)\left(u_{i-1,t+1} - 2\Delta t Vcte\right) -$$
$$\left(\frac{C_{j-1}}{2\Delta t}\right)\left(u_{i-1,t+1} - 2\Delta t Vcte\right) + \left(\frac{2}{\Delta t^2} - \overline{K}_{j-1}\right)u_o + \left(\overline{K}_{j-1}\right)u_o \qquad EC(5–18)$$

organizando se tiene que:

$$\left(\frac{2}{\Delta t^2}\right)u_{i-1,t+1} = \overline{T} + A\overline{U}_{i-1} + Vcte\left(\frac{2}{\Delta t^2} - \frac{\eta_{i-1}}{m}\right) + \left(\frac{2}{\Delta t^2}\right)u_o \qquad EC(5–19)$$

Tajada central

$$-\left(\frac{C_{j-1}}{2\Delta t}\right)u_{i-1,t+1} + \left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{C_i}{2\Delta t}\right)u_{i,t+1} - \left(\frac{C_j}{2\Delta t}\right)u_{i+1,t+1} = \overline{T} + A\overline{U}_i - \left(\frac{C_{j-1}}{2\Delta t}\right)\left(u_{i-1,t+1} - 2\Delta t Vcte\right) -$$

$$\left(\overline{K}_{j-1}\right)u_0 + \left[\frac{2}{\Delta t^2} - \left(\overline{K}_{j-1} + \overline{K}_j\right)\right]u_0 + \left(\overline{K}_j\right)u_0 \qquad EC(5–20)$$

simplificando se obtiene:

$$\left(\frac{2}{\Delta t^2}\right)u_{i,t+1} = \overline{T} + A\overline{U}_{i-1} + Vcte\left(\frac{2}{\Delta t^2} - \frac{\eta_i}{m}\right) + \left(\frac{2}{\Delta t^2}\right)u_o \qquad EC(5–21)$$

Última tajada

$$-\left(\frac{C_{j-}}{2\Delta t}\right)u_{i,t+1} + \left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{C_{i+1}}{2\Delta t}\right)u_{i+1,t+1} = \overline{T} + A\overline{U}_{i+1} - \left(\frac{C_j}{2\Delta t}\right)\left(u_{i,t+1} - 2\Delta t Vcte\right) - \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{C_{i+1}}{2\Delta t}\right)\left(u_{i,t+1} - 2\Delta t Vcte\right)$$

$$\left(\overline{K}_j\right)u_0 + \left[\frac{2}{\Delta t^2} - \left(\overline{K}_j + \overline{K}_{j+1}\right)\right]u_0 \qquad EC(5–22)$$

reorganizando términos se obtiene:

$$\left(\frac{2}{\Delta t^2}\right)u_{i+1,t+1} = \overline{T} + A\overline{U}_{i-1} + Vcte\left[\frac{2}{\Delta t^2} - \frac{\left(\eta_{i+1} + \eta_{j+1}\right)}{m}\right] + \left(\frac{2}{\Delta t^2} - \frac{\overline{K}_{j+1}}{m}\right)u_o \qquad EC(5–23)$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones diferenciales para el primer movimiento expresado en diferencias finitas es:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta t^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta t^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\Delta t^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1,t+1} \\ u_{i,t+1} \\ u_{i+1,t+1} \end{Bmatrix} = \{T\} + [U]\{A\} + \begin{Bmatrix} u_{i-1,t-1} \\ u_{i,t-1} \\ u_{i+1,t-1} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta t^2} - \frac{\eta_{i-1}}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta t^2} - \frac{\eta_{i-1}}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\Delta t^2} - \frac{(\eta_{i-1} + \eta_{j-1})}{m} \end{bmatrix} \{Vcte\} + \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\Delta t} - \overline{K}_{j+1} \end{bmatrix} \{u_o\}$$

EC(5–24)

En forma matricial se tiene:

$$[Ko_{sistema}]\{u_{t+1}\} = \{F_o\} \qquad EC(5–25)$$

donde $Ko_{sistema}$ es la matriz de rigidez del sistema para el primer movimiento, u_{i+1} es el vector columna de incógnitas y F_o es el vector de fuerzas del sistema. Entonces los desplazamientos se hallan de acuerdo con:

$$\{u_{t+1}\} = [Ko_{sistema}]^{-1}\{F_o\} \qquad EC(5–26)$$

En síntesis, resolviendo las ecuaciones para el primer movimiento (t_o) se obtiene el desplazamiento de las tajadas para el tiempo *t+1*. Para el siguiente paso del tiempo, es decir en *t+1*, se halla el desplazamiento en *t+2* teniendo como valores conocidos los desplazamientos en t_o y en *t+1*. Así el problema continúa marchando en el tiempo encontrando su respectiva solución. Resulta evidente que la solución es implícita y ocurre en intervalos de tiempo establecidos.

5.1.3 Velocidad, aceleración y empujes

Con base en los valores de los desplazamientos obtenidos, se calcula la velocidad y la aceleración de las tajadas además del empuje que llega al muro, que para el caso, será el empuje de la última tajada.

La velocidad y la aceleración para una tajada *n* en un tiempo *t* cualquiera, están representadas por las siguientes ecuaciones:

$$v_{n,t} = \frac{u_{n,t+1} - u_{n,t-1}}{2\Delta t} \qquad EC(5–27)$$

$$a_{n,t} = \frac{u_{n,t+1} - 2u_{n,t} + u_{n,t-1}}{\Delta t^2} \qquad EC(5–28)$$

Al sustituir el valor de los desplazamientos, y conocido el paso del tiempo *Δt*, se obtienen las variables de interés.

De forma similar para el tiempo inicial se tiene:

$$v_{n,to} = Vcte \qquad EC(5–29)$$

$$a_{n,t} = \frac{2\left(u_{n,t+1} - u_{n,t} + \Delta t Vcte\right)}{\Delta t^2} \qquad EC(5–30)$$

En cuanto a los empujes, se sabe del modelo matemático que el empuje en la última tajada está representado por:

$$E_{j+1} = K_{j+1}\left(u_{i+1}\right) + \eta_{j+1}\frac{d}{dt}\left(u_{i+1}\right) \qquad EC(5–31)$$

entonces el empuje es:

$$E_{j+1,t} = K_{j+1} u_{i+1,t} + \eta_{j+1} v_{i+1,t} \qquad EC(5–32)$$

Es decir, que para un tiempo *t* cualquiera se expresa como:

$$E_{j+1,t} = K_{j+1} u_{i+1,t} + \eta_{j+1} \left(\frac{u_{i+1,t+1} - u_{i+1,t-1}}{2\Delta t} \right) \qquad EC(5–33)$$

y para el tiempo inicial t_o es:

$$E_{j+1,to} = K_{j+1} u_{i+1,to} + \eta_{j+1} Vcte \qquad EC(5–34)$$

Las ecuaciones anteriores representan la variación del empuje en sentido del movimiento.

Ahora bien, para calcular el empuje del suelo sobre el muro de contención, en el tiempo inicial y un tiempo cualquiera, se hace:

$$Et_{j+1,to} = \frac{Et_{j+1,to}}{\cos\alpha} \qquad y \qquad Et_{j+1,t} = \frac{E_{j+1,t}}{\cos\alpha} \qquad EC(5–35)$$

Donde *Et* es el empuje normal a la pared de la tajada y α es el ángulo de inclinación del talud.

5.2 Estabilidad de la solución

Hasta aquí se han resuelto numéricamente las ecuaciones de movimiento obteniéndose expresiones para los desplazamientos, velocidades, aceleraciones y empuje.

Sin embargo, estas expresiones dependen en gran medida del paso del tiempo Δt (es decir de la calidad de la malla). Resulta obvio que para pasos grandes de tiempo la malla es burda y se consiguen resultados alejados del comportamiento físico del problema. Por el contrario, mientras el paso del tiempo sea más fino (para valores pequeños) la malla es más densa y se logra una mayor cantidad de puntos que se aproximan a la solución real. Ver Figura 5–2.

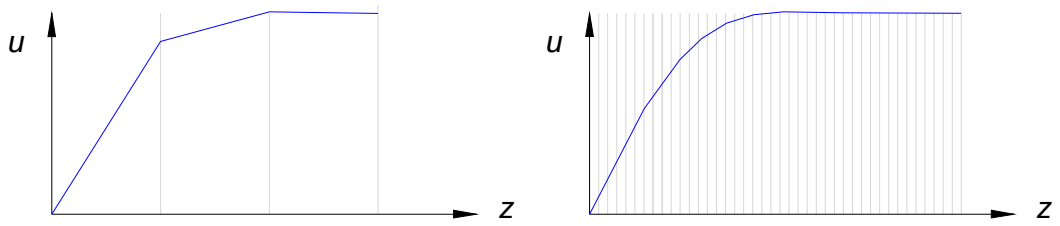


Figura 5–2. Calidad en la malla;. a) Malla burda. b) Malla fina.

5.2.1 Características de la solución del problema

Es importante anotar que las ecuaciones obtenidas mediante diferencias finitas se resuelven bajo un esquema implícito, el cual es condicionalmente estable. Su estabilidad depende del paso del tiempo además de otras variables como la longitud de las tajadas, el valor de la viscosidad tanto del suelo como la superficie de falla y el módulo de rigidez del suelo.

El paso del tiempo y las propiedades mecánicas del suelo deben ser tales que garanticen las características de consistencia, estabilidad y precisión en la solución. La primera busca que la solución represente la característica física del problema. Así por ejemplo, si el movimiento de la masa se dirige en una determinada dirección, la solución refleje dicho comportamiento; o que si las tajadas se comprimen con el paso tiempo, la solución sea concordante con esa característica y no obtener una solución en la cual las tajadas se expandan o, en el peor de los casos, desaparezcan.

La estabilidad consiste en que la respuesta converja monotónicamente, en otras palabras que la respuesta no vibre a medida que pasa el tiempo. Y la precisión se refiere a qué tan cercano está el valor calculado con respecto a otros, es decir que está asociada con el número de cifras significativas utilizadas para expresar lo calculado.

Debido a la complejidad de las ecuaciones, en cuanto a la cantidad de parámetros que en ellas intervienen, es complicado encontrar una expresión matemática que los relacione y que además garantice las características de estabilidad. Es por ello que se realiza una serie de pruebas para determinar rangos de parámetros y establecer la cercanía de la solución matemática a la obtenida con diferencias finitas.

5.2.2 Solución analítica Vs MDF

Se resuelve analíticamente la ecuación de movimiento para el bloque que se muestra en la Figura 5–3.

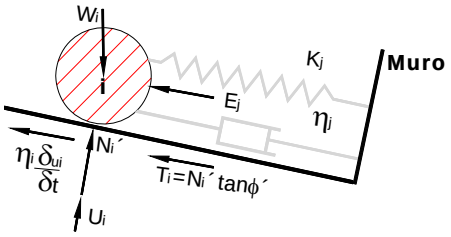


Figura 5–3. Bloque en movimiento

La solución es de la forma:

$$u(t) = C_1 e^{\frac{1}{2m}\left[\sqrt{(\eta_i+\eta_j)^2-4Km}-(\eta_i+\eta_j)\right]t} + C_2 e^{\frac{-1}{2m}\left[\sqrt{(\eta_i+\eta_j)^2-4Km}+(\eta_i+\eta_j)\right]t} + \frac{mg}{K}\frac{sen(\alpha-\phi')}{\cos\phi'} \qquad EC(5\text{–}36)$$

donde:

$$C_1 = \frac{Vcte - \left\{\frac{-1}{2m}\left[\sqrt{(\eta_i+\eta_j)^2 - 4Km} + (\eta_i+\eta_j)\right]\right\}u_o + \left\{\frac{-1}{2m}\left[\sqrt{(\eta_i+\eta_j)^2 - 4Km} + (\eta_i+\eta_j)\right]\right\}\left(\frac{mg}{K}\frac{sen(\alpha-\phi')}{\cos\phi'}\right)}{\left\{\frac{1}{2m}\left[\sqrt{(\eta_i+\eta_j)^2 - 4Km} - (\eta_i+\eta_j)\right]\right\} - \left\{\frac{-1}{2m}\left[\sqrt{(\eta_i+\eta_j)^2 - 4Km} + (\eta_i+\eta_j)\right]\right\}}$$

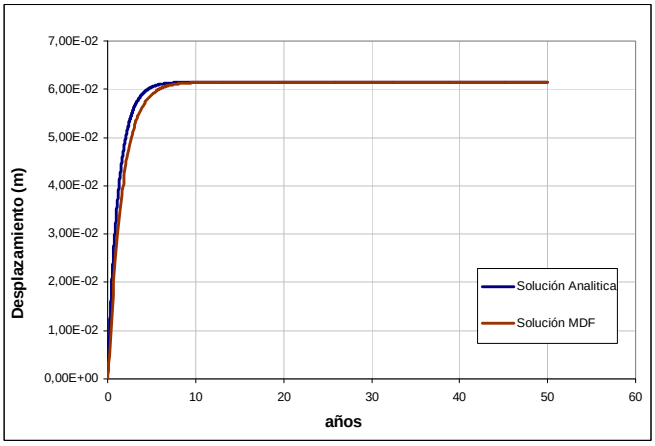
$$C_2 = \frac{\left\{\frac{1}{2m}\left[\sqrt{(\eta_i+\eta_j)^2 - 4Km} - (\eta_i+\eta_j)\right]\right\}u_o - Vcte - \left\{\frac{1}{2m}\left[\sqrt{(\eta_i+\eta_j)^2 - 4Km} - (\eta_i+\eta_j)\right]\right\}\left(\frac{mg}{K}\frac{sen(\alpha-\phi')}{\cos\phi'}\right)}{\left\{\frac{1}{2m}\left[\sqrt{(\eta_i+\eta_j)^2 - 4Km} - (\eta_i+\eta_j)\right]\right\} - \left\{\frac{-1}{2m}\left[\sqrt{(\eta_i+\eta_j)^2 - 4Km} + (\eta_i+\eta_j)\right]\right\}}$$

Así mismo, la solución de la ecuación de movimiento usando el MDF es:

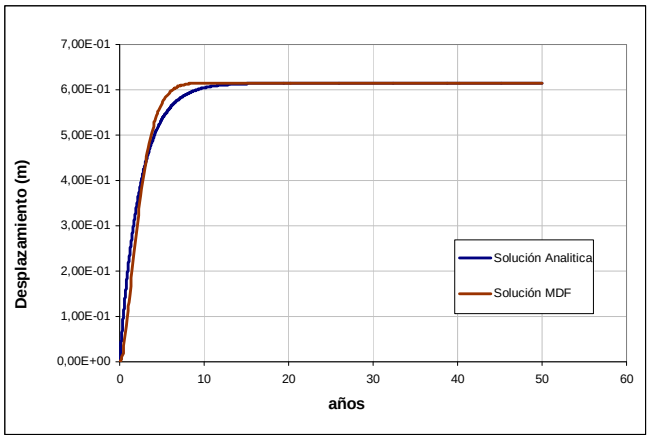
$$\left(\frac{2}{\Delta t^2}\right)u_{i,t+1} = \overline{T} + A\overline{U}_i + Vcte\left[\frac{2}{\Delta t^2} - \frac{(\eta_i+\eta_j)}{m}\right] + \left(\frac{2}{\Delta t^2} - \frac{\overline{K}_j}{m}\right)u_o \quad y$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{(\eta_i+\eta_j)}{2\Delta tm}\right)u_{i,t+1} = \overline{T} + A\overline{U}_i - \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{(\eta_i+\eta_j)}{2\Delta tm}\right)u_{i,t-1} + \left(\frac{2}{\Delta t^2} - \frac{\overline{K}_j}{m}\right)u_{i,t} \qquad EC(5\text{–}37)$$

La Figura 5–4 y Figura 5–5 muestran los desplazamientos de un bloque en función del tiempo, calculados a partir de la solución matemática y numérica empleando los mismos parámetros y geometría. La curva de color azul representa la solución analítica y la de color café representa la solución numérica.



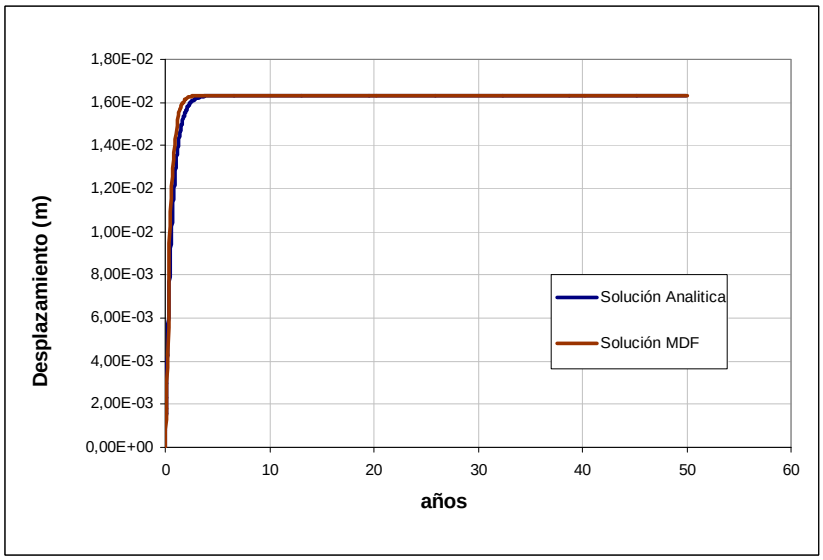
a)



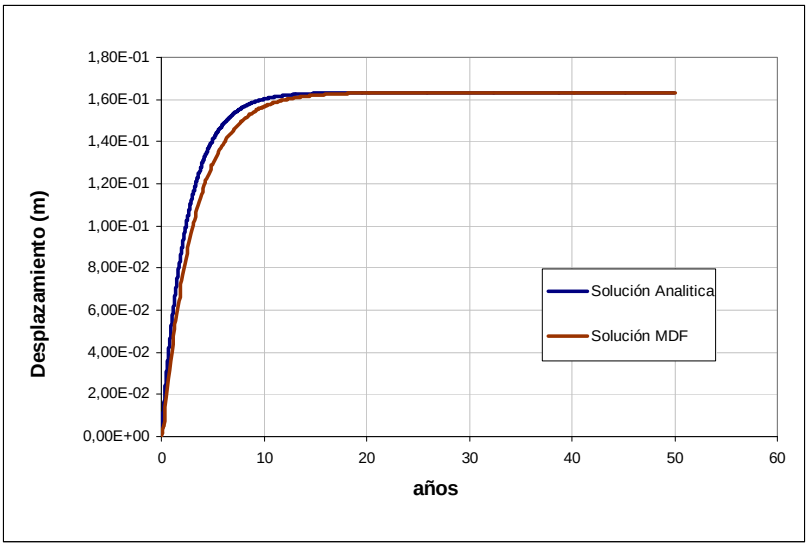
b)

Figura 5–4. Gráfica de desplazamiento de un bloque L=10 m.

a) E = 1000 KPa y μ = 1E8 KPa.s. b) E = 100 KPa y μ = 8E7 KPa.s



a)



b)

Figura 5–5. Gráfica de desplazamiento de un bloque L=5 m.

a) E = 1000 KPa y μ = 13E8 KPa.s.

b) E = 100 KPa y μ = 8E8 KPa.s.

De las figuras se observa que, de acuerdo con los parámetros elegidos y el paso de tiempo seleccionado, la solución por el MDF tiene una buena aproximación a la solución aritmética. Se nota una ligera variación en la parte curva de las gráficas y en algunas un pequeño desajuste al inicio, para tiempos inferiores a 1 año. Sin embargo los valores importantes como los desplazamientos máximos, forma de la trayectoria y asíntota se ajustan muy bien.

Lo anterior sugiere que el método numérico está bien concebido y desarrollado ya que la solución se ajusta grandemente a la solución matemática.

5.2.3 Rangos de viscosidad, módulo de elasticidad y paso del tiempo

Luego de varios ejercicios con diferentes valores de viscosidad, módulo de rigidez, longitud de la tajada y paso de tiempo, se encuentran los siguientes rangos donde la solución es estable.

Paso del tiempo.

Variando los valores de viscosidad entre 1E8 a 1E9 KPa.s, módulo de elasticidad entre 1000 y 10 KPa y la relación, entre la longitud de la tajada y el número de tajadas, *L/NT* entre 0.3 a 40 se tiene lo siguiente:

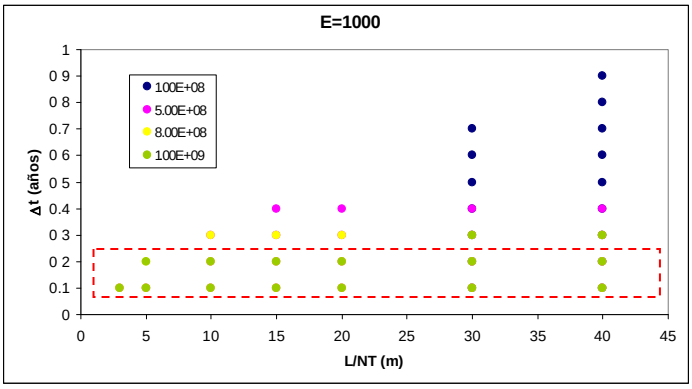


Figura 5–6. Variación del paso del tiempo – E=1000 KPa.

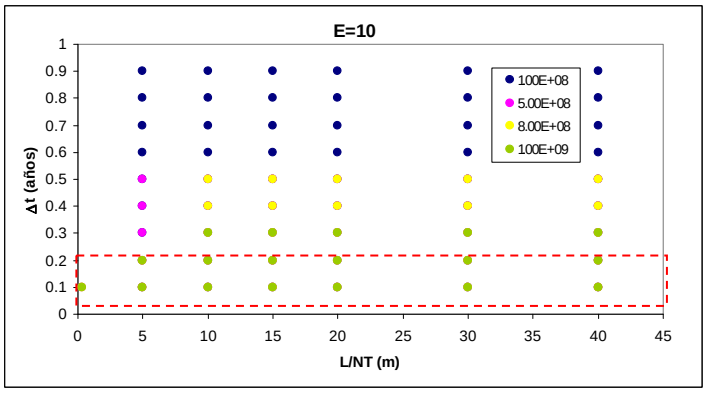


Figura 5–7. Variación del paso del tiempo – E=10 KPa.

La primera gráfica muestra que, para pasos de tiempo entre 0.9 y 0.1 años, la solución numérica es estable; sin embargo se nota que para longitudes de tajadas mayores a 20 m, sólo pasos de tiempo superiores a 0.4 funcionan correctamente. También se observa que para pasos de tiempo entre 0.1 y 0.2 años, se encuentra la mayor concentración de datos independiente de la longitud de la tajada. La gráfica siguiente señala que la variación del paso del tiempo también está entre 0.9 y 0.1 años, presentando un comportamiento homogéneo en la distribución de los datos.

Con el propósito de determinar la frecuencia con la que se repite el paso del tiempo se hace el histograma de frecuencias para diferentes valores de viscosidad, E=1000 KPa y E=10 KPa. Se recuerda que viscosidad está en unidades de KPa.s.

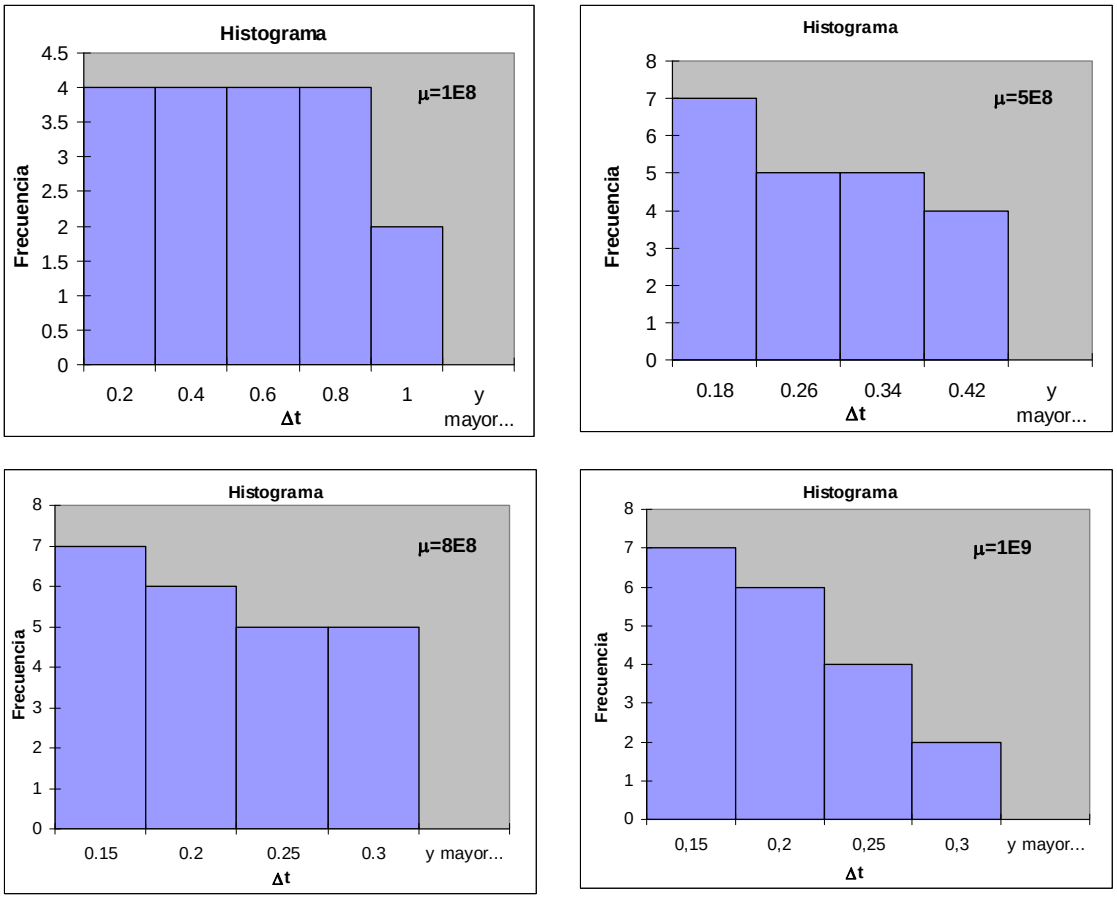


Figura 5–8. Histograma de frecuencias para el paso del tiempo, E = 1000 KPa

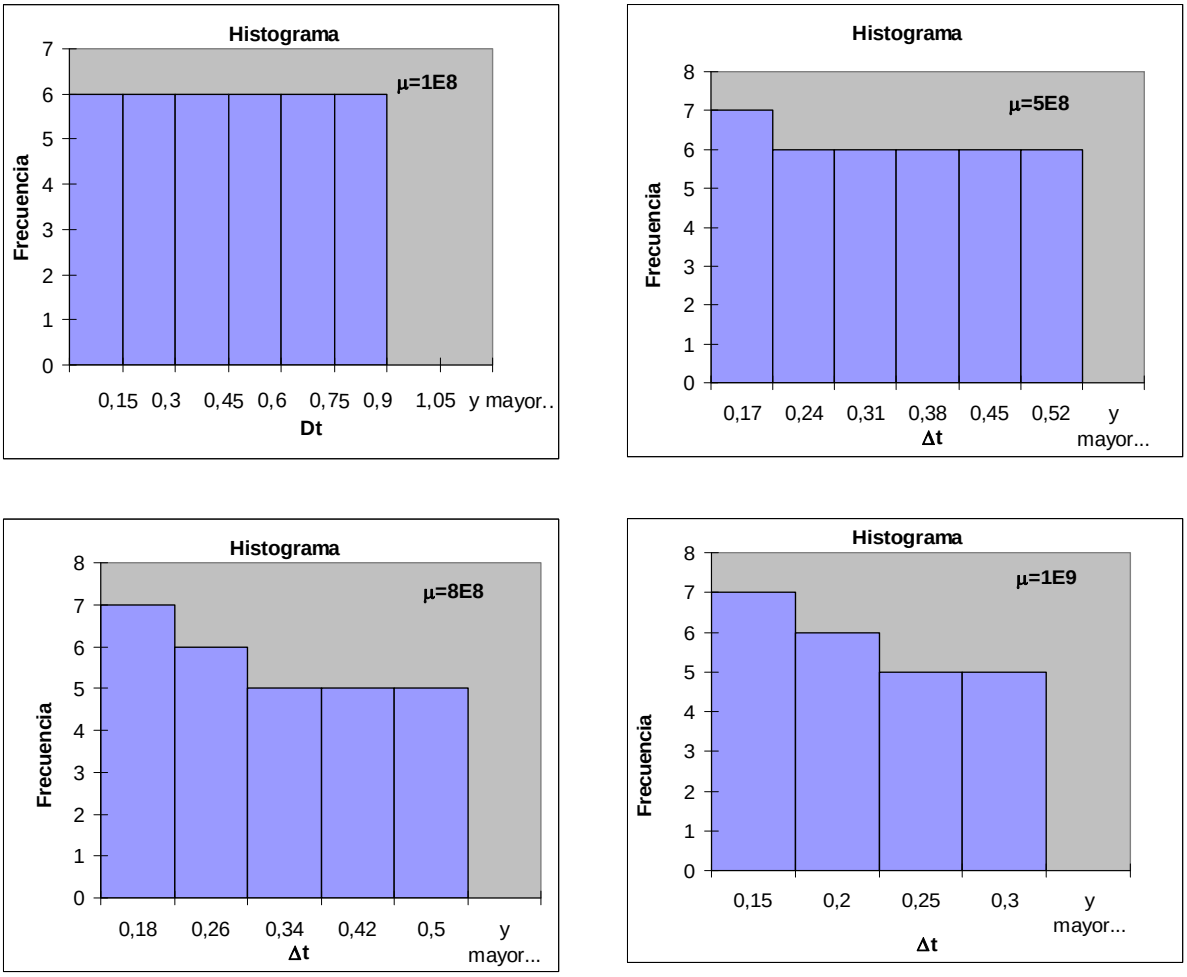


Figura 5–9. Histograma de frecuencias para el paso del tiempo, E = 10 KPa.

De acuerdo con las gráficas de la variación del paso del tiempo y de los histogramas, se infiere que indistintamente del valor del módulo de elasticidad, de la viscosidad o de la longitud de la tajada, optar por pasos del tiempo entre 0.1 y 0.2 garantiza que la solución sea estable. En seguida se muestra algunas gráficas de desplazamiento empleando diferentes valores del paso del tiempo.

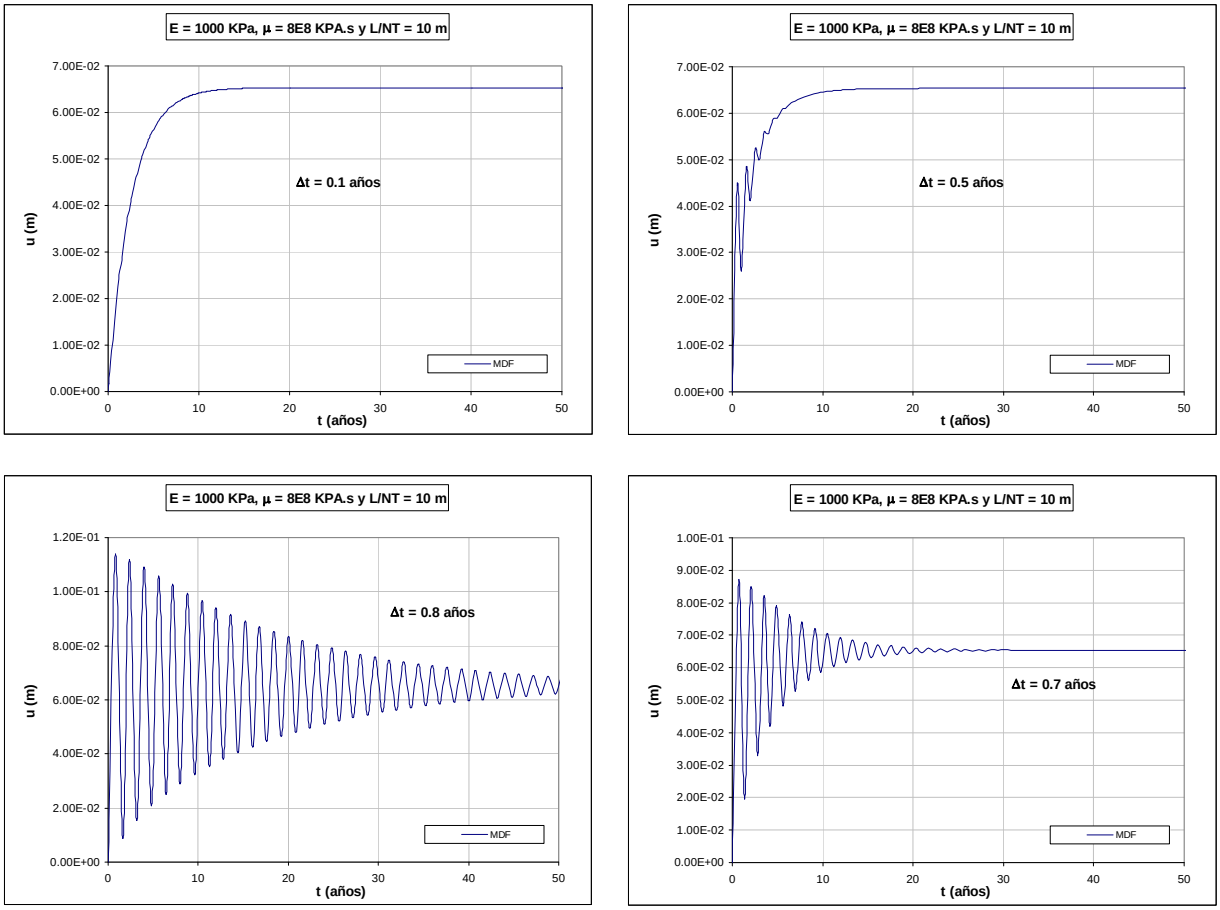


Figura 5–10. Desplazamiento para diferentes pasos de tiempo

Parámetros mecánicos.

Optando por un paso de tiempo de 0.1 años se eligen diferentes parámetros mecánicos, variando la longitud del talud y el número de tajadas, obteniéndose los siguientes valores.

L = 5 m

NT	L/NT	E=1000	E=100	E=10
1	5	μ_i=1E8 μ_i=1E9	μ_i=1E8 μ_i=1E9	μ_i=1E8 μ_i=1E9
2-5	5-1	-	μ_i=1E8 μ_i=1E9	μ_i=1E8 μ_i=1E9
6-15	1-0.3	-	-	μ_i=1E8 μ_i=1E9

L = 10 m

NT	L/NT	E=1000	E=100	E=10
1-3	10-3	μ_j=1E8 μ_i=1E9	μ_j=1E8 μ_i=1E9	μ_j=1E8 μ_i=1E9
4-10	3-1	-	μ_j=1E8 μ_i=1E9	μ_j=1E8 μ_i=1E9
11-30	1-0.3	-	-	μ_j=1E8 μ_i=1E9

L = 20 m

NT	L/NT	E=1000	E=100	E=10
1-6	20-3	μ_j=1E8 μ_i=1E9	μ_j=1E8 μ_i=1E9	μ_j=1E8 μ_i=1E9
7-20	3-1	-	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8
21-30	1-0.6	-	-	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8

L = 30 m

NT	L/NT	E=1000	E=100	E=10
1-10	30-3	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8
11-30	3-1	-	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8

L = 40 m

NT	L/NT	E=1000	E=100	E=10
1-13	40-3	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8 μ_j=1E6 μ_i=1E7	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8 μ_j=1E6 μ_i=1E7	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8 μ_j=1E6 μ_i=1E7
14-30	3-1	-	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8	μ_j=1E8 μ_i=1E9 μ_j=1E7 μ_i=1E8

Nota: El módulo de rigidez está en unidades de KPa. La viscosidad está en unidades de KPa.s

Tabla 5-1. Parámetros mecánicos del suelo donde la solución es estable.

Allí μ_i y μ_j representa la viscosidad dinámica de la superficie de falla y del suelo respectivamente, *NT* es el número de bloques en los que se divide el talud y *L* es su

longitud. Para observar mejor el comportamiento de estos valores se grafica la viscosidad contra la longitud del bloque como se muestra en la siguiente figura.

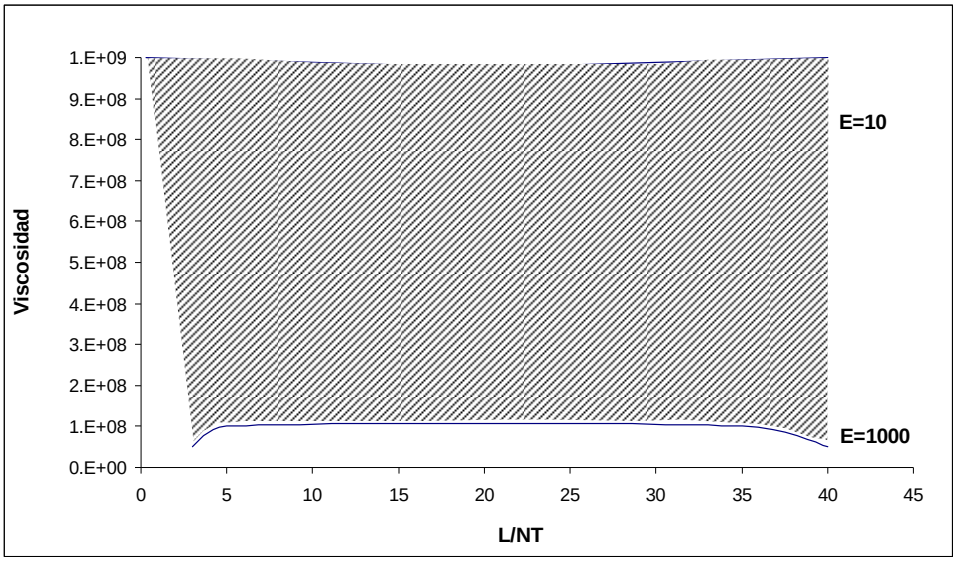


Figura 5–11. Rango de valores donde la solución es estable.

Para longitudes de tajada menores a 3 se requieren valores altos de viscosidad, del orden de 1E9 KPa.s, y módulos que tiendan a 10KPa. A medida que la longitud de la tajada se incrementa se pueden utilizar viscosidades entre 1E8 a 1E9 y módulos que varían entre 10 y 100 KPa. También se presenta que en los extremos se pueden utilizar viscosidades hasta de 7E7 KPa.s para módulos de 1000 KPa.

CAPITULO 6
PROGRAMA GeoCtVp

Se desarrolla el programa GeoCtVp en Visual Basic 6.0 para resolver las ecuaciones numéricas obtenidas del MDF. El programa calcula y grafica los desplazamientos, velocidades, aceleraciones, empujes detrás del muro y la variación del perfil longitudinal del terreno, de una masa deslizada de movimiento lento contenida por un muro de gravedad. Además exporta los valores a una hoja de cálculo para que el usuario tenga acceso a los datos.

A continuación se hace la descripción del programa y se elabora un ejemplo de aplicación para observar la respuesta del programa ante tres diferentes condiciones: superficie de terreno inclinada, superficie horizontal y solución inestable. En el Apéndice 3 se presenta el código del programa.

6.1 Características del programa

El programa se hace bajo la plataforma de Visual Basic 6.0. Está compuesto por 4 grandes secciones: la primera trata el diseño de la interfaz donde se ingresan los datos de entrada del problema. Allí se calcula las coordenadas del talud, el centro de gravedad del muro, la

longitud efectiva de separación entre muros y las coordenadas del muro de contención y del talud.

La segunda sección calcula los desplazamientos en los diferentes tiempos. Se programan las ecuaciones obtenidas del método numérico y se hace la conversión de unidades de las distintas variables que intervienen en el programa; además del uso de un factor de escala que ajusta los valores de desplazamientos a los valores obtenidos de la solución aritmética.

En la tercera sección se hace el desarrollo de la falla interna del suelo (para encontrar el tiempo de falla), el algoritmo de la transformación de las coordenadas del terreno (*X-Z A U-V*), el cálculo de las velocidades, aceleraciones y empujes. Además, se elabora las gráficas de desplazamiento, velocidad, aceleración, empuje y el perfil del terreno. También se crea y guarda un archivo en una hoja de cálculo con los datos anteriores.

La última sección presenta el resultado gráfico de las variables de interés. La Figura 6–1 muestra el diagrama de flujo general del programa.

6.1.1 Sección 1 - Interfaz

Es el espacio donde el usuario ingresa los datos de entrada del problema. Está compuesta por la geometría del talud, las propiedades del suelo y superficie de falla, la geometría del muro, la discretización de la malla y los valores iniciales, como se muestra en la Figura 6–2.

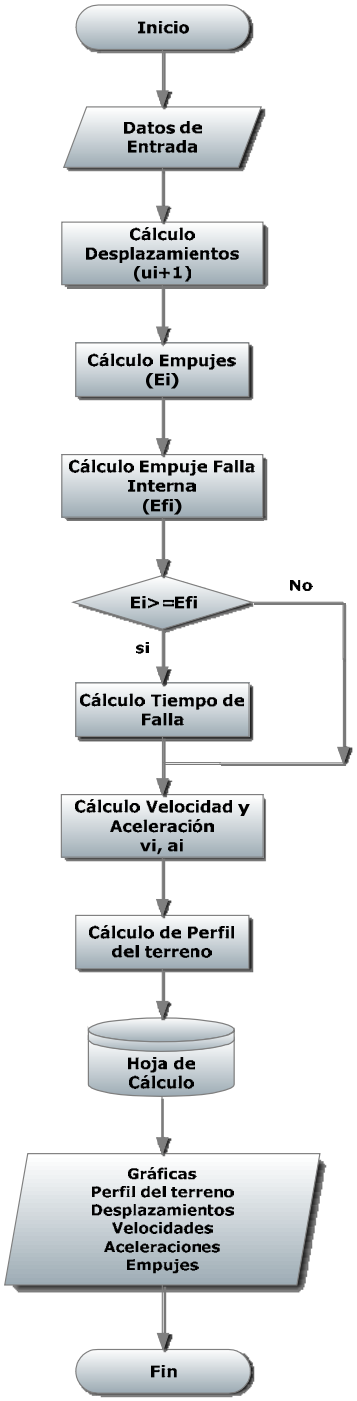


Figura 6–1. Diagrama de flujo del programa GeoCtVp.

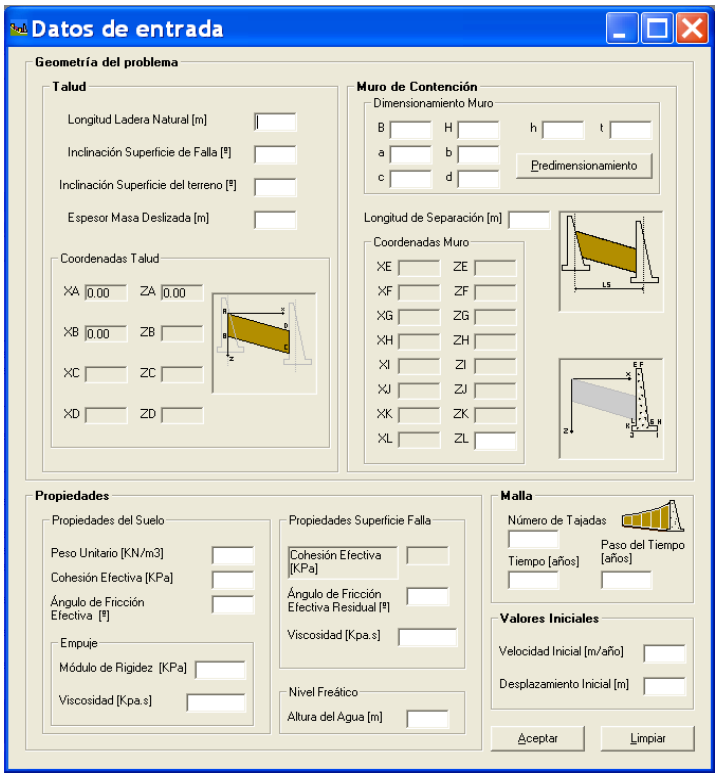


Figura 6–2. Interfaz - Datos de entrada.

Geometría del talud

Longitud de la ladera natural: es la longitud total de la ladera natural que será intervenida por varios muros de gravedad. El usuario determina el número de muros que requiere para el análisis y a partir de ellos se establece la longitud de separación entre muros. Ver Figura 6–3.Figura 6–3. Geometría del talud.

Inclinación de la superficie de falla: es el ángulo en grados que forma la superficie de falla con la horizontal.

Inclinación de la superficie del terreno: es el ángulo en grados que forma la superficie del terreno con la horizontal. Si el terreno es paralelo a la superficie de falla, ambos ángulos serán iguales. Si el terreno es horizontal, éste será cero.

Espesor de la masa deslizada: se mide perpendicularmente a la superficie del terreno.

Coordenadas del talud: se refiere al segmento de talud limitado por dos muros consecutivos. Las coordenadas se encuentran bajo el sistema coordenado *X-Z*. Por defecto, el programa toma el punto *A* en (0,0), el punto *B* lo calcula cuando el usuario ingrese el valor del espesor del suelo y los puntos *C* y *D* los calcula una vez se ingrese las dimensiones del muro y la longitud de separación.

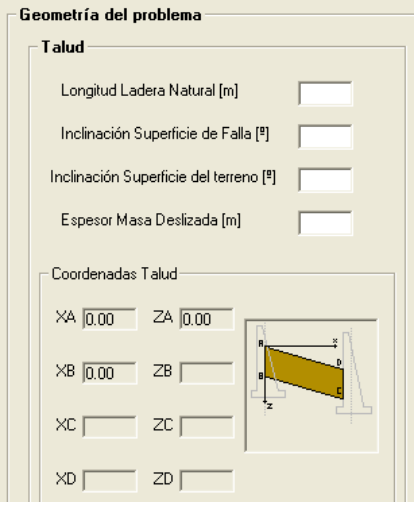


Figura 6–3. Geometría del talud.

Propiedades del suelo y superficie de falla

En la Figura 6–4 se muestra parte de la interfaz donde se ingresan los datos del suelo y la superficie de falla.

Peso unitario: es el peso unitario total en KN/m3.

Cohesión: es la cohesión del suelo en KPa.

Ángulo de fricción: es el ángulo de fricción efectivo en grados. En la superficie de falla es el residual.

Módulo de Rigidez[1]*:* es el obtenido en laboratorio en KPa, su valor está entre 10 y 1000.

Viscosidad[1]*:* corresponde a la viscosidad dinámica del suelo y de la superficie de falla, su valor está en el rango de 1E8 a 1E9 Kpa.s.

Nivel freático: es la altura del agua en la masa deslizada.

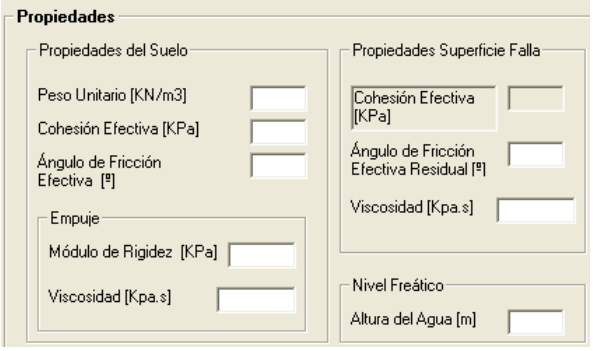


Figura 6–4. Propiedades del suelo y superficie de falla.

[1] Los valores del módulo de rigidez y viscosidad se determinan en el Capítulo 5 “Método Numérico y Estabilidad de la Solución”.

Geometría del muro de contención

La Figura 6–5 presenta la interfaz de la geometría del muro de contención, incluyendo la longitud de separación entre muros y las coordenadas *X-Z* del muro.

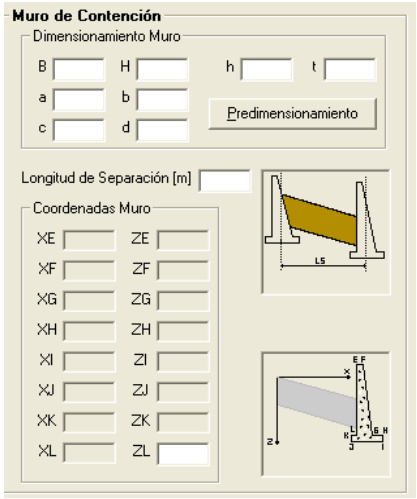
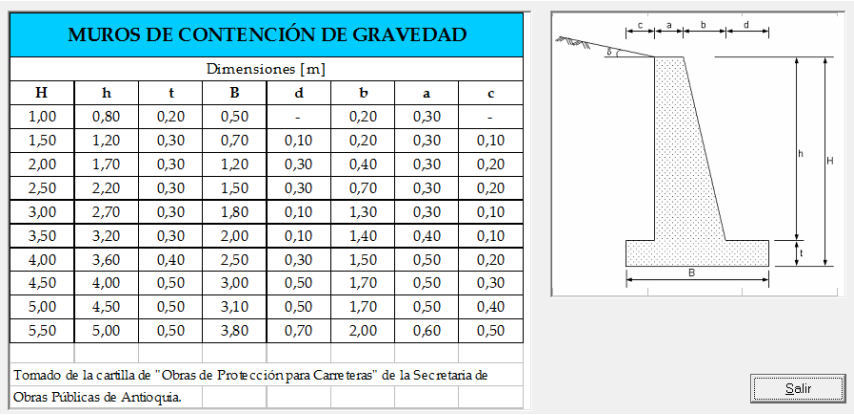


Figura 6–5. Geometría del muro de gravedad.

Dimensionamiento del muro: las dimensiones *B*, *H*, *a*, *b*, *c*, *d*, *h* y *t* se relacionan con la figura que emerge al hacer click en el botón "Predimensionamiento" como se muestra en la Figura 6–6. En esta ventana se exponen los distintos valores de dimensiones para muros de gravedad, tomado de la cartilla de "Obras de Protección para Carreteras" de la Secretaría de Obras Públicas de Antioquia. El usuario tiene la opción de apoyarse en ésta para su diseño.

Una vez digitados los valores del dimensionamiento del muro, el programa calcula automáticamente su centro de gravedad (X_{CG},Y_{CG}).

Longitud de separación: es la longitud horizontal medida entre centros de gravedad de muros consecutivos. Al validar este valor, el programa calcula la longitud efectiva de separación (Longitud efectiva = Longitud de separación - X_{CG} + c).



MUROS DE CONTENCIÓN DE GRAVEDAD

Dimensiones [m]

H	h	t	B	d	b	a	c
1,00	0,80	0,20	0,50	-	0,20	0,30	-
1,50	1,20	0,30	0,70	0,10	0,20	0,30	0,10
2,00	1,70	0,30	1,20	0,30	0,40	0,30	0,20
2,50	2,20	0,30	1,50	0,30	0,70	0,30	0,20
3,00	2,70	0,30	1,80	0,10	1,30	0,30	0,10
3,50	3,20	0,30	2,00	0,10	1,40	0,40	0,10
4,00	3,60	0,40	2,50	0,30	1,50	0,50	0,20
4,50	4,00	0,50	3,00	0,50	1,70	0,50	0,30
5,00	4,50	0,50	3,10	0,50	1,70	0,50	0,40
5,50	5,00	0,50	3,80	0,70	2,00	0,60	0,50

Tomado de la cartilla de "Obras de Protección para Carreteras" de la Secretaria de Obras Públicas de Antioquia.

Figura 6–6. Predimensionamiento de muros de gravedad.

Coordenadas del muro: el programa las calcula por defecto una vez digitada la ordenada *ZL*. Esta ordenada involucra de forma indirecta la profundidad de cimentación.

Malla

Número de tajadas: es el número de tajadas o bloques en los que se divide la masa deslizada.

Tiempo: corresponde al tiempo, en años, que el usuario requiere para el análisis.

Paso del tiempo: corresponde a los incrementos del tiempo en que se corre el programa y lo define el usuario de acuerdo con lo visto en el Capítulo 5 “Método Numérico y Estabilidad de la Solución”. Una vez definido, el programa calcula por defecto, el número de pasos del tiempo (Número de pasos del tiempo = Tiempo/Paso de tiempo). Se observó que para intervalos de tiempo inferiores a 0.1 seg el ordenador necesita un mayor recurso en tiempo de ejecución.

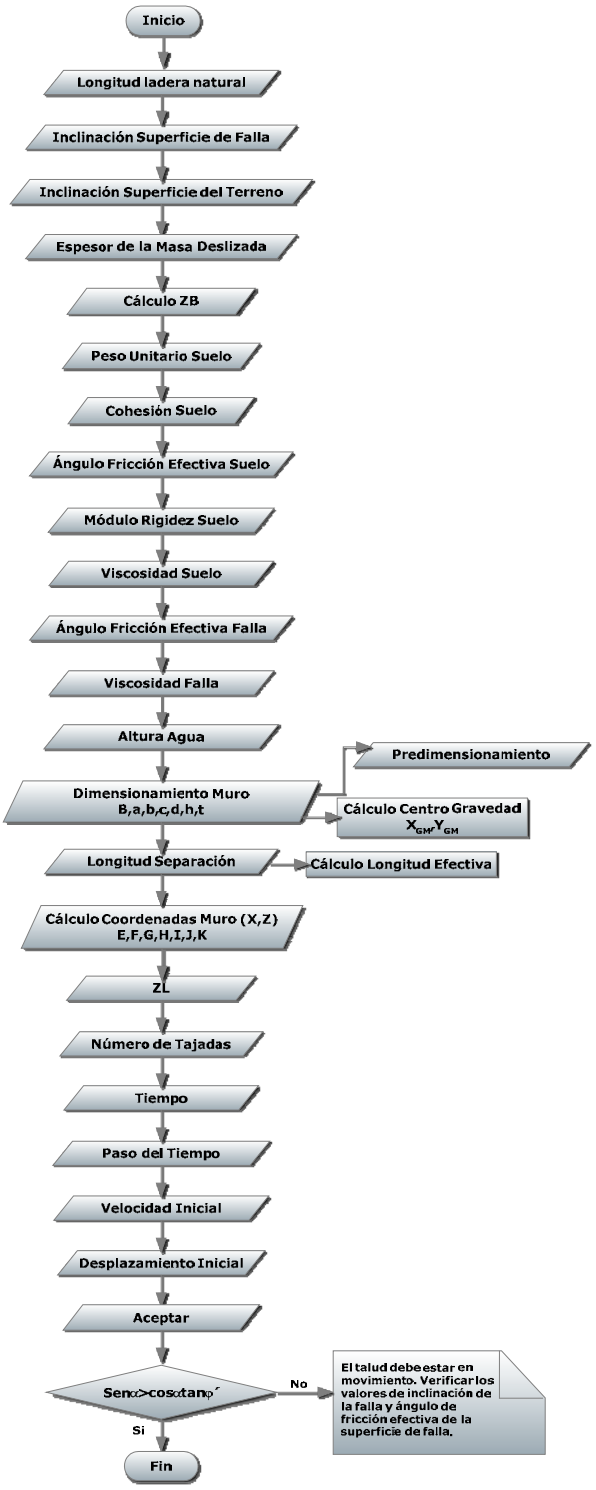


Figura 6–7. Diagrama de flujo de la interfaz.

Valores Iniciales

Velocidad y desplazamiento inicial: son los valores iniciales del problema, están en m/año y m respectivamente.

Finalmente para validar los datos de entrada, el programa corrobora que el talud esté en movimiento. Para ello verifica internamente que el factor de seguridad sea menor que uno, es decir que $sen\alpha > cos\alpha tan\ \phi'$, al hacer click en el botón *"Aceptar"*. La Figura 6–7 muestra el diagrama de flujo de la interfaz.

6.1.2 Sección 2 - Desplazamientos

En esta sección se programa el sistema de ecuaciones obtenido en el Capítulo 5. Primero se crean vectores que almacenan los valores constantes utilizados durante el desarrollo del programa, como lo son: la longitud inicial de las tajadas (*MatLTinicial*), la altura inicial de las paredes (*MatHj_1 y MatHj_1mas1*), la masa inicial de las tajadas (*Masa*), la viscosidad tanto del suelo como de la superficie de falla (*MatVS y MatVF*), el módulo de rigidez del suelo (*MatCteR*), velocidad inicial (*MatVI*) y el parámetro *T* y *A* (*MatT y MatA*).

Es importante señalar que los valores de viscosidad dinámica que el usuario ingresa en los datos de entrada están en términos de esfuerzos (*Fuerza*Tiempo/Longitud^2*) y como las ecuaciones están en función de fuerzas es necesario expresarla en estos términos, es así que:

$$\eta = \mu * Factor \qquad EC(6–1)$$

donde η es el coeficiente de amortiguación (*Fuerza*Tiempo/Longitud*), μ es la viscosidad dinámica y *Factor* está en función de la forma del cuerpo que para el caso de las tajadas será la longitud de éstas, es decir:

$$\eta = \mu * \text{Longitud de la tajada} \qquad EC(6\text{–}2)$$

entonces:

$$MatVS = MatVF = \eta \qquad EC(6\text{–}3)$$

Así mismo, el módulo de rigidez que ingresa el usuario, obtenido en laboratorio E_{lab}, también se encuentra en términos de esfuerzos (*Fuerza/Longitud^2*). El módulo se puede obtener a partir del ensayo de compresión inconfinada (ver Figura 6–8), es así que:

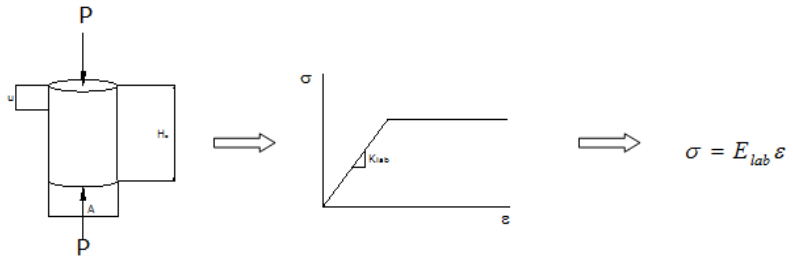


Figura 6–8. Módulo de elasticidad a partir del ensayo de compresión inconfinada.

$$\sigma = P/A \quad y \quad \varepsilon = u/H_o \qquad EC(6\text{–}4)$$

entonces:

$$\frac{P}{A} = E_{lab}\frac{u}{H_o} \qquad EC(6\text{–}5)$$

es decir que:

$$P = \left(\frac{E_{lab} A}{H_o} \right) u \qquad EC(6–6)$$

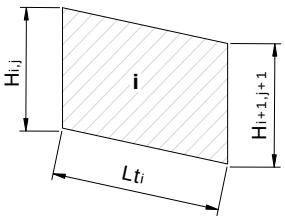
pero se sabe que del resorte:

$$P = Ku \qquad EC(6–7)$$

reemplazando se tiene:

$$K = \left(\frac{E_{lab} A}{H_o} \right) \qquad EC(6–8)$$

Ahora para una tajada *i* cualquiera se tiene:



$$A = \frac{H_{i,j} + H_{i+1,j+1}}{2}$$

$$H_o = Lt_i \qquad EC(6–9)$$

Figura 6–9. Geometría de la tajada.

Entonces el módulo de rigidez en términos de fuerza (Fuerza/Longitud) se expresa como:

$$K = \left(\frac{E_{lab}}{Lt_i} \right) \left(\frac{H_{i,j} + H_{i+1,j+1}}{2} \right) \qquad EC(6–10)$$

Es así que MatCteR = K.

Ahora bien, las ecuaciones numéricas (obtenidas de las diferencias finitas) escritas en lenguaje de programación se expresan como:

Primer movimiento $t=t_o=0$

Diferencias finitas:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t^2}+\frac{C_{j-1}}{2\Delta t} & \frac{-C_{j-1}}{2\Delta t} & 0 \\ \frac{-C_{j-1}}{2\Delta t} & \frac{1}{\Delta t^2}+\frac{C_j}{2\Delta t} & \frac{-C_j}{2\Delta t} \\ 0 & \frac{-C_j}{2\Delta t} & \frac{1}{\Delta t^2}+\frac{C_{j+1}}{2\Delta t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1,t+1} \\ u_{i,t+1} \\ u_{i+1,t+1} \end{Bmatrix} = \{T\}+[U]\{A\}+ \begin{bmatrix} \frac{-1}{\Delta t^2}+\frac{C_{j-1}}{2\Delta t} & \frac{-C_{j-1}}{2\Delta t} & 0 \\ \frac{-C_{j-1}}{2\Delta t} & \frac{-1}{\Delta t^2}+\frac{C_j}{2\Delta t} & \frac{-C_j}{2\Delta t} \\ 0 & \frac{-C_j}{2\Delta t} & \frac{-1}{\Delta t^2}+\frac{C_{j+1}}{2\Delta t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1,t-1} \\ u_{i,t-1} \\ u_{i+1,t-1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta t^2}-\bar{K}_{j-1} & \bar{K}_{j-1} & 0 \\ \bar{K}_{j-1} & \frac{2}{\Delta t^2}-\left(\bar{K}_{j-1}+\bar{K}_j\right) & \bar{K}_j \\ 0 & \bar{K}_j & \frac{2}{\Delta t^2}-\left(\bar{K}_j+\bar{K}_{j+1}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1,t} \\ u_{i,t} \\ u_{i+1,t} \end{Bmatrix}$$

EC(6–11)

Programa:

[MatK]{MatUtmas1} = {MatT} + [MatHw]{MatA} + [VecCteVI]{MatVI} + [MatFt]{Matu}

EC(6–12)

Movimiento en el tiempo

Diferencias finitas:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta t^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta t^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\Delta t^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1,t+1} \\ u_{i,t+1} \\ u_{i+1,t+1} \end{Bmatrix} = \{T\}+[U]\{A\}+ \begin{Bmatrix} u_{i-1,t-1} \\ u_{i,t-1} \\ u_{i+1,t-1} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta t^2}-\frac{\eta_{i-1}}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta t^2}-\frac{\eta_{i-1}}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\Delta t^2}-\frac{\left(\eta_{i-1}+\eta_{j-1}\right)}{m} \end{bmatrix} \{Vcte\} + \begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\Delta t}-\bar{K}_{j+1} \end{bmatrix} \{u_o\}$$

EC(6–13)

Programa:

[MatK]{MatUtmas1} = {MatT} + [MatHw]{MatA} + [MatFt_1]{Matu_1} + [MatFt]{Matu}

EC(6–14)

Las matrices que acompañan los vectores desplazamientos para el tiempo *t+1*, *t-1* y t están dadas por las matrices *MatK*, *MatFt_1* y *MatFt* respectivamente. Los vectores de desplazamientos son *Matu_1* y *Matu* para el tiempo *t-1* y *t*, el vector de la fuerza del agua es *MatUw* y la matriz que acompaña a la velocidad inicial en el primer movimiento es *VecCteVI*. La inversa de la matriz *MatK* está dada por *MatInvK*. Además la altura de las paredes de las tajadas (anterior y posterior) está dada por los vectores *MatHj* y *MatHjmas1*. El vector desplazamiento para el tiempo *t+1* que se quiere encontrar, está dado por:

$$MatUtmas1 = MatInvK*MatB \qquad EC(6–15)$$

Para el primer movimiento MatB es:

$$MatB = MatT + MatUw*MatA + MatFt*Matu + y\ MatVI*VecCteVI \qquad EC(6–16)$$

Movimiento en el tiempo:

$$MatB = MatT + MatUw*MatA + MatFt*Matu + MatFt_1*Matu_1 \qquad EC(6–17)$$

Además el vector desplazamiento para el tiempo *t-1* en el primer movimiento es *Matut_1*. La Figura 6–10 muestra el diagrama de flujo para el cálculo del desplazamiento en el tiempo *t+1*.

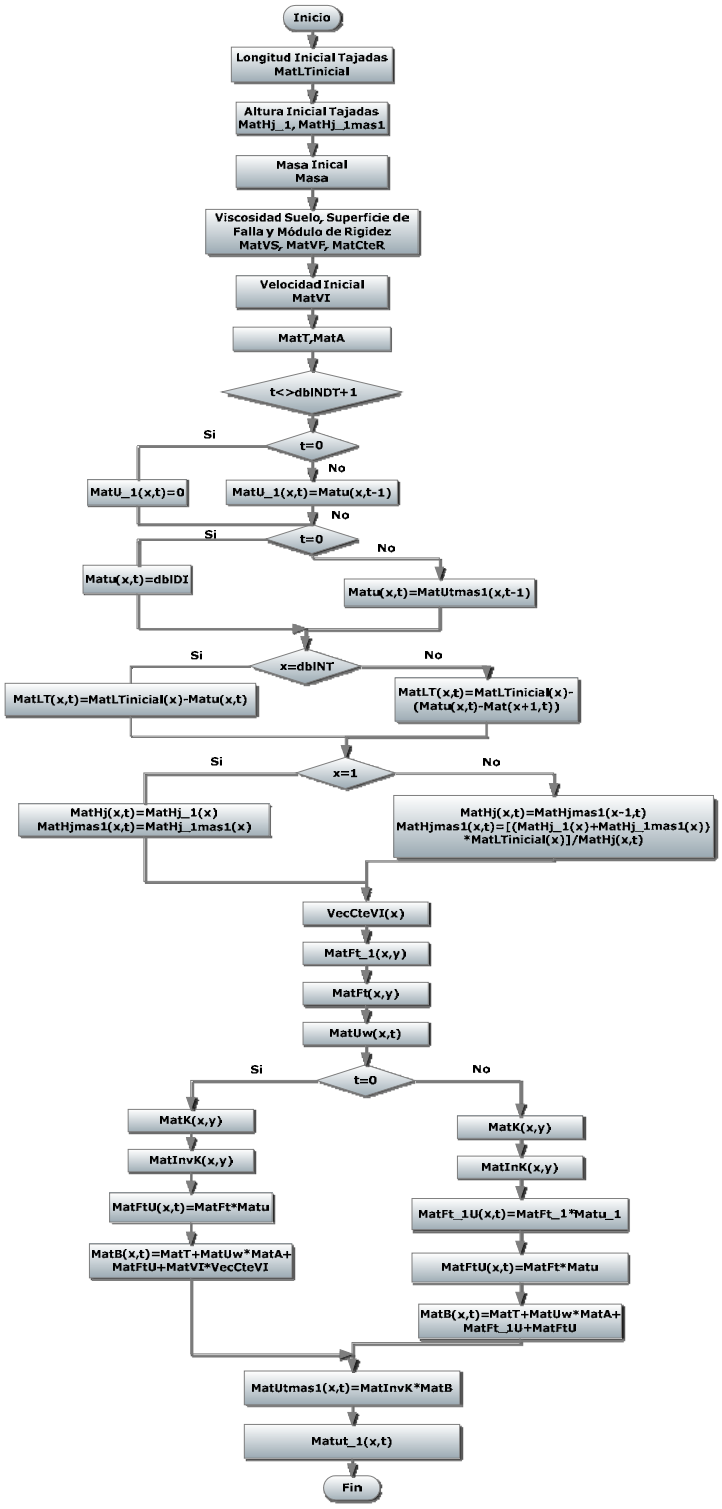


Figura 6–10. Diagrama de flujo desplazamientos.

6.1.3 Sección 3 – Velocidad, aceleración, empuje y perfil del terreno

Hasta aquí los desplazamientos se han calculado para el tiempo de análisis ingresado por el usuario. Ahora bien, es posible que el suelo sufra falla interna[2] por los empujes generados entre las tajadas; si esto sucede es necesario identificar el tiempo para el cual se presenta la falla. Con este tiempo se calcula las velocidades, aceleraciones y perfil del terreno. Ahora, si no se presenta la falla interna, el programa continúa el cálculo para el tiempo de análisis inicial.

Con el fin de determinar la existencia de falla, el programa inicia calculando los empujes en las tajadas para el tiempo de análisis inicial. Cada tajada es afectada por dos empujes; el que actúa en la pared anterior *MatFj_1* y en la pared posterior *Fjmas1*. Después calcula el empuje promedio *MatE* en cada tajada y el empuje de falla *MatEF*, para luego comparar estos valores y determinar la falla del suelo. De presentarse la falla, el programa identifica la tajada que primero falló y el tiempo para el cual se presentó este suceso. Este tiempo se almacena en una variable llamada *"parar"*. En caso de no presentarse la falla la variable *"parar"* almacena el tiempo de análisis ingresado.

Además el programa crea una hoja de cálculo con varias pestañas que guarda y grafica los datos obtenidos de desplazamientos (*MatUexcel*), velocidad (*Matvexcel*), aceleración (*MatAcexcel*), empuje promedio (*Matfexcel*), coordenadas del perfil del terreno (*MatXigra*, *MatYigra*, *MatXfgra* y *MatYfgra*) y altura de las tajadas (*MatHjexcel* y *MatHjmas1excel*). La Figura 6–11 muestra el diagrama de flujo de la Sección 3.

[2] La falla interna del suelo se trata en el Capítulo 4 "Análisis Viscoplásticos en la Contención de Taludes".

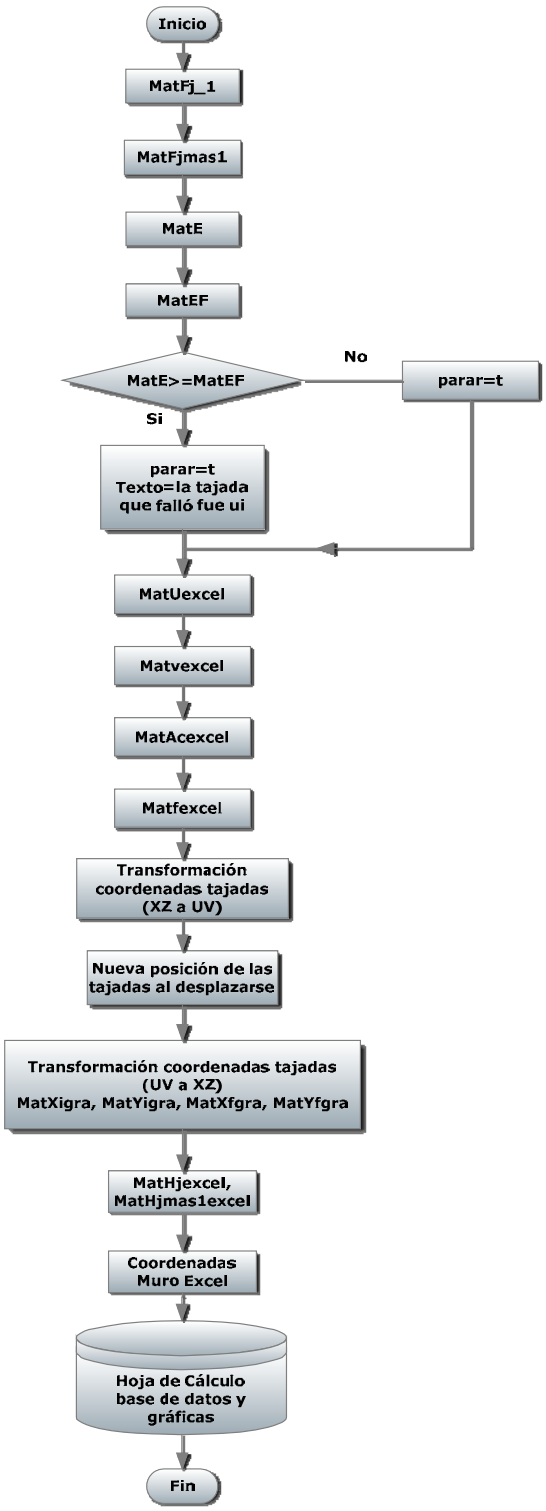


Figura 6–11. Diagrama de flujo de la respuesta del programa.

6.1.4 Sección 4 – Resultado gráfico

La última parte del programa muestra en pantalla el resultado gráfico de las variables de interés. El programa identifica cada una las gráficas de la hoja de cálculo y las guarda como un archivo ".GIF" en la carpeta de datos de salida. Luego carga estas imágenes en un formulario que se visualiza en pantalla como una ventana nueva. En la siguiente figura se muestra la ventana con las gráficas obtenidas.

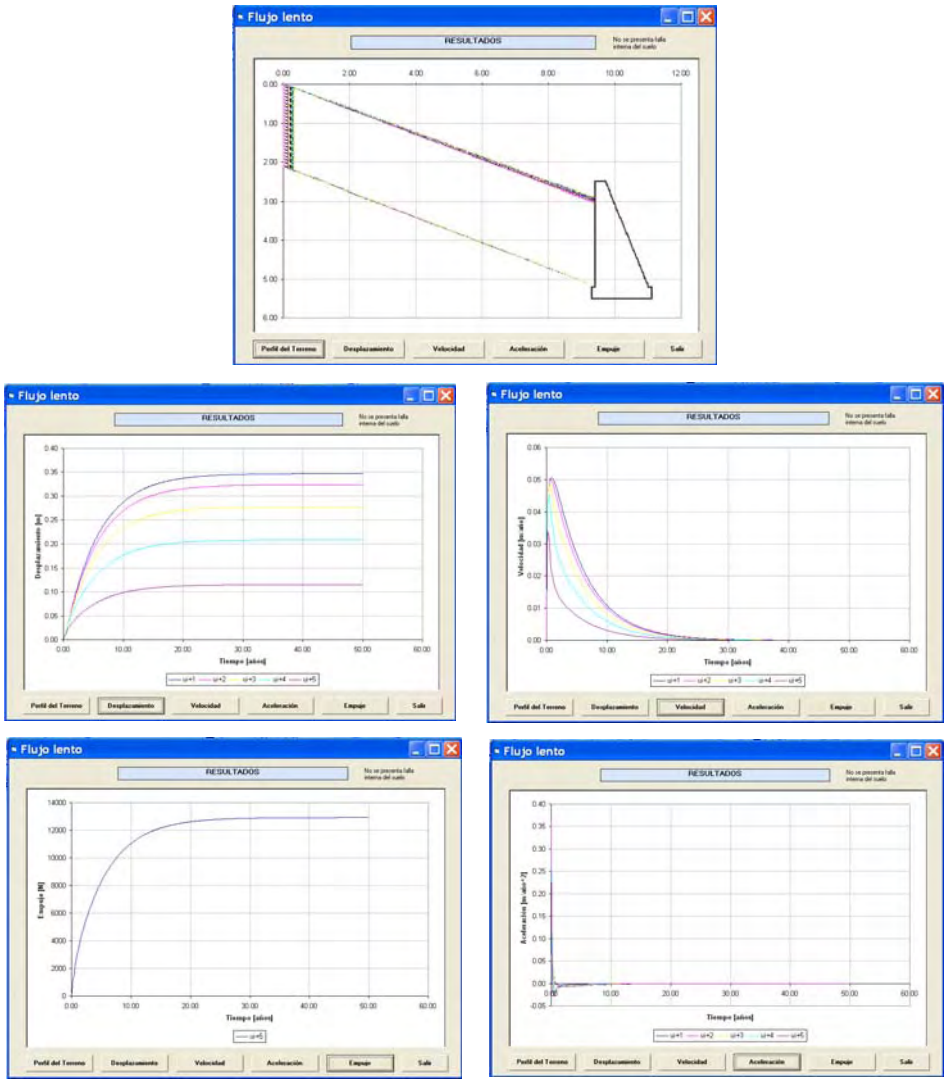


Figura 6–12. Ventana de resultados - Sección 4.

6.2 Ejemplos de aplicación

A continuación se realiza la aplicación del programa GeoCtVp para observar la respuesta del talud ante tres condiciones: superficie del terreno inclinada, superficie horizontal y solución inestable. Para ello se elige la geometría y parámetros de un talud típico.

Talud típico

Inclinación superficie de falla	°	18
Inclinación superficie de terreno	°	18
Espesor de la masa	m	2
Peso unitario	KN/m3	18
Cohesión efectiva suelo	Kpa	0
Ángulo de fricción efectiva suelo	°	20
Módulo de rigidez	KPa	10
Viscosidad suelo	Kpa.s	1.00E+08
Ángulo de fricción efectiva superficie falla	°	16
Viscosidad superficie falla	Kpa.s	8.00E+08
Nivel freático	m	0
Longitud de separación	m	10
Número de tajadas	un	5
Tiempo	años	50
Paso del tiempo	años	0.1
Velocidad inicial	m/años	0
Desplazamiento inicial	m	0

Tabla 6–1. Datos de entrada del programa-Talud típico.

Muro típico

B	m	1.8
H	m	3
a	m	0.3
b	m	1.3

c	m	0.1
d	m	0.1
h	m	2.7
t	m	0.3

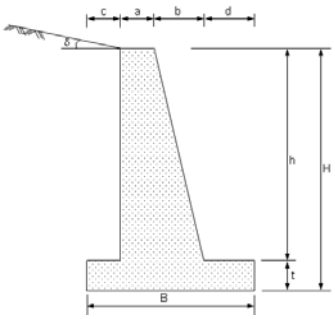


Figura 6–13. Datos de entrada del programa-Muro típico.

Al correr el programa con estos datos se obtienen las siguientes gráficas:

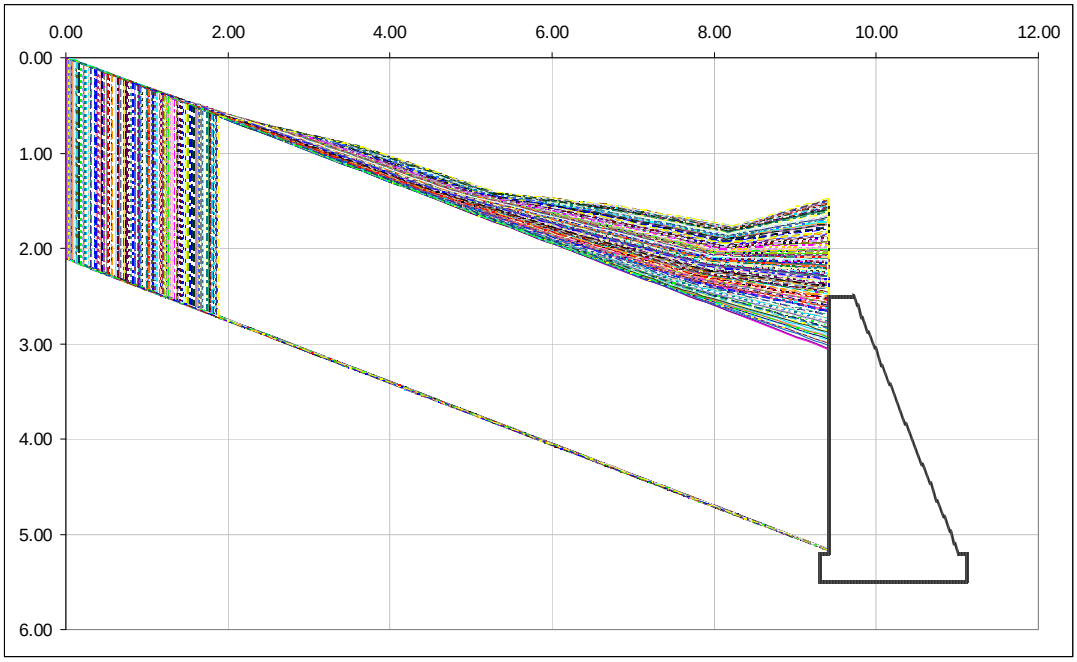


Figura 6–14. Variación del perfil del terreno – Talud inclinado.

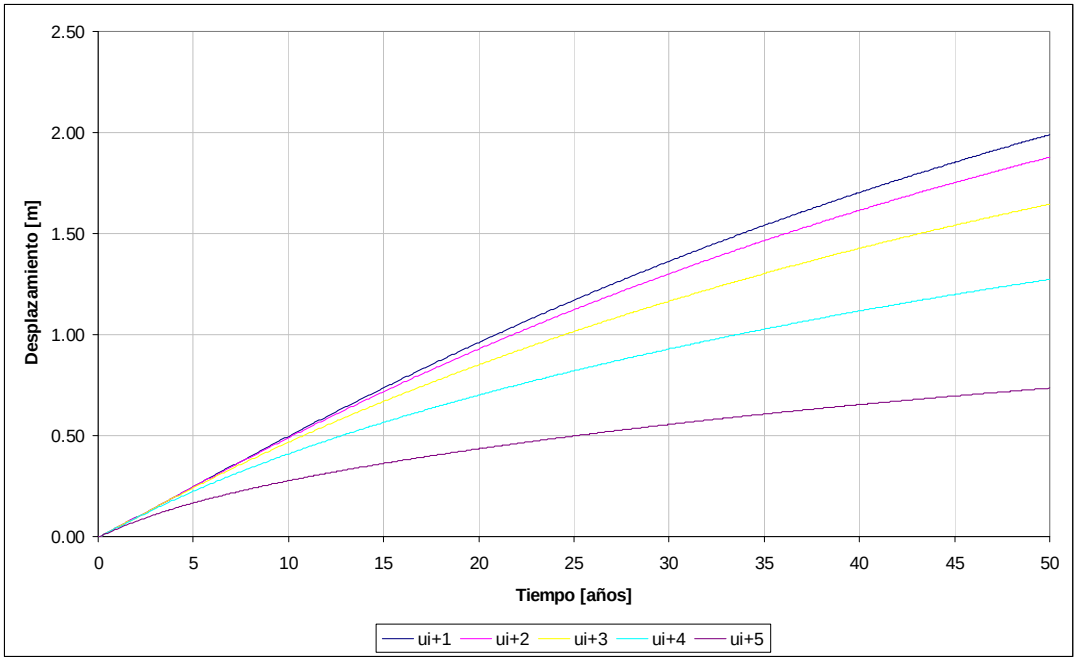


Figura 6–15. Desplazamientos – Talud inclinado.

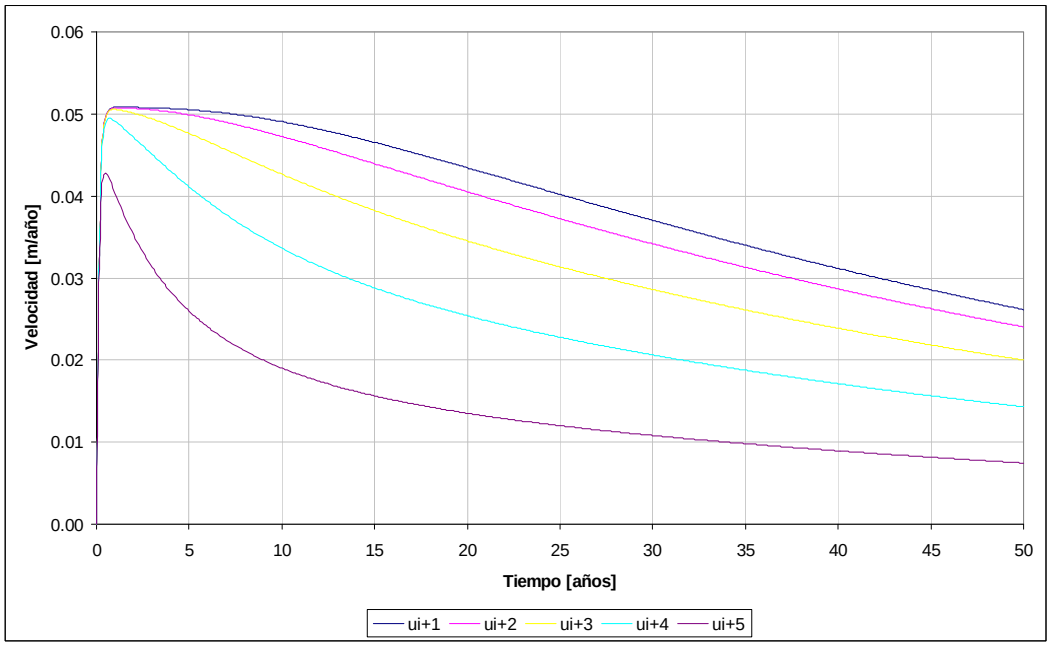


Figura 6–16. Velocidad – Talud inclinado.

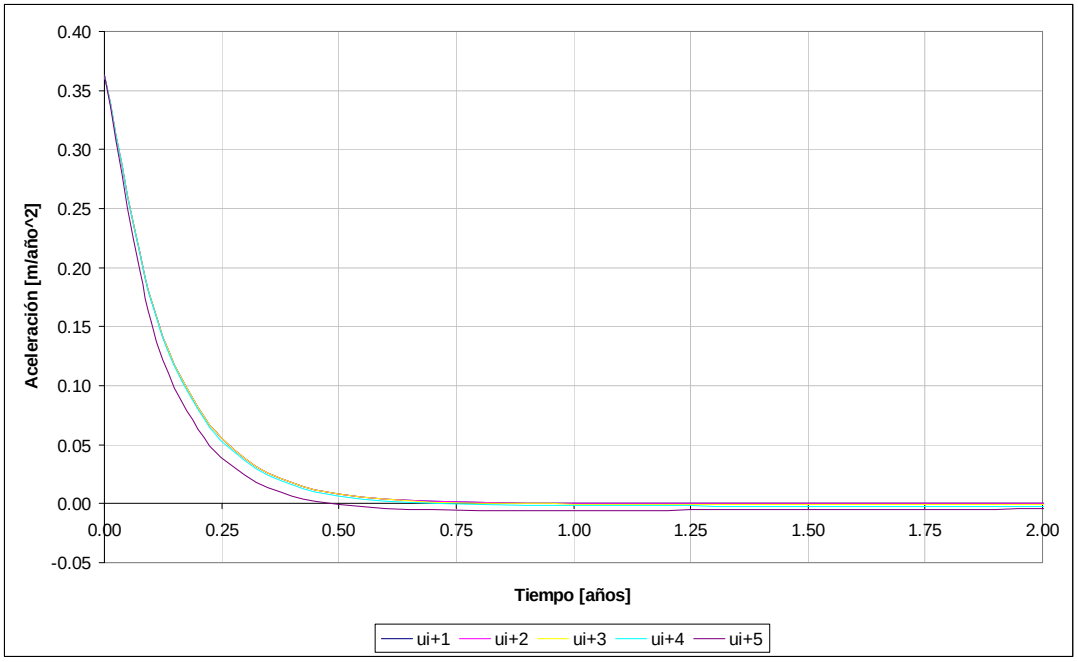


Figura 6–17. Aceleración – Talud inclinado.

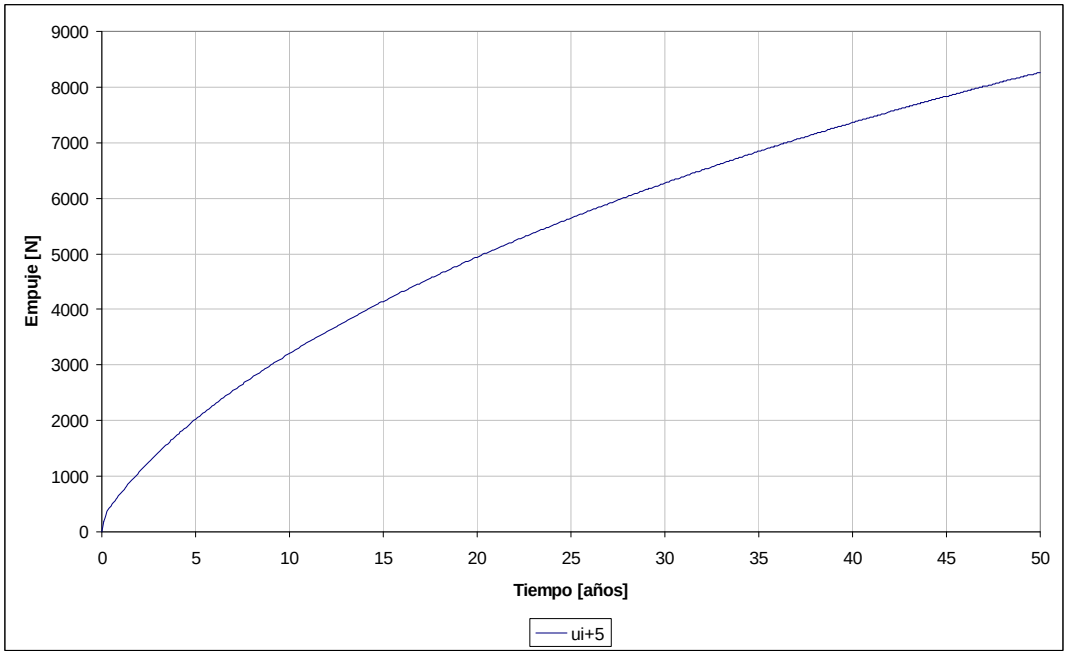


Figura 6–18. Empuje sobre el muro – Talud inclinado.

De la gráfica de desplazamientos se observa que los mayores desplazamientos se presentan en la primera tajada, cuyo valor máximo es de 2 m, mientras que el menor valor se registra en la tajada que limita con el muro, como era de esperar debido a la restricción que éste genera en el movimiento. El valor menor es de 0.7 m siendo casi la tercera parte del desplazamiento registrado en la primera tajada. También se nota que no se presenta falla interna del suelo y que el programa culmina la corrida para los 50 años establecidos en los datos de entrada.

La gráfica de velocidad exhibe los valores máximos en 0.5 años para la última tajada cuyo valor corresponde a 0.043 m/año y en 1.4 años para la primera tajada con un máximo de 0.05 m/año; coherente con la gráfica de desplazamientos. Luego se nota un decremento muy suave en la velocidad.

El valor máximo de la aceleración corresponde a 0.36 m/año^2 para la condición inicial, luego disminuye a cero para el caso de la primera tajada y a -0.006 m/año^2 para la última tajada, ambas en un tiempo de 0.9 años. Después de este tiempo la velocidad tiende valores muy pequeños, próximos a cero, hasta los 40 años donde a partir de allí los valores son cada vez más cercanos a cero indicando la tendencia a desarrollar velocidad constante.

La gráfica del empuje indica que el valor máximo está por encima de los 8 KN en 50 años y su tendencia es a ser mayor para tiempos superiores.

El perfil del terreno señala que la altura del suelo iguala la altura del muro en el año 30.8 y que a partir de allí el terreno sobre pasa al muro alcanzando alturas de hasta 3.68 m para 50 años. Este comportamiento resulta obvio pues para suelos de tan baja rigidez se espera deformaciones considerables, tal y como lo refleja la variación de las alturas de las tajadas desplazadas.

6.2.1 Superficie del terreno horizontal

En seguida se hace un par de ejemplos con terreno horizontal para evidenciar la versatilidad del programa en cuanto a la opción de análisis para geometrías diferentes.

El ángulo de inclinación del terreno es cero, se usan los mismos parámetros del talud típico y las siguientes dimensiones de muro.

B	m	3.0	c	m	0.3
H	m	4.5	d	m	0.5
a	m	0.5	h	m	4.0
b	m	1.7	t	m	0.5

Tabla 6–2. Datos de entrada del programa-Muro típico.

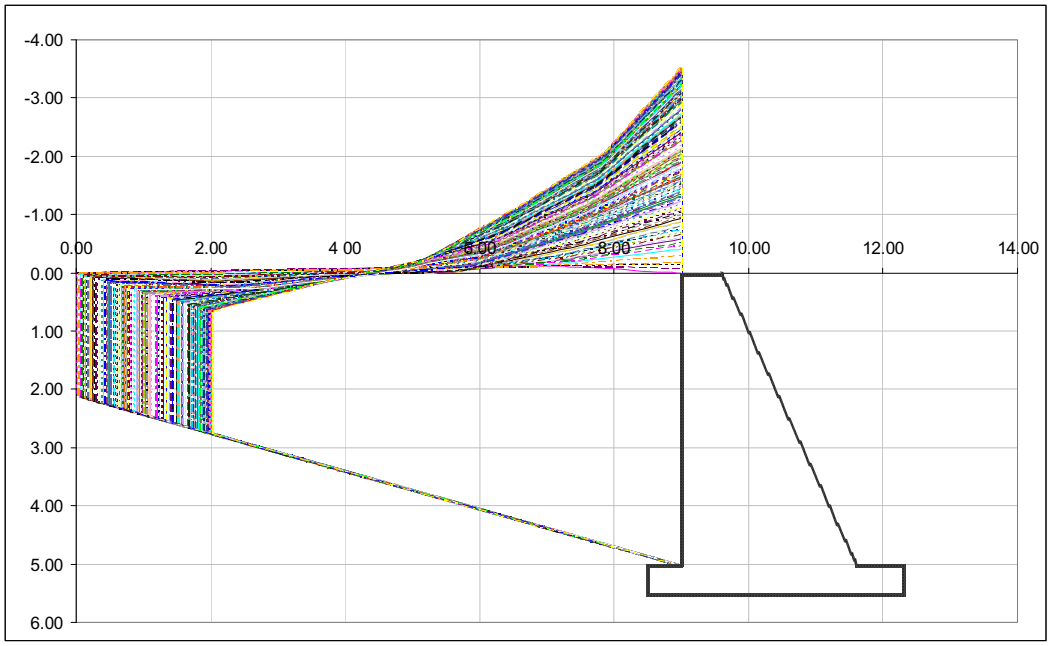


Figura 6–19. Variación del perfil del terreno – Talud horizontal.

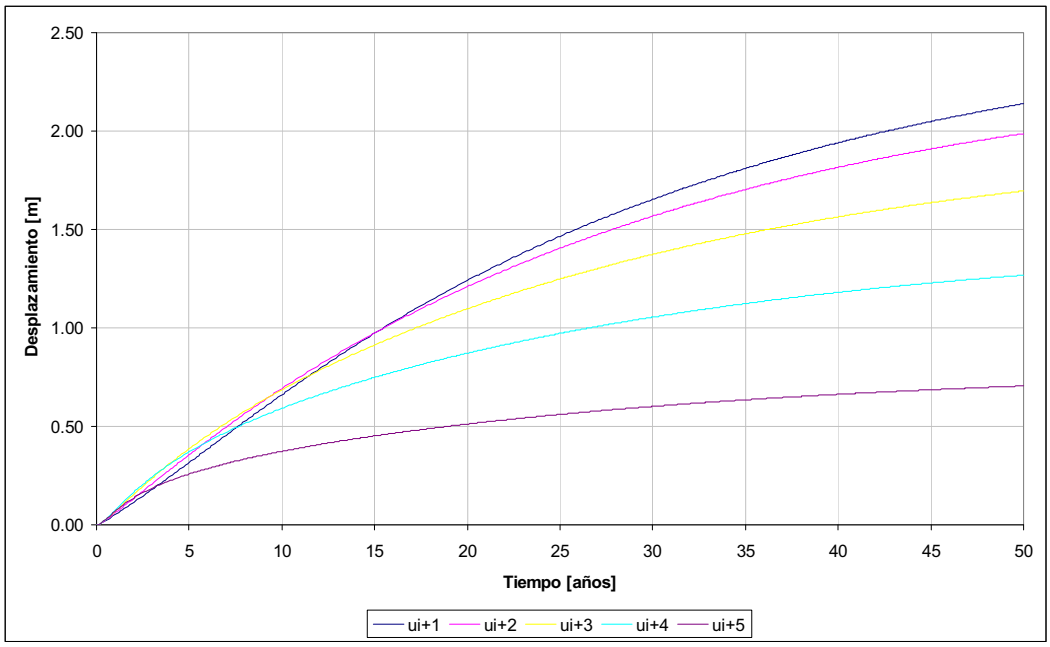


Figura 6–20. Desplazamientos – Talud horizontal.

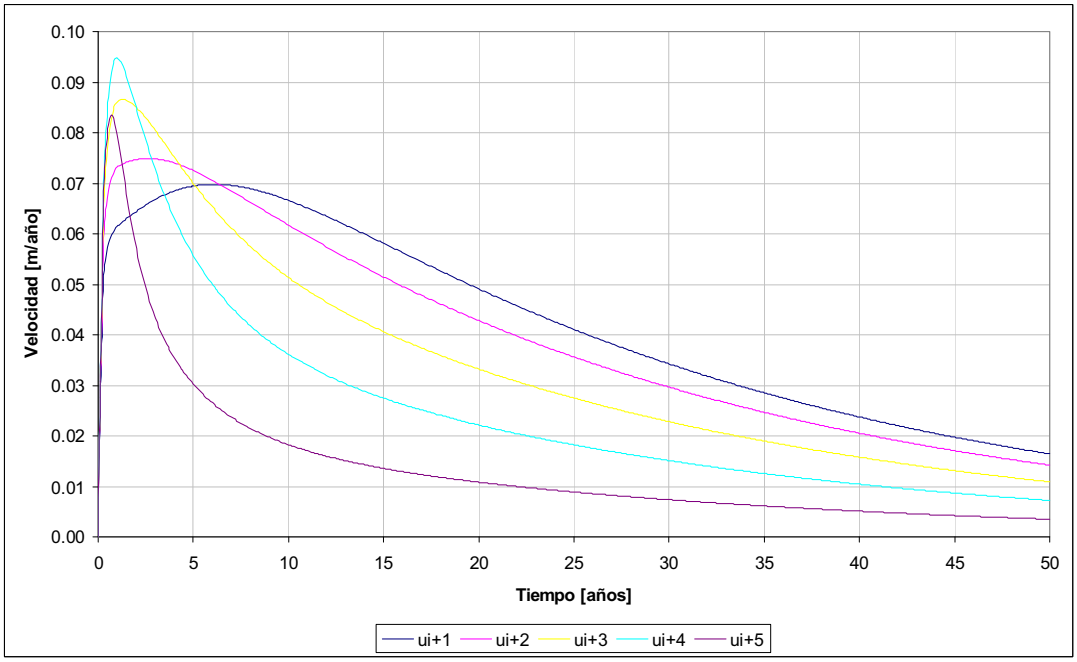


Figura 6–21. Velocidad – Talud horizontal.

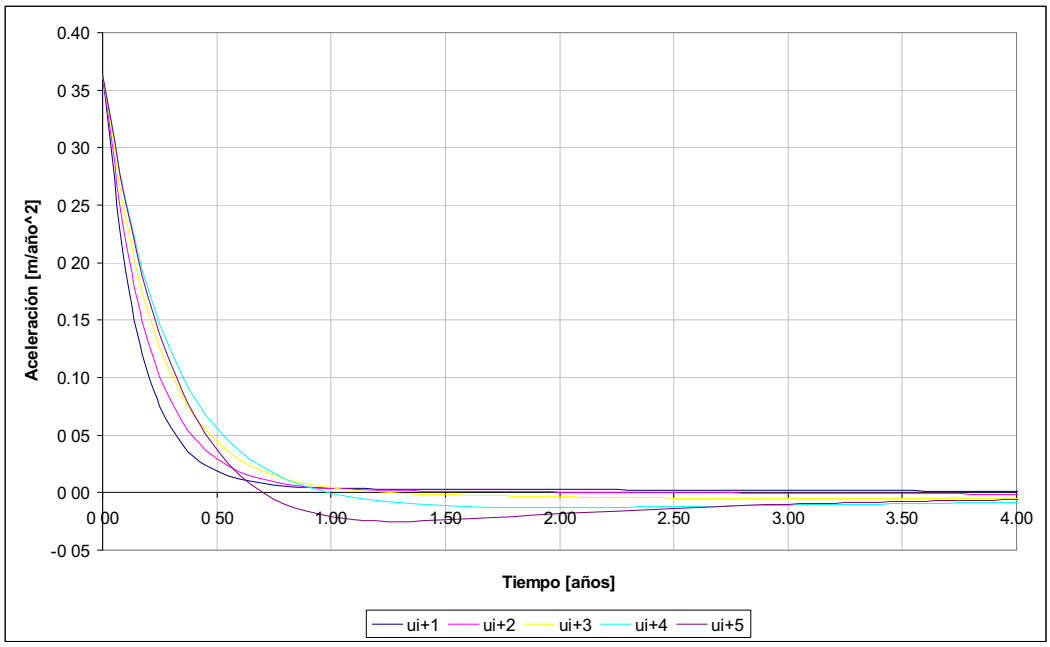


Figura 6–22: Aceleración – Talud horizontal.

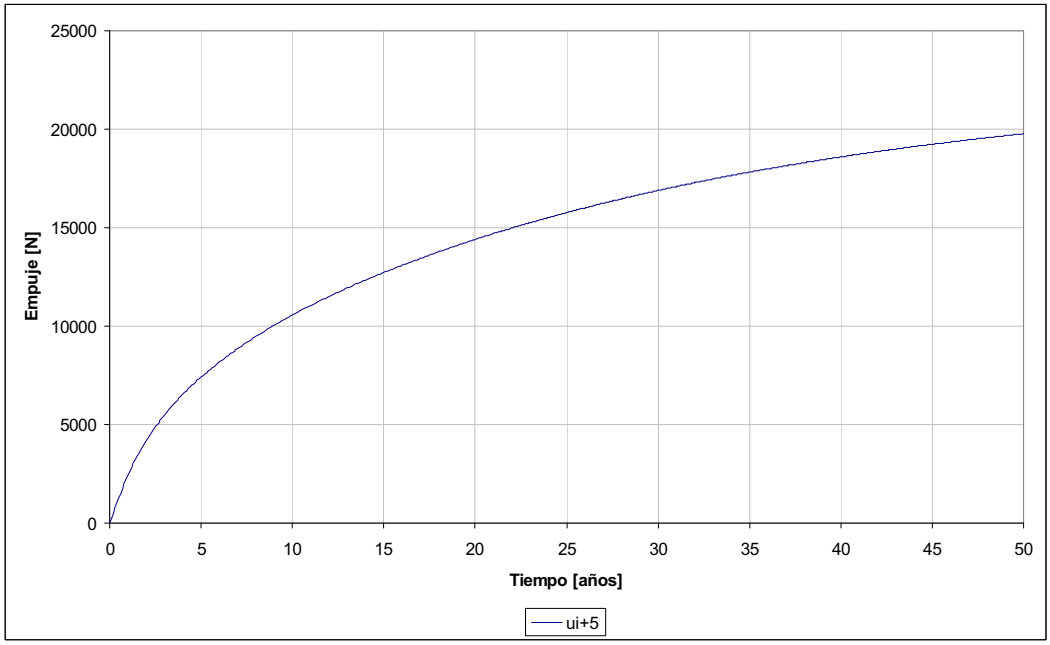


Figura 6–23: Variación del empuje – Talud horizontal.

El comportamiento de la masa es similar al caso del talud inclinado. El desplazamiento en la primera tajada es de 2.1 m y en la última es de 0.7 m, para 50 años.

El empuje del suelo sobre el muro presenta un valor de 20 KN para 50 años. En este caso el empuje es mayor que para el caso de talud con superficie de terreno inclinado, debido al incremento en la geometría del talud y su posterior aumento en el peso.

6.2.2 Solución inestable

Se muestra la solución que se obtiene si se utilizarán los parámetros fuera de los rangos establecidos, en este caso se utilizan viscosidades del orden de 1E6 y 1E7 para el suelo y superficie de falla respectivamente.

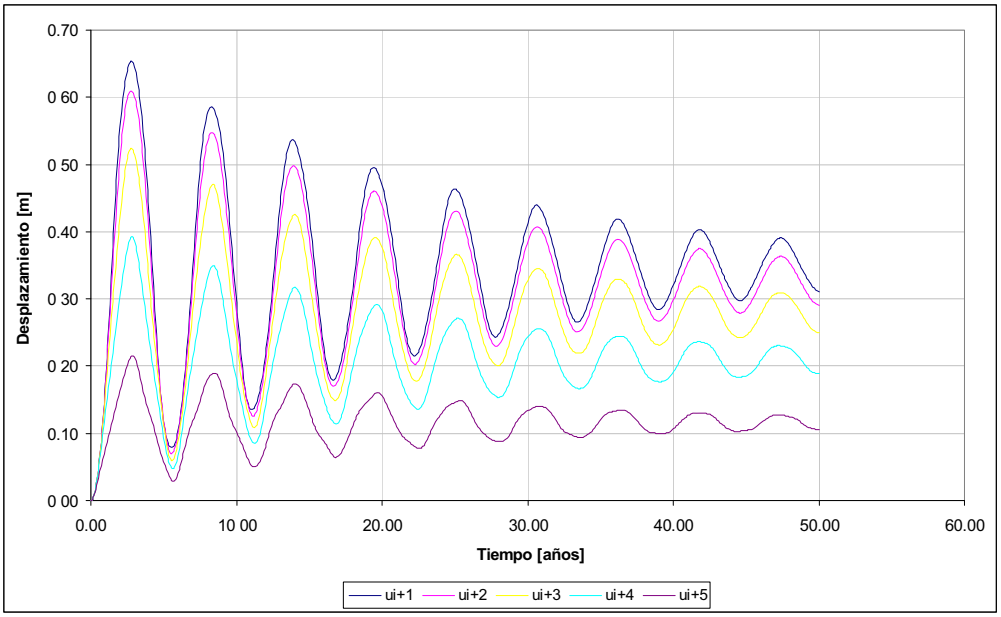


Figura 6–24. Desplazamientos – Solución inestable.

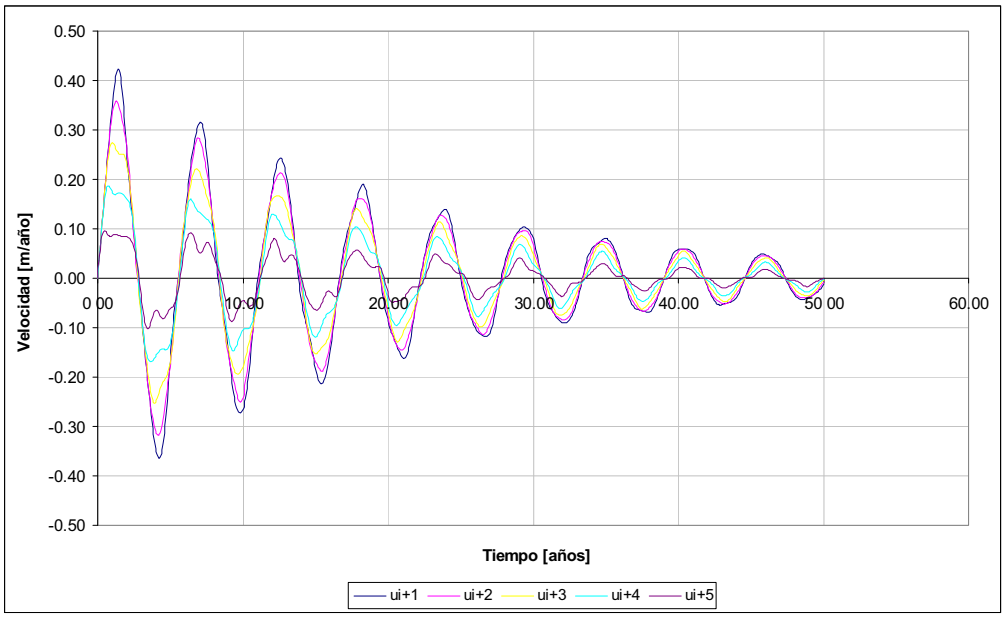


Figura 6–25. Velocidad – Solución inestable.

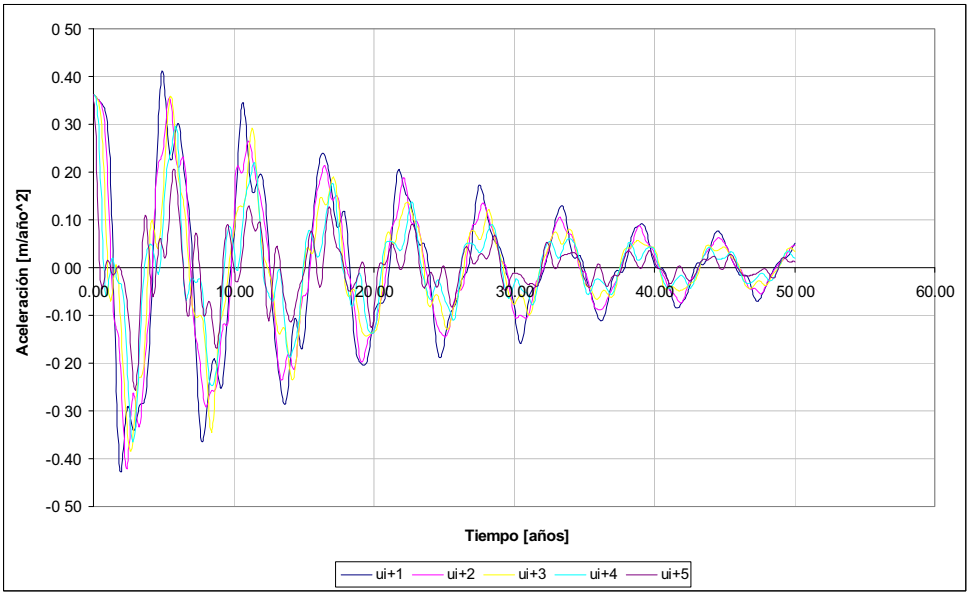


Figura 6–26: Aceleración – Solución inestable.

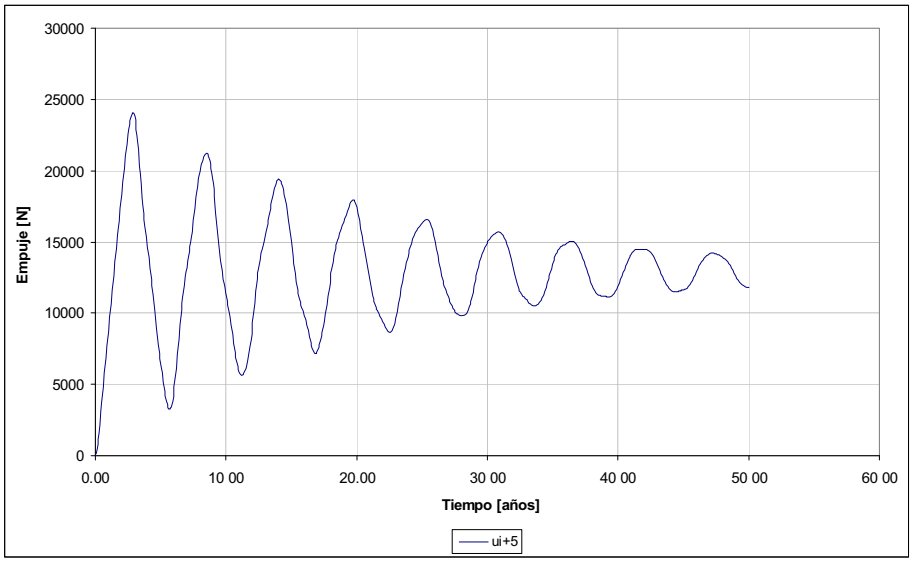


Figura 6–27: Variación del perfil del terreno – Solución inestable.

Las anteriores gráficas muestran cómo la solución no refleja las características de consistencia, estabilidad ni precisión, ya que los valores de viscosidad se salen de los rangos establecidos.

Se podría interpretar de la gráfica de desplazamiento que la naturaleza del movimiento podría ser vibratoria toda vez que η - 4Km < 0 (ver Capítulo 4). Sin embargo, con los parámetros dados para este problema, la relación anterior es mayor que cero y se garantiza que el movimiento es sobreamortiguado y no subamortiguado (como se podría pensar). Es así que la vibración de la solución no corresponde a la naturaleza física del problema sino a limitaciones del método numérico.

Las comparaciones anteriores se basan exclusivamente en la cinemática de las masas que componen el talud. No obstante para tener una idea más próxima a la realidad es necesario hacer instrumentación en campo para verificar el comportamiento del talud y así calibrar el programa.

CAPITULO 7
ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD: INFLUENCIA DE LAS VARIABLES MECÁNICAS Y GEOMÉTRICAS

En este capítulo se realizan varios casos de estudio donde se muestra la aplicación del modelo y la influencia de los distintos parámetros en la respuesta del movimiento de una masa deslizada. Tales parámetros son: el ángulo de inclinación del talud, longitud de la masa deslizada, espesor del suelo, viscosidad del suelo y de la superficie de falla, módulo de rigidez, nivel del agua subterránea y parámetros de resistencia del suelo. Además, se elaborara un ejercicio de aplicación para determinar la longitud crítica de un suelo en movimiento que conduzca al desbordamiento de un muro dado.

En el Apéndice 4 se presenta en detalle el análisis de la variación de los parámetros, además de la variación en las condiciones de frontera y terreno horizontal.

7.1 Casos de estudio

En la siguiente tabla se resumen los parámetros empleados en el análisis de la respuesta del modelo.

Parámetros	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7
Inclinación talud [°]	variable	20	20	20	20	20	20
Inclinación superficie terreno [°]	variable	20	20	20	20	20	20
Espesor de la masa [m]	2	2	variable	2	2	2	2
Peso unitario [KN/m^3]	1	18	18	18	18	18	18
Cohesión efectiva suelo [KPa]	1.8	0	0	0	0	0	variable
Ángulo de fricción efectiva suelo [°]	0	20	20	20	20	20	variable
Módulo de rigidez [KPa]	100	100	100	100	variable	100	100
Viscosidad suelo [Kpa.s]	1.00E+08	1.00E+08	1.00E+08	variable	1.00E+08	1.00E+08	1.00E+08
Ángulo de fricción efectiva falla [°]	16	16	16	16	16	16	16
Viscosidad superficie de falla [Kpa.s]	8.00E+08	8.00E+08	8.00E+08	variable	8.00E+08	8.00E+08	8.00E+08
Altura del agua [m]	0	0	0	0	0	variable	0
Longitud separación muros [m]	10	variable	10	10	10	10	10
Número de bloques	5	5	5	5	5	5	5
Tiempo [años]	50	50	50	50	50	50	50
Paso del tiempo[años]	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Velocidad inicial [m/s]	0	0	0	0	0	0	0
Desplazamiento inicial [m]	0	0	0	0	0	0	0

DIMENSIONES MURO	B=1.8	H=3	a=0.3	b=1.3	c=0.1	d=0.1	h=2.7	t=0.3

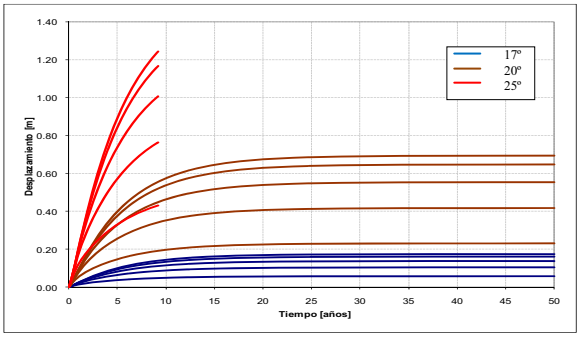
Tabla 7–1. Parámetros de los casos de estudio.

7.1.1 Caso 1: Influencia del ángulo de inclinación del talud

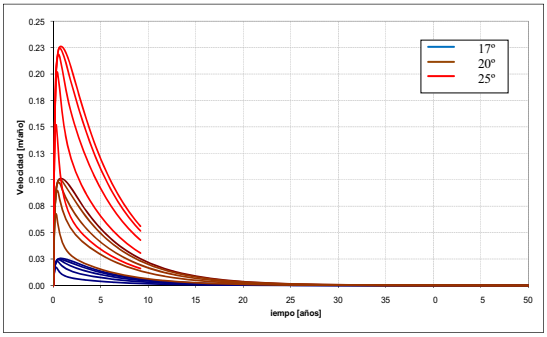
La Figura 7–1 muestra la incidencia del ángulo de inclinación en el movimiento de la masa retenida. El desplazamiento final, para el cual el sistema se estabiliza, es constante y tanto su magnitud como el tiempo requerido para lograrlo dependen de la inclinación del talud;

presentando mayores valores a medida que la inclinación del talud aumenta (Figura 7–1(a)). El sistema se estabiliza cuando la velocidad que desarrolla la masa deslizada tiende a cero.

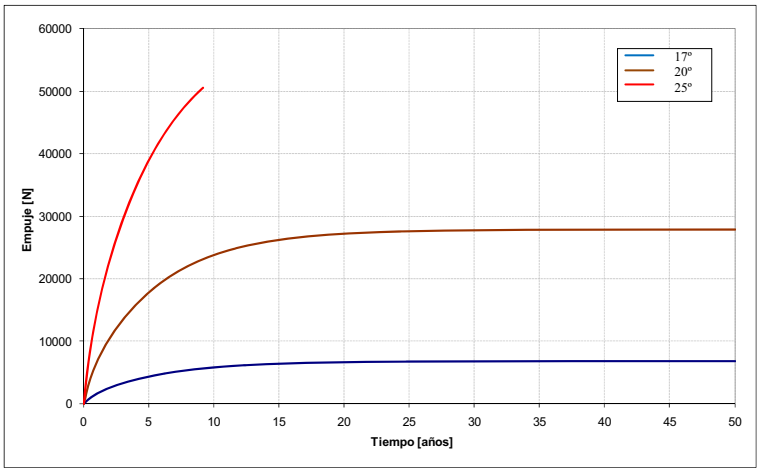
Sin embargo se observa que en las curvas de color rojo el sistema no alcanza a estabilizarse ya que el suelo presenta falla interna (indicado por el tiempo de análisis el cual apenas llega a los 10 años). Entonces, a medida que el ángulo de inclinación del talud aumenta hay una tendencia a que el suelo falle internamente.



a)



b)



c)